Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 163–214

REVÊTEMENTS TOPOLOGIQUES

par

Pierre Dèbes

Résumé. — Cette annexe est extraite d'un cours de DEA donné à Lille en 1994/95. Elle complète ici l'exposé « Méthodes topologiques et analytiques en théorie de Galois ». Sont traités en détails la théorie topologique des revêtements et le théorème d'existence de Riemann.

***Abstract* (Topological coverings).** — This appendix is based on an advanced course given in Lille in 1994/95. It complements the article "Topological and analytic methods in inverse Galois theory", providing a detailed treatment of the topological theory of covers and of Riemann's existence theorem.

Table des matières

Cette annexe est extraite d'un cours de DEA donné à Lille en 1994/95. Elle couvre la partie topologique de la théorie des revêtements, pour aboutir au théorème d'existence de Riemann, qui fait le lien entre les aspects topologique, analytique et algébrique des revêtements de la droite. Le contenu est classique.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14H30, 30F10, 55-99, 12F12, 14H05.
Mots clefs. — Revêtements, groupes fondamentaux, monodromie, revêtements galoisiens, surfaces de Riemann, fonctions méromorphes, fonctions algébriques, corps de fonctions, théorème d'existence de Riemann.

Le problème inverse de Galois peut servir de fil conducteur. Les quatre chapitres correspondent à quatre étapes où on montre que tout groupe fini est successivement

– quotient du π_1 de la sphère de Riemann privée d'un certain nombre de points (Ch. 1 Th. 2.21), puis

– groupe de monodromie d'un revêtement topologique du même espace (Ch. 2 Th. 4.7),

– groupe d'automorphismes d'un revêtement topologique galoisien du même espace (Ch. 3 Th. 2.6), et enfin

– groupe de Galois d'une extension galoisienne du corps $\mathbb{C}(T)$ des fractions rationnelles en T (Ch. 4 Th. 2.12).

Les ouvrages suivants nous ont été utiles :

[FaKr] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, GTM 71, Springer-Verlag, (1980).

[Fr] M. Fried, *Riemann's existence theorem : an elementary approach to moduli*, (in preparation).

[Fo] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer-Verlag, (1980).

[Go] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, (1971).

[Re] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhauser, (1989).

[Vo] H. Völklein, *Groups as Galois Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 53, Cambridge University Press, (1996).

CHAPITRE I
HOMOTOPIE

1. Groupe fondamental

1.1. Homotopie des chemins. — Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue d'un intervalle fermé $[a,b]$ dans X où $a<b$. Les valeurs en a et en b sont respectivement l'*origine* et l'*extrémité du chemin*. On a la notion de

– *chemin constant* basé en $x\in X$: $c_x(t)=x$ pour tout $t\in[a,b]$.

– *chemin inverse* d'un chemin c : c'est le chemin $\overline{c}$ défini par $\overline{c}(t)=c(a+b-t)$.

– *chemin composé* : si $c:[a,b]\to X$ et $c':[a',b']\to X$ sont deux chemins tels que l'extrémité de c coïncide avec l'origine de c', le chemin composé est l'application :

$$\begin{cases} [a,b+b'-a'] \longrightarrow X \\ \qquad t \qquad \longmapsto (cc')(t)=\begin{cases} c(t) \text{ si } a\leqslant t\leqslant b \\ c'(t+a'-b) \text{ si } b\leqslant t\leqslant b+b'-a' \end{cases} \end{cases}$$

Remarques 1.1

(a) Le chemin cc' s'obtient en parcourant c puis c'. On trouve aussi la convention inverse dans la littérature, *i.e.*, c' d'abord puis c. Les deux ont des avantages et des inconvénients. Ce choix aura une incidence au moment de définir l'action de la monodromie.

(b) Souvent aussi, l'intervalle de définition des chemins est fixé égal à $[0,1]$. Ce point est mineur et n'a aucune incidence sur la suite. Notre définition présente seulement quelques avantages techniques.

Deux chemins c et c' définis sur $[a,b]$ sont dits *homotopes* entre x et y s'il existe une application continue $H:[0,1]\times[a,b]\to X$ telle que

$$\begin{cases} H(0,t)=c(t) \text{ pour tout } t\in[a,b]\\ H(1,t)=c'(t) \text{ pour tout } t\in[a,b]\\ H(s,a)=x \text{ et } H(s,b)=y \text{ pour tout } s\in[0,1]\end{cases}$$

Deux chemins c et c' d'origine x et d'extrémité y sont dits *homotopes* entre x et y s'il existe une reparamétrisation de ces chemins sur un même intervalle $[a,b]$ — de façon précise, deux homéomorphismes croissants φ et φ' entre $[a,b]$ et les intervalles de paramétrisation initiaux de c et de c' — tels que les chemins $c\varphi$ et $c'\varphi'$, tous deux paramétrés par $[a,b]$, soient homotopes au sens précédent.

Proposition 1.2. — *Cette définition ne dépend pas de la reparamétrisation choisie pour les deux chemins.*

Démonstration. — Si ψ et ψ' sont deux homéomorphismes croissants entre $[u,v]$ et $[a,b]$ et $H:[0,1]\times[a,b]\to X$ une homotopie entre $c\varphi$ et $c'\varphi'$, alors on obtient une homotopie $[0,1]\times[u,v]\to X$ entre $c\varphi\psi$ et $c\varphi'\psi'$ en composant H à droite par la correspondance

$$\begin{cases}[0,1]\times[u,v] \longrightarrow X\\ \qquad (s,t) \qquad\longmapsto (s,(1-s)\psi(t)+s(\psi'(t))\end{cases}$$

qui, à s fixé correspond à un homéomorphisme croissant entre $[u,v]$ et $[a,b]$.

En particulier, on peut utiliser pour φ et φ' la paramétrisation linéaire naturelle d'un segment de $\mathbb{R}$ par $[0,1]$.

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

[Réflexivité : $(s,t)\to c(t)$ est une homotopie de c à c.
Symétrie : utiliser la correspondance $H(s,t)\leftrightarrow H(1-s,t)$.
Transitivité : prendre le même intervalle $[0,1]$ de paramétrisation pour les trois chemins ; alors, avec des notations évidentes $H(2s,t)$ pour $s\in[0,1/2]$ et $H'(2s-1,t)$ pour $s\in[1/2,1]$ définit une homotopie entre le premier et le troisième.]

Théorème 1.3. — *Soient c, c' et c'' trois chemins sur X paramétrés respectivement par $[a,b]$, $[a',b']$ et $[a'',b'']$.*

(a) *Si c et c' sont homotopes entre x et y, et si y est l'origine de c'', alors les chemins composés cc'' et $c'c''$ sont homotopes. De la même façon, si x est l'extrémité de c'', alors les chemins composés $c''c$ et $c''c'$ sont homotopes.*

(b) *Si c joint x à y, c' joint y à z et c'' joint z à w, alors les chemins $(cc')c''$ et $c(c'c'')$ sont égaux.*

(c) *Si c joint x à y et c_x est le chemin constant égal à x, alors le chemin c_xc est homotope à c. Si c_y est le chemin constant égal à y, alors le chemin c_xc est homotope à c.*

(d) *Si c joint x à y, alors les chemins $c\overline{c}$ et $\overline{c}c$ sont homotopes à c_x et c_y.*

Démonstration

(a) Soient c et c' deux chemins homotopes entre x et y et c'' un chemin d'origine y. On veut montrer que les chemins composés cc'' et $c'c''$ sont homotopes.

1er cas. Supposons d'abord que c et c' sont tous deux paramétrés par $[a, b]$. Avec des notations évidentes, $K(s,t) = H(s,t)$ pour $t \in [a,b]$ et $K(s,t) = c''(t + a' - b)$ pour $t \in [b, b + b'' - a']$ définit une homotopie entre cc'' et $c'c''$.

2ème cas. Cas général. Soit $\varphi : [a,b] \to [a', b']$ un homéomorphisme croissant. D'après le 1er cas, les deux chemins $c \cdot c''$ et $(c'\varphi) \cdot c''$ définis sur $[a, b + b'' - a'']$ sont homotopes. Si $\widetilde{\varphi}$ est l'homéomorphisme défini sur $[a, b + b'' - a'']$ par $\widetilde{\varphi} = \varphi$ sur $[a, b]$ et $\widetilde{\varphi}(t) = t + b' - b$ sur $[b, b + b'' - a'']$, alors on a

$$((c'\varphi) \cdot c'') \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = c' \cdot c''$$

La relation d'homotopie étant transitive, on obtient bien l'homotopie de cc'' et $c'c''$. La preuve est similaire pour le seconde moitié de l'énoncé (a).

(b) Simple vérification.

(c) Supposons c et c_y paramétrés par $[0, 1]$. L'application définie par

$$H(s,t) = \begin{cases} c\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{2} \\ y & \text{pour} \quad \frac{1+s}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

définit une homotopie de cc_y vers c. On procède pareillement pour construire une homotopie de c_xc vers c.

(d) Supposons c paramétré par $[0, 1]$. L'application $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ définie par

$$H(s,t) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{s}{2} \\ c(2t - s) & \text{pour} \quad \frac{s}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ c(2 - 2t - s) & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2-s}{2} \\ x & \text{pour} \quad \frac{2-s}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

définit une homotopie de $\overline{c}c$ vers c_x. On procède pareillement pour construire une homotopie de $c\overline{c}$ vers c_y. □

1.2. Groupe fondamental

1.2.1. Groupoïde fondamental. — Si c est un chemin joignant x à y, on note $[c]$ sa classe d'homotopie et $\Pi_{x,y}(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins joignant x à y. Le composition des chemins induit une « loi de composition » sur l'ensemble

$$\Pi(X) = \bigsqcup_{x,y} \Pi_{x,y}(X)$$

Précisément, pour $[c] \in \Pi_{x,y}$ et $[c'] \in \Pi_{y,z}$, on pose $[c][c'] = [cc']$. Cette définition a un sens d'après le Th. 1.3. Il y a un petit abus de langage car cette loi n'est pas définie partout. D'après le Th. 1.3, cette loi satisfait aux axiomes suivants :

(i) axiomes d'associativité (quand ils ont un sens).

(ii) existence d'un neutre à droite et et d'un neutre à gauche pour chaque sous-ensemble $\Pi_{x,y}(X)$.

(iii) existence d'un inverse pour tout élément.

Cela confère à $\Pi(X)$ une structure de *groupoïde*. On l'appelle le *groupoïde fondamental (ou de Poincaré)* de X.

1.2.2. Groupe fondamental

Théorème 1.4. — *Soit $x \in X$. La composition des chemins induit une structure de groupe sur l'ensemble $\Pi_{x,x}(X)$ des classes d'homotopie de chemins basés en x (i.e., joignant x à x).*

Le groupe $\Pi_{x,x}(X)$ est appelé groupe fondamental de X basé en x et est noté $\pi_1(X,x)$.

Proposition 1.5. — *Soit c un chemin joignant x à y. La correspondance $[\gamma] \mapsto [c\gamma\overline{c}]$ induit un isomorphisme α_c du groupe $\pi_1(X,y)$ sur le groupe $\pi_1(X,x)$. Cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie $[c]$ du chemin c. De façon plus précise, si c' est un chemin joignant x à y, on a $\alpha_{c'} = [c'\overline{c}]\alpha_c[c'\overline{c}]^{-1}$.*

Démonstration. — Les résultats de § 1.1 montrent que α_c est bien défini et justifient d'autre part le calcul suivant

$$\begin{aligned} \alpha_c(\gamma\gamma') &= [c\gamma\gamma'\overline{c}] \\ &= [c]\ [\gamma]\ [\gamma']\ [c]^{-1} \\ &= [c]\ [\gamma]\ [c]^{-1}\ [c]\ [\gamma']\ [c]^{-1} \\ &= \alpha_c(\gamma)\ \alpha_c(\gamma') \end{aligned}$$

ce qui prouve que α_c est un homomorphisme. Son inverse est $\alpha_{\overline{c}}$. La formule $\alpha_{c'} = [c'\overline{c}]\alpha_c[c'\overline{c}]^{-1}$ s'établit de la même façon. □

Corollaire 1.6. — *Si x et y sont dans une même composante connexe par arcs, alors les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.*

Quand X est connexe par arcs, tous les groupes fondamentaux sont isomorphes. On parle *du* groupe fondamental de X, que l'on désigne par $\pi_1(X)$.

1.2.3. Propriétés fonctorielles. — Si $f : X \to Y$ est une application continue, la correspondance $c \mapsto f \circ c$ qui transforme un chemin sur X en un chemin sur Y, est compatible avec

- la relation d'homotopie (*i.e.*, $[c] = [c'] \Rightarrow [f \circ c] = [f \circ c']$

  [Clair : composée avec f, une homotopie sur X entre c et c' devient une homotopie sur Y entre $f \circ c$ et $f \circ c'$.]

- la composition des chemins (*i.e.*, $f \circ (cc') = (f \circ c)(f \circ c')$).

On notera $f_* : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ l'application induite par cette correspondance sur les classes d'homotopie.

Proposition 1.7. — *L'application f_* induit un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ vers le groupe fondamental $\pi_1(Y, f(x))$. De plus la correspondance $f \mapsto f_*$ est fonctorielle, c'est-à-dire, $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X)}$ et $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Corollaire 1.8. — *Le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs est un invariant topologique, c'est-à-dire, si deux espaces connexes par arcs sont homéomorphes alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.*

2. Calculs de groupes fondamentaux

2.1. Espaces simplement connexes

Définition 2.1. — Soit X un espace topologique non vide connexe par arcs. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x)$ $(x \in X)$ sont triviaux.

(ii) Il existe $x \in X$ tel que le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est trivial.

(iii) Deux chemins ayant même origine et même extrémité sont homotopes.

Un espace topologique X vérifiant ces propriétés est dit simplement connexe.

Démonstration

(i)$\Rightarrow$ (iii) : si γ et γ' joignent x à y, on a, d'après (i), $[\gamma'\overline{\gamma}] = [c_x]$, ce dont on déduit $[\gamma] = [\gamma']$.

(iii)$\Rightarrow$ (i) : banal.

(ii)$\Leftrightarrow$ (i) : d'après le corollaire 1.6. □

Exemples 2.2

(a) Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ qui est étoilé par rapport à un de ses points x (*e.g.* convexe) est simplement connexe.

[Si c joint x à x, l'application donnée par $F(s,t) = sx + (1-s)c(t)$ définit une homotopie de c au chemin constant x.]

(b) $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.

[En effet d'après la théorie de Cauchy, l'intégrale le long d'un chemin γ d'une fonction continue sur un ouvert U contenant γ ne dépend pas du représentant de la classe d'homotopie de $[\gamma]$ dans U. En particulier, elle est nulle le long d'un chemin fermé si U est simplement connexe. On sait bien que le long du cercle unité, l'intégrale de $1/z$ est non nulle.]

(c) Si X et Y sont simplement connexes, alors le produit $X \times Y$ l'est aussi. Cela résulte du résultat plus général suivant (dont la preuve est laissée en exercice).

Proposition 2.3. — *Soient X et Y deux espaces topologiques, $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ les deux projections et (x,y) un point de $X \times Y$. L'application $(p_X)_* \times (p_Y)_*$ est un isomorphisme de $\pi_1(X \times Y, (x,y))$ sur $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.*

2.2. Le cercle S^1 et les tores T^m. — On note p l'application $\mathbb{R} \to S^1$ définie par $p(t) = \exp(2i\pi t)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note γ_n le chemin défini sur $[0,1]$ par $\gamma_n(t) = p(nt)$. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 2.4. — *La correspondance $\Theta : n \mapsto [\gamma_n]$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ sur $\pi_1(S^1, 1)$.*

La démonstration utilise le résultat classique suivant sur le relèvement des applications à valeurs dans le cercle.

Théorème 2.5. — *Soit K un produit d'intervalles fermés bornés et $f : K \to S^1$ une application continue.*

(a) *Il existe une application continue $\varphi : K \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \varphi = f$. On dit que φ est un relèvement de f.*

(b) *Deux relèvements de f diffèrent d'une application constante égale à un entier.*

Démonstration. — (b) provient de la connexité de K. Pour (a), l'outil essentiel est le fait que l'application p induit un homéomorphisme entre tout intervalle ouvert $]a, a+2\pi[$ de longueur 2π et $S^1 \smallsetminus \{e^{ia}\}$. Ainsi l'existence du relèvement φ est claire si f n'est pas surjective. Dans le cas général, grâce à la compacité de K qui entraîne que f est uniformément continue, on peut découper K en un nombre fini de petits « poly-intervalles » compacts K_i sur lesquels f n'est pas surjective et où il existe donc un relèvement f_i de f $(i \in I)$. On peut ordonner ces polyintervalles de telle sorte que l'intersection de chacun d'eux avec la réunion des précédents soit connexe. On peut alors, en procédant par récurrence, recoller tous les relèvements f_i $(i \in I)$, après les avoir éventuellement modifiés par une constante. □

Démonstration du Th. 2.4.— Si c est un chemin dans S^1 basé en 1 paramétré par $[a,b]$, notons $\widetilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'unique relèvement de relèvement de c tel que $\widetilde{c}(a) = 0$. L'extrémité $\widetilde{c}(b)$ de $\widetilde{c}$ est un entier. Appelons le le degré de c et notons le $\deg(c)$. Pour tout entier n, $\widetilde{\gamma_n} = [0,n]$ (paramétré par $[0,1]$ par $t \mapsto nt$) et donc $\deg(\gamma_n) = n$.

Pour voir que Θ est surjective, montrons que

$$[c] = \Theta(\deg(c)). \tag{1}$$

Posons $n = \deg(c)$. Les chemins $\widetilde{c}$ et $[0,n]$ sont deux chemins dans $\mathbb{R}$ de mêmes extrémités 0 et n. Comme $\mathbb{R}$ est simplement connexe, ils sont homotopes. Les chemins $p \circ \widetilde{c} = c$ et $p \circ [0,n] = \gamma_n$ le sont *a fortiori*. D'où $\gamma_n = \Theta(n) = [c]$.

Montrons que Θ est injective. Supposons $[\gamma_n] = [\gamma_m]$, *i.e.*, il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to S_1$ joignant γ_n à γ_m. Soit $\widetilde{H}$ l'unique relèvement de H tel que $\widetilde{H}(0,0) = 0$. L'application partielle $\widetilde{H}(s,1)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$; elle est donc constante. En particulier, $\widetilde{\gamma_n} = (t \mapsto \widetilde{H}(0,t))$ et $\widetilde{\gamma_m} = (t \mapsto \widetilde{H}(1,t))$ ont même extrémité, *i.e.*, $n = m$. (On a $\widetilde{\gamma_n} = (t \mapsto \widetilde{H}(0,t))$ car les deux termes sont des relèvements de γ_n valant 0 en 0).

Enfin Θ est un homomorphisme de groupes. En effet, le chemin $[0, n+m]$ est un relèvement de $\gamma_n\gamma_m$ commençant en 0. Donc $\deg(\gamma_n\gamma_m) = n + m$. De la formule ci-dessus, on déduit alors que $[\gamma_n][\gamma_m] = \Theta(n+m)$. □

Corollaire 2.6. — *Le groupe fondamental du tore T^m est $\mathbb{Z}^m$.*

Démonstration. — Conséquence de la définition $T^m = (S^1)^m$ et de la Prop. 2.3. □

2.3. Rétracte par déformation

Définition 2.7

(a) Un sous-espace Y de X est un rétracte de X s'il existe une application continue $r : X \to Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$. L'application r est appelée rétraction de X sur Y.

(b) Un sous-espace Y de X est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction $r : X \to Y$ et une application continue $H : [0,1] \times X \to X$ telles que

(i) $H(0,x) = x$ pour tout $x \in X$.
(ii) $H(1,x) = r(x)$ pour tout $x \in X$.
(iii) $H(s,y) = y$ pour tout $y \in Y$ et tout $s \in [0,1]$.

Exemples 2.8

(a) Un point x d'un espace X est un rétracte de X : l'application $X \to X$ constante égale à x est un rétraction de X sur x.

(b) La sphère unité S^m de $\mathbb{R}^{m+1}$ est un rétracte de la boule unité privée de l'origine. Par exemple, une rétraction est donnée par l'application $x \mapsto x/\|x\|$.

