Fiche n$^\circ$ 1: Définitions générales

Exercice 1 Pour les fonctions f données ci-dessous, déterminer par des équations ou des inéquations le domaine de définition D_f et représenter graphiquement D_f en hachurant les parties du plan et en barrant les parties du bord qui ne sont pas dans D_f.

(a) $f(x,y) = \log(2x+y-2)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\log y}$

(c) $f(x,y) = \log(y-x) + \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\log(y-x+1)}{\sqrt{4-xy}}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{\log(x-y^2)}{\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}}$

(h) $f(x,y) = \log(x^2+y^2-1) + \dfrac{y}{x}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\log(y-2x+3)}{\sqrt{x-y^2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{\log(x+y^2)}{\sqrt{3-2x-x^2-y^2}}$

(k) $f(x,y) = \log(36-4x^2-9y^2)$

(l) $f(x,y) = \sqrt{y-3x^2-6x}$

Exercice 2 La relation entre x et y

$$\frac{y-4}{y+2x} = x-3$$

définit-elle implicitement y en fonction de x ? x en fonction de y ? Dans les deux cas, on justifiera sa réponse.

Exercice 3 Dans les relations ci-dessous, quelles sont les variables qui sont définies implicitement en fonction des autres ? On précisera le cas échéant le domaine de définition de la fonction définie implicitement.

(a) $y^3+y+x=0$

(b) $PQ-Q-1=0$

(c) $P^2Q-Q-1=0$

(d) $u^2+v^2+w^2=1$

(e) $2u+3v-w^2=0$

(f) $2e^{3x^2y} - 5 = 0$

(g) $\exp(\dfrac{x+y}{x^2y}) = 2$

Exercice 4 La relation

$$xz + y^2 + yz - 2z - x = 0$$

définit-elle implicitement z en fonction de x et y ? Montre que la réponse est Oui si $(x, y) \notin \{(1, 1), (4, -2)\}$. Expliciter alors la fonction $z(x, y)$ et préciser son domaine de définition. Puis représenter graphiquement l'ensemble D des points $M(x, y)$ du plan tels que $z(x, y) > 0$.

Exercice 5 Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les situations suivantes.

(a) $f(x, y) = 2x + 3y$ et $c = 1, 2, -1$.

(b) $f(x, y) = y^2$ et $c = 1, -1, 4, 2$.

(c) $f(x, y) = \log(x + y)$ et $c = 0, 1$.

(d) $f(x, y) = 4x^2 + 25y^2$ et $c = 100$.

(e) $f(x, y) = \exp(\dfrac{x^2 - x}{y - y^2})$ et $c = e$.

(f) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{8 - x^2y^2}$ et $c = 2$.

Exercice 6 Pour chacune des fonctions suivante, déterminer les fonctions partielles $f(x_0, y)$ et $f(x, y_0)$ pour des points (x_0, y_0) choisis dans le domaine D_f et les lignes de niveau $c \in \mathbb{R}$. Les représenter graphiquement puis donner l'allure du graphe des fonctions suivantes.

(a) $f(x, y) = x$

(b) $f(x, y) = 1 - x - y$

(c) $f(x, y) = y^2$

(d) $f(x, y) = y^3$

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(f) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

(g) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

(h) $f(x, y) = y^2 - x^2$

(i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(j) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Exercice 7 Soit $f(x, y) = \varphi(ax + by)$ où φ est une fonction d'une variable et $a, b \in \mathbb{R}$ non simultanément nuls. Montrer que le graphe de f est une réunion de droites. Donner des exemples.

Exercice 8 Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y^2}{4y^2 - x}}$$

Quel est son domaine de définition ? Le représenter graphiquement. Montrer que les courbes de niveau sont des paraboles sauf dans quelques cas que l'on précisera. Les représenter pour les niveaux $c = 1/4, 1/2, 1$.