Fiche n$^\circ$ 2: Normes

Exercice 1 Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Montrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont trois normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$). Pour $n = 2$, tracer les boules ouvertes de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $\varepsilon > 0$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'application $N(x, y) = |x + y| + |2x - y|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner la boule unité correspondante.

Exercice 3 Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$N(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|,$$

est une norme. Représenter graphiquement la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 4 Les applications suivantes sont-elles des normes ? (On pourra se concentrer sur le cas $n = 2$).

1. $N_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right.$,
2. $N_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & N_2(x) = 1 \text{ si } x \neq 0, 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$,
3. $N_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & N_3(x) = |x_1| \end{array} \right.$, $n > 1$
4. $N_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x, y) & \longmapsto & N_4(X) = \frac{1}{2}(|x - 3y| + |3x + y|) \end{array} \right.$.

Exercice 5 Soit $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. L'espace $\mathcal{E}$ est identifié à l'espace métrique $\mathbb{R}^{n^2}$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que $\|A\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ est une norme sur $\mathcal{E}$.
2. Calculer $\|I\|_\infty$ où I est la matrice identité.
3. # Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, $\|A \cdot B\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

Exercice 6 # Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace non trivial muni d'une des normes sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r > 0$, on note $S(x_0, r)$ la sphère de centre x_0 et de rayon r. Soient $a, a' \in E$, $r, r' > 0$ tels que $S(a, r) = S(a', r')$.

1. Montrer que pour tout $v \in E$ de norme 1, le vecteur $a + vr$ appartient à $S(a', r')$.
2. En appliquant la question précédente à un vecteur v judicieusement choisi, montrer que si $a \neq a'$ alors $\|a - a'\| = r - r'$.
3. De même, montrer que $\|a' - a\| = r' - r$.
4. En déduire que $a = a'$ et montrer que $r = r'$.