(c) Plus précisément, la sphère unité S^m de $\mathbb{R}^{m+1}$ est un rétracte par déformation de la boule unité privée de l'origine. Par exemple, une rétraction par déformation est donnée par l'application

$$(s,x) \to s\frac{x}{\|x\|} + (1-s)x$$

(d) S^1 n'est pas un rétracte de $\mathbb{C}$. Plus généralement le (a) du Th. 2.9 ci-dessous montre que tout rétracte d'un espace simplement connexe est simplement connexe.

Théorème 2.9. — *Soit Y un sous-espace de X, $i : Y \to X$ l'injection canonique et $y \in X$.*

(a) *Si Y est un rétracte de X, alors l'homomorphisme $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$ est injectif.*

(b) *Si Y est un rétracte de X par déformation, alors l'homomorphisme $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration

(a) Si $r : X \to Y$ est une rétraction de X sur Y, $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$. On en déduit que $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ est un isomorphisme, d'où l'injectivité de i_*. De façon plus parlante, si H est une homotopie dans X d'un chemin basé en y contenu dans Y au chemin constant c_y, alors $r \circ H$ est une homotopie dans Y de $r \circ c = c$ au chemin constant $r \circ c_y = c_y$.

(b) D'après le lemme ci-dessous, $(i \circ r)_* = i_* \circ r_*$ est un isomorphisme. La surjectivité de i_* en résulte. □

Lemme 2.10. — *Soit $x \in X$. Sous les hypothèses de* (b)*, il existe une rétraction de X sur Y telle que l'homomorphisme $(i \circ r)_*$ de $\pi_1(X, x)$ vers $\pi_1(X, r(x))$soit induit par la conjugaison par la classe $[\gamma]$ d'un chemin γ dans X joignant x à $r(x)$.*

Démonstration. — Soit $r : X \to Y$ une rétraction par déformation de X sur Y et $H : [0, 1] \times X \to X$ une application continue vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de la Déf. 2.7. Soit γ le chemin de X défini par $\gamma(s) = H(s, x)$ ($s \in [0, 1]$). Le chemin γ joint x à $r(x)$. La conjugaison par $[\gamma]^{-1}$, *i.e.*, la correspondance $[c] \mapsto [\gamma]^{-1}[c][\gamma]$, est, comme $(i \circ r)_*$, un homomorphisme de $\pi_1(X, x)$ vers $\pi_1(X, r(x))$. Montrons que ces deux homomorphismes sont égaux.

Soit c un chemin dans X basé en x paramétré par $[0, 1]$. On souhaite montrer que les chemins $r \circ c$ et $\overline{\gamma} \circ c \circ \gamma$ sont homotopes dans X. Soit $G : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ l'application définie par

$$G(s,t) = \begin{cases} \overline{\gamma}(2t) = \gamma(1-2t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1-s}{2} \\ H\left[s, c\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}\right)\right] & \text{pour} \quad \frac{1-s}{2} \leqslant t \leqslant \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \text{pour} \quad \frac{s+3}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} G(0,t) = (\overline{\gamma} \circ c \circ \gamma)(t) \\ G(1,t) = H(c(t),1) = r \circ c(t) \\ G(s,0) = G(s,1) = \gamma(1) = r(x) \end{cases}$$

Conclusion : G est une homotopie de $\overline{\gamma} \circ c \circ \gamma$ à $r \circ c$. On a donc

$$[\gamma]^{-1}[c][\gamma] = [r \circ c] = r_*([c])$$

Corollaire 2.11. — *Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — L'espace $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ est homéomorphe au disque unité ouvert privé de l'origine. Ce dernier se rétracte par déformation sur S^1. Ces trois espaces ont donc le même groupe fondamental, à savoir $\mathbb{Z}$ (Th. 2.4). □

2.4. Théorème de Van Kampen. — Soit X un espace topologique connexe par arcs et X_1, X_2 deux ouverts non vides connexes par arcs tels que $X_1 \cup X_2 = X$. On suppose aussi que $X_1 \cap X_2$ est non vide et connexe par arcs. Soit $x \in X_1 \cap X_2$. On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1,x) & \xrightarrow{k_1} & \pi_1(X,x) \\ {\scriptstyle j_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k_2} \\ \pi_1(X_1\cap X_2,x) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(X_2,x) \end{array}$$

Théorème 2.12 **(Van Kampen)**. — *Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ possède les propriétés suivantes :*

(a) *Il est engendré par les images de k_1 et k_2.*

(b) *Il vérifie la propriété suivante : si $h_i : \pi_1(X_i,x) \to G$, $i=1,2$, sont deux homomorphismes de groupes et si $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, alors il existe un unique homomorphisme $h : \pi_1(X,x) \to G$ tel que $h \circ k_i = h_i$, $i=1,2$.*

Corollaire 2.13 **(de (a))**. — *Si X_1 et X_2 sont simplement connexes, alors $X = X_1 \cup X_2$ l'est aussi.*

Exemples 2.14

(a) L'espace S^2 (en fait S^m pour tout entier $m \geqslant 2$) est simplement connexe. [Rappel : pour $m=1$, on a $\mathbb{Z}$ comme groupe fondamental].

> [En effet, soient x_1, x_2 deux points distincts de S^m et $U_i = S^m \smallsetminus \{x_i\}$, $i=1,2$. Alors S^m s'écrit comme réunion des deux ouverts X_1 et X_2 qui sont simplement connexes car homéomorphes à $\mathbb{R}^m$. Leur intersection, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ privé d'un point, est connexe par arcs si $m \geqslant 2$.]

(b) Si $m \geqslant 3$, l'espace $\mathbb{R}^m$ privé d'un point est simplement connexe. [Rappel : Pour $m=1$, l'espace obtenu n'est pas connexe, pour $m=2$, on a $\mathbb{Z}$ comme groupe fondamental].

> [L'espace $\mathbb{R}^m$ privé d'un point est homéomorphe à la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^m$ privée de l'origine, qui se rétracte par déformation sur S_{m-1}.]

Pour une preuve détaillée du Théorème de Van Kampen, voir par exemple [Go]. Il y a deux parties. Le (a) s'obtient directement à partir de la définition du groupe fondamental comme ensemble de classes d'homotopie de chemins ([Go] Chapitre VI Proposition 4.1). L'énoncé (b) peut être vu comme une application de la théorie des revêtements (qu'il faudrait placer ici à la fin du chapitre 3). L'homomorphisme $h_i : \pi_1(X_i,x) \to G$ correspond à un revêtement galoisien $f_i : Y_i \to X_i$, $i=1,2$. Par la condition $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, les restrictions $f_i^{-1}(X_1 \cap X_2) \to X_1 \cap X_2$, $i = 1, 2$, sont des revêtements équivalents. On peut alors recoller Y_1 à Y_2 *via* l'homéomorphisme $f_1^{-1}(X_1 \cap X_2) \simeq f_2^{-1}(X_1 \cap X_2)$. Cela fournit un revêtement galoisien $Y \to X$. L'homomorphisme associé $\pi_1(X, x) \to G$ est essentiellement l'homomorphisme h cherché (voir [Go] Chapitre 10 § 1.1).

2.5. Droite complexe privée de r points

2.5.1. Groupes libres. — Soit S un ensemble. Pour $s \in S$ et $n \in \mathbb{Z}$ on désigne la paire (s, n) par s^n. Soit $F(S)$ l'ensemble des suites finies (ou mots) $\boldsymbol{s^n} = (s_1^{n_1}, \dots, s_k^{n_k})$ (notés aussi $s_1^{n_1} \cdots s_k^{n_k}$) vérifiant

$$k \in \mathbb{N}; s_1, \dots, s_k \in S; n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}; s_i \neq s_{i+1}, i = 1, \dots, k-1$$

Si $\boldsymbol{s^n} = (s_1^{n_1}, \dots, s_k^{n_k})$ et $\boldsymbol{t^m} = (t_1^{m_1}, \dots, t_\ell^{m_\ell})$ sont deux éléments de $F(S)$, on définit le produit $\boldsymbol{s^n t^m}$ par concaténation de la façon suivante : $\boldsymbol{s^n t^m}$ est le mot obtenu en accolant $\boldsymbol{t^m}$ à la droite de $\boldsymbol{s^n}$, puis en éliminant les termes qui s'annulent, *i.e.*, ceux de la forme s^n, s^{-n}.

[De façon précise, il y a élimination si $s_k = t_1 = s$. Dans ce cas, on remplace $s^{n_k} \cdot s^{m_1}$ par $s^{n_k + m_1}$ si $n_k + m_1 \neq 0$. Si $n_k + m_1 = 0$, on supprime s^{n_k} et s^{m_1} et on réapplique la procédure aux deux mots $(s_1^{n_1}, \dots, s_{k-1}^{n_{k-1}})$ et $\boldsymbol{t^m} = (t_2^{m_2}, \dots, t_\ell^{m_\ell})$.]

Cette loi donne à $F(S)$ une structure de groupe. L'élément neutre est le mot vide $\varnothing$, l'inverse de $\boldsymbol{s^n}$ est $(s_k^{-n_k}, \dots, s_1^{-n_1})$, le plus difficile est de prouver l'associativité. On appelle $F(S)$ le groupe libre d'alphabet S.

Proposition 2.15. — *Le groupe libre $F(S)$ vérifie la propriété universelle suivante :*

Toute application $f : S \to G$ de l'ensemble S vers un groupe G se prolonge de façon unique en un homomorphisme de groupes $F(S) \to G$,

qui le caractérise à unique isomorphisme près. C'est-à-dire, Si $\mathcal{F}$ est un groupe et $S \hookrightarrow \mathcal{F}$ est une injection tels que la propriété universelle ci-dessus est satisfaite, alors il existe un unique isomorphisme entre $F(S)$ et $\mathcal{F}$ qui prolonge l'injection $S \hookrightarrow \mathcal{F}$.

Démonstration. — Laissée en exercice.

Corollaire 2.16. — *S'il existe une bijection entre deux ensembles S et S', alors les groupes $F(S)$ et $F(S')$ sont isomorphes.*

À isomorphisme près, les groupes libres $F(S)$ ne dépendent que du cardinal de S. Étant donné un cardinal r, on notera $F(r)$ le groupe libre à r éléments.

Théorème 2.17. — *Tout groupe G de type fini est quotient d'un groupe libre en un nombre fini de générateurs.*

Démonstration. — Soient $g_1, \ldots, g_r$ des générateurs en nombre fini r de G. Dès qu'un ensemble S a au moins r éléments, il existe une surjection de S sur l'ensemble $\{g_1, \ldots, g_r\}$. Cette surjection se prolonge en un homomorphisme $\varphi : F(S) \to G$ qui est aussi clairement surjectif. Le groupe G est donc isomorphe au quotient $F(S)/\operatorname{Ker}(\varphi)$. □

Quand G possède des générateurs $g_1, \ldots, g_r$ pour lesquels il existe une surjection $s : S \to \{g_1, \ldots, g_r\}$ avec S fini et telle que le noyau $\operatorname{Ker}(\varphi)$ de l'homomorphisme $\varphi : F(S) \to G$ est de type fini, on dit que le groupe G est *de présentation finie*, ou qu'il peut être *défini par générateurs et relations*. Tout ensemble fini R des générateurs de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ s'appelle un ensemble de relations satisfaites par G. Si R est un sous-ensemble fini de $F(r)$ et $\langle R\rangle$ le sous-groupe distingué engendré par R, le groupe $F(r)/\langle R\rangle$ est de présentation finie. On le note plus simplement $F(r)/R$.

Exemple 2.18

(a) Par définition, le groupe abélien libre à r éléments est le groupe $F(r)/[F(r), F(r)]$. Il est de présentation finie ; l'ensemble de ses relations est constitué des $xyx^{-1}y^{-1}$ où x et y décrivent l'ensemble des générateurs de $F(r)$. D'autre part, il est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.

[On montre que l'homomorphisme canonique $F(r) = F(x_1, \ldots, x_r) \to \mathbb{Z}^r$ (qui envoie x_i sur le $i$ième vecteur de la base canonique) satisfait la propriété universelle de $F(r)/[F(r), F(r)]$. C'est-à-dire, d'être le plus grand quotient abélien de $F(r)$. Autrement dit, tout homomorphisme surjectif $F(r) \to G$ avec G abélien se factorise par le morphisme $F(r) \to F(r)/[F(r), F(r)]$.]

(b) Soit $F(r)$ le groupe libre à r générateurs $x_1, \ldots, x_r$. Le groupe $F(r)/x_1 \cdots x_r$ est isomorphe à $F(r-1)$.

[On montre que $F(r)/x_1 \cdots x_r$ et l'injection $\{x_1, \ldots, x_{r-1}\} \hookrightarrow F(r)/x_1 \cdots x_r$ satisfont la propriété universelle de $F(r-1)$.]

2.5.2. Droite affine complexe privée de r points. — On calcule le groupe fondamental de la droite affine complexe privée de r points, *i.e.*, du plan réel $\mathbb{R}^2$ privé de r points. On en déduira celui de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de r points.

Théorème 2.19. — *Soient $t_1, \ldots, t_r$ r points distincts de $\mathbb{R}^2$. Le groupe fondamental de $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ est isomorphe au groupe libre $F(r)$ à r générateurs.*

Démonstration. — On le démontre par récurrence sur r. le résultat est vrai pour $r = 0$ (car $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe). Soient $t_1, \ldots, t_{r+1}$ $r+1$ points distincts de $\mathbb{R}^2$ et $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_{r+1}\}$. Soit D une droite séparant un point des r autres. De façon plus précise, soit ℓ une forme linéaire affine telle que, pour un certain $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} \ell(t_i) < -\alpha, \quad i = 1, \ldots, r \\ \ell(t_{r+1}) > \alpha \end{cases}$$

Notons X_1 et X_2 l'intersection de X avec respectivement les demi-plans $\{\ell(x) > -\alpha\}$ et $\{\ell(x) < \alpha\}$. Les hypothèses du théorème de Van Kampen sont satisfaites. L'intersection $X_1 \cap X_2$ est convexe donc simplement connexe (c'est une bande parallèle à D). L'espace X_2 est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ privé de r points. D'après l'hypothèse de récurrence, son groupe fondamental est le groupe libre $F(r)$. L'espace X_1 est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ privé de 1 point. D'après le corollaire 2.11, son groupe fondamental est le groupe $\mathbb{Z} = F(1)$.

C'est un exercice facile que de vérifier que les conclusions (a) et (b) du théorème de Van Kampen sont satisfaites par le groupe libre $F(r+1)$ et le caractérisent. $\square$

Remarque 2.20. — On peut préciser comment obtenir r générateurs indépendants de $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\})$. Soit t_o un point de $X_1 \cap X_2$ distinct des points $t_1, \ldots, t_r$. Pour chaque point t_i, soit x_i un lacet basé en t_o et « tournant une fois » dans le sens positif autour du point t_i $(i = 1, \ldots, r)$. Si les lacets $x_1, \ldots, x_r$ ne se croisent pas mutuellement, ils forment un ensemble de générateurs indépendants de $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\})$.

2.5.3. Droite projective complexe privée de r points

Théorème 2.21. — *Soient $t_1, \ldots, t_r$ r points distincts sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le groupe fondamental de $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ est isomorphe au quotient du groupe $\pi_1(\mathbb{C} \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\})$, identifié au groupe libre $F(r)$ à r générateurs $x_1, \ldots, x_r$, par la relation $x_1 \cdots x_r = 1$, et donc aussi au groupe libre $F(r-1)$ à $r-1$ générateurs. En conséquence, tout groupe fini G est quotient de $\pi_1(X)$ pour r assez grand.*

Démonstration. — Si on souhaite juste la conclusion $\pi_1(X) \simeq F(r-1)$, il suffit de dire que, pour $r \geqslant 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de r points est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ privé de $r-1$ points, et que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (privé de 0 point) est simplement connexe car homéomorphe à S^2. Pour démontrer le résultat plus précis, on peut procéder comme suit.

On voit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec ∞ distinct des points $t_1, \ldots, t_r$. Soient B une boule fermée de $\mathbb{C}$, centrée en l'origine et de rayon $r > 0$, contenant les points $t_1, \ldots, t_r$. Soient X_1 une boule ouverte de $\mathbb{C}$ contenant B et $X_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \smallsetminus B$.

L'espace X_1 est homéomorphe au plan réel privé de r points. Il est donc connexe par arcs et son groupe fondamental est, d'après le paragraphe précédent, le groupe libre $F(r)$. L'espace X_2 est homéomorphe à la boule ouverte centrée en O et de rayon $1/r$ [par exemple par la correspondance $z \mapsto 1/z$ qui transforme un nombre complexe de module a en un nombre complexe de module $1/a$]. L'espace X_2 est donc connexe par arcs et simplement connexe. L'espace $X_1 \cap X_2$ est connexe par arcs et se rétracte par déformation sur S^1. Son groupe fondamental est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Plus précisément, si pour chaque point t_i, x_i est un lacet « tournant une fois » dans le sens positif autour du point t_i, $i = 1, \ldots, r$, un générateur est le produit $x_1 \cdots x_r$.

D'après le théorème de Van Kampen, le groupe $\pi_1(X)$ est un groupe engendré par $x_1, \ldots, x_r$ qui a la propriété que tout homomorphisme de $F(r) = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ qui est nul sur le produit $x_1 \cdots x_r$ se factorise par lui. Ce groupe est donc bien le quotient $F(r)/x_1 \cdots x_r$. □

Remarques 2.22

(a) On a calculé le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de r points. L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ privé de r points lui présente moins d'intérêt : pour $r = 0$, c'est S^1, son groupe est donc $\mathbb{Z}$, pour $r = 1$, c'est $\mathbb{R}$ qui est simplement connexe ; pour $r \geqslant 2$, l'espace obtenu n'est pas connexe.

(b) L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est simplement connexe. En fait cela se généralise aux dimensions supérieures : $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ est simplement connexe pour tout $m \geqslant 2$. Le résultat est un peu plus compliqué pour les espaces projectifs réels : le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}$ et celui de $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}/2$ pour tout $m \geqslant 2$. Ces résultats peuvent être vus comme cas particulier d'un résultat général sur le groupe fondamental d'un complexe cellulaire [Go ; p. 96].

2.6. Tore complexe à g trous [Re ; Ch. I]

Théorème 2.23. — *Soit X un tore à g trous et $a_1, \dots b_g$ les cycles correspondants aux bords du polygone. Le groupe fondamental de X est isomorphe au quotient du groupe libre $F(2g)$ à $2g$ générateurs $a_1, \dots, b_g$ par la relation $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1$.*

Démonstration. — Soient Q un point intérieur au polygone, $X_1 = X \smallsetminus \{Q\}$ et X_2 l'intérieur du polygone. L'espace X_2 est simplement connexe. L'espace X_1 se rétracte par déformation sur le bord du polygone qu'il faut voir comme un bouquet B de $2g$ cercles C_i, $i = 1, \dots, 2g$ ayant un unique point x en commun.

Montrons par récurrence que le groupe fondamental de B est le groupe libre en les $2g$ générateurs $a_1, \dots, b_g$. On choisit x_i sur C_i distinct de x. L'espace $U_1 = B \smallsetminus \{x_1, \dots, x_{2g-1}\}$ se rétracte par déformation sur C_{2g}. L'espace $U_2 = B \smallsetminus \{x_{2g}\}$ se rétracte par déformation sur $C_1 \cup \cdots \cup C_{2g-1}$. Enfin $U_1 \cap U_2$ se rétracte par déformation sur x et est donc simplement connexe. Le théorème de Van Kampen et l'hypothèse de récurrence conduisent bien à la conclusion annoncée.

L'espace $X_1 \cap X_2$ est homéomorphe au disque épointé. Son groupe fondamental est donc $\mathbb{Z}$. Plus précisément, un générateur est le chemin constitué par le bord du polygone, *i.e.*, le chemin $a_1 b_1 a_1 b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g b_g^{-1}$. Le théorème de Van Kampen, appliqué au recouvrement de X par X_1 et X_1, fournit la conclusion du Th. 2.23. □

On termine ce chapitre par un résultat sans démonstration qui généralise simultanément les Th. 2.21 et Th. 2.23.

Théorème 2.24. — *Soit T un tore à g trous et $a_1, \dots b_g$ les cycles correspondants aux bords du polygone. Soient $t_1, \dots, t_r$ r points distincts de T. Le groupe fondamental de $X = T \smallsetminus \{t_1, \dots, t_r\}$ est isomorphe au quotient du groupe libre $F(2g + r)$ à $2g + r$ générateurs $a_1, \dots b_g$, $x_1, \dots, x_r$ par la relation $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]\ x_1 \cdots x_r = 1$.*

CHAPITRE II
REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

Les espaces topologiques sont toujours supposés séparés.

