UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Année universitaire: **2004/2005**
Date et heure: **samedi 27 novembre 2004 à 10h15**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents

N.B.: Les questions (b) et (c) de l'exercice 2 et la question (a) de l'exercice 3 sont des questions de cours.

Exercice 1 [6 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

(a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

(b) Determiner la différentielle de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(c) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Exercice 2 [10 pts]: Etant donnés deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $(x \cdot y)$ leur produit scalaire, c'est-à-dire, $(x \cdot y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

(a) Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x,y) = (x \cdot y)$ est différentiable sur son domaine et que $d\phi_{(x,y)}(h,k) = (x \cdot h) + (k \cdot y)$ pour tous $x, y, h, k \in \mathbb{R}^n$.

(b) Enoncer le théorème d'inversion locale pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(c) Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On se donne une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ telle que, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$

(*) $$(df_x(h) \cdot h) \geq \alpha\,(h \cdot h)$$

(d) Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^n$.

(e) Etant donnés $a, b \in \mathbb{R}^n$ quelconques, appliquer le théorème des accroissements finis à l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (f(x) - f(a) \cdot b - a)$ et en déduire que

(**) $$(f(b) - f(a) \cdot b - a) \geq \alpha\,(b - a \cdot b - a).$$

Exercice 3 [4 pts]: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

(a) Déterminer l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe G_f $((x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2)$.

(b) Pour $M_0(2,1,2)$, déterminer tous les points $m(x,y)$ où le plan tangent $\mathcal{P}_M$ est parallèle à $\mathcal{P}_{M_0}$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2004/2005**
Date et heure: **janvier 2005**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [4,5 pts]: La figure ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

(a) Reproduire $\mathcal{C}$ et placer les points de paramètre θ égal à 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $5\pi/4$, π.

(b) Calculer l'aire du domaine $R \subset \mathbb{R}^2$ à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 [4,5 pts]: Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_1^4 \left[\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{e^{(x-1)^2}}{x+1}\, dx\right] dy$.

Exercice 3 [6,5 pts]: Soit $R \subset \mathbb{R}^2$ le domaine du premier quadrant limité par les hyperboles d'équation $xy = 1$ et $xy = 16$ et par les droites d'équation $x = y$ et $x = 4y$.

(a) Représenter graphiquement le domaine R.

(b) Montrer que la correspondance $T : (u, v) \to (uv, v/u)$ définit une bijection du domaine $S = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{array} \right\}$ sur le domaine R; on donnera la bijection réciproque.

(c) Enoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales doubles.

(d) Montrer que $\displaystyle\int\int_R x^{3/4} y^{-1/4}\, dx\, dy = \int\int_S 2\, v^{3/2}\, du\, dv$ et calculer cette dernière intégrale.

Exercice 4 [4,5 pts]: Déterminer le volume de la région $D \subset \mathbb{R}^3$ au-dessus du plan Oxy et limitée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$ et le cône d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3 - 2ème session**
Année universitaire: **2004/2005**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable

Exercice 1 [10 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

(b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant et on justifiera sa réponse.

(c) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

(d) Déterminer la différentielle de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(e) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.

(f) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque localement au voisinage du point $(2,2)$?

Exercice 2 [5 pts]: Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_4^9 \left[\int_{\sqrt{y}}^3 \sin\left(\pi(\frac{x^3}{3} - 4x)\right) dx \right] dy.$

Exercice 3 [5 pts]: Soit D la région de l'espace $\mathbb{R}^3$ limitée par les deux plans d'équation $z = 0$ et $y + z = 3$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int\int_D y + 3 \ dV$$

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Année universitaire: **2005/2006**
Épreuve: **Partiel**
Date et heure: **samedi 19 novembre 2005 de 8h à 10h**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrice ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Question de cours [3,5 pts]: Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point $\mathrm{m}_0(x_0, y_0)$ de son domaine U, ouvert de $\mathbb{R}^2$. Puis montrer que si f est différentiable en $\mathrm{m}_0(x_0, y_0)$, alors f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des deux variables x et y en m_0 et donner la valeur de la différentielle df_{m_0}.

Exercice 1 [7 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4 + 2y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

(b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant.

(c) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

N.B.: on justifiera sa réponse aux trois questions ci-dessus.

Exercice 2 [5,5 pts]: (a) Etant donnés une fonction f différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un point $\mathrm{m}_0(x_0, y_0) \in U$, donner l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{\mathrm{m}_0}$ au graphe de f au point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ainsi que le vecteur $\overrightarrow{n}(\mathrm{m}_0)$ orthogonal au plan $\mathcal{P}_{\mathrm{m}_0}$ et de troisième composante égale à -1.

(b) Déterminer l'équation de $\mathcal{P}_{\mathrm{m}_0}$ et le vecteur $\overrightarrow{n}(\mathrm{m}_0)$ dans le cas où $f(x,y) = x^3 + y^4 + xy$ et m_0 est le point de coordonnées $(1,2)$.

(c) Pour étudier la variation de la direction du plan tangent en un point $\mathrm{m}(x_0 + h, y_0 + k)$ au voisinage de m_0, on s'intéresse à la quantité vectorielle

$$\overrightarrow{\Delta}_{\mathrm{m}_0}(h,k) = \overrightarrow{n}(\mathrm{m}) - \overrightarrow{n}(\mathrm{m}_0)$$

En négligeant les termes en $\sqrt{h^2 + k^2}\ \overrightarrow{\varepsilon}(h,k)$ où $\overrightarrow{\varepsilon}(h,k) \to \overrightarrow{0}$ quand $(h,k) \to (0,0)$, donner une estimation linéaire en (h,k) de $\overrightarrow{\Delta}_{\mathrm{m}_0}(h,k)$.

Exercice 3 [4 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $g(x,y,z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2005/2006**
Épreuve: **Examen - 1ère session - janvier**
Date et heure: **lundi 9 janvier 2006 de 14h à 16h**
Lieu: **Bâtiment M1 amphis Painlevé et Galois**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [5 pts]: (a) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

On considère la courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

(b) Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathcal{C}$ au point $O(0,0)$.

(c) En utilisant le (b) déterminer la limite de y/x quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 [5 pts]: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $F : (x,y) \to f(x)f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0,0)$.

Exercice 3 [5 pts]: (a) Soit $a > 0$. Montrer que le produit de trois nombres réels $x, y, z > 0$ de somme $x + y + z = a$ est maximal quand $x = y = z$.

(b) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$, on a $\sqrt[3]{xyz} \leq (x + y + z)/3$.

Exercice 4 [5 pts]: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $|f'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $g(\overrightarrow{u}) = (f(y), f(x))$.
(a) Montrer que $||g(\overrightarrow{u}) - g(\overrightarrow{0})|| \leq k\,||\overrightarrow{u}||$, où la norme $||.||$ est la norme euclidienne, c'est-à-dire, $||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$.
(<u>Indication</u>: on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction d'une variable f pour majorer la valeur absolue de chacune des composantes de $g(\overrightarrow{u}) - g(\overrightarrow{0})$).

On considère le champ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + g(\overrightarrow{u}) = (x + f(y), y + f(x)) \qquad \text{pour tout vecteur } \overrightarrow{u} = (x,y)$$

(b) Montrer que $||\varphi(\overrightarrow{u})|| \geq (1-k)\,||\overrightarrow{u}|| - ||\varphi(\overrightarrow{0})||$. (On rappelle l'inégalité triangulaire $||\overrightarrow{v}|| - ||\overrightarrow{w}|| \leq ||\overrightarrow{v} \pm \overrightarrow{w}|| \leq ||\overrightarrow{v}|| + ||\overrightarrow{w}||$, pour tous vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$).

Etant donné $\overrightarrow{v} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction ψ définie pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ par $\psi(\overrightarrow{u}) = ||\varphi(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v}||^2$. La question précédente permet de montrer que ψ a un minimum en un vecteur $\overrightarrow{u_0} \in \mathbb{R}^2$. **On l'admettra**.

(c) Montrer que $\varphi(\overrightarrow{u_0}) = \overrightarrow{v}$. En déduire que φ est surjective.

(d) En utilisant (b) et (c), montrer que la fonction ψ a un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire que φ est surjective. (Indication: pour la première partie, on pourra commencer par montrer en utilisant (b) que si $||\overrightarrow{u}||$ est assez grand, alors $\psi(\overrightarrow{u}) > \psi(\overrightarrow{0})$).

