Fiche n$^\circ$ 7: Gradient, espace tangent

Exercice 1 Trouver la direction du plan Oxy dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement au point m_0 donné.
(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ et $m_0(2,0)$,
(b) $f(x,y) = \sqrt{e^{xy^2}}$ et $m_0(1,2)$.
Dans quelle direction f décroît le plus rapidement au point m_0 ?

Exercice 2 Le masque à oxygène d'un alpiniste fuit. Si la surface de la montagne a pour équation $z = 24 - x^2 - 2y^2$ et qu'il se trouve au point $A(3,2,7)$, dans quelle direction doit-il aller pour descendre le plus rapidement ?

Exercice 3 Pour $f(x,y)$, c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I_f^c de niveau c de f ainsi que celle de la tangente D à I_f^c au point m_0.
(a) $f(x,y) = \log(y-x^2)$, $c=0$ et $m_0(-1,2)$;
(b) $f(x,y) = 2xy - 3x + y + 3$, $c = 6$ et $m_0(1,2)$;
(a) $f(x,y) = y^2 + 2 - x$, $c = -2$ et $m_0(5,1)$.

Exercice 4 Pour chacune des courbes C suivantes, donner un vecteur normal ainsi que l'équation de la tangente au point indiqué.
(a) $C : x^3 - 3x^2y + y^2 = 5$ et $m_0(1,-1)$;
(b) $e^{x^2y} = 2$ et $m_0(1, \log(2))$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y^2}{2y-x^2}}$. Déterminer son domaine de définition ainsi que les courbes de niveau 1 et 2. Les représenter graphiquement. Déterminer les équations des tangentes à ces courbes aux points $A(1,1)$ et $B(-2,4)$ respectivement.

Exercice 6 La fonction $z(x,y)$ est définie par

$$z^2 = x^2 + 2x + y^2 - 4 \text{ et } z \geqslant 0$$

(a) Calculer les dérivées partielles de z.
(b) Représenter sur un même graphique les courbes I_f^0 et I_f^2 de niveau 0 et 2.
(c) Donner les équations de la tangente à I_f^0 (resp. à I_f^2) au point $(0,0)$ (resp. au point $(2,2)$). Reporter ces droites sur le graphique.

Exercice 7 Soit $f(x,y) = e^x - (x+2)y$.
(a) On suppose que le couple (x,y) varie sur la courbe de niveau 0. Cette condition définit-elle implicitement y en fonction de x ? Calculer dy/dx de deux façons.
(b) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de niveau -1 au point $(0,1)$?
(b) Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0,1,-1)$?

Exercice 8 Soit C la courbe plane d'équation

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$$

Donner l'équation de la tangente D à C au point $(-1, 0)$. Trouver les points de C où la tangente est orthogonale à D.

Exercice 9 Pour chacune des surfaces suivantes, donner un vecteur normal ainsi que l'équation du plan tangent au point indiqué.
(a) $S : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ et $m_0(0, 0, -4)$,
(a) $S : \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2} = z$ et et $m_0(-1, -1, 1)$.

Exercice 10 Soit $f(x, y) = x^3 - 2y^2$. Déterminer l'équation du plan P tangent au graphe de f au point $(1, 2, -7)$. Trouver les points du graphe de f où le plan tangent est parallèle à P.

Exercice 11 Soit S la surface d'équation

$$-8x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$$

et $f(x, y) = 2x^2$. Montrer que le point $P(-1, 0, 2)$ est sur S et sur le graphe de f. Comparer les plans tangents à S et au graphe de f au point P.

Exercice 12 Montrer que les droites normales au cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ coupent l'axe Oz.

Exercice 13 #
(a) Etant donnés une fonction f différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un point $m_0(x_0, y_0) \in U$, donner l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{m_0}$ au graphe de f au point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ainsi que le vecteur $\overrightarrow{n}(\mathrm{m}_0)$ orthogonal au plan $\mathcal{P}_{m_0}$ et de troisième composante égale à -1.
(c) Pour étudier la variation de la direction du plan tangent en un point $\mathrm{m}(x_0 + h, y_0 + k)$ au voisinage de m_0, on s'intéresse à la quantité vectorielle

$$\overrightarrow{\Delta}_{m_0}(h, k) = \overrightarrow{n}(\mathrm{m}) - \overrightarrow{n}(\mathrm{m}_0)$$

En négligeant les termes en $\sqrt{h^2 + k^2}\,\overrightarrow{\varepsilon}(h, k)$ où $\overrightarrow{\varepsilon}(h, k) \to \overrightarrow{0}$ quand $(h, k) \to (0, 0)$, donner une estimation linéaire en (h, k) de $\overrightarrow{\Delta}_{m_0}(h, k)$.