1. Généralités

1.1. Revêtements

Proposition/Définition 1.1. — *Soit B un espace topologique et $f : X \to B$ une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b, un espace discret non vide D et un homéomorphisme $\Phi : f^{-1}(U) \to U \times D$ tel que $p_1 \circ \Phi$ coïncide avec f, où $p_1 : U \times D \to U$ est la première projection.*

(b) *Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b et une famille $(V_d)_{d \in D}$ paramétrée par un ensemble D non vide vérifiant*

(i) Les ensembles V_d sont des ouverts de X deux à deux disjoints.

(ii) $f^{-1}(U) = \bigcup_{d \in D} V_d$.

(iii) Pour tout $d \in D$, l'application f induit un homéomorphisme $f_d : V_d \to U$.

Une application $f : X \to B$ ayant ces propriétés est appelée revêtement de B.

Démonstration

(a) $\Rightarrow$ (b). Pour tout $d \in D$, on pose

$$V_d = \{x \in f^{-1}(U) \mid \Phi(x) = (f(x), d)\}.$$

Comme D est discret et Φ continue, V_d est un ouvert de X. Les conditions (i) et (ii) sont immédiates. La condition (iii) provient de ce que Φ induit sur V_d un homéomorphisme entre V_d et $U \times \{d\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) On définit l'application $\Phi : f^{-1}(U) \to U \times D$ de la manière suivante. Pour tout $x \in f^{-1}(U)$, il existe un unique $d \in D$ tel que $x \in V_d$. On pose alors $\Phi(x) = (f(x), d)$. Cette application est bijective : sa réciproque associe à tout $(b, d) \in U \times D$ l'image de b par la réciproque de f_d. On munit D de la topologie discrète. L'application Φ est continue [utiliser que les V_d sont ouverts] ainsi que sa réciproque. $\square$

Remarque 1.2. — Un revêtement est une application surjective et ouverte.

[La surjectivité est claire. Soient O un ouvert de X et $x \in O$. Soit $b = f(x)$ et U un ouvert de X comme dans (b). Il existe $d \in D$ tel que $x \in V_d$. Alors $f(O \cap V_d) = f_d(O \cap V_d)$ est un ouvert de B contenant b et inclus dans $f(O)$.]

Exemples 1.3

(a) Pour tout ensemble D, l'application $f : B \times D \to B$ donnée par $f(b,d) = b$ est un revêtement de l'espace topologique B. Pour tout $b \in B$, on peut prendre $U = B$ dans la Déf. 1.1. Le revêtement est dit trivial.

(b) Les applications $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ et $\exp : i\mathbb{R} \to S^1$ sont des revêtements.

[Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ouvert $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite $[Oe^{ia})$ (resp. $S^1 \smallsetminus \{e^{ia}\}$) vérifie les conditions (a) et (b) de la Déf. 1.1.]

(c) Pour tout entier $d \neq 0$, les applications $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ et $m_d : S^1 \to S^1$ définis par $m_d(z) = z^d$ sont des revêtements.

(d) *Revêtement de la droite par une courbe algébrique.* Soient $P(T,Y) \in \mathbb{C}[T,Y] \smallsetminus \mathbb{C}[T]$ un polynôme. Notons $(\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ l'ensemble des nombres $t \in \mathbb{C}$ qui ne sont pas racines du discriminant $\Delta(T)$ de $P(T,Y)$ relativement à Y. Notons ensuite $C_P^*(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $C_P(\mathbb{C})$ des points complexes (t,y) de la courbe $C : P(t,y) = 0$ tels que $t \in (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$. La première projection $p_T : (t,y) \mapsto t$ induit un revêtement $C_P^*(\mathbb{C}) \to (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ de degré $d = \deg_Y(P)$.

[Pour tout $t \in (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$, le polynôme $P(t,Y)$ admet d racines simples $y_1, \ldots, y_d$. Le théorème des fonctions implicites, qu'on applique à chacun des points (t, y_i), $i = 1, \ldots, d$, fournit un voisinage ouvert trivialisant de t.]

1.2. Vocabulaire. — L'espace B est appelé *base du revêtement*. On utilise fréquemment le terme « revêtement » et pour l'application f et pour l'espace du haut X. Un ouvert U vérifiant (a) et (b) est dit *trivialisant*. Le revêtement est *trivial* si B est un ouvert trivialisant, *i.e.*, si X est homéomorphe à un produit $B \times D$ (avec D discret) et f correspond à la première projection.

Un revêtement $f : X \to B$ est en particulier un *homéomorphisme local*, *i.e.*, tout élément $x \in X$ a un voisinage ouvert V tel que $f(V)$ soit ouvert et que f induise un homéomorphisme entre V et $f(V)$. L'espace X hérite donc des propriétés locales de B ; X hérite aussi de la séparation de B. Noter qu'inversement un homéomorphisme local n'est pas un revêtement en général.

Les applications $f_d^{-1} : U \to X$ sont des *sections* de f au dessus de U. De façon générale, une section s de f au dessus de U est une application continue $s : U \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_U$. La section s est un homéomorphisme de U sur l'ouvert $s(U)$.

[Sa réciproque est $f|_{s(U)}$. L'ensemble $s(U)$ est ouvert : soient $b \in U$ et $U' \subset U$ un voisinage ouvert de b trivialisant f et $(V'_d)_{d \in D}$ les ouverts disjoints de $f^{-1}(U')$. Il existe $d \in D$ tel que $s(b) \in V'_d$. Comme s est continue, il existe U'' voisinage ouvert de b tel que $s(U'') \subset V'_d$. On a alors $s(U'') = f^{-1}(U'') \cap V'_d$: pour l'inclusion « $\supset$ », si $x \in f^{-1}(U'') \cap V'_d$, alors $s(f(x)) = x$ car les deux termes ont même image par f et sont tous les deux dans V'_d où f est injective. Conclusion : $s(U'')$ est un voisinage ouvert de $s(b)$ inclus dans $s(U)$.]

Si deux sections s, s' d'un revêtement f au dessus de U coïncident en un point b alors elles coïncident sur un voisinage de b.

[Comme s et s' sont continues, b a un voisinage U tel que $s(U)$ et $s'(U)$ sont contenus dans un ouvert où f est injective ; s et s' sont nécessairement égales dans U.]

Si U est de plus connexe, alors s et s' coïncident sur U.

[Le sous-ensemble de U où $s = s'$ est ouvert et fermé.]

On a une notion de *morphisme de revêtements*. Si $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ sont deux revêtements, alors un morphisme entre ces deux revêtements est une application continue $\chi : X \to X'$ telle que $f' \circ \chi = f$. Les notions de d'*isomorphisme*, d'*endomorphisme*, d'*automorphisme* sont définies de façon habituelle.

Exemples 1.4

(a) L'application $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ donnée par $\chi(z) = \exp(z/d)$ (d entier non nul) est un morphisme du revêtement $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ vers le revêtement $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

(b) Pour tout entier $d > 0$ et pour chaque racine d-ième ζ de 1, l'application $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ donnée par $z \to \zeta z$ est un automorphisme du revêtement $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

1.3. Fibres. — Pour tout $b \in B$, on appelle *fibre au dessus de* b du revêtement f l'ensemble $f^{-1}(b)$. Si U est un ouvert trivialisant contenant b alors la fibre $f^{-1}(b)$ est en bijection avec l'ensemble discret D de la Déf. 1.1. Un revêtement est dit *localement fini* (« finite-to-one map » en anglais) si les fibres sont des ensembles finis. La proposition ci-dessous montre alors que si la base B est connexe, les fibres ont le même cardinal d, qu'on appelle le *degré* du revêtement. On dira dans ce cas que le revêtement est un revêtement fini, ou plus précisément, un revêtement à d feuillets.

Proposition 1.5. — *Soit $f : X \to B$ un revêtement. Supposons la base B connexe. Alors les fibres sont toutes en bijection. En particulier, elles ont le même cardinal si le revêtement est localement fini.*

Démonstration. — Pour F espace topologique discret, notons B_F le sous-ensemble de B des points b tel que la fibre $f^{-1}(b)$ est en bijection avec F.

L'ensemble B_F est ouvert : si $b \in B_F$, tout ouvert trivialisant contenant b est inclus dans B_F. L'ensemble B_F est fermé. En effet soit b un point adhérent à B_F. Si U est un ouvert trivialisant contenant b, U coupe B_F. Les fibres au-dessus des points de U, en particulier $f^{-1}(b)$, sont en bijection avec F.

Conclusion : si B est connexe, alors B_F est vide ou égal à B. □

Exemples 1.6

Les fibres du revêtement $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Les revêtements $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ donnés par $z \to z^d$ sont des revêtement à d feuillets. Les revêtements de la droite par une courbe algébrique définis dans l'exemple 1.2 sont des revêtements de degré $\deg_Y P$.

1.4. Opérations. — On a la notion de revêtements induits, de revêtements produit, de revêtements quotient.

Restriction de l'espace du haut. — La restriction $f : X' \to f(X')$ d'un revêtement $f : X \to B$ à un sous-ensemble $X' \subset X$ de X n'est pas un revêtement en général : prendre par exemple pour f le revêtement trivial $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \to \mathbb{R}$ et $X' = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R}^\times \times \{1\}$. On a cependant le résultat suivant.

Proposition 1.7. — *Soit $f : X \to B$ un revêtement de base B connexe et localement connexe. Si C est une partie non vide ouverte et fermée de X, l'application $f : C \to B$ est un revêtement. En particulier, pour tout $t \in B$, $f^{-1}(t) \cap C \neq \varnothing$.*

Le résultat s'applique notamment dans le cas où C est une composante connexe de X (ou une réunion de composantes connexes de X). En effet les composantes connexes de X sont ouvertes car X localement connexe (puisque B l'est)) et fermées (elles le sont toujours).

Démonstration. — Soit $b \in B$ et U un ouvert trivialisant connexe contenant b. On a donc $f^{-1}(U) = \bigcup_{d\in D} V_d$ où les V_d sont des ouverts disjoints homéomorphes à U. Comme C est une partie ouverte et fermée de B et que chaque V_d est connexe, pour tout $d \in D$, on a ou bien $V_d \cap C = \varnothing$ ou bien $V_d \subset C$. L'ensemble $f^{-1}(U) \cap C$ est donc réunion disjointe des ouverts V_d pour lesquels $V_d \cap C \neq \varnothing$. Il reste juste à voir qu'il en existe au moins un, *i.e.*, que $f^{-1}(U) \cap C \neq \varnothing$. On montre de la même façon que pour la Prop. 1.5 que les ensembles $f^{-1}(b) \cap C$, $b \in B$, ont même cardinal. □

Exemples 1.8

(a) $f : C_P^*(\mathbb{C}) \to (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ est le revêtement de la droite complexe donné par une courbe algébrique $P(t, y) = 0$ (*cf.* Ex. 1.3.(d)) et C est le sous-ensemble de $C_P^*(\mathbb{C})$ des zéros d'un facteur irréductible de $P(T, Y)$.

(b) Le résultat est faux si B n'est pas connexe : prendre pour X les points réels de tangente non verticale de $y^2 = t(t + 1)(t + 2)$; on a $B =]-2, -1[\cup]0, +\infty[$; la projection sur t n'est pas surjective quand on la restreint à une composante connexe. Idem avec $t = y^3$.

Restriction de la base. — Si $f : X \to B$ est un revêtement et $B' \subset B$ est une partie de B, alors $f : f^{-1}(B') \to B'$ est un revêtement (à autant de feuillets).

Exemple 1.9. — Le revêtement $\exp : i\mathbb{R} \to S^1$ est obtenu par restriction de la base à partir de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$.

Produit fibré. — Si $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ sont deux revêtements, on définit le produit fibré $X \times_B X'$ comme le sous-ensemble de $X \times X'$ des couples (x, x') tels que $f(x) = f'(x')$. La correspondance $(x, x') \mapsto f(x) = f'(x')$ définit un revêtement $f \times_B f' : X \times_B X' \to B$.

[Pour tout $b \in B$, la fibre au dessus de b dans le produit fibré est le produit cartésien $f^{-1}(b) \times f'^{-1}(b)$. Si U est un voisinage ouvert trivialisant de b, $x \mapsto (f(x), d(x))$ un homéomorphisme entre $f^{-1}(U)$ et $U \times F$ et $x \mapsto (f'(x), d'(x))$ un homéomorphisme entre $f'^{-1}(U)$ et $U \times F'$, alors $(x, x') \mapsto (f(x), d(x), d'(x'))$ est un homéomorphisme entre $(f \times_B f')^{-1}(U)$ et $U \times F \times F'$.]

De plus les deux projections $X \times_B X' \to X$ et $X \times_B X' \to X$ sont aussi des revêtements. Le diagramme suivant résume la situation.

$$\begin{array}{ccc} X \times_B X' & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_{X'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

Le produit fibré satisfait la propriété universelle suivante. Si $\varphi : Y \to X$ et $\varphi' : Y \to X'$ sont deux revêtements tels que $f' \circ \varphi' = f \circ \varphi$, alors il existe un unique revêtement $F : Y \to X \times_B X'$ tel que $p_X \circ F = \varphi$ et $p_{X'} \circ F = \varphi'$.

Remarque 1.10. — Il y a aussi une notion (moins intéressante) de produit direct $f \times f' : X \times X' \to B \times B'$ de deux revêtements $f : X \to B$ et $f : X' \to B'$ de base éventuellement distinctes.

Revêtement quotient. — Soient $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to B$ et $f : X \to B$ deux revêtements de B. On dit que f est un quotient de $\widetilde{f}$ ou que $\widetilde{f}$ se factorise par f s'il existe un revêtement $g = \widetilde{X} \to X$ tel que $f \circ g = \widetilde{f}$.

Exemple 1.11. — Le revêtement $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ donné par $z \to z^d$ $(d \neq 0)$ est un quotient de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$. En effet, on a $\exp = m_d \circ \chi$ où $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est donné par $\chi(z) = \exp(z/d)$.

2. Monodromie

2.1. Actions de groupes. — Si S est un ensemble, on note $\mathrm{Per}(S)$ l'ensemble des permutations de S, *i.e.*, des bijections $S \to S$. Si $S = \{1, \ldots, d\}$, on note $\mathrm{Per}(S) = S_d$. Muni de la composition des applications, l'ensemble $\mathrm{Per}(S)$ est un groupe. On notera « $\cdot$ » la loi définie par : $a \cdot b = b \circ a$, $a, b \in \mathrm{Per}(S)$.

Remarque 2.1. — Le produit $a \cdot b$ correspond au produit des permutations de S vues comme actions notées à droite. Plus précisément, pour $s \in S$ et $f \in \mathrm{Per}(S)$, on peut noter le résultat de la permutation a sur l'élément s de deux façons :

– Notation comme action à gauche (ou notation fonctionnelle) : $f(s)$ ou $f \cdot s$.
– Notation comme action à droite : s^f ou $(s)f$ ou encore $s \cdot f$.

Pour un produit de deux éléments $a, b \in \mathrm{Per}(S)$, les deux notations se correspondent par les formules

$$(a \circ b)(s) := a(b(s)) = (s^b)^a := s^{(b\cdot a)}$$

Cela a une incidence sur le calcul dans S_d. Par exemple, on a :

$$\begin{cases} (123) \circ (23) = (12) \\ (123) \cdot (23) = (13) \end{cases}$$

Une *action à gauche* d'un groupe G sur un ensemble S est, de façon équivalente :

– un homomorphisme T de G dans le groupe $(\mathrm{Per}(S), \circ)$, (*i.e.*, $T(ab) = T(a) \circ T(b)$), ou

– un anti-homomorphisme de G dans le groupe $(\mathrm{Per}(S), \cdot)$, (*i.e.*, $T(ab) = T(b) \cdot T(a)$).

On note $T(a)(s)$ ou $a(s)$ ou $a \cdot s$ le résultat de l'action de $a \in G$ sur $s \in S$.

Une *action à droite* d'un groupe G sur un ensemble S est, de façon équivalente :

– un homomorphisme T de G dans le groupe $(\mathrm{Per}(S), \cdot)$, (*i.e.*, $T(ab) = T(a) \cdot T(b)$), ou

– un anti-homomorphisme de G dans le groupe $(\mathrm{Per}(S), \circ)$, (*i.e.*, $T(ab) = T(b) \circ T(a)$).

On note $s^{T(a)}$ ou s^a ou $s \cdot a$ le résultat de l'action de $a \in G$ sur $s \in S$.

Une action à droite d'un groupe $(G, \times)$ est une action à gauche du groupe G pour la loi duale $*$ définie par $a * b = b \times a$. On peut donc se contenter dans la théorie de l'une des deux notions. Nous préférerons souvent les actions à gauche pour lesquelles la notation correspond à la notation fonctionnelle.

Deux actions (à gauche) $T : G \to \mathrm{Per}(S)$ et $T' : G \to \mathrm{Per}(S')$ sont dites *équivalentes* s'il existe une bijection $\gamma : S \to S'$ telle que $\gamma \circ T(g) = T'(g) \circ \gamma$ $(g \in G)$, (ou, de façon équivalente, telle que si $T(g)(x) = y$, alors $T'(g)(\gamma(x)) = \gamma(y)$).

Étant donnés une action (à gauche) $T : G \to \mathrm{Per}(S)$ et un élément $s \in S$, on appelle *orbite de s* l'ensemble $O(s) = T(G)(s) = \{T(g)(s) \mid g \in G\}$ et *fixateur de s* le sous-groupe $G(s) = \{g \in G \mid T(g)(s) = s\}$ de G. L'orbite $O(s)$ est en bijection avec l'ensemble quotient $G/G(s)$. Une action $T : G \to \mathrm{Per}(S)$ est dite *transitive* si $S \neq \varnothing$ et si S ne consiste qu'en une seule orbite. Plus généralement, si $k \geqslant 1$ est un entier, l'action T est dite *k-transitive* si T induit une action transitive sur l'ensemble des k-uplets à coordonnées distinctes de S.

Si G est un groupe et H un sous-groupe d'indice d, l'ensemble des d classes à gauche de G modulo H est noté $G/\cdot H$. L'action de G par translation à gauche sur $G/\cdot H$ est définie par $g \cdot (xH) = gxH$ $(x, g \in G)$. C'est une action à gauche transitive de G sur $G/\cdot H$.

Théorème 2.2. — *Inversement soit $T : G \to \mathrm{Per}(S)$ une action à gauche transitive. Soit $s \in S$. Alors l'action T est équivalente à l'action par translation à gauche sur* *l'ensemble $G/\cdot G(s)$ des classes à gauche de G modulo le fixateur $G(s)$ de s. (On a un résultat semblable à droite).*

Les classes d'équivalence d'actions transitives d'un groupe G correspondent donc aux classes d'équivalence de sous-groupes de G pour la conjugaison dans G.

[On laisse le lecteur vérifier que si deux actions transitives $G \to S_d$ sont équivalentes (par $\sigma \in S_d$), alors les fixateurs d'un même élément s sont conjugués dans G (par un élément de G envoyant s sur $\sigma(s)$). Et que si deux sous-groupes sont conjugués, alors les actions par translations à gauche sur les classes à gauche sont équivalentes.]

Démonstration. — Pour tout $x \in G$, $T(x)(s)$ ne dépend que de la classe à gauche $xG(s)$. La correspondance $xG(s) \mapsto T(x)(s)$ induit une bijection $\gamma : G/\cdot G(s) \to S$. On vérifie facilement que, pour tout $g \in G$ et tout $xG(s) \in G/\cdot G(s)$, on a :

$$\gamma\,[g \cdot (xG(s))] = T(g)(\gamma(xG(s)). \qquad \square$$

2.2. Relèvement des chemins. — Le résultat suivant, qu'on appelle propriété de relèvement des chemins et qui généralise le Th. 2.5 du Ch. 1, est à la base de la classification des revêtements.

Théorème 2.3. — *Soit $f : X \to B$ un revêtement. Soient $c : [a, b] \to B$ un chemin et $x \in f^{-1}(c(a))$ un point dans la fibre du point initial de c. Alors il existe un unique chemin $\widetilde{c} : [a, b] \to X$ tel que $f \circ \widetilde{c} = c$ et de point initial x.*

Démonstration. — On généralise la preuve du Th. 2.5 du Ch. 1.