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2005/2006**
Épreuve: Examen - 2ère session - février
Date et heure: **février 2006**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [5 pts]: (a) Montrer que -1 est la seule racine dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$e^x = -xe^{1/x}$$

(Indication: on pourra commencer par étudier la fonction $x - \ln(|x|) - \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$).

(b) Déterminer les extrema relatifs de la fonction $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 2 [6 pts]: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'application $g : I \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ g(x, x) = f'(x) \end{cases}$$

(a) Montrer que g est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in I$ avec $x_0 \neq y_0$.

Pour $x_0 \in I$ fixé, on note

$$\begin{cases} \varepsilon(u) = \dfrac{f'(u) - f'(x_0)}{u - x_0} - f"(x_0) \\ \varphi(u) = f(u) - f'(x_0)u - f"(x_0)\dfrac{(u - x_0)^2}{2} \end{cases}$$

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction φ, montrer que pour tous $x, y \in I$ avec $x < y$, on a

$$|g(x, y) - g(x_0, x_0) - \frac{f"(x_0)}{2}(x - x_0 + y - x_0)| \leq \max_{u \in [x,y]} |u - x_0|\,|\varepsilon(u)|$$

(c) Montrer que g est différentiable en (x_0, x_0) et déterminer la différentielle $dg_{(x_0,x_0)}$.

.../...

Exercice 3 [4 pts]: L'indice de réfraction du prisme pour une radiation donnée est déterminé par la relation:

$$n = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

où A est l'angle du prisme et D l'angle de déviation minimum pour la raie choisie. Pour la raie verte du cadmium, on a mesuré $A = \dfrac{\pi}{3}$ et $D = \dfrac{\pi}{6}$. Déterminer l'indice n et une estimation de l'incertitude sur le résultat sachant que l'incertitude sur les mesures de A et D est $|\Delta A| = |\Delta D| = 5.10^{-4}$ radian (On ne demande pas d'effectuer les derniers calculs numériques).

Exercice 4 [5 pts]: (a) Enoncer le théorème d'inversion locale.

(b) Montrer que le champ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = (ye^x + e^y \sin(x), y\cos(x) + xe^y)$$

induit un difféomorphisme $f_U : U \to f(U)$ sur un voisinage U ouvert du point $(0, 1)$. Déterminer la différentielle $d(f_U)^{-1}_{f(0,1)}$ de la réciproque au point image $f(0, 1)$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Année universitaire: **2006/2007**
Épreuve: **Partiel**
Date et heure: **9 décembre 2006 de 10h30 à 12h30**
Lieu: **Bâtiment A5**

Ni calculatrice ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Question de cours [4 pts]: Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction de 2 variables $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 1 [6 pts]: (a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Est-elle différentiable en $(0,0)$? (on justifiera sa réponse).

(b) Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre nombre réels tels que l'origine $O(0,0)$ n'est pas sur le segment joignant $\mathrm{m}_1(x_1,y_1)$ à $\mathrm{m}_2(x_2,y_2)$. Montrer qu'on a

$$\left|\sqrt{x_2^2+y_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2}\right| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Exercice 2 [10 pts]: (a) Montrer que la fonction det et le champ Γ ci-dessous:

$$\begin{array}{ll} \det : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} & \qquad \Gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \to xt - yz & \qquad (x,y,z,t) \to (t,-y,-z,x) \end{array}$$

sont différentiables et déterminer leurs différentielles $d(\det)_{\mathrm{m}_0}$ et $d\Gamma_{\mathrm{m}_0}$ en un point $\mathrm{m}_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ fixé dans $\mathbb{R}^4$.

L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et est identifié à $\mathbb{R}^4$ *via* la correspondance $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \to (x,y,z,t)$. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de la norme euclidienne: $||(x,y,z,t)|| = \left|\left|\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}$.

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles. On rappelle que si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$

(b) Montrer que pour toute matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ on a $\lim\limits_{H\to 0} \det(A+H) = \det(A)$ (H désignant une matrice 2×2 tendant vers la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).
On justifiera sa réponse.

.../...

(c) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(<u>Indication</u>: on pourra montrer que, pour $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, si $\det(A) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $\det(A + H) \neq 0$ pour toute matrice $H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de norme $||H|| < r$).

(d) Montrer que l'application $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ fait correspondre $f(A) = A^{-1}$ est différentiable. (On ne demande pas ici de calculer la différentielle de f).

(e) On note I la matrice identité. Etablir la formule

$$(I + H)^{-1} - I + H = (I - (I + H)^{-1}) \cdot H$$

(pour toute matrice H telle que $I + H \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$).

(f) Donner la définition de la différentielle df_I de f en I et déduire de (e) que $df_I(H) = -H$.

(<u>Indication</u>: on pourra admettre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes matrices $U, H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, on a $||UH|| \leq C\, ||U||\, ||H||$).

Complément:

(g) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on a

$$df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1} \qquad (H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$$

(<u>Indication</u>: mettre A^{-1} en facteur à gauche dans $(A + H)^{-1} - A^{-1}$ et utiliser (f)).

UNIVERSITÉ LILLE 1

CORRIGÉ DU PARTIEL (Licence S3 - 2006/2007 - M202)

Question de cours [4 pts]: Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction de 2 variables $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Correction: Etant donnée une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de 2 variables x, y, supposée différentiable sur l'ouvert U, le théorème des accroissements finis affirme que pour tous points $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ dans U tels que $[a, b] \subset U$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(b) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}((1-\theta)a + \theta b)\,(b_1 - a_1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}((1-\theta)a + \theta b)\,(b_2 - a_2)$.

Preuve. Considérons la fonction φ définie pour tout $t \in I = \{t \in \mathbb{R} \,|\, (1-t)a + tb \in U\}$ par $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. S'obtenant comme composée de fonctions différentiables, elle est différentiable, c'est-à-dire dérivable sur I et $d\varphi_t = df_{(1-t)a+tb} \circ (b-a)dt$, ce qui s'écrit aussi $\varphi'(t) = df_{(1-t)a+tb}(b-a)$ $(t \in I)$. Par hypothèse, on a $[0, 1] \subset I$. Le théorème des accroissements finis en une variable fournit $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ pour un $\theta \in]0, 1[$, ce qui correspond à la formule annoncée.

Exercice 1 [6 pts]: (a) *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Est-elle différentiable en $(0, 0)$?*

Correction: La fonction f admet des dérivées partielles continues en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; elle est donc C^1 sur cet ensemble. En revanche, la fonction partielle $f(0, y) = |y|$ n'est pas dérivable en $y = 0$, c'est-à-dire, f n'a pas de dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$; elle n'est donc pas différentiable en ce point.

(b) *Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre nombre réels tels que l'origine $O(0, 0)$ n'est pas sur le segment joignant $\mathrm{m}_1(x_1, y_1)$ à $\mathrm{m}_2(x_2, y_2)$. Montrer qu'on a*

$$\left|\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Correction: L'hypothèse sur m_1 et m_2 et le résultat de la question (a) permet d'appliquer le théorème des accroissements finis à f entre m_1 et m_2. L'inégalité demandée résulte alors immédiatement de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| = \left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq 1$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq 1$.

Exercice 2 [10 pts]: (a) *Montrer que la fonction* det *et le champ* Γ *ci-dessous:*

$$\begin{aligned} \det :\ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ & (x, y, z, t) \to xt - yz \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Gamma :\ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) \to (t, -y, -z, x) \end{aligned}$$

sont différentiables et déterminer leurs différentielles $d(\det)_{\mathrm{m}_0}$ et $d\Gamma_{\mathrm{m}_0}$ en un point $\mathrm{m}_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ fixé dans $\mathbb{R}^4$.

Correction: La fonction det et le champ Γ sont C^1 car det et les fonctions coordonnées de Γ sont des polynômes en x, y, z, t. On obtient $d(\det)_{\mathrm{m}_0} = t_0dx - z_0dy - y_0dz + x_0dx$ et $d\Gamma_{\mathrm{m}_0} = (dt, -dy, -dz, dx)$ soit $d\Gamma_{\mathrm{m}_0} = \Gamma$. (**N.B.**: Γ est linéaire).

L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et est identifié à $\mathbb{R}^4$ via la correspondance $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \to (x, y, z, t)$. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de la norme euclidienne: $||(x, y, z, t)|| = \left|\left|\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$.

On note $GL_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles. On rappelle que si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, *alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$

(b) *Montrer que pour toute matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ on a* $\lim\limits_{H\to 0} \det(A+H) = \det(A)$

(H désignant une matrice 2×2 tendant vers la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*).*

Correction: L'énoncé à démontrer correspond à la définition de la continuité de la fonction det: cette fonction est continue car elle est différentiable (d'après (a)).

