Fiche n° 6: Dérivées partielles, différentielle

Exercice 1 Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes.
(a) $f(x, y) = (y + 2)^{x+2}$
(b) $f(x, y) = e^{x^2/y} \cos(y)$
(c) $f(x, y) = \sqrt[5]{\cos(x^2 y)}$
(d) $f(x, y, z) = (xy)^{yz}$
(e) $f(x, y) = \arctan(y/x)$

Exercice 2 Soit $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in D_f$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 3 Soit $f(x, y) = \exp\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in D_f$, on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 4 La distance ℓ parcourue par une automobile roulant à vitesse constante v pendant un temps t est donnée par $\ell = vt$. Vérifier que

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \ell} = -1$$

Exercice 5 Donner une valeur approchée des nombres suivants.
(a) $1,9987 \times 3,0008$
(b) $e^{0,1} \cdot \log(0, 9)$
(c) $(16, 1)^{1/4} \cdot (3, 9)^{1/2}$
(d) $\sqrt[4]{(1, 9)^3 + (2, 1)^3}$

Exercice 6 Deux automobiles roulant respectivement à 120 km/h et 118 km/h partent en même temps d'un point O pour aller respectivement en deux points A et B situés à 250 km et 245 km de O. Laquelle des deux arrivera en premier à destination ? Donner une estimation de l'écart de temps.

Exercice 7 Soit A une matrice à p lignes et n colonnes et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ l'application linéaire associée définie par $f(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, f est différentiable en x_0 et déterminer la différentielle df_{x_0}.

Exercice 8 Soit C l'application qui à toute matrice A carrée $n \times n$ associe la matrice A^2. Montrer que pour toute matrice A, C est différentiable en A et déterminer la différentielle dC_A.

Exercice 9 # Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $|f(x)| \leqslant ||x||^2$ (où $||\ ||$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que f est différentiable en $0 \in \mathbb{R}^n$ et déterminer la différentielle df_0.

Exercice 10 # Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'application $g : I \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ g(x,x) = f'(x) \end{cases}$$

(a) Montrer que g est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in I$ avec $x_0 \neq y_0$.

Pour $x_0 \in I$ fixé, on note

$$\begin{cases} \varepsilon(u) = \dfrac{f'(u) - f'(x_0)}{u - x_0} - f"(x_0) \\ \varphi(u) = f(u) - f'(x_0)u - f"(x_0)\dfrac{(u - x_0)^2}{2} \end{cases}$$

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction φ, montrer que pour tous $x, y \in I$ avec $x < y$, on a

$$|g(x,y) - g(x_0,x_0) - \frac{f"(x_0)}{2}(x - x_0 + y - x_0)| \leqslant \max_{u \in [x,y]} |u - x_0|\, |\varepsilon(u)|$$

(c) Montrer que g est différentiable en (x_0, x_0) et déterminer la différentielle $dg_{(x_0,x_0)}$.

Exercice 11 Les applications $f, g, h, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par les formules ci-dessous pour $(x,y) \neq (0,0)$ et par la valeur 0 en $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^4}$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(d) $f(x,y) = xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

Pour chacune de ces applications dire si oui ou non

(i) les applications partielles sont continues,

(ii) la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$,

(iii) les dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^2$,

(iv) les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$,

(v) la fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 # (a) En quels points de $\mathbb{R}^n$ l'application $N_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui associe la norme euclidienne $||x||_2$ à tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ est-elle différentiable ? Déterminer le cas échéant la différentielle $d(N_2)_x$.

(b) Même question avec la norme euclidienne remplacée par la norme $||\ ||_1$ définie par la formule $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Exercice 13 Calculer la différentielle des fonctions suivantes.
(a) $z = 2x^3 + xy^2$ en fonction de dx et dy,
(b) $z = \sin(x) + \cos(xy)$ en fonction de dx et dy,
(c) $z = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{u}$ en fonction de du, dv et dw,
(d) $z = 2^{p-q}$ en fonction de dp et dq.

Exercice 14 Calculer dz/dt dans les cas suivants.
(a) $z = x^2 + \dfrac{y}{x}$ avec $x = e^t + t$ et $y = \sin(t^2)$,
(b) $z = x^3 + (y^2/x)$ avec $x = e^{5t}$ et $y = \sin^2(t)$.

Exercice 15 Soit $z = \sin(u^2 v)$ avec $u = r^2 + s$ et $v = s - r$. Donner l'expression de la différentielle dz en fonction de du et dv puis en fonction de dr et ds. En déduire les dérivées partielles $\partial z/\partial r$ et $\partial z/\partial s$.

Exercice 16 Soit $z = f(x - y)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^1. Montrer que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

Exercice 17 Soit $w = f(x - y, y - z, z - x)$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^1. Montrer que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Exercice 18 Déterminer dy/dx pour $y(x)$ solution de classe C^1 de l'équation

$$ye^x + e^y \sin(x) = 0$$

Calculer $y(0)$ puis déterminer un équivalent de $y(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 19 Exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de x, y et z pour $z(x, y)$ solution de classe C^1 des équations suivantes.
(a) $x - yz + z\cos(y) = 0$,
(b) $z^3 + ze^y + x + 2y = 0$,
(c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 20 # Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x+y} \text{ si } x + y \neq 0 \text{ et } f(x, -x) = 0$$

(a) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) En déduire les valeurs des dérivées secondes mixtes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

(c) La fonction f est-elle de classe C^2 au point $(0, 0)$? Est-elle 2 fois différentiable au point $(0, 0)$?