Existence. — Tout point $c(t)$ $(t \in [a, b])$ a un voisinage ouvert trivialisant V_t (dans le cas de S^1, on avait pris comme ouvert trivialisant S^1 privé d'un point). Comme c est continue, il existe un intervalle $[u_t, v_t]$ tel que $c([u_t, v_t]) \subset V_t$. Comme $[a, b]$ est compact, on peut recouvrir $[a, b]$ par un nombre fini de ces intervalles $[u_i, v_i]$, $i = 1, \dots, m$. Quitte à les réordonner, on peut supposer les v_i croissant. On a alors $u_{i+1} \leqslant v_i$. Les intervalles $[v_i, v_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$ (où on a posé $v_o = a$) ont la propriété de recouvrir $[a, b]$ et d'avoir une image par c contenue dans un ouvert trivialisant U_i. On définit $\widetilde{c}$ par récurrence : sur $[v_i, v_{i+1}]$, $\widetilde{c}$ est le composé de c avec l'unique section $U_i \to X$ envoyant $c(v_i)$ sur l'extrémité $\widetilde{c}(v_i)$ du chemin $\widetilde{c}|_{[v_{i-1}, v_i]}$ (et sur x pour $i = 0$).

Unicité. — L'ensemble des points $t \in [a, b]$ où deux relèvements de c coïncident est un ensemble ouvert (même argument que pour les sections) et fermé. $\square$

Comme pour le Th. 2.5 du Ch. 1, le Th. 2.3 se généralise au problème du relèvement des applications c d'un produit d'intervalles fermés bornés dans B. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la démonstration. Cette généralisation est utilisée dans le (a) du théorème ci-dessous.

Théorème 2.4. — *Soit x un point fixé de X et $f(x) = t_o$.*

(a) *La correspondance qui, à un chemin $c : [a,b] \to B$ joignant t_o à t' associe le chemin $\widetilde{c}$, induit une application $\widetilde{\cdot} : \Pi_{t_o,t'} \to \bigsqcup_{y|f(y)=t'} \Pi_{x,y}(X)$.* (b) *La correspondance qui, à un chemin $c : [a,b] \to B$ basé en $f(x) = t_o$ associe l'extrémité $\widetilde{c}(b)$ du chemin $\widetilde{c}$, induit une injection Ω_x de l'ensemble quotient $\pi_1(B,t_o)/f_*(\pi_1(X,x))$. des classes à droite modulo $f_*(\pi_1(X,x))$, dans la fibre $f^{-1}(t_o)$.*

> [Dans le cas de S^1 (*cf.* Ch. 1 § 2.2), l'injection Ω_x est l'application « degré ». Elle a la propriété supplémentaire d'être un homomorphisme de groupes.]

(c) *L'image de cette injection est l'ensemble des points de $f^{-1}(t_o)$ qui sont dans la même composante connexe par arcs que x.*

(d) *L'application $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(B,t_o)$ est injective. Son image est le sous-groupe $H_x \subset \pi_1(B,t_o)$ des éléments $[c] \in \pi_1(B,t_o)$ tels que $\Omega_x([c]) = x$.*

Démonstration

(a) Il s'agit de montrer que si c_1 et c_2 sont deux chemins homotopes sur B joignant t_o à t', alors les chemins $\widetilde{c_1}$ et $\widetilde{c_2}$ sont homotopes sur X. Une homotopie H sur B entre les chemins $c_i : [a,b] \to B$, $i = 1,2$, a un unique relèvement $\widetilde{H}$ à X valant x au point $(0,a)$. La correspondance $s \mapsto \widetilde{H}(s,b)$ à valeurs dans la fibre $f^{-1}(t')$ est nécessairement constante. L'application $\widetilde{H}$ est donc une homotopie entre les chemins de mêmes extrémités $t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$ et $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$. Ces derniers relèvent respectivement c_1 et c_2 et commencent en x : ce sont donc $\widetilde{c}_1$ et $\widetilde{c}_2$.

(b) Il faut voir tout d'abord que $\widetilde{c}(b)$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[c]$ de c. Cela résulte de (a). Soient ensuite deux chemins c_1 et c_2, basés en t_o tels que $c_1 = (f \circ \gamma) \cdot c_2$ avec γ chemin sur X basé en x. On a $\widetilde{f \circ \gamma} = \gamma$ et aussi $\widetilde{(f \circ \gamma) \cdot c_2} = \gamma \cdot \widetilde{c_2}$. On en déduit $\widetilde{c_1} = \gamma \cdot \widetilde{c_2}$. En particulier $\widetilde{c_1}$ et $\widetilde{c_2}$ ont même extrémité. Cela montre que Ω_x est bien définie. Voyons que Ω_x est injective. Soient deux chemins $c_i : [a,b] \to B$, $i = 1,2$, basés en t_o tels que $\widetilde{c}_1(b) = \widetilde{c}_2(b)$. Alors $\widetilde{c}_1$ et $\widetilde{c}_2$ ont mêmes extrémités. Le chemin $\widetilde{\Delta} = \widetilde{c}_1.(\widetilde{c}_2)^{-1}$ est basé en x et vérifie $f_*([\widetilde{\Delta}]) = [c_1][c_2]^{-1}$.

(c) Soit $x' \in f^{-1}(t_o)$ dans la même composante connexe par arcs que x. Il existe donc un chemin γ sur X joignant x à x'. Le chemin $c = f \circ \gamma$ est un chemin fermé sur B basé en t_o et évidemment $\widetilde{c}(b) = x'$. Conclusion : x' est dans l'image de Ω_x. L'inclusion inverse, *i.e.*, que les points dans l'image de Ω_x soient dans la même composante connexe par arcs que x, est banale.

(d) Si γ est un chemin sur X commençant en x, alors $\widetilde{f \circ \gamma} = \gamma$ et, en utilisant (a), $\widetilde{f_*([\gamma])} = [\gamma]$. Ceci montre d'une part que f_* est injective, et d'autre part que l'image de f_* est dans le groupe H_x. Inversement si $[c]$ est dans H_x, alors, par définition de H_x, $\widetilde{c}$ est un chemin fermé de X basé en x et évidemment $f_*([\widetilde{c}]) = [c]$. □

2.3. Action de la monodromie. — Soit $f : X \to B$ un revêtement. Le paragraphe précédent permet de construire, pour tout point $t_o \in B$ une action

$$T = T_{t_o} : \pi_1(B, t_o) \longrightarrow \mathrm{Per}(f^{-1}(t_o))$$

À toute classe $[c] \in \pi_1(B, t_o)$, on associe la permutation $T([c])$ de la fibre $f^{-1}(t_o)$ qui envoie chaque $x \in f^{-1}(t_o)$ sur l'extrémité du relèvement de c de point initial x.

[Que, pour tout $[c] \in \pi_1(B, t_o)$, $T([c])$ soit une bijection, résulte des deux formules

$$\begin{cases} T([c_1][c_2]) = T([c_2]) \circ T([c_1]) \text{ pour tout } [c_1], [c_2] \in \pi_1(B, t_o) \\ T(1) = T([c_{t_o}]) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

La première est immédiate. Pour la seconde, on remarque que, pour tout $x \in f^{-1}(t_o)$, le chemin constant c_x relève c_{t_o}.]

Cette action est appelée *action de la monodromie* sur la fibre $f^{-1}(t_o)$. Il s'agit d'une action à droite si $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_o))$ est muni de la composition « $\circ$ ». Cependant l'opérateur T est habituellement (et comme ci-dessus) notée à gauche. Si on préfère voir la monodromie comme une action à gauche, il faut alors munir $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_o))$ de la loi duale « $\cdot$ » (*cf.* Remarque 2.1), ou alors adopter la convention inverse de la nôtre pour le produit des chemins (*cf.* Remarque 1.1 du Ch. 1).

Remarque 2.5. — Plus généralement, on peut définir la monodromie comme la donnée, pour tout $(t, t') \in B \times B$ de l'(anti-)homomorphisme

$$T = T_{t,t'} : \Pi_{t,t'} \longrightarrow \mathrm{Bij}(f^{-1}(t), f^{-1}(t'))$$

qui, à la classe $[c] \in \Pi_{t,t'}$ d'un chemin sur B joignant t à t', associe la bijection $T([c])$ entre les deux fibres $f^{-1}(t)$ et $f^{-1}(t')$, qui envoie chaque élément $x \in f^{-1}(t)$ sur l'extrémité du relèvement de c de point initial x.

Soient t_o et t'_o deux points de B et γ un chemin joignant t_o à t'_o. Les deux actions T_{t_o} et $T_{t'_o}$ sont reliées de la façon suivante : pour tout $[c] \in \pi_1(B, t'_o)$,

$$T_{t_o}([\gamma c \gamma^{-1}]) = T_{t_o,t'_o}([\gamma])\ T_{t'_o}([c])\ (T_{t_o,t'_o}([\gamma]))^{-1}.$$

Supposons la base B connexe par arcs et le revêtement fini. Les fibres ont donc le même cardinal d (Prop. 1.5) et peuvent donc être identifiées à $\{1, \ldots, d\}$. D'autre part, les groupes $\pi_1(B, t_o)$ peuvent être identifiés *au* groupe fondamental $\pi_1(B)$ (Prop. 1.5 du Ch. 1). La formule ci-dessus montre que l'action de la monodromie est compatible avec ces identifications et permet de voir l'action de la monodromie sur une fibre du revêtement comme une action, définie à équivalence près,

$$T : \pi_1(B) \to S_d.$$

En combinant cela avec le Th. 2.4 et la Prop. 1.7, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 2.6. — *Soit $f : X \to B$ un revêtement de degré d de base B connexe par arcs et localement connexe par arcs.*

(a) *Les orbites de l'action $T : \pi_1(B) \to S_d$ de la monodromie correspondent aux composantes connexes de X. En particulier, l'action de la monodromie est transitive si et seulement si l'espace X est connexe par arcs.*

(b) *Supposons X connexe. Si $G = T(\pi_1(B))$, alors le groupe fondamental $\pi_1(X)$ s'identifie au groupe $T^{-1}(G(1))$ où $G(1)$ est le fixateur de 1 pour l'action $G \hookrightarrow S_d$. Le groupe $\pi_1(X)$ est donc, à isomorphisme près, un sous-groupe d'indice d de $\pi_1(B)$; plus précisément, on a $[\pi_1(B) : f_*(\pi_1(X))] = d$.*

Démonstration

(a) Soit t_o un point de B. La correspondance est donnée de la façon suivante. Soit C une composante connexe de X. L'espace X étant localement connexe par arcs (car B l'est), C est une composante connexe par arcs de X. L'ensemble $C \cap f^{-1}(t_o)$ est non vide (Prop. 1.7) et correspond à une même orbite de T_{t_o} (Th. 2.4). On associe cette orbite à C. Inversement, étant donnée une orbite de l'action de T sur $f^{-1}(t_o)$, on lui associe la composante connexe des points dans cette orbite. Ces correspondances sont clairement inverses l'une de l'autre.

[Si on change de point t_o, l'action de la monodromie ne change pas à équivalence près ; en particulier, les orbites des deux actions se correspondent (plus précisément, il existe une bijection entre les deux ensembles d'orbites qui envoie chaque orbite sur une orbite de même longueur).]

La première partie de (b) est une reformulation de Th. 2.4(d) dans le cas où X est connexe par arcs. La seconde provient de $[G : G(1)] = d$. □

Le groupe image $G = T(\pi_1(B))$ est appelé le *groupe de monodromie* du revêtement. On le notera $G(f)$ ou $G(X/B)$. Le groupe $G(f)$ est défini à conjugaison près dans S_d. Plus précisément, le groupe de monodromie $G(f)$, est, à conjugaison près, le groupe $T_{t_o}(\pi_1(B, t_o))$ où t_o est un point quelconque de B et où la fibre $f^{-1}(t_o)$ est identifiée à $\{1, \ldots, d\}$. On peut le voir aussi comme le groupe

$$\pi_1(B, t_o)/\operatorname{Ker}(T_{t_o}) \simeq \pi_1(B, t_o)/\bigcap_{i=1}^{d} f_*(\pi_1(X, x_i))$$

où $x_1, \ldots, x_d$ sont les points de la fibre $f^{-1}(t_o)$.

3. Classification

On suppose désormais l'espace base B connexe par arcs et localement connexe par arcs. D'après le paragraphe précédent, à tout revêtement connexe $f : X \to B$ de B de degré d, on peut associer, pour tout point $t_o \in B$, une action à droite $T : \pi_1(B, t_o) \to S_d$ transitive, ou, ce qui revient au même, d'après le Th. 2.2, un sous-groupe d'indice d de $\pi_1(B, t_o)$.

Proposition 3.1. — *Si $f : X \to B$ et $g : X \to B$ sont deux revêtements équivalents, alors les actions correspondantes $\pi_1(B, t_o) \to S_d$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Soit $\chi : X \to X'$ un isomorphisme entre les deux revêtements. Cet isomorphisme induit une bijection, notée encore χ, de la fibre $f^{-1}(t_o)$ vers la fibre $g^{-1}(t_o)$. Si c est un chemin sur B basé en t_o et $\widetilde{c}$ le relèvement de c sur X (*via* f) commençant en un point x, alors $\chi \circ c$ est le relèvement de c sur X' (*via* g) commençant en $\chi(x)$. Cela donne la conclusion désirée : si l'action de la monodromie de f (resp. de g) sur la fibre $f^{-1}(t_o)$ (resp. sur la fibre $g^{-1}(t_o)$) est notée T_f (resp. T_g), on a, pour tout $[c] \in \pi_1(B, t_o)$,

$$\chi \circ T_f([c]) = T_g([c]) \circ \chi. \qquad \square$$

On va maintenant construire une correspondance inverse de la correspondance

« revêtement de $B \to$ action de $\pi_1(B)$ ».

Cela montrera en particulier que la réciproque de la Prop. 3.1 est vraie (Cor. 3.3).

On suppose désormais que B est aussi localement simplement connexe. Supposons donnés un point $t_o \in B$ et une action à droite transitive $T : \pi_1(B, t_o) \to S_d$. On va construire un revêtement $f_T : X_T \to B$ tel que l'action de la monodromie sur la fibre $f_T^{-1}(t_o)$ soit équivalente à l'action T. Posons $G = T(\pi_1(B, t_o))$ et notons H le sous-groupe $H = T^{-1}(G(1))$.

Définition de $f_T : X_T \to B$. — On note $\Pi_{t_o,\cdot}(B)$ l'ensemble $\bigsqcup_{t\in B} \Pi_{t_o,t}(B)$ des classes d'homotopie de chemins sur B commençant en t_o. Pour tout $[c] \in \Pi_{t_o,\cdot}(B)$, on note $f_\infty([c])$ l'extrémité de $[c]$. Deux éléments $[c_1], [c_2] \in \Pi_{t_o,\cdot}(B)$ sont dits équivalents si $f_\infty([c_1]) = f_\infty([c_2])$ et si $[c_1][c_2]^{-1} \in H$. L'ensemble X_T est défini comme l'ensemble quotient de $\Pi_{t_o,\cdot}(B)$ par cette relation d'équivalence et f_T comme l'application induite par f_∞ sur X_T. Pour tout $[c] \in \Pi_{t_o,\cdot}(B)$, on notera $H[c] \in X_T$ sa classe d'équivalence.

Topologie sur X_T. — Pour tout $H[c] \in X_T$, on définit une base de voisinages de $H[c]$ de la manière suivante. Si U est un voisinage simplement connexe de $t = f_T(H[c])$, on note $\mathcal{V}_U([c])$ l'ensemble des éléments $H[c\delta]$ où δ décrit l'ensemble des chemins joignant t à un point de U. On vérifie facilement que l'ensemble des $\mathcal{V}_U([c])$ où U décrit une base de voisinages simplement connexes de t, constitue une base de voisinages de $H[c]$ sur l'espace X_T.

L'application f_T est un revêtement. — Soit $t \in B$ et U un voisinage simplement connexe de t. L'ensemble $f_T^{-1}(U)$ est égal à la réunion disjointe des $\mathcal{V}_U([cc_o])$ où c_o est un chemin joignant t_o à un point t_1 de U et où $[c]$ décrit un ensemble $[c_1], \ldots, [c_d]$ de représentants des classes à droite de $\pi_1(B, t_o)$ modulo H.

[Par définition, $f_T^{-1}(U)$ est l'ensemble des classes de chemins $[\gamma]$ joignant t_o à un point de U, modulo H. Fixons un point t_1 de U et c_o un chemin joignant t_o à t_1. Pour tout $H[\gamma] \in f_T^{-1}(U)$, si δ est un chemin dans U joignant l'extrémité de γ à t_1, alors le chemin $\gamma\delta\overline{c_o}$ est un chemin fermé basé en t_o et dont la classe d'homotopie ne dépend pas de δ. Modulo H, cette classe de chemins ne peut prendre que d valeurs, à savoir, les d éléments $H[c_1],\dots,H[c_d]$. La classe initiale $[\gamma]$ est donc de la forme $H[c_i c_o \overline{\delta}]$, $i=1,\dots,d$ et où $\overline{\delta}$ est un chemin quelconque dans U joignant t_1 à un point de U.]

Cela montre que f_T est un revêtement (la description de $f_T^{-1}(U)$ montre en particulier que f_T est continue). Enfin l'application f_T induit sur chaque $\mathcal{V}_U([c_i c_o])$ un homéomorphisme sur U. Sa réciproque est l'application qui à un point $t' \in U$ associe la classe $H[c_i c_o \delta]$ où δ est un chemin quelconque dans U joignant t_1 à t'. Cette dernière application est clairement continue (l'image réciproque d'un ouvert de type $\mathcal{V}_V([c])$ avec $V \subset U$ est égal à V).

L'action de la monodromie de f_T est équivalente à T. — Soit $c:[0,1]\to B$ un chemin fermé basé en un point de B, par exemple t_o. Soit $x \in X_T$ un point tel que $f_T(x)=t_o$. Le point x est de la forme $H[c_i]$ pour un indice $i=1,\dots,d$. Considérons le chemin suivant C paramétré par $[0,1]$: pour $s\in[0,1]$, $C(s)=H[c_i c(st)]$ est la classe à droite modulo H du chemin produit du chemin c_i et du chemin $t\to c(st)$ joignant t_o à $c(s)$. L'application $s\to C(s)$ est continue,

[Si $s_o\in[0,1]$ et U est un voisinage simplement connexe de $c(s_o)$, il existe un voisinage I de s_o tel que $c(I)\subset U$. On a alors $C(I)\subset \mathcal{V}_U([C(s_o)])$.]

relève le chemin c et commence en $C(0)=H[c_i]=x$. Son extrémité est $C(1)=H[c_i c]$. L'action de monodromie de $[c]$ sur la fibre $f_T^{-1}(t_o)$ correspond donc à la multiplication à droite sur les classes à droite de $\pi_1(B,t_o)$ modulo H. D'après le Th. 2.2 et la définition de H, cette action est équivalente à l'action T.

Si T et T' sont deux actions $\pi_1(B,t_o)\to S_d$ équivalentes, alors les revêtements correspondants sont équivalents. — Supposons qu'il existe $\sigma\in S_d$ tel que $T'(x)=\sigma T(x)\sigma^{-1}$ pour tout $x\in\pi_1(B,t_o)$. Le groupe H' associé à T' est alors $H'=T^{-1}(G(\sigma(1)))$. Soit $\delta\in\pi_1(B,t_o)$ tel que $T(\delta)(1)=\sigma(1)$ (δ existe car T transitive) ; on a alors $H'=\delta H\delta^{-1}$. La correspondance $[c]\mapsto[\delta c]$ induit une application de X_T vers $X_{T'}$ (car si $[c_1c_2^{-1}]\in H$ alors $[(\delta c_1)(\delta c_2)^{-1}]\in\delta H\delta^{-1}=H'$). On vérifie facilement que cette application $X_T\to X'_T$ est une équivalence entre les deux revêtements $f_T:X_T\to B$ et $f_{T'}:X_{T'}\to B$.

À équivalence près, le revêtement $f_T:X_T\to B$ ne dépend pas du point t_o. — Soit γ un chemin sur B joignant t_o à un second point base t'_o. La conjugaison $\alpha_{[\gamma]}$ par $[\gamma]$ (*i.e.*, $\alpha_{[\gamma]}([c])=[\gamma][c][\gamma]^{-1}$) identifie les groupes $\pi_1(B,t'_o)$ et $\pi_1(B,t_o)$. Soit $T'=T\circ\alpha_{[\gamma]}$ l'action $\pi_1(B,t'_o)\to S_d$ déduite de cette identification. Alors la correspondance $[c]\mapsto[\gamma c]$ induit une équivalence $X_T\to X_{T'}$.