(c) *Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(<u>Indication</u>: on pourra montrer que, pour $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, si $\det(A) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $\det(A+H) \neq 0$ pour toute matrice $H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de norme $||H|| < r$).

Correction: Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, donc $\det(A) \neq 0$. Il résulte de (c) que $\lim\limits_{H\to 0} |\det(A+H)| = |\det(A)|$. On déduit, pour $\varepsilon = |\det(A)|/2 > 0$, qu'il existe $r > 0$ tel que pour toute matrice H de norme $||H|| < r$, on a $|\det(A+H)| > |\det(A)| - \varepsilon = |\det(A)|/2 > 0$. Pour ces matrices H, on a donc $A + H \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On a ainsi montré que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire, est un ouvert de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(d) *Montrer que l'application $f : GL_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $A \in GL_2(\mathbb{R})$ fait correspondre $f(A) = A^{-1}$ est différentiable. (On ne demande pas ici de calculer la différentielle de f).*

Correction: Sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on a $f = \dfrac{1}{\det}\,\Gamma$. Le champ f, dont les fonctions coordonnées sont des quotients définis de fonctions C^1, est donc C^1.

(e) *On note I la matrice identité. Etablir la formule*

$$(I + H)^{-1} - I + H = (I - (I + H)^{-1}) \cdot H$$

(pour toute matrice H telle que $I + H \in GL_2(\mathbb{R})$).

Correction: On a
$(I+H)^{-1} - I + H = (I+H)^{-1}(I-(I+H)) + H = (I+H)^{-1}(-H) + H = (I - (I+H)^{-1})\, H$
(On peut aussi vérifier qu'en multipliant à gauche chacun des deux termes par $I + H$, on trouve H^2 dans les deux cas).

(f) *Donner la définition de la différentielle df_I de f en I et déduire de (e) que $df_I(H) = -H$.*
(<u>Indication</u>: on pourra admettre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes matrices $U, H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, on a $||UH|| \leq C\, ||U||\, ||H||$).

Correction: La différentielle df_I est l'unique application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tel que $||f(I + H) - f(I) - L(H)|| \,/\, ||H||$ tend vers 0 quand H tend vers la matrice nulle. Pour $L(H) = -H$, cette quantité, d'après (e), vaut $||(I - (I + H)^{-1}) \cdot H|| \,/\, ||H||$, ce qui, en utilisant l'indication peut être majoré par $C\, ||(I - (I + H)^{-1})|| = C\, ||f(I) - f(I + H)||$. Cette dernière quantité tend vers 0 quand $H \to 0$ puisque f est continue.
(L'inégalité de l'indication se démontre sans grande difficulté; on peut prendre $C = 2$).

(g) (supplément) *Montrer que pour toute matrice $A \in GL_2(\mathbb{R})$, on a*

$$df_A(H) = -A^{-1} H A^{-1} \qquad (H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$$

(<u>Indication</u>: mettre A^{-1} en facteur à gauche dans $(A + H)^{-1} - A^{-1}$ et utiliser (f)).

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2006/2007**
Épreuve: **Examen - 1ère session - janvier**
Date et heure: **mercredi 17 janvier 2007 à 8h**
Lieu: **Bâtiment A4**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

N.B.: Les questions (a) de l'exercice 1, (d) de l'exercice 2 et (a) de l'exercice 3 sont des questions de cours.

Exercice 1 [3,5 pts]: (a) Enoncer le théorème d'inversion locale.

(b) Montrer que le champ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (e^{y^2}\cos(\pi x), (x+y)^3 e^x)$$

induit un difféomorphisme $f_V : V \to f(V)$ sur un voisinage V ouvert du point $(1,1)$. Déterminer la différentielle $d(f_V)^{-1}_{f(1,1)}$ de la réciproque au point image $f(1,1)$.

Exercice 2 [8 pts]: (a) Déterminer les points stationnaires de $f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.

(b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f(x,y) = 0$ (Indication: on pourra commencer par étudier rapidement la fonction $x \to \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geq 0$).

(c) Montrer que $\mathrm{m}_0(-1,0)$ est un point isolé de la courbe $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire: il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intersection du disque ouvert $D(\mathrm{m}_0, \varepsilon)$ et de la courbe $\mathcal{C}$ soit le singleton $\{\mathrm{m}_0\}$).

(d) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

(e) Montrer qu'en tout point $\mathrm{m}_1(x_1, y_1) \in \mathcal{C}$ distinct de $\mathrm{m}_0(-1,0)$, il existe un voisinage V_{m_1} de m_1 tel que l'équation $f(x,y) = 0$ avec $(x,y) \in V_{\mathrm{m}_1}$ ou bien a une unique solution $y = y(x)$ ou bien a une unique solution $x = x(y)$.

.../...

Exercice 3 [4,5 pts]: Soit C le cône d'équation $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Pour tout point $M_0(x_0, y_0, \sqrt{x_0^2+y_0^2}) \in C \setminus \{O(0,0,0)\}$, on note $\mathcal{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

(a) Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathcal{P}_{M_0}$.

(b) Montrer que la section du cône C par un plan vertical d'équation $y = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) consiste en deux demi-droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

(c) Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathcal{D}_1 \setminus \{O(0,0,0)\}$. (respectivement en tout point de $\mathcal{D}_2 \setminus \{O(0,0,0)\}$).

Exercice 4 [4,5 pts]: (a) Représenter sommairement la courbe plane $\mathcal{E}$ d'équation $9x^2 + 4y^2 = 25$.

(b) Déterminer les points stationnaires de la fonction $f(x,y) = y^2 + 6x$ sous contrainte $9x^2 + 4y^2 = 25$ et calculer la valeur de f en ces points.

(c) Etudier les extrema absolus de la fonction $f(x,y) = y^2 + 6x$ sur la courbe $\mathcal{E}$. (Pour justifier l'existence de ces extrema absolus, on pourra utiliser sans le démontrer que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$).

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2006/2007**
Épreuve: **Examen - 2ère session**
Date et heure: **vendredi 9 mars à 14h**
Lieu: **Bâtiment A5**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

N.B.: Les questions (a) de l'exercice 2, (b) de l'exercice 3 et (a) de l'exercice 4 sont des questions de cours.

Exercice 1 [7 pts]: Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy$.

(a) Justifier l'existence d'un maximum absolu m et d'un minimum absolu M de f sur le disque fermé $\overline{D}(O,\sqrt{5})$ de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

(b) Montrer que f n'admet pas d'extrema relatifs dans le disque ouvert $D(O,\sqrt{5})$ de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

(c) Montrer que les solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2(x+y) - xy = 0 \end{cases}$$

sont les deux couples $(1,-2)$ et $(-2,1)$.

(d) En utilisant la méthode de Lagrange, étudier les extrema absolus de f sur le cercle $C(O,\sqrt{5})$ de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$. (Indication: on pourra vérifier que la condition de Lagrange est satisfaite en particulier pour $x = y$.)

(e) En déduire les valeurs de m et M.

Exercice 2 [3 pts]: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

(a) Déterminer l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ du graphe G_f ($(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$).

(b) Pour $M_0(2,1,2)$, déterminer tous les points $M(x,y,f(x,y))$ où le plan tangent $\mathcal{P}_M$ est parallèle à $\mathcal{P}_{M_0}$.

.../...

Exercice 3 [5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{x^2-y}\ \sin(\frac{\pi x}{4})$$

(a) Déterminer la différentielle de f en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Enoncer le théorème d'inversion locale.

(c) Montrer que le champ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$$

induit un difféomorphisme $F_V : V \to F(V)$ sur un voisinage V ouvert du point $(2,2)$. Déterminer la différentielle $d(F_V)^{-1}_{F(2,2)}$ de la réciproque au point image $F(2,2)$.

Exercice 4 [5 pts]: (a) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

On considère la courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation $y\cos(x) + xe^y = 0$.

(b) Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathcal{C}$ au point $O(0,0)$.

(c) En utilisant le (b) déterminer la limite de y/x quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 [complément]]: Soit $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ de classe C^1 sur l'ouvert U et $\mathrm{m}_0(x_0, y_0)$ un point de U tel que $F(x_0, y_0) = 0$. On suppose que $(\partial F/\partial y)(\mathrm{m}_0) \neq 0$.

(a) Quelle est la conclusion du théorème des fonctions implicites dans cette situation?

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection du disque ouvert $D(\mathrm{m}_0, \varepsilon)$ et de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x,y) = 0$ contient d'autres points que m_0 (c'est-à-dire, m_0 n'est pas un point isolé de $\mathcal{C}$).

