
Fiche n° 8: Extrema

Exercice 1 Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

(a) $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2xy - 6x - 6y + 3$

(b) $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 4y + 3$

(c) $f(x, y) = 4x^3 - 3x + y^2 - 4y - 3$

(d) $f(x, y) = 3x^3 - x + 3y^2 + 3y - 5$

(e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

(g) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

(h) $f(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + y^3 + 3y^2$

(i) $f(x, y) = 2xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

(j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Exercice 2 (a) Montrer que -1 est la seule racine de l'équation

$$x = \log |x| + \frac{1}{x}$$

et en déduire que c'est la seule racine de l'équation

$$e^x = -xe^{1/x}$$

(b) Déterminer les extrema relatifs de la fonction $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

(a) Déterminer les points stationnaires de f .

(b) Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $K = [0, 1]^2$.

Exercice 4 Déterminer la borne supérieure de la fonction $\sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ quand (x, y) décrit l'ensemble $[0, \pi/2]^2$ ainsi que les points éventuels où cette borne est atteinte.

Exercice 5 Pour $q > 0$ fixé, trouver la borne inférieure de la fonction $x^q + y^q$ quand (x, y) décrit l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ainsi que les points éventuels où cette borne est atteinte.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $F : (x, y) \rightarrow f(x)f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0, 0)$.