Si $T:\pi_1(B,t_o)\to S_d$ est l'action de monodromie d'un revêtement donné $f:X\to B$, alors le revêtement $f_T:X_T\to B$ est équivalent à $f:X\to B$. — Soit $x\in X$ le point dans la fibre $f^{-1}(t_o)$ correspondant à 1 dans l'identification de $f^{-1}(t_o)$ avec $\{1,\dots,d\}$. Pour $y\in X$, on choisit un chemin sur X joignant x à y et on définit $\chi(y)$

comme la classe $H[f\circ c]$ modulo H du chemin $f\circ c$. Cette définition ne dépend pas du chemin c : si c' est un second chemin sur X joignant x à y, la différence $[f\circ(c'c^{-1})]$ est dans $f_*(\pi_1(X,x))$ qui, d'après le Th. 2.4, s'identifie au sous-groupe $H=T^{-1}(G(1))$ de $\pi_1(B,t_o)$. La correspondance $y\mapsto\chi(y)$ définit une équivalence entre les revêtements $f:X\to B$ et $f_T:X_T\to B$. La réciproque de χ associe à toute classe $H[c]$ modulo H l'extrémité du chemin sur X relevant c et commençant en x.

Le résultat suivant regroupe les conclusions principales de la construction précédente. Essentiellement, les revêtements d'un espace B connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe correspondent, à équivalence près, aux représentations transitives, ou, ce qui revient au même, aux sous-groupes, du groupe fondamental de B. Par exemple, les revêtements de $\mathbb{C}^\times$ correspondent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Ces sous-groupes sont de la forme $d\mathbb{Z}$, $d>0$. Les revêtements correspondants sont les revêtements $z\to z^d$.

Théorème 3.2. — *Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe.*

(a) *Les classes d'équivalence de revêtements $f:X\to B$ connexes de degré d de B correspondent de façon biunivoque aux classes d'équivalence d'actions transitives $T:\pi_1(B)\to S_d$, ou encore aux classes d'équivalence de sous-groupes d'indice d de $\pi_1(B)$ pour la relation de conjugaison dans $\pi_1(B,t_o)$.*

(b) *Plus précisément, étant donné un point $t_o\in B$, la correspondance*

$$\begin{array}{ccc} \textit{classe d'équivalence} & & \textit{classe d'équivalence} \\ \textit{de revêtements} & \longmapsto & \textit{de l'action de monodromie} \\ f:X\to B & & T:\pi_1(B,t_o)\to S_d \\ \textit{connexes de degré } d & & \textit{sur la fibre } f^{-1}(t_o) \end{array}$$

a pour réciproque la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \textit{classe d'équivalence} & & \textit{classe d'équivalence} \\ \textit{d'actions transitives} & \longmapsto & \textit{du revêtement} \\ T:\pi_1(B,t_o)\to S_d & & f_T:X_T\to B \end{array}$$

(c) *Ces deux correspondances ne dépendent pas du choix du point $t_o\in B$ modulo l'identification habituelle $\pi_1(B,t_o)\simeq\pi_1(B,t_o')$.*

Corollaire 3.3. — *Sous les hypothèses précédentes, si les actions de monodromie de deux revêtements de B sont équivalentes, alors les revêtements sont équivalents.*

Démonstration. — Combiner le 5ième et le dernier points de la construction.

Remarque 3.4. — On a supposé les revêtements finis afin de simplifier les notations. Mais cette hypothèse n'a joué aucun rôle dans la construction. Le Th. 3.2 est donc valable plus généralement pour des revêtements connexes de fibre en bijection avec un ensemble donné D. Il faut juste remplacer « de degré d » par « de fibre en bijection avec D » et S_d par $\mathrm{Per}(D)$.

4. Applications

4.1. Quotients d'un revêtement. — Essentiellement les quotients d'un revêtement $f : X \to B$ correspondent aux sous-groupes de $\pi_1(B)$ qui contiennent $\pi_1(X)$.

De façon précise, soient $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ deux revêtements connexes de B. Soient $x \in X$ tel que $f(x) = t_o$ et $x' \in X'$ tel que $f'(x') = t_o$. Les deux revêtements f et f' correspondent à deux sous-groupes $H = f_*(\pi_1(X,x))$ et $H' = f'_*(\pi_1(X',x'))$ de $\pi_1(B,t_o)$, ou, de façon équivalente, à deux actions $T : \pi_1(B,t_o) \to S_d$ et $T' : \pi_1(B,t_o) \to S_{d'}$.

Proposition 4.1. — *Le revêtement $f' : X' \to B$ est un quotient du revêtement $f : X \to B$ si et seulement si H est inclus dans l'un des sous-groupes conjugués de H' dans $\pi_1(B,t_o)$.*

Démonstration

($\Rightarrow$) : Si $f = f' \circ g$ où $g : X \to X'$ est un revêtement, on a alors $g_*(\pi_1(X,x) \subset \pi_1(X',g(x))$. On en déduit $f_*(\pi_1(X,x)) \subset f'_*(\pi_1(X',g(x)))$. Le groupe de gauche est H. Le groupe $\pi_1(X',g(x))$ étant conjugué à $\pi_1(X',x')$ (puisque $f'(x') = f'(g(x)) = t_o$), celui de droite est conjugué à H' dans $\pi_1(B,t_o)$.

($\Leftarrow$) : Notons comme en § 3 $f_T : X_T \to B$ et $f_{T'} : X_{T'} \to B$ les revêtements associés aux actions T et T'. On peut supposer $H \subset H'$. Il est clair alors que le revêtement $f_{T'}$ est un quotient du revêtement f_T (revenir à la définition de X_T et $X_{T'}$). Cela achève la démonstration puisque les revêtements f_T et $f_{T'}$ sont respectivement équivalents à f et f'. □

Exemple 4.2. — Soient m_d et $m_{d'}$ les deux revêtements $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ donnés par $z \mapsto z^d$ et $z \mapsto z^{d'}$. Le revêtement m_d est quotient de $m_{d'}$ si et seulement si $d'\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$, *i.e.*, si et seulement si $d|d'$.

4.2. Revêtement universel. — La remarque 3.4 permet d'appliquer les résultats du § 3 au cas où l'action $T : \pi_1(B,t_o) \to \mathrm{Per}(\pi_1(B,t_o))$ donnée est la multiplication à droite sur $\pi_1(B,t_o)$. Avec les notations précédentes, on a $D = \pi_1(B,t_o)$ et $H = \{1\}$. Le revêtement $X_T \to B$ correspondant est noté $\widetilde{f} : \widetilde{B} \to B$ et est appelé le *revêtement universel* de B.

Les éléments de $\widetilde{B}$ sont les classes d'homotopie de chemins sur B commençant en t_o modulo la relation d'équivalence qui identifie deux classes de même extrémité. L'application $\widetilde{f}$ associe à tout élément $[c]$ de $\widetilde{B}$ l'extrémité du chemin correspondant c. L'action T ci-dessus est libre. Le groupe fondamental de $\widetilde{B}$ est donc trivial, *i.e.*, le revêtement universel $\widetilde{B}$ est simplement connexe.

De la Prop. 4.1, on déduit la propriété universelle suivante qui caractérise le revêtement universel (à équivalence près).

Théorème 4.3. — *Tout revêtement connexe $f : X \to B$ de B est un quotient du revêtement universel $\widetilde{f} : \widetilde{B} \to B$ de B.*

Remarque 4.4. — La Prop. 4.1 montre en fait que si $E \to B$ est un revêtement simplement connexe de B, alors E vérifie la propriété universelle ci-dessus et donc est le revêtement universel de B. Cela montre par exemple que le revêtement universel de $\mathbb{C}^\times$ est $\mathbb{C}$, celui de S^1 est $\mathbb{R}$, que le revêtement universel d'un espace simplement connexe est lui-même, etc.

4.3. Existence de revêtements finis

Corollaire 4.5. — *Si un espace B connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe est simplement connexe, alors tout revêtement fini de B est trivial.*

Démonstration. — Soit $f : X \to B$ un revêtement de B. Il s'agit de montrer que la restriction $f_C : C \to B$ de f à toute composante connexe C de X est un homéomorphisme. L'action de monodromie est une action du groupe $\pi_1(B)$ qui est trivial. Comme cette action est transitive sur toute fibre de f_C, les fibres de f_C ne comportent qu'un élément.

[Ce résultat aurait pu être établi plus tôt. C'est en fait une conséquence de théorème de relèvement des chemins. Soient y_1, y_2 deux points dans la fibre $f^{-1}(t_o)$ d'un revêtement connexe $f : X \to B$. Soit γ un chemin sur X joignant y_1 à y_2, son image $f \circ \gamma$ est un chemin fermé sur B et est donc homotope au chemin constant c_{t_o} (B est simplement connexe). Le chemin constant c_{y_1} est l'unique relèvement de c_{t_o} commençant en y_1. D'après le Th. 2.4, c_{y_1} et γ ont même extrémité, d'où $y_1 = y_2$.]

Remarque 4.6

(a) La réciproque du Cor. 4.5 est vraie si l'espace B est un tore complexe à g trous. C'est-à-dire, si son groupe fondamental est non trivial, *i.e.*, si $g > 0$, alors un tore complexe à g trous possède des revêtements finis non triviaux. En effet, pour $d > 0$ entier quelconque, considérons l'homomorphisme du groupe libre $F(2g) = F(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ à $2g$ générateurs envoyant chacun des générateurs sur le même d-cycle de S_d. Cet homomorphisme se factorise par le quotient de $F(2g)$ par l'unique relation $\prod_{1 \leqslant i \leqslant g} [a_i, b_i] = 1$ (puisque chacun des commutateurs $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, g$ est trivial) et induit donc une action $\pi_1(B) \to S_d$ qui est transitive par construction. Cette action correspond à un revêtement de degré d du tore complexe B. Cet argument se généralise facilement au cas d'un tore complexe à g trous privé de r points (qui n'est simplement connexe que pour $g = r = 0$).

(b) Pour des espaces B généraux, la réciproque du Cor. 4.5 peut être fausse. C'est-à-dire, un espace peut avoir un groupe fondamental non trivial et n'avoir aucun revêtement fini. En effet, on peut montrer que tout groupe est groupe fondamental d'un espace topologique B. Or il existe des groupes non triviaux n'admettant aucun sous-groupe propre d'indice fini, par exemple les groupes simples infinis.

4.4. Forme topologique du Problème Inverse de la Théorie de Galois

La construction du paragraphe § 3 permet de montrer le résultat suivant qui est le point de départ de l'approche moderne du Problème Inverse de la Théorie de Galois.

Théorème 4.7. — *Tout groupe fini G est le groupe de monodromie d'un revêtement $X \to \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ de la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privée d'un certain nombre r (dépendant de G) de points $t_1, \ldots, t_r$.*

Démonstration. — Il suffit de combiner le Th. 2.17 et le Th. 2.21 du Ch. 1 aux résultats de la section § 3. L'entier r doit être choisi plus grand que le nombre minimal de générateurs de G. □

CHAPITRE III
REVÊTEMENTS GALOISIENS

On suppose désormais l'espace base B connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe.

1. Groupe des automorphismes d'un revêtement

1.1. Première description. — Soit $f : X \to B$ un revêtement de degré d. Les automorphismes du revêtement, *i.e.*, les homéomorphismes $\chi : X \to X$ tels que $f \circ \chi = f$ forment un groupe qui sera noté $\mathrm{Aut}(f)$ (ou $\mathrm{Aut}(X/B)$ quand le contexte est clair).

Soient t_o un point de B et $f^{-1}(t_o) = \{x_1, \ldots, x_d\}$ la fibre au dessus de t_o. Chaque automorphisme du revêtement permute les points de $f^{-1}(t_o)$ et induit donc une action à gauche

$$\Lambda_{t_o} : (\mathrm{Aut}(f), \circ) \longrightarrow (\mathrm{Per}(f^{-1}(t_o)), \circ)$$

Rappelons d'autre part qu'on a une action à droite

$$T_{t_o} : (\pi_1(B, t_o), \cdot) \longrightarrow (\mathrm{Per}(f^{-1}(t_o)), \circ)$$

et que le groupe image $T(\pi_1(B, t_o))$ est le groupe de monodromie $G(f)$ du revêtement.

Théorème 1.1. — *On suppose X connexe. Alors le groupe* $\mathrm{Aut}(f)$ *est fini de cardinal* $\leqslant d$. *L'homomorphisme* Λ_{t_o} *est injectif et a pour image le sous-groupe de* $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_o))$ *des permutations de* $f^{-1}(t_o)$ *qui commutent aux éléments du groupe de monodromie* $G(f)$.

Si une numérotation de la fibre $f^{-1}(t_o)$ par $\{1,\ldots,d\}$ est donnée, on peut identifier $\mathrm{Aut}(f)$ à son image dans S_d, qui coïncide avec le groupe $\mathrm{Cen}_{S_d}G(f)$. Le Th. 1.1 résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 1.2. — *Si X est connexe, le groupe* $\mathrm{Aut}(f)$ *opère librement sur l'ensemble des points de X. C'est-à-dire, si un automorphisme* $\chi \in \mathrm{Aut}(f)$ *a un point fixe, il est trivial.*

Démonstration. — Soit $\chi \in \mathrm{Aut}(f)$ tel que χ fixe un point $x \in X$. Soit y un point quelconque de X et γ un chemin sur X joignant x à y. Le chemin $\chi \circ \gamma$ joint x à $\chi(y)$ et relève le chemin $f \circ \gamma$ (car $f \circ \chi = f$). Le chemin initial γ a les mêmes propriétés. Par unicité du relèvement des chemins, on obtient $\chi \circ \gamma = \gamma$. En particulier $\chi(y) = y$, pour tout $y \in X$. □

En prévision de la suite, nous démontrons un résultat un peu plus général que ce dont nous avons besoin pour le Th. 1.1. Soient $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ deux revêtements connexes. Notons $\mathrm{Mor}(f, f')$ l'ensemble des morphismes $\chi : X \to X'$ entre les revêtements f et f'. Soit t_o un point de B. Tout morphisme $\chi \in \mathrm{Mor}(f, f')$ induit une application entre les fibres $f^{-1}(t_o)$ et $f'^{-1}(t_o)$. Cela fournit une application

$$\Lambda_{t_o} : \mathrm{Mor}(f, f') \longrightarrow \mathrm{App}(f^{-1}(t_o), f'^{-1}(t_o))$$

à valeurs dans l'ensemble des applications de $f^{-1}(t_o)$ dans $f'^{-1}(t_o)$. On note enfin T_{t_o} et T'_{t_o} les actions de monodromie de f et f' relatives au point base t_o.

Lemme 1.3. — *L'image de l'application* Λ_{t_o} *est l'ensemble des bijections* $\omega \in \mathrm{App}(f^{-1}(t_o), f'^{-1}(t_o))$ *telles que, pour tout* $[c] \in \pi_1(B, t_o)$,

$$\omega^{-1} \circ T'_{t_o}([c]) \circ \omega = T_{t_o}([c]). \tag{1}$$

Démonstration. — Soient $\chi \in \mathrm{Mor}(f, f')$ et $[c] \in \pi_1(B, t_o)$. Si γ est un chemin sur X relevant c et joignant x à y, alors $\chi \circ \gamma$ est l'unique relèvement de c sur X' commençant en $\chi(x)$. On obtient alors que si $T_{t_o}([c])(x) = y$ alors $T'_{t_o}([c])(\chi(x)) = \chi(y)$. Ce qui s'écrit encore

$$\Lambda_{t_o}(\chi)^{-1} \circ T'_{t_o}([c]) \circ \Lambda_{t_o}(\chi) = T_{t_o}([c])$$

Il reste à montrer qu'un élément $\omega \in \mathrm{App}(f^{-1}(t_o), f'^{-1}(t_o))$ qui vérifie (1) est de la forme $\Lambda_{t_o}(\chi)$ pour un certain $\chi \in \mathrm{Mor}(f, f')$. Fixons un point $x_1 \in f^{-1}(t_o)$. Pour ω comme ci-dessus et γ un chemin sur X joignant x_1 à x, on définit $\chi_{\omega,\gamma}(x)$ comme l'extrémité du relèvement sur X' de $f \circ \gamma$ qui commence en $\omega(x_1)$.

Le point $\chi_{\omega,\gamma}(x)$ ne dépend pas du chemin γ choisi. En effet, soit γ' un second chemin joignant x_1 à x. Fixons aussi δ un chemin joignant x à x_1. Si $\chi_{\omega,\gamma}(x) \neq \chi_{\omega,\gamma'}(x)$ alors on a aussi $\chi_{\omega,\gamma\delta}(x_1) \neq \chi_{\omega,\gamma'\delta}(x_1)$. Il s'agit donc de voir que si γ est un chemin fermé basé en x_1, alors l'unique relèvement sur X' de $f \circ \gamma$ commençant en $\omega(x_1)$ se termine toujours au même point, qui ne peut être que $\omega(x_1)$ (la valeur pour $[\delta] = 1$). Cela revient à montrer que

$$T'_{t_o}([f \circ \gamma])(\omega(x_1)) = \omega(x_1)$$

Or $x_1 = T_{t_o}([f \circ \gamma])(x_1)$ (puisque γ est basé en x_1). L'égalité ci-dessus résulte donc de la formule (1).

La correspondance $x \mapsto \chi_{\omega,\gamma}(x)$ définit donc une application $\chi_\omega : X \to X'$. Il est clair que $f' \circ \chi_\omega = f$ et que χ_ω est continue. Montrons que χ_ω coïncide avec ω sur la fibre $f^{-1}(t_o)$. Soit $x \in f^{-1}(t_o)$. Il existe un chemin c sur B basé en t_o tel que $T_{t_o}([c])(x_1) = x$. Le chemin c se relève en un chemin γ sur X joignant x_1 à x. Le chemin c se relève aussi en un chemin sur X' commençant en $\omega(x_1)$. L'extrémité de ce dernier chemin est

$$\chi_\omega(x) = T'_{t_o}([c])(\omega(x_1)) = \omega \circ T_{t_o}([c])(x_1) = \omega(x). \qquad \square$$

Preuve du Th. 1.1. — Le Lemme 1.2 entraîne que Λ_{t_o} est injective et que $|\mathrm{Aut}(f)| \leqslant d$. Le reste du Th. 1.1 correspond au cas particulier du Lemme 1.3 où $X = X'$ et $\chi \in \mathrm{Aut}(f)$, à ceci près qu'il reste à voir que χ_ω est bijective. Cela va résulter de $\chi_1 = \mathrm{Id}$ et $\chi_{\omega'\omega} = \chi_{\omega'} \circ \chi_\omega$. La première formule est évidente. Montrons la seconde. Si γ est un chemin sur X joignant x_1 à x et γ_ω l'unique relèvement de $f \circ \gamma$ commençant en $w(x_1)$, alors $\chi_{\omega'}(\gamma_\omega)$ est un chemin relevant $f \circ \gamma$ et commençant en $\chi_{\omega'}(w(x_1)) = (\omega' \circ \omega)(x_1)$. D'où

$$\chi_{\omega' \circ \omega}(x) = \chi_{\omega'}\left(\chi_\omega(x)\right). \qquad \square$$

1.2. Seconde description. — Le groupe des automorphismes d'un revêtement peut aussi être vu de la façon suivante.

Théorème 1.4. — *Si $G \subset \mathrm{Per}(f^{-1}(t_o))$ désigne le groupe de monodromie du revêtement $f : X \to B$ et si $x_1 \in f^{-1}(t_o)$ est un point de la fibre au dessus de t_o, alors on a les (anti-)isomorphismes suivants*

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(f) &\simeq \mathrm{Nor}_G G(x_1)/G(x_1) \\ &\simeq \mathrm{Nor}_{\pi_1(B,t_o)}(f_*(\pi_1(X,x_1))/f_*(\pi_1(X,x_1))) \end{aligned}$$

Cette seconde description provient d'un résultat général de théorie des groupes. Soit $T : G \to S_d$ une action à gauche transitive. Notons $G(1)$ le fixateur de 1. L'ensemble $G/\cdot G(1)$ des classes à gauche de G modulo $G(1)$ peut être identifié à $\{1, \ldots, d\}$ par la correspondance $aG(1) \to T(a)(1)$.