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2007/2008**
Épreuve: **Partiel**
Date et heure: **samedi 10 novembre à 8h**
Lieu: **Bâtiment 1 Amphis Pasteur et Kuhlmann**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [6 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

(b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant et on justifiera sa réponse.

(c) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

Exercice 2 [5,5 pts]: Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Déterminer les lignes de niveau de f et représenter sommairement le graphe G_f de f dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, écrire l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ au graphe G_f en le point M_0 d'abscisse $x = x_0$ et d'ordonnée $y = y_0$.

(c) Soit m_0 le point de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$. Montrer que pour $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, le plan $\mathcal{P}_{M_0}$ coupe la droite $(O\mathrm{m}_0)$ joignant l'origine au point m_0 en le milieu de O et de m_0.

Exercice 3 [4,5 pts]: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{\sin(x+2y)}$.

(a) Montrer que f est de classe C^1 et déterminer $df_{(x_0,y_0)}$ pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Trouver les nombres $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(h, ah) - 1$ soit négligeable devant h, c'est-à-dire, de la forme $h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 quand $h \to 0$.

T.S.V.P.

Exercice 4 [4 pts]: (a) Montrer que le champ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par la formule $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire la différentielle $dF(x_0, y_0)$ en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en fonction des formes linéaires dx et dy et donner la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(F)_{(x_0,y_0)}$.

(b) Montrer que si le produit de deux couples $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ est défini par la formule $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$, on a

$$\begin{cases} F(x, y) = (x, y) \times (x, y) \\ dF_{(x_0,y_0)}(h, k) = 2(x_0, y_0) \times (h, k) \end{cases}$$

(ce qu'on peut écrire aussi $d(x, y)^2 = 2(x, y) \times d(x, y)$).

UNIVERSITÉ LILLE 1

CORRIGÉ DU PARTIEL (Licence Semestre 3, MATH 202, 2007/2008)

Exercice 1 [6 pts]: *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(a) *La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.*

Solution: Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq |y|\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + 3|y|\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 4|y|$. Comme le terme de droite tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$, il en est de même de $|f(x,y)|$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$.

(b) *La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant et on justifiera sa réponse.*

Solution: On a $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \to f(x,0)$ est dérivable, de dérivée nulle en $x = 0$. Cela montre que $(\partial f/\partial x)(0,0)$ existe et vaut 0. De même on a $f(0,y) = 3y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. La fonction $y \to f(0,y)$ est dérivable, de dérivée égale à 3 en $y = 0$. Cela montre que $(\partial f/\partial y)(0,0)$ existe et vaut 3.

(c) *La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.*

Solution: Si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en $(0,0)$ vaut nécessairement $3dy$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{f(x,y) - 3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y + 3y^3 - 3y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pour $x = y \neq 0$, cette fonction vaut -1 et ne tend donc pas vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$. C'est-à-dire, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 [5,5 pts]: *Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

(a) *Déterminer les lignes de niveau de f et représenter sommairement le graphe G_f de f dans $\mathbb{R}^3$.*

Solution: Pour $c \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau c est la courbe plane d'équation $x^2 + y^2 = c$. C'est l'ensemble vide si $c < 0$ et le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{c}$ si $c \geq 0$. Le graphe de f est une surface de révolution. Plus précisément, c'est un paraboloïde de révolution, c'est-à-dire, la surface obtenue en faisant tourner autour de l'axe Oz la parabole du plan Oyz d'équation $z = y^2$.

(b) *Pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, écrire l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ au graphe G_f en le point M_0 d'abscisse $x = x_0$ et d'ordonnée $y = y_0$.*

Solution: Le plan $\mathcal{P}_{M_0}$ est d'équation $z - z_0 = (\frac{\partial f}{\partial x})(x_0,y_0)(x - x_0) + (\frac{\partial f}{\partial y})(y - y_0)$ ce qui, avec $(\partial f/\partial x)(x_0,y_0) = 2x_0$ et $(\partial f/\partial y)(x_0,y_0) = 2y_0$, conduit à l'équation

$2x_0x + 2y_0y - z - (x_0^2 + y_0^2) = 0$.

(c) *Soit* m_0 *le point de coordonnées* $(x_0, y_0, 0)$. *Montrer que pour* $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, *le plan* $\mathcal{P}_{M_0}$ *coupe la droite* $(O\mathrm{m}_0)$ *joignant l'origine au point* m_0 *en le milieu de* O *et de* m_0.

Solution: Un point sur la droite $(O\mathrm{m}_0)$ est de coordonnées $(x_0t, y_0t, 0)$ $(t \in \mathbb{R})$. Il est sur le plan $\mathcal{P}_{M_0}$ si et seulement si $2x_0^2t + 2y_0^2t - (x_0^2 + y_0^2) = 0$, c'est-à-dire si $(x_0^2 + y_0^2)(2t - 1) = 0$. Comme $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, on trouve un unique point, celui de paramètre $t = 1/2$: c'est le millieu de O et m_0.

Exercice 3 [4,5 pts]: *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = e^{\sin(x+2y)}$.

(a) *Montrer que* f *est de classe* C^1 *et déterminer* $df_{(x_0,y_0)}$ *pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Solution: La fonction f a des dérivées partielles par rapport à x et y qui sont continues. Cela suffit pour garantir que f est de classe C^1. On a

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = \cos(x_0 + 2y_0)e^{\sin(x_0+2y_0)} \\ (\dfrac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0) = 2\cos(x_0 + 2y_0)e^{\sin(x_0+2y_0)} \end{cases}$$

Cela donne $df_{(x_0,y_0)} = \cos(x_0 + 2y_0)e^{\sin(x_0+2y_0)}dx + 2\cos(x_0 + 2y_0)e^{\sin(x_0+2y_0)}dy$.

(b) *Trouver les nombres* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(h, ah) - 1$ *soit négligeable devant* h, *c'est-à-dire, de la forme* $h\varepsilon(h)$ *avec* $\varepsilon(h)$ *tendant vers* 0 *quand* $h \to 0$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} f(h, ah) - 1 &= f(h, ah) - f(0,0) \\ &= df_{(0,0)}(h, ah) + \sqrt{h^2 + a^2h^2}\,\varepsilon(h, ah) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \\ &= h + 2ah + |h|\sqrt{1 + a^2}\,\varepsilon(h, ah) \end{aligned}$$

On obtient que $(f(h, ah) - 1)/h$ tend vers 0 quand $h \to 0$ si seulement si $1 + 2a = 0$. Le nombre $-1/2$ est l'unique nombre répondant à la question.

Exercice 4 [4 pts]: (a) *Montrer que le champ* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *défini par la formule* $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Ecrire la différentielle* $dF(x_0, y_0)$ *en un point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *en fonction des formes linéaires* dx *et* dy *et donner la matrice jacobienne* $\mathrm{Jac}(F)_{(x_0,y_0)}$.

Solution: Les fonctions coordonnées de F: $x^2 - y^2$ et $2xy$ ont des dérivées partielles continues et sont donc de classe C^1. Le champ F lui-même est donc de classe C^1. On calcule aisément $dF_{(x_0,y_0)} = (2x_0dx - 2y_0dy, 2y_0dx + 2x_0dy)$ et $\mathrm{Jac}(F)_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{bmatrix}$.

(b) *Montrer que si le produit de deux couples* $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$ *est défini par la formule* $(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$, *on a*

$$\begin{cases} F(x,y) = (x,y) \times (x,y) \\ dF_{(x_0,y_0)}(h,k) = 2(x_0,y_0) \times (h,k) \end{cases}$$

(ce qu'on peut écrire aussi $d(x,y)^2 = 2(x,y) \times d(x,y)$*).*

Solution: On a bien $(x,y) \times (x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) = F(x,y)$ et
$2(x_0,y_0) \times (h,k) = (2x_0h - 2y_0k, 2y_0h + 2x_0k) = dF_{(x_0,y_0)}(h,k)$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2007/2008**
Épreuve: **Examen (1ère session)**
Date et heure: **jeudi 31 janvier 2008 à 8h**
Lieu: **Bâtiment A5**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [8 pts]: (a) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

(b) Montrer que l'équation

$$e^x + e^y + x + y - 2 = 0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x) :]-r, r[\to \mathbb{R}$ dans un voisinage du point $O(0,0)$ et que cette fonction est dérivable.

(c) Montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable sur $]-r, r[$ et calculer les nombres $y(0)$, $y'(0)$, $y"(0)$.

