Fiche n° 4: Limites et continuité

Exercice 1 Donner la définition de
(a) $f(x, y)$ a pour limite 5 quand $x \to -1$ et $y \to 2$.
(b) $f(x, y)$ a pour limite 5^+ quand $x \to -1$ et $y \to +\infty$.
(c) $f(x, y)$ a pour limite $-\infty$ quand $x \to 1$ et $y \to 2^-$.
(d) $f(x, y)$ a pour limite 3 quand $x \to 1^+$ et $y \to 2$.

Exercice 2 Soit $f(x, y)$ ayant une limite $L \in \mathbb{R}$ quand $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (avec (x_0, y_0) point d'accumulation de D_f). Montrer que $|f(x, y)|$ a pour limite $|L| \in \mathbb{R}$ quand $(x, y) \to (x_0, y_0)$, que la réciproque est fausse en général mais que la réciproque est vraie si $L = 0$.

Exercice 3 Etudier la limite de la fonction $f(x, y)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$.
(a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2}$
(b) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$

Exercice 4 Soit $f(x, y) = (x^2 + y^2)/y^2$.
(a) Représenter sur un même graphique le domaine de définition de f, les courbes de niveau 1 et 5, notées respectivement I^1et I^5 et la droite D d'équation $y - x = 0$.
(b) Etudier les limites de $f(x, y)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$ en restant sur I^1, sur I^5, sur D.
(c) Etudier la limite de $f(x, y)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$.
(d) Par la même méthode, étudier la limite de $f(x, y) = (x^2 + y)/x + y^2)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$.

Exercice 5 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite quand $(x, y) \to (0, 0)$?
(a) $f(x, y) = (xy - x + y)/xy$
(b) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$
(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)/(x + y)$

Exercice 6 Soit $f(x, y)$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

(a) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions partielles $f(x_0, y)$ et $f(x, y_0)$ sont continues.
(b) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
(c) L'application f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 7 Montrer que les applications suivantes sont continues. On pourra commencer par le cas $n = 2$.

(a) l'application $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \cdots x_n$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

(b) L'application qui a une matrice carrée associe son déterminant.

(c) L'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe les coefficients du polynôme ayant pour racines $x_1, \ldots, x_n$.

Exercice 8 Soit $f(x, y)$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = |xy|^{3/2} \cdot \left(\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

(a) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in D_f$, les fonctions partielles $f(x_0, y)$ et $f(x, y_0)$ sont continues.

(b) Montrer que pour tous réels a et b positifs, on a $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

(c) La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 9 Soit $f(x, y)$ l'application de $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(w,x,y,z) = \left(\frac{wz + xy}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}, wxyz \sin \left(\frac{1}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right)$$

La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? Peut-on la prolonger en une application continue sur $\mathbb{R}^4$?

Exercice 10 # Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continue.

Exercice 11 # L'espace $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est identifié à l'espace métrique $\mathbb{R}^{n^2}$. Les sous-ensembles suivants de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont-ils ouverts ? sont-ils fermés ?

(a) l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles,

(b) l'ensemble des matrices non inversibles,

(c) l'ensemble des matrices de rang r fixé ($r \in \mathbb{N}$),

(d) l'ensemble des matrices de rang strictement inférieur à un entier $r \geqslant 0$ fixé ($r \in \mathbb{N}$),