Pout tout $g \in \mathrm{Nor}_G G(1)$, la multiplication *à droite* par g respecte les classes à gauche, *i.e.*, passe au quotient $G/\cdot G(1)$:

[En effet, si $aG(1) = bG(1)$, *i.e.*, si $b^{-1}a \in G(1)$, alors $(bg)^{-1}ag = g^{-1}(b^{-1}a)g \in G(1)$.]

Cela permet de définir une action

$$\perp : \mathrm{Nor}_G G(1) \to \mathrm{Per}(G/\cdot G(1)) = S_d$$

définie par $\perp(g)(aG(1)) = agG(1)$, *i.e.*, après identification de $\mathrm{Per}(G/\cdot G(1))$ avec S_d, $\perp(g)(i) = a_i g(1)$ où a_i est n'importe quel élément de G tel que $a_i(1) = i$. Il s'agit d'une action à droite : $\perp(gg') = \perp(g') \circ \perp(g)$.

Lemme 1.5. — *L'anti-homomorphisme $\perp$ induit un anti-isomorphisme entre les deux groupes $\mathrm{Nor}_G G(1)/G(1)$ et $\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$. En particulier, $|\mathrm{Cen}_{S_d}(G)| \leqslant d$.*

Démonstration. — Il est clair que $\mathrm{Ker}(\perp) = G(1)$. L'inclusion $\perp(\mathrm{Nor}_G G(1)) \subset \mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ est également facile. En effet, pour tout $h \in \mathrm{Nor}_G G(1)$ et $g \in G$, on a $T(g) \circ \perp(h) = \perp(h) \circ T(g)$: en fait, $\perp(h)$ correspond à la multiplication à droite sur $G/\cdot G(1)$ et $T(g)$ à la multiplication à gauche.

Pour obtenir l'inclusion inverse, nous allons montrer que

$$|\mathrm{Nor}_G G(1)/G(1)| = |\mathrm{Cen}_{S_d}(G)| = |S|$$

où

$$S = \{i \in \{1, \ldots, d\} \mid h(i) = i \text{ pour tout } h \in G(1)\}$$

Pour tout $g \in \mathrm{Nor}_G G(1)$, $gG(1) = G(1)g$. En particulier, $g(1) \in S$. Considérons la correspondance $g \mapsto g(1)$ de $\mathrm{Nor}_G G(1)$ dans S. Clairement elle induit une injection $\mathrm{Nor}_G G(1)/G(1) \hookrightarrow S$. De plus elle est surjective. En effet si $i \in S$, alors pour tout $g_i \in G$ tel que $g_i(1) = i$, $g_i \in \mathrm{Nor}_G G(1)$ (puisque $g_i^{-1}hg_i(1) = g_i^{-1}h(i) = g_i^{-1}(i) = 1$). Cela démontre que $|\mathrm{Nor}_G G(1)/G(1)| = |S|$.

Pour tout $h \in \mathrm{Cen}_{S_d}(G)$, $h(1) \in S$. La correspondance $h \mapsto h(1)$ de $\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ dans S est injective : si $h(1) = 1$, alors h fixe aussi toute l'orbite de 1 sous G. La surjectivité provient de

$$|\mathrm{Cen}_{S_d}(G)| \leqslant |S| = [\mathrm{Nor}_G G(1) : G(1)] \leqslant |\mathrm{Cen}_{S_d}(G)|.$$

Cela démontre que $|\mathrm{Cen}_{S_d}(G)| = |S|$ et achève la preuve du Lemme 1.5. □

2. Revêtements galoisiens

2.1. Définitions

Proposition/Définition 2.1. — *Un revêtement connexe $f : X \to B$ de degré d est dit galoisien s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(i) $|\mathrm{Aut}(f)| = d$.

(ii) Pour tout $t_o \in B$, le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ agit transitivement (et librement) sur la fibre $f^{-1}(t_o)$.

(iii) Pour tout $t_o \in B$ et tout $x \in f^{-1}(t_o)$, le groupe $f_*(\pi_1(X,x))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(B,t_o)$.
Dans ce cas, le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ des automorphismes de f est anti-isomorphe au groupe de monodromie $G(f)$ du revêtement f et donc aussi au groupe $\pi_1(B,t_o)/f_*(\pi_1(X,x))$.

Dans (ii) et (iii), « Pour tout $t_o \in B$ » peut être remplacé par « Il existe $t_o \in B$ ».

Démonstration. — On sait que le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ opère librement sur la fibre $f^{-1}(t_o)$. Donc cette action est transitive si et seulement si $|\mathrm{Aut}(f)| = d$. D'où l'équivalence entre (i) et (ii). La suite d'(anti-)isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(f) \simeq \mathrm{Cen}_{S_d}(G(f)) \simeq \mathrm{Nor}_G G(1)/G(1) \simeq \mathrm{Nor}_{\pi_1(B,t_o)} f_*(\pi_1(X,x))/f_*(\pi_1(X,x))$$

indique que (i) équivaut à « $G(1)$ distingué dans G » ce qui équivaut à « $T_{t_o}^{-1}(G(1)) = f_*(\pi_1(X,x))$ distingué dans $T_{t_o}^{-1}(G) = \pi_1(B,t_o)$ ». Si c'est le cas, on a aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(f) &\simeq \pi_1(B,t_o)/f_*(\pi_1(X,x)) \\ &= \pi_1(B,t_o)/\bigcap_{[c]\in\pi_1(X,t_o)} f_*(\pi_1(X,x))^{[c]} \\ &= \pi_1(B,t_o)/\bigcap_{i=1}^{d} f_*(\pi_1(X,x_i)) \qquad (\text{où } f^{-1}(t_o) = \{x_1,\dots,x_d\}) \\ &= G(f)\end{aligned}$$

[Pour l'avant-dernière, identifier $\pi_1(X,x)$ au fixateur de 1 dans l'action T_{t_o} de monodromie, ce qui donne $\pi_1(X,x)^{[c]} = \pi_1(X,x_i)$ où $T_{t_o}([c])(1) = i$.]

Exemples 2.2
(a) Le revêtement $m_d : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ donné par $m_d(z) = z^d$ est galoisien. Son groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe μ_d des racines d-ièmes de 1.

(b) Soit $P(T,Y) \in \mathbb{C}[T,Y]$ un polynôme irréductible. On verra que le revêtement (connexe) $C_P^*(\mathbb{C}) \to (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ (défini dans l'Ex.1.3 du Ch. 2) est galoisien si et seulement si le corps

$$\mathbb{C}(T)[Y]/(P(T,Y))$$

est une extension galoisienne de $\mathbb{C}(T)$. Et dans ce cas, le groupe d'automorphismes de ce revêtement est le groupe de Galois de l'extension ci-dessus.

2.2. Clôture galoisienne. — Soit $f : X \to B$ un revêtement connexe de degré d. On construit ci-dessous la *clôture galoisienne* de f, *i.e.*, le « plus petit revêtement galoisien de f ».

Notons $f^d : X_B^d \to B$ le produit fibré de d copies de f, *i.e.*, $X_B^d = X \times_B \times \cdots \times_B X$ est l'ensemble des d-uplets $(x_1,\dots,x_d) \in X^d$ tels que $f(x_i) = f(x_j)$, $i,j = 1,\dots,d$. Notons U_B^d le sous-ensemble de X_B^d constitué des points $(x_1,\dots,x_d) \in X_B^d$ de coordonnées distinctes. D'après la Prop. 1.7 du Ch. 2 et le lemme ci-dessous, la restriction de f^d à U_B^d est un revêtement.

Lemme 2.3. — *L'ensemble U_B^d est un sous-ensemble ouvert et fermé de X_B^d.*

Démonstration. — L'ensemble U_B^d est clairement ouvert. Montrons qu'il est fermé. Soit $(\boldsymbol{x}_n)_{n>0}$ une suite de points $\boldsymbol{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$ de U_B^d convergeant vers un point $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in X_B^d$. Soit U un ouvert trivialisant f contenant $t = f(x_1) = \cdots = f(x_d)$ et $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ la famille d'ouverts disjoints de X composant $f^{-1}(U)$. Pour $i = 1, \dots, d$, notons W_i celui des ouverts $V_1, \dots, V_d$ qui contient x_i. Pour n suffisamment grand, on a alors $x_{n,i} \in W_i$, $i = 1, \dots, d$. Comme les points $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, d$ sont distincts et que f est injective sur chaque V_i, les ouverts $W_1, \dots, W_d$ sont nécessairement distincts et disjoints. En particulier, les points $x_1, \dots, x_d$ sont distincts, *i.e.*, $\boldsymbol{x} \in U_B^d$. □

Le revêtement $f^d : U_B^d \to B$ est de degré $d!$. De plus son groupe d'automorphismes contient le groupe symétrique S_d : chaque élément $\omega \in S_d$ définit un automorphisme χ_ω par $\chi_\omega(x_1, \dots, x_d) = (x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(d)})$.

L'espace U_B^d n'est pas forcément connexe. Notons $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_t$ ses composantes connexes. Notons $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i :\to B$ la restriction de f^d à $\widehat{X}_i$, $i = 1, \dots, t$.

Théorème 2.4. — *Les revêtements $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i \to B$, $i = 1, \dots, t$ sont des revêtements galoisiens équivalents. Leur groupe d'automorphismes est anti-isomorphe au groupe de monodromie $G(f)$ du revêtement initial $f : X \to B$. Les propriétés suivantes caractérisent les revêtements $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$ de cette classe d'équivalence.*

(a) *$\widehat{f} : \widehat{X} \to B$ est un revêtement galoisien.*

(b) *Il existe un revêtement galoisien $f_X : \widehat{X} \to X$ tel que $f \circ f_X = \widehat{f}$. En d'autres termes, $f : X \to B$ est un quotient de $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$.*

(c) *Tout revêtement galoisien $g : \widehat{Y} \to B$ qui se factorise par $f : X \to B$ se factorise par $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$.*

Démonstration. — Soit $t_o \in B$ et $x_1, \dots, x_d$ les points de la fibre $f^{-1}(t_o)$. Un revêtement $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$ vérifiant (a), (b), (c) correspond, à équivalence près, au plus grand sous-groupe normal $\widehat{H}$ de $\pi_1(B, t_o)$ contenu dans $f_*(\pi_1(X, x_1))$, qui vaut

$$\widehat{H} = \bigcap_{[c] \in \pi_1(B, t_o)} [f_*(\pi_1(X, x_1))]^{[c]} = \bigcap_{i=1}^{d} f_*(\pi_1(X, x_i))$$

Conclusion : la clôture galoisienne $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$ de $f : X \to B$ existe et est unique, à équivalence près. Son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(f)$ est anti-isomorphe au groupe $\pi_1(B, t_o)/\widehat{H} = G(f)$.

Montrons maintenant que les revêtements $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i \to B$ sont équivalents à $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$, $i = 1, \dots, t$. Montrons tout d'abord que $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i \to B$ est un revêtement de degré $|G(f)|$, $i = 1, \dots, d$. Les composantes connexes $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_t$ correspondent aux orbites de la monodromie sur la fibre $(f^d)^{-1}(t_o)$ et le degré des revêtements associés correspond à la longueur de ces orbites. La fibre $(f^d)^{-1}(t_o)$ correspond aux d-uplets

$$(H[c_1], \ldots, H[c_d])$$

de classes à droite modulo le sous-groupe $H = f_*(\pi_1(X, x_1)) \subset \pi_1(B, t_o)$. L'action par monodromie d'un chemin c basé en t_o correspond alors la permutation induite par la multiplication à droite par $[c]$:

$$(H[c_1], \ldots, H[c_d]) \longmapsto (H[c_1][c], \ldots, H[c_d][c]).$$

Le fixateur d'un point dans cet action est l'intersection des fixateurs de chacun des points de la fibre $f^{-1}(t_o)$ par la monodromie sur X, *i.e.*, le groupe $\bigcap_{i=1}^d f_*(\pi_1(X, x_i))$. La longueur de l'orbite de ce même point est l'indice de ce groupe dans le groupe $\pi_1(B, t_o)$, *i.e.*, $|G(f)|$.

Montrons ensuite que $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i \to B$ est galoisien, $i = 1, \ldots, d$. Cela résulte du lemme ci-dessous (appliqué au revêtement $f_B^d : U_B^d \to B$, à $G = S_d$ et à $C = \widehat{X}_i$).

D'après la propriété (c) du revêtement $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$, il existe un revêtement $g : \widehat{X}_i \to \widehat{X}$ tel que $\widehat{f} \circ g = \widehat{f}_i$, $i = 1, \ldots, t$. Comme les revêtements $\widehat{f} : \widehat{X} \to B$ et $\widehat{f}_i : \widehat{X}_i \to B$ ont même degré, à savoir $|G(f)|$, le revêtement $g : \widehat{X}_i \to \widehat{X}$ est de degré 1, et donc est une équivalence entre les deux revêtements $\widehat{f}$ et $\widehat{f}_i$, $i = 1, \ldots, t$. □

Lemme 2.5. — *Soit $f : X \to B$ un revêtement de degré d. Supposons qu'un sous-groupe $G \subset \mathrm{Aut}(f)$ opère transitivement sur une fibre $f^{-1}(t_o)$, ($t_o \in B$). Alors la restriction de f à toute composante connexe C de X est un revêtement galoisien.*

Démonstration. — Soit C une composante connexe de X. On sait déjà que la restriction $f|_C : X \to B$ est un revêtement. Montrons que ce revêtement est galoisien.

Soient $x, y \in (f|_C)^{-1}(t_o) = f^{-1}(t_o) \cap C$. D'après les hypothèses, il existe un élément $g \in G \subset \mathrm{Aut}(f)$ tel que $g(x) = y$. L'automorphisme g induit une permutation de l'ensemble des composantes connexes de X. Mais comme $x, y \in C$, on a nécessairement $g(C) = C$. L'automorphisme g induit donc un automorphisme de la restriction $f|_C : C \to B$ qui envoie x sur y. Conclusion : le groupe $\mathrm{Aut}(f|_C)$ agit transitivement sur la fibre $(f|_C)^{-1}(t_o)$, *i.e.*, $f|_C : C \to B$ est galoisien. □

2.3. Correspondance de Galois. — Les conclusions et le diagramme suivants résument la situation.

Les revêtements $X \to B$ d'un espace B correspondent aux sous-groupes H de $\pi_1(B)$. Dans cette correspondance, le groupe H s'identifie au groupe $\pi_1(X)$. Les revêtements galoisiens correspondent aux sous-groupes H qui sont distingués dans $\pi_1(B)$, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X/B)$ s'identifiant alors au groupe quotient $\pi_1(B)/\pi_1(X)$. Le « plus grand » revêtement de B correspond au sous-groupe trivial de $\pi_1(B)$; il est simplement connexe et galoisien de groupe d'automorphismes $\pi_1(B)$; c'est le revêtement universel $\widetilde{B}$ de B.

Ces conclusions sont comparables à la théorie des extensions algébriques d'un corps K de caractéristique 0. (Pour un corps de caractéristique quelconque, il faut remplacer ci-dessous « algébrique » par « algébrique séparable »).

Les extensions algébriques E/K d'un corps K correspondent aux sous-groupes H du groupe de Galois absolu $G(K) = G(\overline{K}/K)$. Dans cette correspondance, le groupe H s'identifie au groupe $G(E)$. Les extensions galoisiennes correspondent aux sous-groupes H qui sont distingués dans $G(K)$, le groupe de Galois $G(E/K)$ s'identifiant alors au quotient $G(K)/G(E)$. La « plus grande » extension algébrique de K correspond au sous-groupe trivial de $G(K)$; elle est algébriquement close et galoisienne de groupe de Galois $G(K)$; c'est la clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{Aut}(\widehat{X}/B) \\
\| \\
\dfrac{\pi_1(B,t_o)}{\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant d}\pi_1(X,x_i)} \\
\| \\
G
\end{array}
\left[
\begin{array}{c}
\\ \\ \mathrm{Aut}(\widehat{X}/B) \\ \| \\ G(1) \\ \\ \\
\end{array}
\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[d] & \{1\} \arrow[r, "T_{t_o}"] \arrow[d] & \{1\} \arrow[d] \\
\widehat{X} \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=4, ")"] & \bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant d}\pi_1(X,x_i) \arrow[r, "T_{t_o}"] \arrow[d, "|G(1)|"'] & \{1\} \arrow[d] \\
X \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=4, ")_d"] & \pi_1(X,x_i) \arrow[r, "T_{t_o}"] \arrow[d] & G(1) \arrow[d] \\
B & \pi_1(B,t_o) \arrow[r, "T_{t_o}"] & G \subset S_d
\end{tikzcd}
\right.
$$

2.4. Application : forme topologique du problème inverse de Galois

On peut réénoncer le Th. 4.7 du Ch. 2 sous la forme suivante.

Théorème 2.6. — *Tout groupe fini est le groupe d'automorphismes d'un revêtement galoisien $X \to \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ de la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privée d'un certain nombre r (dépendant du groupe) de points $t_1, \ldots, t_r$.*

CHAPITRE IV
COMPLÉTION ET ALGÉBRISATION

Dans ce chapitre, l'espace base B est la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privée éventuellement d'un ensemble fini $D = \{t_1, \ldots, t_r\}$ de points. Si $f : X \to B$ est un revêtement, l'espace X hérite de la structure de surface de Riemann de B. L'objet de ce chapitre est le théorème d'existence de Riemann. Il comporte deux parties. La première consiste à montrer qu'on peut compléter f en un « revêtement ramifié » $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$ entre surfaces de Riemann *compactes*. La seconde montre qu'à ce revêtement ramifié $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$, on peut associer une extension finie de corps $M(\overline{X})/\mathbb{C}(T)$ de degré égal au degré du revêtement initial f. De plus, si le revêtement f est galoisien, l'extension $M(\overline{X})/\mathbb{C}(T)$ est galoisienne de groupe de Galois (anti-)isomorphe au groupe $\mathrm{Aut}(f)$ des automorphismes du revêtement f. Cela permet de résoudre le Problème Inverse de la Théorie de Galois sur $\mathbb{C}(T)$.

1. Théorème de complétion

1.1. Énoncé. — On note $\overline{B}$ la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou plus généralement une surface de Riemann connexe compacte, *i.e.*, un tore complexe à g trous. Soient $D = \{t_1, \ldots, t_r\}$ un ensemble de r points distincts de $\overline{B}$ et $B = \overline{B} \smallsetminus D$. En particulier, B satisfait les hypothèses des chapitres précédents : B est connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Soit $f : X \to B$ un revêtement fini. L'espace X a une structure de surface de Riemann :

> [Soit $\{(U_\alpha, f_\alpha)_\alpha\}$ un atlas sur B. On peut supposer que les ouverts U_α trivialisent f. Si on note $V_{\alpha,1}, \ldots, V_{\alpha,d}$ les ouverts disjoints constituant $f^{-1}(U_\alpha)$, alors la famille $\{(V_{\alpha,i}, f_\alpha \circ f)_{\alpha,i}\}$ constitue un atlas sur X.]

Le revêtement $f : X \to B$ est un morphisme de surfaces de Riemann pour cette structure (regardée sur les cartes, l'application f est l'identité $z \mapsto z$ et est donc holomorphe).

Théorème 1.1. — *Il existe un unique morphisme de surfaces de Riemann compactes $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{B}$ tel que la restriction $\overline{f} : \overline{f}^{-1}(B) \to B$ soit un revêtement équivalent à $f : X \to B$. De plus, $\overline{X} \smallsetminus \overline{f}^{-1}(B)$ est fini ; en particulier $\overline{X}$ est connexe si X l'est.*

Il s'agit de prolonger le revêtement au dessus des points $t_1, \ldots, t_r$. On explique dans le paragraphe suivant comment on le fait localement.

1.2. Revêtements d'un disque épointé. — On note D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et $D^\times$ le disque unité privé de son centre.