(d) Déterminer les extrema relatifs de la somme $x + y$ de deux nombres réels x et y vérifiant la condition $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$. (Indication: on sera amené à montrer que l'équation $e^x + x - 1 = 0$ a pour unique solution $x = 0$).

Exercice 2 [4 pts]: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^3$.
(a) Déterminer l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe G_f ($(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$).

(b) Pour $M_0(3, 2, 1)$, déterminer tous les points $M(x, y, f(x, y))$ où le plan tangent $\mathcal{P}_M$ est parallèle à $\mathcal{P}_{M_0}$.

Exercice 3 [8 pts]: Soit $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ différentiable. On note $(f_1, \ldots, f_n)$ le n-uplet des fonctions coordonnées de $\underline{f}$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(\underline{x}) = f_1^2(\underline{x}) + \cdots + f_n^2(\underline{x}) \qquad \text{pour tout } \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles.

T.S.V.P.

(b) Montrer que si F a un extremum relatif en un point $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ alors le n-uplet $(f_1(\underline{a}), \ldots, f_n(\underline{a}))$ est solution du système linéaire

$$
{}^t\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}} \times \begin{bmatrix} f_1(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

où $\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$ désigne la matrice jacobienne de $\underline{f}$ au point $\underline{a}$ et ${}^t\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$ sa transposée.

On note $||.||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et on fixe un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que la fonction $||\underline{f}|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur l'adhérence $\overline{U}$ de U.

(d) On suppose que pour tout $\underline{a} \in U$, la différentielle $d\underline{f}_{\underline{a}}$ est bijective. Montrer que

- si le minimum absolu de $||\underline{f}||$ n'est pas atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$, alors il existe un point $\underline{a} \in U$ tel que $\underline{f}(\underline{a}) = (0, \ldots, 0)$.

- le maximum absolu de $||\underline{f}||$ est atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$ de U.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2007/2008**
Épreuve: **Examen (1ère session)**
Date et heure: **jeudi 31 janvier 2008 de 8h à 10h**

CORRIGÉ

Exercice 1 [8 pts]: (a) *Enoncer le théorème des fonctions implicites.*

Solution: Soient $f(x,y)$ une fonction de 2 variables et $m_0(x_0,y_0)$ un point du domaine tel que $f(m_0)=0$. On suppose que f a des dérivées partielles continues en m_0 et que $(\partial f/\partial y)(m_0)\neq 0$. Alors il existe $r>0$, un voisinage V de m_0 et une fonction $y:]x_0-r,x_0+r[\to\mathbb{R}$, dérivable sur $]x_0-r,x_0+r[$, tels que

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ (x,y)\in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y(x) \\ x\in]x_0-r,x_0+r[\end{cases}$$

avec de plus $y'(x)=-\dfrac{(\partial f/\partial x)(x,y)}{(\partial f/\partial y)(x,y)}$ $\quad (x\in]x_0-r,x_0+r[)$.

(b) *Montrer que l'équation*

$$e^x+e^y+x+y-2=0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x):]-r,r[\to\mathbb{R}$ dans un voisinage du point $O(0,0)$ et que cette fonction est dérivable.

Solution: on applique le théorème des fonctions implicites à $f(x,y)=e^x+e^y+x+y-2$, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et au point $O(0,0)$. On a $(\partial f/\partial y)(m_0)\neq e^0+1=2$; l'hypothèse $(\partial f/\partial y)(m_0)\neq 0$ est bien vérifiée.

(c) *Montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable sur $]-r,r[$ et calculer les nombres $y(0)$, $y'(0)$, $y"(0)$.*

Solution: Le théorème des fonctions implicites donne aussi $y'(x)=-\dfrac{e^x+1}{e^{y(x)}+1}$, ce dont on déduit que $y'(x)$ est dérivable, c'est-à-dire, $y(x)$ est 2 fois dérivable et que $y''(x)=-\dfrac{e^x(e^{y(x)}+1)-y'(x)e^{y(x)}(e^x+1)}{(e^{y(x)}+1)^2}$ pour tout $x\in]-r,+r[$. On obtient ainsi $y(0)=0$, $y'(0)=-1$ et $y"(0)=-1$.

(d) *Déterminer les extrema relatifs de la somme $x+y$ de deux nombres réels x et y vérifiant la condition $e^x+e^y+x+y-2=0$. (Indication: on sera amené à montrer que l'équation $e^x+x-1=0$ a pour unique solution $x=0$).*

Solution: Par la méthode de Lagrange, les points stationnaires (x, y) sont solution du système

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & e^x + 1 \\ 1 & e^y + 1 \end{vmatrix} = 0 \\ e^x + e^y + x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ e^x + x - 1 = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \to e^x + x - 1$, de dérivée $e^x + 1 > 0$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule en $x = 0$, qui est donc l'unique racine de $e^x + x - 1 = 0$. Le point $O(0, 0)$ est le seul point stationnaire du problème.

Etudier s'il y a un extremum relatif en $O(0, 0)$ de $x + y$ sous la contrainte $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ revient à étudier si la fonction $x + y(x)$ a un extremum local en $x = 0$. D'après la question (c), cette fonction a des dérivées d'ordre 1 et 2 respectivement égales à 0 et -1. Il y a donc un maximum local en $x = 0$ pour cette fonction, et en $O(0, 0)$ pour le problème initial.

Exercice 2 [4 pts]: *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^3$.*

(a) *Déterminer l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe G_f ($(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$).*

Solution: Le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ est d'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{soit ici: } z - (x_0^2 - y_0^3) = 2x_0(x - x_0) - 3y_0^2(y - y_0)$$

(b) *Pour $M_0(3, 2, 1)$, déterminer tous les points $M(x, y, f(x, y))$ où le plan tangent $\mathcal{P}_M$ est parallèle à $\mathcal{P}_{M_0}$.*

Solution: Pour le point $M_0(3, 2, 1)$, un vecteur normal au plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}_0 = (6, -12, -1)$ et en un point $M(x, y, f(x, y))$, un vecteur normal au plan tangent $\mathcal{P}_M$ est le vecteur $\overrightarrow{n} = (2x, -3y^2, -1)$. Les plans $\mathcal{P}_{M_0}$ et $\mathcal{P}_M$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}_0$ et $\overrightarrow{n}$ sont parallèles, et en fait égaux puisque ils ont la même troisième coordonnée. On obtient donc $2x = 6$ et $-3y^2 = -12$. Il y a donc deux points solution du problème: $M = M_0$ et $M(3, -2, 17)$.

Exercice 3 [8 pts]: *Soit $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ différentiable. On note $(f_1, \ldots, f_n)$ le n-uplet des fonctions coordonnées de $\underline{f}$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$F(\underline{x}) = f_1^2(\underline{x}) + \cdots + f_n^2(\underline{x}) \qquad \text{pour tout } \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(a) *Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles.*

Solution: Le champ $\underline{f}$ étant différentiable sur $\mathbb{R}^n$, ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ le sont aussi, et donc F qui est la somme des carrés de $f_1, \ldots, f_n$ est elle aussi différentiable sur $\mathbb{R}^n$. De plus, on a:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\underline{x}) = 2f_1(\underline{x})\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\underline{x}) + \cdots + 2f_n(\underline{x})\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\underline{x}) \qquad (\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$$

(b) *Montrer que si F a un extremum relatif en un point $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ alors le n-uplet $(f_1(\underline{a}), \ldots, f_n(\underline{a}))$ est solution du système linéaire*

$$ {}^t\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}} \times \begin{bmatrix} f_1(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} $$

où $\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$ désigne la matrice jacobienne de $\underline{f}$ au point $\underline{a}$ et ${}^t\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$ sa transposée.

Solution: Si F a un extremum relatif en $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, alors toutes les dérivées partielles de F, calculées ci-dessus, s'annulent en $\underline{a}$, ce qui s'écrit

$$ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\underline{a}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} $$

La matrice $n \times n$ dans le membre de gauche est bien la matrice ${}^t\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$.

On note $||.||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et on fixe un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$.

(c) *Montrer que la fonction $||\underline{f}|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur l'adhérence $\overline{U}$ de U.*

Solution: On a $||\underline{f}|| = \sqrt{F}$. Comme la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^n$ (puisque différentiable) et la fonction "racine carrée" sur $[0, +\infty[$, la fonction $||\underline{f}||$ est continue sur son domaine $\mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé (puisque défini comme une adhérence) et est borné (toute boule fermée qui contient U contient également $\overline{U}$). Il suffit d'invoquer le théorème suivant pour obtenir l'énoncé désiré: une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ admet un maximum absolu et un minimum absolu.

