Fiche n° 3: Topologie générale

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ des exercices de cette fiche sont supposés munis de la métrique induite par une des normes usuelles de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 Déterminer les points intérieurs, les points adhérents, les points frontière, les points d'accumulation et les points isolés des sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ suivants.
Justifier avec soin la réponse.
(a) $A =]0,1[\cup]1,2]$
(b) $A = \mathbb{Z}$
(c) $A = \{1/n | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, $A \cup \{0\}$
(d) $A = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = [0,1]$, $A = [0,1[$, $A =]-\infty, 1]$, $A = [1, +\infty[$.

Exercice 2 (a) Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est d'intérieur vide et que A, l'adhérence de A et la frontière de A coincident.
(b) Soit $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ : \ x \leqslant 0\}$. Déterminer l'intérieur, l'adhérence, la frontière, les points d'accumulation et les points isolés de A.

Exercice 3 Parmi les ensembles suivants, préciser ceux qui sont ouverts, fermés (toujours en justifiant soigneusement).
(a) $]-2,1[\times[0,3]$, $[0,1]\times\{9\}$,
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y - x^3 > 0\}$,
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ yx < 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b\}$,
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 \geqslant 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| < 1\}$

Exercice 4 Montrer que dans $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique induite par la norme euclidienne, une boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert mais pas un fermé, une boule fermée $B_F(a,r)$ est un fermé mais pas un ouvert, que $\overline{B(a,r)} = B_F(a,r)$ et que $\overset{\circ}{B_F(a,r)} = B(a,r)$ (où $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$). Montrer que ces propriétés subsistent si la norme euclidienne est remplacée par la norme $|| \ ||_\infty$ ou la norme $|| \ ||_1$.

Exercice 5 # Montrer qu'un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ distinct de $\mathbb{R}^n$ est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 6 # Déterminer l'intérieur et l'adhérence du sous-ensemble $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 7 # Vérifier les propriétés suivantes de l'espace métrique $\mathbb{R}^n$.
(a) $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts
(b) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
(c) Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
Enoncer et démontrer des propriétés analogues pour les fermés.

Exercice 8 Montrer que pour deux parties A et B de $\mathbb{R}^n$, on a

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overbrace{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$,

(b) $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Montrer que les inclusions de droite sont strictes en général.

Exercice 9 Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel, $a \in E$ et F un fermé de E tel que a n'appartienne pas à F. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que a appartienne à U et F soit inclus dans V.

Exercice 10 # Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. On dit qu'une partie $A \subset E$ est étoilée s'il existe $x_0 \in A$ tel que pour tout $x \in A$ le segment joignant x_0 à x soit contenu dans A. Montrer que si une partie $A \subset E$ est étoilée, alors $\overline{A}$ est encore étoilé.

Exercice 11 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que pour toute partie A de E, on a

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

(b) En déduire que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 12 Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la frontière $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ de A est un fermé et que les trois ensembles $\mathring{A}$, $(\overline{A})^c$ et $\mathrm{Fr}(A)$ constituent une partition de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(A^c)$

Exercice 13 # Donner un exemple d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ pour laquelle les 7 ensembles

$$A, \mathring{A}, \overline{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont distincts. Montrer que pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$$

Exercice 14 # Soient O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'on a $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$ et que cette inclusion est fausse si on ne suppose pas que O est ouvert.