Lemme 1.2. — *Soit $\varphi : M \to D^\times$ un revêtement fini. Alors il existe une surface de Riemann $\overline{M}$, une injection $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ et un morphisme de surfaces de Riemann $\overline{\varphi} : \overline{M} \to D$ tel que la restriction $\overline{\varphi} : \overline{\varphi}^{-1}(D^\times) \to D^\times$ soit un revêtement équivalent (via i) à $\varphi : M \to D^\times$.*

Démonstration. — On peut supposer M connexe : sinon on travaille sur chaque composante connexe. Le revêtement $\varphi : M \to D^\times$ est alors un revêtement connexe, de degré fini d. Ce revêtement correspond à un sous groupe d'indice d du groupe fondamental $\pi_1(D^\times)$. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et n'a donc qu'un seul sous-groupe d'indice d. La classe d'équivalence de revêtements correspondant à ce sous-groupe est celle du revêtement $m_d : D^\times \to D^\times$ donnée par $z \mapsto z^d$. Ce revêtement se prolonge en un revêtement $D \to D$ par $m_d(0) = 0$. On pose $\overline{M} = D$; l'injection $M \hookrightarrow \overline{M}$ s'obtient en composant l'injection $D^\times \hookrightarrow D$ avec l'équivalence $\chi : M \to D^\times$ entre les revêtements φ et m_d. $\square$

Remarque 1.3. — Le Lemme 1.2 se généralise de façon évidente au cas d'un revêtement $\varphi : M \to B$ d'un espace B de la forme $B = \overline{B} \smallsetminus \{t\}$ où $\overline{B}$ est homéomorphe à D via un homéomorphisme θ envoyant B sur $D^\times$. L'espace $\overline{B}$ étant muni de la structure de surface de Riemann de D, le résultat peut s'énoncer de la façon suivante.

Pour chaque composante connexe C de M, il existe une surface de Riemann $\overline{C}$ contenant C et un morphisme de surfaces de Riemann $\overline{\varphi} : \overline{C} \to \overline{B}$ vérifiant

(i) $\overline{C} \smallsetminus C$ consiste en un unique point m_C.

(ii) $\overline{\varphi}(m_C) = t$,

(iii) $\overline{C}$ est analytiquement isomorphe au disque D.

(iv) La restriction $\overline{\varphi} : \overline{\varphi}^{-1}(B) \to B$ coïncide avec le revêtement $\varphi : C \to B$

[Le revêtement $\theta \circ \varphi : C \to D^\times$ est équivalent à un revêtement $m_d : D^\times \to D^\times$. Notons $\chi : C \to D^\times$ l'homéomorphisme correspondant (voir diagramme ci-dessous). On ajoute un point m_C à C et on note $\overline{C} = C \cup \{m_C\}$. On prolonge χ par $\chi(m_C) = 0$. On munit $\overline{C}$ de la structure de surface de Riemann obtenue par transport de celle de D par la bijection χ. L'application $\overline{\varphi} : \overline{C} \to \overline{B}$ est celle qui prolonge φ et envoie m_C sur t.]

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi", "d"'] & D^\times \arrow[d, "m_d"'] \\ B \arrow[r, "\theta"] & D^\times \end{tikzcd}$$

1.3. Démonstration du théorème 1.1

Existence. — Soit $f : X \to B$ un revêtement fini. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on choisit D_i un voisinage ouvert de t_i dans $\overline{B}$ homéomorphe au disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et tel que les ouverts $D_1, \ldots, D_r$ soient deux à deux disjoints. On pose $D_i^\times = D_i \smallsetminus \{t_i\}$.

Notons $\varphi_i : f^{-1}(D_i^\times) \to D_i^\times$ la restriction de f à $f^{-1}(D_i^\times)$, $i = 1, \ldots, r$. D'après le Lemme 1.2, on peut ajouter un point m à chaque composante connexe C de $f^{-1}(D_i^\times)$ puis prolonger φ_i en ce point (par $\varphi_i(m) = t_i$) et obtenir de cette façon un morphisme de surface de Riemann $\overline{\varphi_C} : C \cup \{m\} \to D_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Soit S l'ensemble total des points ajoutés à X de cette façon. C'est un ensemble fini : S a autant d'éléments qu'il y a de composantes connexes dans tous les espaces $f^{-1}(D_i^\times)$, $i = 1, \ldots, r$. Posons $\overline{X} = X \cup S$; $\overline{X}$ est une surface de Riemann qui contient X. Soit ensuite $\overline{f}$ l'application $\overline{X} \to B$ égale à f sur X et prolongeant chacune des applications $\overline{\varphi_C}$ ci-dessus, C décrivant l'ensemble des composantes connexes de $f^{-1}(D_i^\times)$, $i = 1, \ldots, r$. L'application $\overline{f}$ est bien définie (car $f = \overline{\varphi_C}$ là où elles sont toutes deux définies), prolonge f et est un morphisme de surfaces de Riemann (c'est une notion locale).

Il reste à voir que $\overline{X}$ est compact, en particulier séparé. Pour la séparation le seul problème est de voir qu'on peut séparer les points de M au dessus d'un même point t_i, $i = 1, \ldots, r$. Mais deux points distincts dans la fibre $\overline{f}^{-1}(t_i)$ correspondent à deux points m et m' ajoutés à deux composantes connexes C et C' distinctes de $f^{-1}(D_i^\times)$. Par construction, les ouverts $C \cup \{m\}$ et $C' \cup \{m'\}$ sont des ouverts disjoints de $\overline{X}$.

Quant à la compacité, elle résulte de la propreté du morphisme $\overline{f}$. C'est-à-dire, l'image réciproque par $\overline{f}$ de tout compact de $\overline{B}$ est un compact de $\overline{X}$. En particulier, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{X}$ est compact. Pour voir que $\overline{f}$ est propre, on remarque que c'est une propriété locale sur la base, *i.e.*, il suffit de montrer qu'il existe un recouvrement ouvert de $\overline{X}$ par des ouverts U tels que chacune des restrictions $\overline{f} : f^{-1}(U) \to U$ soit propre. Or cela résulte d'une part du fait qu'un revêtement (ici $X \to B$) est propre, d'autre part que les morphismes $m_d : D \to D$ ($z \mapsto z^d$) du Lemme 1.2 sont également propres.

Unicité. — Soit $\overline{f'} : \overline{X'} :\to \overline{B}$ un deuxième morphisme de surfaces de Riemann tel que $\overline{f'} : \overline{f'}^{-1}(B) \to B$ soit un revêtement équivalent à $f : X \to B$. Donc les deux revêtements $\overline{f} : \overline{f}^{-1}(B) \to B$ et $\overline{f'} : \overline{f'}^{-1}(B) \to B$ sont équivalents, via un homéomorphisme χ qui est automatiquement un isomorphisme analytique. Le lemme suivant montre que χ se prolonge en un isomorphisme analytique $\overline{\chi} : \overline{X} \to \overline{X'}$. □

Lemme 1.4. — *Soient $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ deux revêtements et $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{B}$ et $\overline{f'} : \overline{X'} \to \overline{B}$ deux morphismes de surfaces de Riemann compactes prolongeant respectivement f et f'. Soit $\chi : X \to X'$ un morphisme entre les revêtements $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$. Alors χ se prolonge de façon unique en un morphisme $\overline{\chi} : \overline{X} \to \overline{X'}$ de surfaces de Riemann tel que $\overline{f'} \circ \overline{\chi} = \overline{f}$.*

Démonstration. — L'unicité est claire (puisque χ est donnée sur une partie dense). Voyons l'existence. Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, on choisit D_i un voisinage de t_i dans B homéomorphe au disque unité ouvert D et tel que les ouverts $D_1, \ldots, D_r$ soient deux à deux disjoints.

Pour chaque composante connexe C de $\overline{f}^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$, $i = 1, \ldots, r$, notons $\widetilde{C}$ l'ensemble C complété des points de la fibre $\overline{f}^{-1}(t_i)$ qui sont adhérents à C dans $\overline{X}$. La restriction $\overline{f} : \widetilde{C} \to D_i$ est un morphisme analytique ; d'autre part, c'est une application propre.

[L'application $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{B}$ est propre : l'image réciproque d'un compact est un fermé ($\overline{f}$ est continue) du compact $\overline{X}$. Déduisons en que la restriction $\overline{f} : \widetilde{C} \to D_i$ de $\overline{f}$ à $\widetilde{C}$ est également propre. Si K est un compact de D_i, son image réciproque par cette restriction est $\overline{f}^{-1}(K) \cap \widetilde{C}$. Montrons que c'est un fermé du compact $\overline{f}^{-1}(K)$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{f}^{-1}(K) \cap \widetilde{C}$ convergeant vers $x \in \overline{f}^{-1}(K)$. On a $\overline{f}(x) \in K \subset D_i$. Si $x \in f^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$, alors $x \in C \subset \widetilde{C}$ (car C est fermé dans $f^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$). Le second cas est celui où $f(x) = t_i$. Alors, comme x est adhérent à C dans $\overline{X}$ (car les points de $\widetilde{C}$, en particulier les x_n le sont), x fait partie des points ajoutés à C pour constituer $\widetilde{C}$.]

L'argument ci-dessous montre que, à isomorphisme analytique près, la restriction $\overline{f} : \widetilde{C} \to D_i$ est l'application $z \mapsto z^d$ du disque unité D vers lui-même.

[Soit $\overline{m} : \overline{M} \to D$ un morphisme analytique de surfaces de Riemann connexes prolongeant l'application $D^\times \to D^\times$ donnée par $m_d(z) = z^d$. On suppose de plus que $\overline{m}$ est propre. Nécessairement $0 \in \overline{M}$: sinon l'image réciproque d'un disque fermé centré en 0 ne serait pas compacte. La restriction de $\overline{m}$ à $D = D^\times \cup \{0\}$ est donc l'application $z \mapsto z^d$. De plus le point 0 est un zéro d'ordre d de $\overline{m}$. Supposons qu'il y ait un autre point m que 0 dans la fibre $\overline{m}^{-1}(0)$. Ce point serait forcément non isolé dans $\overline{M}$ (car $\overline{M}$ est connexe). D'après le théorème de l'image ouverte [Rudin ; Th. 10.32], les points proches et distincts de 0 auraient strictement plus de d antécédents par $\overline{m}$.]

Cela entraîne que, pour toute composante connexe C de $\overline{f}^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$, le point t_i a un unique antécédent $m_C \in \overline{X}$ par $\overline{f}$ qui est adhérent à C, $i = 1, \ldots, r$. De même, pour toute composante connexe C' de $\overline{f'}^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$, le point t_i a un unique antécédent $m_{C'} \in \overline{X'}$ par $\overline{f'}$ qui est adhérent à C', $i = 1, \ldots, r$.

Si C est une composante connexe de $\overline{f}^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$, on note C^χ la composante connexe de $\overline{f'}^{-1}(D_i \setminus \{t_i\})$ contenant $\chi(C)$, $i = 1, \ldots, r$. On prolonge le morphisme χ en une application $\overline{\chi} : \overline{X} \to \overline{X'}$ en posant $\overline{\chi}(m_C) = m_{C^\chi}$ pour toute composante connexe C de $f^{-1}(D_i^\times)$, $i = 1, \ldots, r$. L'application $\overline{\chi}$ est clairement continue et satisfait $\overline{f'} \circ \overline{\chi} = \overline{f}$. Le théorème des singularités illusoires (*i.e.*, une fonction qui est bornée sur un disque et holomorphe sur le disque privé de son centre est holomorphe sur le disque tout entier) permet de conclure que $\overline{\chi}$ est un morphisme analytique. □

2. Algébrisation

2.1. Réciproque du Th. 1.1. — Le but de ce paragraphe est le Th. 2.3 qui constitue une réciproque au théorème de complétion. Si $f : \overline{X} \to \overline{B}$ est un morphisme non constant entre surfaces de Riemann connexes compactes, alors il existe un ensemble B tel que $\overline{B} \smallsetminus B$ est fini et tel que la restriction $f : f^{-1}(B) \to B$ est un revêtement.

L'ensemble B au-dessus duquel le morphisme $f : \overline{X} \to \overline{B}$ induit un revêtement sera l'ensemble des points de $\overline{B}$ au dessus desquels f n'est pas *ramifiée*. Ce résultat est vrai sans l'hypothèse de compacité, à condition que f soit supposée *propre* (Th. 2.1). L'hypothèse de compacité assure la propreté et entraîne que $\overline{B} \smallsetminus B$ est fini.

Pour tout point $x_o \in X$, on définit l'*indice de ramification* $e_{x_o}(f)$ de f en x de la façon suivante. On choisit une carte (U_α, f_α) en x_o et une carte (V_β, g_β) en $f(x_o)$. Il existe une série entière $\varphi(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - f_\alpha(x_o))^n$ convergeant dans $f_\alpha(U_\alpha)$ et telle que $\varphi(f_\alpha(x)) = g_\beta(f(x))$ pour tout $x \in U_\alpha$. L'entier $e_{x_o}(f)$ est défini comme l'ordre en $f_\alpha(x_o)$ de $\varphi(z) - a_o$, *i.e.*, comme le premier indice $n > 0$ tel que $a_n \neq 0$. On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas des cartes choisies. Un point x_o est dit *ramifié* pour f si $e_{x_o}(f) > 1$ et non ramifié sinon. Un point t_o est appelé *point de ramification* de f si la fibre $f^{-1}(t_o)$ contient au moins un point ramifié.

Théorème 2.1. — *Soient X et B deux surfaces de Riemann connexes et $f : X \to B$ un morphisme non ramifié, i.e., $e_x(f) = 1$ pour tout $x \in X$. On suppose que de plus que f est propre, i.e., l'image réciproque par f de tout compact est compact. Alors $f : X \to B$ est un revêtement fini.*

Le lemme suivant intervient dans la démonstration du Th. 2.1 et en d'autres endroits du chapitre.

Lemme 2.2. — *Soit $g : M \to N$ une application fermée. Soit $n \in N$ et $\{m_i \mid i \in I\}$ la fibre de g au dessus de n. Soient U un voisinage ouvert de n et $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de M tels que $m_i \in V_i$ et $g(V_i) \subset U$, pour tout $i \in I$. Alors il existe un voisinage ouvert U' de n tel que $g^{-1}(U') \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} V_i$.*

Démonstration. — L'application g étant fermée, l'ensemble $g(M \smallsetminus \bigcup_i V_i)$ est un fermé F' ne contenant pas n. L'ensemble $U' = U \smallsetminus F'$ est donc un voisinage ouvert de n et par construction $g^{-1}(U') \subset \bigcup_i V_i$. □

Démonstration du Th. 2.1. — Le morphisme f étant non ramifié est un homéomorphisme local. Montrons que f est un revêtement. Soit $b \in B$. La fibre $f^{-1}(b)$ est un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_d\}$ car discret (ensemble des zéros de l'application holomorphe $f(x) - b$) et compact (car f est propre). Comme f est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert U de b et pour chaque $i = 1, \ldots, d$, un voisinage ouvert V_i de x_i tel que f induise un homéomorphisme entre V_i et U et tel que les ouverts $V_1, \ldots, V_d$ soient disjoints. L'application f est aussi fermée (voir ci-dessous). D'après le Lemme 2.2, il existe un voisinage ouvert $U' \subset U$ de b tel que $f^{-1}(U') \subset \bigcup_i V_i$. On conclut alors que $f^{-1}(U')$ est la réunion disjointe des ouverts $V_i \cap f^{-1}(U')$ qui sont chacun homéomorphe à U' via f.

[f *est fermée.* Soit $(x_n)_n$ une suite d'un fermé F de X ayant la propriété que $(f(x_n))_n$ tend vers $y \in B$. L'ensemble K constitué des termes de la suite $(f(x_n))_n$ et de sa limite y est un compact. Son image réciproque $f^{-1}(K)$ est un compact de X contenant les termes de la suite $(x_n)_n$. On peut donc extraire une sous-suite de $(x_n)_n$ convergeant vers un point $x \in F$ vérifiant $f(x) = y$.]

□

Théorème 2.3. — *Soient $\overline{X}$ et $\overline{B}$ deux surfaces de Riemann connexes compactes et $f : \overline{X} \to \overline{B}$ un morphisme non constant. Alors*

(a) *L'ensemble des points de ramification de f est un ensemble fini $D = \{t_1, \ldots, t_r\}$.*

(b) *Si $B = \overline{B} \setminus D$ et $X = f^{-1}(B)$, la restriction $\widetilde{f} : X \to B$ de f à $f^{-1}(B)$ est un revêtement fini (donc propre).*

(c) *Pour tout $t \in \overline{B}$, on a*

$$\sum_{x \mid f(x)=t} e_x(f) = \deg(\widetilde{f}).$$

Remarques 2.4

(a) On dit souvent que f est un *revêtement ramifié* de degré $d = \deg(f)$. Toutes les fibres $f^{-1}(b)$ ont même nombre d'éléments, comptés avec multiplicité. Il résulte du (c) du Th. 2.3 qu'un point $b \in \overline{B}$ est un point de ramification de f si et seulement si la fibre $f^{-1}(b)$ a strictement moins de $d = \deg(f)$ éléments.

(b) En combinant le Th. 1.1, le Th. 2.1 et le Th. 2.3, on obtient que si $B = \overline{B} \setminus D$ est une surface de Riemann compacte connexe privée d'un ensemble fini D, alors un morphisme non ramifié $f : X \to B$ de surfaces de Riemann connexes se prolonge en un morphisme $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{B}$ de surfaces de Riemann connexes compactes si et seulement si f est propre.

(c) *Diviseur d'une fonction méromorphe.* Le Th. 2.3 s'applique notamment quand $\overline{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les morphismes $\overline{X} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspondent à des fonctions méromorphes sur $\overline{X}$. On obtient que toute fonction méromorphe f sur une surface de Riemann connexe compacte $\overline{X}$ induit un revêtement fini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé d'un nombre fini de points.

Il résulte du (c) du Th. 2.3 que f a autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicité. Si $x \in \overline{X}$, on note $\mathrm{ord}_x(f)$ l'ordre de f en x, qui est défini par :

$$\mathrm{ord}_x(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } f(x) \neq 0, \infty \\ e_x(f) \text{ si } f(x) = 0 \\ -e_x(f) \text{ si } f(x) = \infty \end{cases}$$

Que f ait autant de zéros que de pôles s'écrit alors

$$\sum_{x \in \overline{X}} \mathrm{ord}_x(f) = 0$$

On note aussi $\mathrm{div}(f)$ l'expression formelle

$$\sum_{x\in\overline{X}} \mathrm{ord}_x(f)\ (x)$$

qu'on appelle le *diviseur* de f. Plus généralement, on appelle diviseur de $\overline{X}$ tout élément du groupe abélien libre engendré par les éléments de $\overline{X}$, *i.e.*, toute somme formelle $\sum_{x\in\overline{X}} n_x\ (x)$, où n_x est un entier, nul pour presque tout $x \in \overline{X}$. Il y a une notion de *degré* d'un diviseur : c'est la somme finie $\sum_{x\in\overline{X}} n_x$. D'après la formule plus haut, le diviseur d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann connexe compacte est un diviseur de degré nul.

Démonstration du Th. 2.3

(a) Sur un ouvert U_α d'un atlas sur $\overline{X}$, un point de ramification correspond via des cartes à un zéro de la dérivée d'une fonction holomorphe. L'ensemble D est donc discret et par conséquent fini puisque $\overline{X}$ est compact.

(b) Comme $\overline{X}$ est compacte, f est propre (car continue) (l'image réciproque d'un compact est un fermé dans un compact). De manière immédiate, la restriction $\widetilde{f}$: $X \to B$ de f à $X = f^{-1}(B)$ est propre également. Par définition de B, $f : X \to B$ est un morphisme non ramifié. D'après le Th. 2.1, $f : X \to B$ est un revêtement fini.