(d) *On suppose que pour tout $\underline{a} \in U$, la différentielle $d\underline{f}_{\underline{a}}$ est bijective. Montrer que*

- si le minimum absolu de $||\underline{f}||$ n'est pas atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$, alors il existe un point $\underline{a} \in U$ tel que $\underline{f}(\underline{a}) = (0, \ldots, 0)$.

- le maximum absolu de $||\underline{f}||$ est atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$ de U.

Solution: Si le minimum absolu de $||\underline{f}||$ sur $\overline{U}$ n'est pas atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$, il est atteint en un point $\underline{a}$ de l'ouvert U. Il en est alors de même de la fonction $F = ||\underline{f}||^2$, qui admet alors un minimum relatif en $\underline{a}$. D'après la question (b), le n-uplet $(f_1(\underline{a}), \ldots, f_n(\underline{a}))$ est solution du système linéaire de cette question. Mais la différentielle $d\underline{f}_{\underline{a}}$ étant supposée bijective, la matrice $\mathrm{Jac}(\underline{f})_{\underline{a}}$ est inversible et ce système est de Cramer: il admet l'unique solution $(0, \ldots, 0)$, ce qui donne $\underline{f}(\underline{a}) = (0, \ldots, 0)$.

On montre comme ci-dessus que si le maximum absolu de $||\underline{f}||$ sur $\overline{U}$ n'est pas atteint en un point du bord $\overline{U} \setminus U$, alors il existe $\underline{a} \in U$ tel que $\underline{f}(\underline{a}) = (0, \ldots, 0)$. Mais alors $||\underline{f}(\underline{a})|| = 0$ serait le maximum absolu de la fonction positive ou nulle $||\underline{f}||$. Cela entraine que $||\underline{f}||$ est identiquement nulle sur $\overline{U}$ et que $\underline{f}$ est constante, égale à $(0, \ldots, 0)$, sur $\overline{U}$. On aurait alors $d\underline{f}_{\underline{x}} = 0$ pour tout $\underline{x} \in U$, ce qui contredit l'hypothèse "$d\underline{f}_{\underline{a}}$ bijective".

<u>**UNIVERSITÉ LILLE 1**</u>

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2007/2008**
Épreuve: **Examen (2ème session)**
Date et heure: **mercredi 18 juin à 14h**
Lieu: **Halle Vallin**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents ni téléphone portable.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [9,5 pts]: Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{1+\sin(3x-y)}$.

(a) Représenter graphiquement l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\dfrac{\pi}{2} < 3x - y < \dfrac{3\pi}{2}\}$ et montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur U et déterminer $df_{(x_0,y_0)}$ pour tout $(x_0,y_0) \in U$.

(c) La fonction f est-elle continue en un point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $3x_0 - y_0 = -\dfrac{\pi}{2}$? Y est-elle différentiable? On justifiera sa réponse.

(d) Ecrire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M_0(0,0,f(0,0))$.

(e) Trouver les nombres $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(h,ah)-1$ soit négligeable devant h, c'est-à-dire, de la forme $h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 quand $h \to 0$.

Exercice 2 [5,5 pts]:

(a) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

(b) Montrer que l'équation

$$\ln(x) + \ln(y) + x + y - 2 = 0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x) :]1-r, 1+r[\to \mathbb{R}$ $(r > 0)$ dans un voisinage du point $\mathrm{m}_0(1,1)$ et que cette fonction est dérivable.

(c) Montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable au point $x = 1$ et calculer les nombres $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$.

T.S.V.P.

Exercice 3 [5 pts]: On considère le champ $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par la formule ci-dessous où les quadruplets (a, b, c, d) sont écrits comme des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

(b) Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^4$. Ecrire les différentielles en M_0 des 4 fonctions coordonnées de F pour un accroissement $H = \begin{pmatrix} h & k \\ \ell & m \end{pmatrix}$ des variables. En déduire la différentielle totale $dF_{M_0}(H)$ du champ F au point M_0 pour l'accroissement H.

(c) Montrer qu'on a

$$\begin{cases} F(M_0) = M_0 \times M_0 = M_0^2 \\ dF_{M_0}(H) = (M_0 \times H) + (H \times M_0) \end{cases}$$

où "$\times$" désigne le produit des matrices 2×2.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATH 202**
Filière: **Licence Semestre 3**
Année universitaire: **2007/2008**
Épreuve: **Examen (2ème session)**
Date et heure: **mercredi 18 juin à 14h**
Lieu: **Halle Vallin**

CORRIGÉ

Exercice 1 [9,5 pts]: *Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin(3x - y)}$.*

(a) *Représenter graphiquement l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\dfrac{\pi}{2} < 3x - y < \dfrac{3\pi}{2}\}$ et montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Solution: L'ensemble U est la bande du plan comprise entre les deux droites parallèles d'équations $3x - y - \frac{3\pi}{2} = 0$ et $3x - y + \frac{\pi}{2} = 0$, les deux droites étant exclues. L'ensemble U est un ouvert car il est défini par deux inégalités strictes $g(x, y) > -\frac{\pi}{2}$ et $g(x, y) < \frac{3\pi}{2}$ avec $g(x, y) = 3x - y$ continue.

(b) *Montrer que f est de classe C^1 sur U et déterminer $df_{(x_0,y_0)}$ pour tout $(x_0, y_0) \in U$.*

Solution: Sur U, la fonction $(x, y) \to 1+\sin(3x - y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et y qui sont continues et elle ne s'annule pas. La fonction $t \to \sqrt{t}$ étant C^1 sur $]0, +\infty[$, la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et y continues sur U. Cela garantit que f soit de classe C^1 sur U. On a

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = \dfrac{3\cos(3x_0 - y_0)}{2\sqrt{1 + \sin(3x_0 - y_0)}} \\ (\dfrac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0) = -\dfrac{\cos(3x_0 - y_0)}{2\sqrt{1 + \sin(3x_0 - y_0)}} \end{cases}$$

Cela donne $df_{(x_0,y_0)} = \dfrac{3\cos(3x_0 - y_0)}{2\sqrt{1 + \sin(3x_0 - y_0)}}dx - \dfrac{\cos(3x_0 - y_0)}{2\sqrt{1 + \sin(3x_0 - y_0)}}dy$.

(c) *La fonction f est-elle continue en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $3x_0 - y_0 = -\dfrac{\pi}{2}$? Y est-elle différentiable? On justifiera sa réponse.*

Solution: Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $3x_0 - y_0 = -\dfrac{\pi}{2}$. La fonction $(x, y) \to 1+\sin(3x - y)$ est continue au point (x_0, y_0) où elle s'annule. La fonction $t \to \sqrt{t}$ étant continue en $t = 0$, f est continue en (x_0, y_0). En revanche f n'est pas différentiable en (x_0, y_0) car elle n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en un tel point. On effet, on a

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\sqrt{1 + \sin(-\frac{\pi}{2} + 3h)}}{h} = \frac{\sqrt{1 - \cos(3h)}}{h}$$

et cette dernière expression est équivalente à $\dfrac{3|h|}{\sqrt{2}h}$ qui n'admet pas de limite quand h tend vers 0 (mais une limite à droite et une limite à gauche qui sont différentes).

(d) *Ecrire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M_0(0,0,f(0,0))$.*

Solution: Le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ est d'équation

$$\begin{aligned} z - f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y \\ \text{c'est-à-dire: } z - 1 &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \iff 3x - y - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

(e) *Trouver les nombres $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(h,ah) - 1$ soit négligeable devant h, c'est-à-dire, de la forme $h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 quand $h \to 0$.*

Solution: On a

$$\begin{aligned} f(h,ah) - 1 &= f(h,ah) - f(0,0) \\ &= df_{(0,0)}(h,ah) + \sqrt{h^2 + a^2h^2}\,\varepsilon(h,ah) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \\ &= \frac{3}{2}h - \frac{1}{2}ah + |h|\sqrt{1+a^2}\,\varepsilon(h,ah) \end{aligned}$$

On obtient que $(f(h,ah) - 1)/h$ tend vers 0 quand $h \to 0$ si seulement si $3 - a = 0$. Le nombre $a = 3$ est l'unique nombre répondant à la question.

Exercice 2 [5,5 pts]:

(a) *Enoncer le théorème des fonctions implicites.*

Solution: Soient $f(x,y)$ une fonction de 2 variables et $m_0(x_0,y_0)$ un point du domaine tel que $f(m_0) = 0$. On suppose que f a des dérivées partielles continues en m_0 et que $(\partial f/\partial y)(m_0) \neq 0$. Alors il existe $r > 0$, un voisinage V de m_0 et une fonction $y :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$, dérivable sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, tels que

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ (x,y) \in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ x \in]x_0 - r, x_0 + r[\end{cases}$$

avec de plus $y'(x) = -\dfrac{(\partial f/\partial x)(x,y)}{(\partial f/\partial y)(x,y)} \quad (x \in]x_0 - r, x_0 + r[)$.

