Fiche n° 5: Compacité et continuité

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils compacts ?
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^4 \leqslant 1\}$
(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^5 \leqslant 1\}$
(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x^2 + 2axy + y^2| \leqslant 1\}$
(on discutera suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 (a) Montrer en revenant à la définition que l'intervalle $[0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas compact.
(b) Montrer que toute suite dans $]0,1[$ a des sous-suites qui convergent dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Pour A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $A+B$ par

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A \text{ et } b \in B\}$$

(a) Si A et B sont ouverts, $A+B$ est-il ouvert ?
(b) Si A et B sont compacts, $A+B$ est-il compact ?
(c) Si A et B sont bornés, $A+B$ est-il borné ?
(d) # Si A et B sont fermés, $A+B$ est-il fermé ?
Même question en supposant de plus A compact.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ une fonction continue telle $f(x,y)$ tend vers 0 quand $||(x,y)|| \to +\infty$. Montrer que f est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^2$ et atteint sa borne supérieure. En est-il de même pour la borne inférieure ?

Exercice 5 # Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes.
(i) $(\forall M > 0)(\exists R > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^n)(||x|| > R \Rightarrow |f(x)| > M)$,
(ii) Pour toute partie bornée $B \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$,
(iii) Pour toute partie compacte $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact et $f : X \to X$ une application. On suppose que pour tous $x, y \in X, x \neq y$, on a $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$. Montrer que f admet un unique point fixe. (<u>Indication</u> : considérer la fonction $||f(x) - x||$).

Exercice 7 # Soit $N : \mathbb{R}[X] \to [0,+\infty[$ l'application définie par

$$N(a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d) = \sum_{i=0}^{d} |a_i|$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Calculer $N(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
(c) La boule unité fermée de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N est-elle un fermé ? est-elle bornée ? est-elle compacte ?

Exercice 8 # Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
(a) Montrer qu'il existe $c, C > 0$ tels que pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$c||(x_1, \ldots, x_n)||_2 \leqslant N(x_1, \ldots, x_n) \leqslant C|(x_1, \ldots, x_n)||_2$$

où $||(x_1, \ldots, x_n)||_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. (Indication : on commencera par établir une inégalité du type demandé pour $(x_1, \ldots, x_n)$ de norme euclidienne égale à 1).

(b) Montrer qu'une inégalité comme ci-dessus demeure si la norme euclidienne est remplacée par toute autre norme sur $\mathbb{R}^n$.