(b) *Montrer que l'équation*

$$\ln(x) + \ln(y) + x + y - 2 = 0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x) :]1-r, 1+r[\to \mathbb{R}$ ($r > 0$) dans un voisinage du point $\mathrm{m}_0(1,1)$ et que cette fonction est dérivable.

Solution: On applique le théorème des fonctions implicites à $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) + x + y - 2$, qui est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ et vérifie $f(\mathrm{m}_0) = 0$ et $(\partial f/\partial y)(\mathrm{m}_0) = 2 \neq 0$.

(c) *Montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable au point $x = 1$ et calculer les nombres $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$.*

Solution: Le théorème des fonctions implicites donne aussi $y'(x) = -\dfrac{(1/x)+1}{(1/y(x))+1}$, ce dont on déduit que $y'(x)$ est dérivable sur un voisinage V de 1 et que, pour $x \in V$, $y''(x) = -\dfrac{(-\frac{1}{x^2})(\frac{1}{y(x)}+1) + (\frac{y'(x)}{y(x)^2})(\frac{1}{x}+1)}{(\frac{1}{y(x)}+1)^2}$. D'où $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$ et $y''(1) = 1$.

Exercice 3 [5 pts]: *On considère le champ $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par la formule ci-dessous où les quadruplets (a, b, c, d) sont écrits comme des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:*

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+zt & yz+t^2 \end{pmatrix}$$

(a) *Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.*

Solution: Les fonctions coordonnées de F: x^2+yz, $xy+yt$, $xz+zt$ et $yz+t^2$ ont des dérivées partielles continues et sont donc de classe C^1. Le champ F lui-même est donc de classe C^1.

(b) *Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^4$. Ecrire les différentielles en M_0 des 4 fonctions coordonnées de F pour un accroissement $H = \begin{pmatrix} h & k \\ \ell & m \end{pmatrix}$ des variables. En déduire la différentielle totale $dF_{M_0}(H)$ du champ F au point M_0 pour l'accroissement H.*

Solution: On calcule

$$\begin{cases} d(x^2+yz) = 2xdx + zdy + ydz \\ d(xy+yt) = ydx + (x+t)dy + ydt \\ d(xz+zt) = zdx + (x+t)dz + zdt \\ d(yz+t^2) = zdy + ydz + 2tdt \end{cases}$$

d'où $dF_{M_0}(H) = \begin{pmatrix} 2x_0h + z_0k + y_0\ell & y_0h + (x_0+t_0)k + y_0m \\ z_0h + (x_0+t_0)\ell + z_0m & z_0k + y_0\ell + 2t_0m \end{pmatrix}$

(c) *Montrer que si "$\times$" désigne le produit des matrices 2×2, on a*

$$\begin{cases} F(M_0) = M_0 \times M_0 = M_0^2 \\ dF_{M_0}(H) = (M_0 \times H) + (H \times M_0) \end{cases}$$

Solution: On calcule facilement les matrices M_0^2 et $(M_0 \times H) + (H \times M_0)$ et on vérifie les formules demandées.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Matière: **M32 - M**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **jeudi 09 novembre 2017 à 8h au Bâtiment A5**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents
Le barême est donné à titre indicatif
Chacune des deux parties devra être rédigée sur une copie différente.

PARTIE I

Exercice 1 [7 pts]: (a) Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équation

$$\mathcal{C}_1 : xy - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : x - y - 1 = 0$$

ainsi que le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ de tous les points (x, y) vérifiant:

$$\begin{cases} xy < 2 \\ x - y < 1 \end{cases}$$

(b) Montrer que les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en 2 points $A(a, b)$ et $A'(a', b')$ dont on déterminera les coordonnées.

(c) (*Question de cours*) Pour un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ et un point $a \in \mathbb{R}^n$, donner les quatre définitions suivantes:
- a est un point adhérent à D,
- a est un point intérieur à D,
- D est fermé,
- D est ouvert,

et énoncer le critère séquentiel pour qu'un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ soit fermé.

(d) Montrer que l'ensemble D est ouvert mais n'est pas fermé.

Exercice 2 [3,5 pts]: (a) Montrer que l'équation

(E) $\qquad zx - zy - xy - z + 2 = 0$ avec $M(x, y) \notin \{A(a, b), A'(a', b')\}$

définit implicitement z en fonction de x et de y (les points $A(a, b), A'(a', b')$ étant ceux de l'exercice précédent).

(b) Donner le domaine de définition la fonction $z(x, y)$ définie par (E), expliciter $z(x, y)$ et montrer que $z(x, y) > 0$ pour tout point (x, y) du domaine D de l'exercice précédent.

T.S.V.P.

PARTIE II

Exercice 3 [4 pts]: Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'application

$$N(x,y) = \max(|x+2y|, |x+y|)$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Représenter graphiquement la boule fermée centrée en l'origine et de rayon 1 pour cette norme (prendre environ 2cm comme unité de longueur du repère orthonormé).

Exercice 4 [5,5 pts]: (a) Montrer que pour tous nombres $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

On considère la fonction définie par par $f(x,y) = \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) (*Question de cours*) Donner la définition de "f a pour limite 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$" et l'énoncé du théorème d'encadrement, appelé aussi théorème des gendarmes.

(c) Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en le point $(0,0)$.

(d) Montrer que la fonction ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}^2$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Filière: **Licence Semestre 3**
Matière: **M32 - P&PC**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **lundi 6 novembre 2017 à 13h30**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 [5 pts]: (a) Représenter sur un même graphique les 4 domaines du plan $\mathbb{R}^2$

$$D_1 : \begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x + y \geq 0 \end{cases} \quad D_2 : \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 3x + y \geq 0 \end{cases} \quad D_3 : \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 3x + y \leq 0 \end{cases} \quad D_4 : \begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x + y \leq 0 \end{cases}$$

(prendre environ 4cm comme unité de longueur du repère orthonormé).

(b) (*Question de cours*) Enoncer le critère séquentiel pour qu'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ soit fermé.

(c) Montrer que l'ensemble D_1 est fermé.

Exercice 2 [5 pts]: On considère la fonction $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x, y) = |x - y| + |3x + y|$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner la valeur de $N(x, y)$ dans chacun des quatre domaines D_1, D_2, D_3, D_4 de l'exercice 1.

(c) Représenter graphiquement la boule fermée centrée en l'origine et de rayon 1 pour cette norme (prendre environ 4cm comme unité de longueur du repère orthonormé).

Exercice 3 [5 pts]: On considère la norme $N_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$$

(a) Pour N la fonction de l'exercice 2, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$N(x, y) \leq 6\, N_\infty(x, y).$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{N(x, y) \times \sin(x + y)}{N_\infty(x, y)}$$

(b) Quel est son domaine de définition ?

(c) (*Question de cours*) Donner la définition de "f a pour limite 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$" et l'énoncé du théorème d'encadrement (appelé aussi théorème des gendarmes).

(d) Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en le point $(0, 0)$.

T.S.V.P.

Exercice 4 [5 pts]: Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

(a) Quel est son domaine de définition ?

(b) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau c de f, notée I_f^c, est un cercle centré en l'origine dont on précisera le rayon.

(c) Etudier rapidement la fonction partielle $f(0, y)$ et représenter graphiquement dans le plan yOz la section du graphe de f et du plan yOz.

(d) Représenter graphiquement le graphe de f.

<u>UNIVERSITÉ LILLE 1</u>

Enseignant responsable: **PIERRE DÈBES**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Matière: **M32 - M**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **mercredi 20 décembre 2017 à 8h en Halles Grémeaux**
Durée de l'épreuve: **3 heures**

Ni calculatrice ni documents.
Le barême est donné à titre indicatif.
Chacune des deux parties devra être rédigée sur une copie différente.

PARTIE I (copie bleue)

Question de cours [2,5 pts]: Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donner la définition de:
(i) f a une dérivée partielle par rapport à la variable y en $(0,0)$,
(ii) f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1 [4,5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y\sin(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de f par rapport à x en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

(c) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant et on justifiera sa réponse.

(d) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.
(On rappelle que $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$).

Exercice 2 [3 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables u, v, w. On pose

$$g(x,y,z) = f(x-2y+z, -3x+y-z, 2x+y)$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculer

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) - 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) - 5\,\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)$$

T.S.V.P.

PARTIE II (copie jaune)

Exercice 3 [4 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 + 9y^2$$

Montrer que la fonction n'a aucun extremum relatif sur son domaine.
(**Indication:** pour le cas du point $O(0,0)$, on pourra considérer la fonction $f(x,0)$).

Question de cours [1,5 pts]: Pour un champ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à deux variables x et y, donner la définition de la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(F)_{\mathrm{m}_0}$ en un point $\mathrm{m}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et rappeler le lien entre cette matrice et la différentielle dF_{m_0}, évaluée en un accroissement (h,k) de la variable (x,y).

Exercice 4 [2 pts]: Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ défini par la formule

$$F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Pour deux couples $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$, on définit leur produit par la formule

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Montrer que le champ F est différentiable en tout point $\mathrm{m}_0(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et que

$$\begin{cases} F(x_0,y_0) = (x_0,y_0) \times (x_0,y_0) \\ dF_{(x_0,y_0)}(h,k) = 2(x_0,y_0) \times (h,k) \end{cases}$$

Exercice 5 [2,5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Pour tout point $M_0(x_0,y_0,z_0) \neq O(0,0,0)$ du graphe G_f de f, on note $\mathcal{P}_{M_0}$ le plan tangent à G_f au point M_0.

(a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_{M_0}$ et montrer que ce plan passe par le point origine $O(0,0,0)$.

(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}_{M_0}$ orthogonale au plan $\mathcal{P}_{M_0}$ et passant par M_0 coupe l'axe Oz en un point que l'on précisera.

<u>UNIVERSITÉ LILLE 1</u>

Enseignant responsable: **PIERRE DÈBES**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Matière: **M32 - P&PC**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **lundi 18 décembre 2017 à 14h en Halles Grémeaux**
Durée de l'épreuve: **2 heures**

Ni calculatrice ni documents.
Le barème est donné à titre indicatif.
Chacune des deux parties devra être rédigée sur une copie differente.

PARTIE I (copie bleue)

Exercice 1 [6 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \exp(\sin(x) + \sin(y))$$

(a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le point $M_k(2k\pi, 2k\pi, 1)$ est sur le graphe G_f de f et donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_k$ tangent à G_f en M_k. Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont parallèlles.

(c) Enoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x, y)$ et montrer que si a_1, a_2, b_1, b_2 sont quatre nombres réels, alors

$$\left| e^{\sin(b_1)} e^{\sin(b_2)} - e^{\sin(a_1)} e^{\sin(a_2)} \right| \leq e^2 \left(|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| \right)$$

Exercice 2 [4 pts]: (a) Pour $z = \cos(x)y + x\cos(y)$, calculer la différentielle dz en fonction de dx et dy.

Soit $y(x)$ une fonction d'une variable dérivable sur un intervalle $I =]-r, +r[$ $(r > 0)$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction $z(x, y(x))$.

(c) On suppose que $z(x, y(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Calculer $y(0)$ et $y'(0)$.

T.S.V.P.

PARTIE II (copie jaune)

Exercice 3 [5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6x^2y + 12y^2$$

Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

Exercice 4 [5 pts]: (a) Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ défini par la formule

$$\mathcal{L}(x,y,z) = (y+z, x-z, x+y)$$

Ecrire la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{L})_{(x,y,z)}$ de $\mathcal{L}$ en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction de trois variables (u,v,w), écrire la matrice (uniligne) jacobienne $\mathrm{Jac}(f)_{(u,v,w)}$ de f en un point $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$g(x,y,z) = (f \circ \mathcal{L})(x,y,z) = f(y+z, x-z, x+y)$$

Déduire de (a) et (b) la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(g)_{(x,y,z)}$ de g en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) En déduire les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}$ et montrer la formule

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **PIERRE DÈBES**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Matière: **M32 - M**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **lundi 11 juin 2018 à 14h en Halles Vallin**
Durée de l'épreuve: **3 heures**

Ni calculatrice ni documents.
Le barème est donné à titre indicatif.
Chacune des deux parties devra être rédigée sur une copie différente.

PARTIE I (copie bleue)

Question de cours [2,5 pts]: Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donner la définition de:
(i) f a une dérivée partielle par rapport à la variable y en $(0,0)$,
(ii) f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1 [5 pts]: Soit f la fonction définie sur $D = (]-1,+\infty[\times\mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{y\ln(1+x)}{(x^2+y^2)^{1/3}}$$

(a) Montrer que f est différentiable sur le domaine D et calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de f par rapport à x en tout point $(x_0,y_0) \in D$.

(b) Montrer qu'on peut prolonger par continuité f en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.

(c) La fonction f ainsi prolongée admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0,0)$? On donnera leur valeur le cas échéant et on justifiera sa réponse.

(d) La fonction f prolongée est-elle différentiable en $(0,0)$? On justifiera sa réponse.

Exercice 2 [2,5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables u, v, w. On pose

$$g(x,y,z) = f(y+z, x+z, x-y)$$

Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)$$

T.S.V.P.

PARTIE II (copie jaune)

Exercice 3 [4 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3 - x^3 - 9x^2$$

Montrer que la fonction n'a aucun extremum relatif sur son domaine.
(**Indication:** pour le cas du point $O(0, 0)$, on pourra considérer la fonction $f(0, y)$).

Question de cours [1,5 pts]: Pour un champ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à deux variables x et y, donner la définition de la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(F)_{\mathrm{m}_0}$ en un point $\mathrm{m}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et rappeler le lien entre cette matrice et la différentielle dF_{m_0}, évaluée en un accroissement (h, k) de la variable (x, y).

Exercice 4 [2 pts]: Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ défini par la formule

$$F(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

Pour deux couples $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$, on définit leur produit par la formule

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Montrer que le champ F est différentiable en tout point $\mathrm{m}_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et que

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = (x_0, y_0) \times (x_0, y_0) \times (x_0, y_0) \\ dF_{(x_0,y_0)}(h, k) = 3(x_0, y_0) \times (x_0, y_0) \times (h, k) \end{cases}$$

Exercice 5 [2,5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pour tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ du graphe G_f, on note $\mathcal{P}_{M_0}$ le plan tangent à G_f au point M_0.

(a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_{M_0}$.

(b) On suppose $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Soit $\mathcal{D}_{m_0}$ la droite joignant le point $O(0, 0, 0)$ au point $m_0(x_0, y_0, 0)$. Montrer que la droite $\mathcal{D}_{m_0}$ coupe le plan $\mathcal{P}_{M_0}$ en le milieu de O et de m_0.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant responsable: **PIERRE DÈBES**
Filière: **Licence 1er Semestre**
Matière: **M32 - P&PC**
Année universitaire: **2017/2018**
Date, heure et lieu: **lundi 11 juin 2018 à 8h au Bâtiment A5**
Durée de l'épreuve: **2 heures**

Ni calculatrice ni documents.
Le barême est donné à titre indicatif.
Chacune des deux parties devra être rédigée sur une copie différente.

PARTIE I (copie bleue)

Exercice 1 [6 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(\pi(e^x + e^y))$$

(a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Vérifier que le graphe G_f de f passe par le point $O(0, 0, 0)$ et donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à G_f en O.

Exercice 2 [4 pts]: (a) Pour $z = e^x y + xe^y$, calculer la différentielle dz en fonction de dx et dy.
Soit $y(x)$ une fonction d'une variable dérivable sur un intervalle $I =]-r, +r[$ $(r > 0)$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction $z(x, y(x))$ en fonction de $y(x)$ et $y'(x)$.

(c) On suppose que $z(x, y(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Calculer $y(0)$ et $y'(0)$.

T.S.V.P.

PARTIE II (copie jaune)

Exercice 3 [5 pts]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 6xy^2 - 12x^2 - y^3 - 3y^2$$

Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

Exercice 4 [5 pts]: (a) Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ défini par la formule

$$\mathcal{L}(x, y, z) = (y + z, x + 3y + 2z, 2x + 5y + 3z)$$

Ecrire la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{L})_{(x,y,z)}$ de $\mathcal{L}$ en un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction de trois variables (u, v, w), écrire la matrice (uniligne) jacobienne $\mathrm{Jac}(f)_{(u,v,w)}$ de f en un point $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$g(x, y, z) = (f \circ \mathcal{L})(x, y, z) = f(y + z, x + 3y + 2z, 2x + 5y + 3z)$$

Déduire de (a) et (b) la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(g)_{(x,y,z)}$ de g en un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) En déduire les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}$ et montrer la formule

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}$$