(c) Pour tout $t \in \overline{B}$, notons $d(t)$ le terme de gauche dans la formule à établir. Si $t \in B$, on a évidemment $d(t) = \mathrm{card}(f^{-1}(t)) = \deg(\widetilde{f})$. Soit maintenant $t \in \overline{B}$ quelconque. Notons $x_1, \ldots, x_r$ les points de la fibre $f^{-1}(t)$. On peut trouver des ouverts disjoints $V_1, \ldots, V_r$ tels que $x_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, r$. La fonction f est fermée (car f continue et $\overline{X}$ compact). D'après le Lemme 2.2, il existe un voisinage ouvert U' de t tel que

$$f^{-1}(U') \subset \textstyle\bigcup_i V_i.$$

On peut aussi supposer les ouverts $V_1, \ldots, V_r$ suffisamment petits pour que, via des cartes, f corresponde, pour chaque indice $i = 1, \ldots, r$, à une fonction holomorphe

$$\varphi_i(z) = a_{i,o} + \sum_{n\geqslant e_{x_i}(f)} a_{i,n} z^n \qquad \text{(avec } a_{i,e_{x_i}(f)} \neq 0)$$

sur un disque centré en 0. Tout élément $t' \in U'$ proche et distinct de t a exactement $e_{x_i}(f)$ antécédents dans V_i, $i = 1, \ldots, r$. Combiné à l'inclusion précédente, cela fournit

$$\deg(\widetilde{f}) = \mathrm{card}(f^{-1}(t')) = \sum_{i=1}^r e_{x_i}(f) = d(t). \qquad \square$$

2.2. Corps des fonctions méromorphes. — Soit $f : \overline{X} \to \overline{B}$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann connexes compactes, par exemple, le morphisme que le théorème 1.1 permet d'associer à tout revêtement $f : f^{-1}(B) \to B$ de $B = \overline{B} \setminus D$, où $D \subset \overline{B}$ est fini. Considérons le corps $M(\overline{X})$ (resp. $M(\overline{B})$) des fonctions méromorphes sur $\overline{X}$ (resp. sur $\overline{B}$). Notons $\widetilde{f} : X \to B$ le revêtement induit par f en dehors des points de ramification et d le degré de f, vu comme revêtement ramifié.

Notons $f^* : M(\overline{B}) \to M(\overline{X})$ l'application donnée par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. L'application f^* est un homomorphisme de corps, forcément injectif.

Lemme 2.5. — *Le corps $M(\overline{X})$ est une extension finie du corps $f^*(M(\overline{B}))$ de degré $[M(\overline{X}) : f^*(M(\overline{B}))] \leqslant d$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour toute fonction méromorphe $g \in M(\overline{X})$, l'extension $M(\overline{B})(g)/f^*(M(\overline{B}))$ est finie de degré $\leqslant d$.

[Supposons cela démontré. Posons $\mathcal{M} = f^*(M(\overline{B}))$. Si on prend ensuite $g \in M(\overline{X})$ de degré maximal d_m sur $\mathcal{M}$, on aura $M(\overline{X}) = \mathcal{M}(g)$. En effet si $h \in M(\overline{X})$, d'après un résultat classique de théorie des corps, on a $\mathcal{M}(g,h) = \mathcal{M}(g+\lambda h)$ sauf pour un nombre fini de $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors $[\mathcal{M}(g,h) : \mathcal{M}] = d_m$ et donc $\mathcal{M}(g,h) = \mathcal{M}(g)$, *i.e.*, $h \in \mathcal{M}(g)$.]

Soit $g \in M(\overline{X})$. Quitte à remplacer g par $(ag+b)/cg+d)$ avec a,b,c,d convenablement choisis, on peut supposer que si $x \in \overline{X}$ est un point ramifié de f, alors $g(x) \neq \infty$.

[L'ensemble des points ramifiés de f est fini. On choisit $z_o \in \mathbb{C}$ distinct des valeurs de g en ces points, puis $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tel que $(az_o+b)/(cz_o+d) = \infty$.]

Soit U l'ouvert de B constitué des points $b \in \overline{B}$ tels que $g(x) \neq \infty$ pour tout $x \in f^{-1}(b)$. L'ouvert U contient tous les points de ramification de f. Considérons les d « fonctions symétriques élémentaires » définies sur U par

$$\sigma_1(b) = \sum_{x|f(x)=b} e_x(f)g(x), \qquad \dots \qquad ,\sigma_d(b) = \prod_{x|f(x)=b} g(x)^{e_x(f)}$$

Soit $U' \subset U$ l'ouvert de $\overline{B}$ constitué des points $b \in U$ tels que $e_x(f) = 1$ pour tout $x \in f^{-1}(b)$. La restriction de f à $f^{-1}(U')$ est un revêtement $f^{-1}(U') \to U'$. Au voisinage de b il existe d sections $s_1, \dots, s_d$ de f qui permettent de réécrire les fonctions $\sigma_1, \dots, \sigma_d$:

$$\sigma_1(b) = \sum_{i=1}^{d} (g \circ s_i)(b), \qquad \dots \qquad ,\sigma_d(b) = \prod_{i=1}^{d} (g \circ s_i)$$

Les sections $s_1, \dots, s_d$ et la fonction g étant holomorphes, on obtient que les fonctions $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ sont des fonctions de b holomorphes sur U'.

Montrons qu'elles sont méromorphes sur $\overline{B}$. Soit $b \in \overline{B} \setminus U'$. Il y a deux cas.

1er cas : $b \notin U$, *i.e.*, il existe des éléments $x \in f^{-1}(b)$ tels que $g(x) = \infty$. Dans ce cas, à cause de la réduction préalable, tous les points de la fibre $f^{-1}(b)$ sont non ramifiés pour f. Soit (V_β, g_β) une carte au voisinage de b telle que $g_\beta(b) = 0$. Alors $g_\beta \circ f$ s'annule en tous les points de $f^{-1}(b)$. La fonction g étant méromorphe, il existe un entier m tel que $(g_\beta \circ f)^m g$ soit holomorphe en chaque point de $f^{-1}(b)$. On en déduit que les fonctions

$$\sum_{i=1}^{d} (g_\beta \circ f \circ s_i)^m (g \circ s_i) = g_\beta^m \sigma_1, \qquad \ldots \qquad , \prod_{i=1}^{d} (g_\beta \circ f \circ s_i)^m (g \circ s_i) = g_\beta^{md} \sigma_d$$

sont holomorphes en b (où $s_1, \ldots, s_d$ sont d sections de f au voisinage de b).

2ème cas : $b \in U \smallsetminus U'$, *i.e.*, il existe des points ramifiés dans la fibre $f^{-1}(b)$. Mais aucun point de $f^{-1}(b)$ n'est un pôle de g. On va montrer dans ce cas que les fonctions σ_i sont continues en b. Le théorème des singularités illusoires permettra de conclure qu'elles sont holomorphes en b.

Soit $(b_n)_{n>0}$ une suite de $\overline{B}$ convergeant vers b. Notons $\{x_1, \ldots, x_r\}$ la fibre de f au dessus de b. En utilisant le Lemme 2.2, on peut trouver un voisinage ouvert U de b et une famille d'ouverts bornés $\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_r}$ de $\overline{X}$ tels que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \varnothing$ si $i \neq j$, tels que $x_i \in \overline{V_i}$, $i = 1, \ldots, r$ et tels que $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} \overline{V_i}$. À partir d'un certain rang n_o, tous les termes b_n sont dans U. Pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, notons e_i l'indice de ramification de f en x_i. Ce nombre e_i est aussi le nombre d'éléments dans $\overline{V_i}$ de chaque fibre $f^{-1}(u)$ $(u \in U)$. Pour tout $u \in U$, posons

$$\sigma_{i,1}(u) = \sum_{x \in \overline{V_i} | f(x) = u} e_x(f) g(x), \qquad \ldots \qquad , \sigma_{i,e_i}(u) = \prod_{x \in \overline{V_i} | f(x) = u} g(x)^{e_x(f)}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, r$ et tout $j = 1, \ldots, e_i$, la suite $(\sigma_{i,j}(b_n))_{n \geqslant n_o}$ converge vers $\sigma_{i,j}(b)$.

> [Cela résulte du fait suivant. À i fixé, si pour chaque $n > 0$, on choisit $x_n \in V_i$ tel que $f(x_n) = b_n$, alors la suite $(x_n)_{n>0}$ converge vers x_i. Pour obtenir cela, on montre que x_i est la seule valeur d'adhérence possible ; comme $\overline{V_i}$ est compact, cela suffit.]

Cela entraîne que la suite $(\sigma_i(b_n))_n$ converge vers $\sigma_i(b)$, $i = 1, \ldots, d$.

Conclusion : on a montré que $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ sont des fonctions méromorphes sur $\overline{B}$. D'autre part, on a :

$$g^d - f^*(\sigma_1) g^{d-1} + \cdots + (-1)^d f^*(\sigma_d) = 0$$

(C'est vrai sur $f^{-1}(U)$ par construction). Cela montre que g est algébrique sur $f^*(M(\overline{B}))$ de degré $\leqslant d$. □

Le Lemme 2.5 est particulièrement intéressant dans le cas où $\overline{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En effet, le corps $M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est le corps $\mathbb{C}(T)$ des fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Théorème 2.6

(a) *Le corps $M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(T)$ des fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

(b) *Si* $f : \overline{X} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *est une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann connexe compacte, l'homomorphisme de corps* $f^* : M(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow M(\overline{X})$ *a pour image le sous-corps* $\mathbb{C}(f)$ *de* $M(\overline{X})$.

Démonstration. — Notons T la fonction $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $T((x:y)) = x/y$ si $y \neq 0$. C'est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: elle correspond au morphisme identité $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Montrons que $M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(T)$.

Toute fonction rationnelle $\varphi(T) \in \mathbb{C}(T)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. De plus, si

$$\varphi(T) = \prod_{i=1}^{r} (T - a_i)^{m_i} \qquad (a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j)$$

alors le diviseur de f est

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\ (a_i)\ -\ \Big(\sum_{i=1}^{r} m_i\Big)(\infty).$$

Si $g \in M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est non constante, il est facile de construire une fonction rationnelle $\varphi(T) \in \mathbb{C}(T)$ de T telle que $g/(\varphi(T))$ n'ait ni zéros ni pôles sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et donc soit une fonction holomorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le lemme suivant permet de conclure que $g = \lambda\varphi(T)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Ce qui achève la démonstration de (a). Le (b) provient du fait que l'homomorphisme f^* est défini par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'image de f^* est le corps engendré sur $\mathbb{C}$ par $f^*(T) = T \circ f = \mathrm{Id} \circ f = f$. □

Lemme 2.7. — *Toute fonction holomorphe* $f : \overline{X} \to \mathbb{C}$ *sur une surface de Riemann connexe compacte est constante.*

Démonstration. — Si f est non constante, $f(\overline{X})$ est un compact ouvert non vide.

2.3. Correspondance « Revêtements/Extensions de corps ». — Soit f une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte $\overline{X}$. D'après le Lemme 2.5, l'extension $M(\overline{X})/\mathbb{C}(f)$ est finie de degré inférieur au degré de f, vu comme revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$. Nous allons montrer qu'il y a en fait égalité de ces degrés. L'inégalité restant à démontrer repose sur un résultat profond de la théorie des surfaces de Riemann, à savoir l'existence de suffisamment de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann. De façon précise, on a le résultat suivant que nous admettrons. On trouvera deux démonstrations dans [Re].

Théorème 2.8. — *Soit* $\overline{X}$ *une surface de Riemann connexe et* $x_1, \ldots, x_n$ *des points distincts de* $\overline{X}$. *Alors il existe une fonction méromorphe* $g \in M(\overline{X})$ *telle que* $g(x_i) \neq g(x_j)$ *si* $x_i \neq x_j$. *Autrement dit, les fonctions méromorphes séparent les points.*

Corollaire 2.9. — *Le corps* $M(\overline{X})$ *des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte connexe est un corps de fonctions d'une variable sur* $\mathbb{C}$, *i.e., un corps de type fini et de degré de transcendance* 1 *sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration. — D'après le Th. 2.8, il existe une fonction méromorphe f sur $\overline{X}$. D'après les Lemme 2.5 et Th. 2.6, le corps $M(\overline{X})$ est une extension finie de $\mathbb{C}(f)$ (qui est une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$ de degré de transcendance 1). $\square$

Remarque 2.10. — On n'a pas besoin du Th. 2.8 si la surface de Riemann $\overline{X}$ est donnée par un revêtement ramifié $f : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$. En effet, dans ce cas, on sait que $\overline{X}$ a au moins une fonction méromorphe non constante, à savoir f.

Théorème 2.11. — *Soit f une fonction méromorphe sur une surface de Riemann connexe compacte et soit $\widetilde{f} : X \to B$ le revêtement induit par f en dehors des points de ramification.*

(a) *Le corps $M(\overline{X})$ des fonctions méromorphes sur $\overline{X}$ est une extension finie du corps $\mathbb{C}(f)$ de degré $[M(\overline{X}) : \mathbb{C}(f)] = \deg(\widetilde{f})$.*

(b) *Si le revêtement $\widetilde{f}$ est galoisien, l'extension $M(\overline{X})/\mathbb{C}(f)$ est galoisienne et de groupe de Galois anti-isomorphe au groupe* $\mathrm{Aut}(\widetilde{f})$ *des automorphismes de $\widetilde{f}$.*

Démonstration

(a) On sait déjà que $M(\overline{X})$ est une extension finie de $\mathbb{C}(f)$ de degré $\leqslant \deg(\widetilde{f})$ (Lemme 2.5). Soit $t \in B$; la fibre $f^{-1}(t)$ comporte $d = \deg(\widetilde{f})$ éléments $x_1, \ldots, x_d$. D'après le Th. 2.8, il existe une fonction $g \in M(\overline{X})$ prenant des valeurs distinctes aux points $x_1, \ldots, x_d$. Si $P(T, Y) \in \mathbb{C}[T, Y]$ est un polynôme tel que $P(f, g) = 0$, ces valeurs $g(x_1), \ldots, g(x_d)$ sont des racines de $P(t, Y)$, d'où

$$d \leqslant \deg_Y(P) \leqslant [\mathbb{C}(f, g) : \mathbb{C}(f)] \leqslant [M(\overline{X}) : \mathbb{C}(f)].$$

(b) D'après le Lemme 1.4, tout automorphisme $\chi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{f})$ se prolonge de façon unique en un automorphisme analytique $\overline{X} \to \overline{X}$, noté encore χ pour simplifier, tel que $f \circ \chi = f$. Comme d'habitude, on note χ^* l'automorphisme de $M(\overline{X})$ défini par $\chi^*(g) = g \circ \chi$ pour tout $g \in M(\overline{X})$. Cet isomorphisme est un $\mathbb{C}(f)$-automorphisme, *i.e.*, fixe les éléments de $\mathbb{C}(f)$. Le Th. 2.8 permet de voir que la correspondance $\chi \mapsto \chi^*$ est injective.

> [Soit χ un automorphisme du revêtement, prolongé à $\overline{X}$. Si $\chi \neq \mathrm{Id}$, il existe $x \in \overline{X}$ tel que $\chi(x) \neq x$. Soit $g \in M(\overline{X})$ tel que $g(x) \neq g(\chi(x))$. Cela montre que $\chi^*(g) \neq g$.]

On en déduit que l'extension $M(\overline{X})/\mathbb{C}(f)$ a au moins $d = |\mathrm{Aut}(\widetilde{f})| = \deg(\widetilde{f})$ $\mathbb{C}(f)$-automorphismes. Mais comme $\deg(\widetilde{f}) = [M(\overline{X}) : \mathbb{C}(f)]$, cela entraîne que l'extension $M(\overline{X})/\mathbb{C}(f)$ est galoisienne de degré d. La correspondance $\chi \mapsto \chi^*$ fournit un anti-isomorphisme entre $\mathrm{Aut}(\widetilde{f})$ et $G(M(\overline{X})/\mathbb{C}(f))$. $\square$

2.4. Problème inverse de la Théorie de Galois sur $\mathbb{C}(T)$

Théorème 2.12. — *Tout groupe fini G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbb{C}(T)$.*

Démonstration. — Il suffit de combiner le Th. 2.6 du Ch. 3, le Th. 1.1 et le Th. 2.11. □

2.5. Courbes algébriques. — Soit $P(T,Y) \in \mathbb{C}[T,Y]$ un polynôme. On note C_P : $P(t,y) = 0$ la courbe algébrique associée. Rappelons aussi les notations suivantes introduites dans le Ch. 2 : $(\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des nombres $t \in \mathbb{C}$ qui ne sont pas racines du discriminant $\Delta(T)$ de $P(T,Y)$ relativement à Y et $C_P^*(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $C_P(\mathbb{C})$ des points complexes (t,y) de la courbe $C : P(t,y) = 0$ tels que $t \in (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$.

On introduit aussi le *corps* $\mathbb{C}(C_P)$ *des fonctions algébriques* de la courbe C_P :

$$\mathbb{C}(C_P) = \mathrm{Fract}\left\{\frac{\mathbb{C}[T,Y]}{(P(T,Y))}\right\}$$

C'est une extension de degré $\deg_Y(P)$ du corps $\mathbb{C}(T)$.

Le résultat suivant fait le lien dans ce contexte entre les points de vue algébrique, analytique et topologique. Il s'agit *a priori* d'un résultat de comparaison plus facile que le Th. 2.11, dans la mesure où l'objet de départ, la courbe C_P, est munie de la structure la plus riche *a priori*. Certaines conclusions, comme la connexité de $C_P(\mathbb{C})$, sont cependant assez profondes. La démonstration que nous donnons n'utilise pas le Th. 2.8. Par contre, elle utilise le point suivant de la théorie des courbes algébriques.

(*) Il existe une courbe projective lisse irréductible $\overline{C_P}$ sur $\mathbb{C}$ munie d'un morphisme algébrique $T : \overline{C_P} \to \mathbb{P}^1$ vérifiant les propriétés suivantes. La courbe affine $C_P^*(\mathbb{C})$ se plonge dans $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ et la différence $\overline{C_P}(\mathbb{C}) \smallsetminus C_P^*(\mathbb{C})$ est un ensemble fini ; en particulier, C_P^*, C_P et $\overline{C_P}$ sont birationnels, leur corps des fonctions est $\mathbb{C}(C_P)$. Le morphisme T induit le revêtement $p_T : (t,y) \to t$ sur $C_P^*(\mathbb{C})$. (La courbe $\overline{C_P}$ est appelée *modèle projectif lisse* du corps $\mathbb{C}(C)$, ou de la courbe affine C_P ; il y a en fait équivalence de catégories entre la catégorie des corps de fonctions d'une variable et celle des courbes projectives lisses irréductibles (sur $\mathbb{C}$)). (voir par exemple [Hartshorne ; Ch1])

La courbe complexe $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ est une surface de Riemann compacte. Les éléments de $\mathbb{C}(C_P)$ induisent des fonctions méromorphes sur $\overline{C_P}(\mathbb{C})$.

Théorème 2.13. — *Soit $P(T,Y)$ comme ci-dessus un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[T,Y]$ tel que $\deg_Y(P) > 0$.*

(a) *Si F est un sous-ensemble fini quelconque de $C_P(\mathbb{C})$ et $X(\mathbb{C}) = C_P(\mathbb{C}) \smallsetminus F$, alors $X(\mathbb{C})$ est un espace topologique connexe. (C'est une surface de Riemann connexe si $X(\mathbb{C})$ est contenu dans l'ensemble $C_{P,\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ des points réguliers de C_P).*

(b) *La surface de Riemann $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ est connexe. De plus, le corps $M(\overline{C_P}(\mathbb{C}))$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(C_P)$, au-dessus du corps $\mathbb{C}(T)$.*

(c) *Le revêtement $p_T : C_P^*(\mathbb{C}) \to (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ est galoisien si et seulement si l'extension $\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T)$ est galoisienne. Dans ce cas, le groupe d'automorphismes du* *revêtement est (anti-)isomorphe au groupe de Galois de l'extension* $\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T)$. *De façon plus générale, les groupes* $\mathrm{Aut}(p_T)$ *et* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T))$ *sont (anti-)isomorphes.*

Démonstration. — Notons $B'(\mathbb{C})$ l'ensemble $p_T(X(\mathbb{C}))\cap(\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$ obtenu en retirant à l'ensemble $p_T(X(\mathbb{C}))$ les nombres complexes $t\in\mathbb{C}$ qui sont racines du discriminant $\Delta(T)$ de $P(T,Y)$ relativement à Y. Posons $X'(\mathbb{C})=p_T^{-1}(B'(\mathbb{C}))$. Nous allons montrer que $X'(\mathbb{C})$ est connexe. Cela entraînera que $X(\mathbb{C})$ et $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ sont connexes : en effet, $X'(\mathbb{C})$ est dense dans chacun des deux espaces $X(\mathbb{C})$ et $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ puisqu'on passe du premier aux seconds en ajoutant un nombre fini de points qui ne sont pas isolés. Ces points ne sont pas isolés sur $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ car $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ est une surface de Riemann et ils ne sont pas isolés sur $X(\mathbb{C})$ en vertu du Lemme 2.14 qui suit cette démonstration.

La première projection p_T induit un revêtement $p_T : X'(\mathbb{C})\to B'(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de $X'(\mathbb{C})$ et soit $\overline{\mathcal{C}}$ l'adhérence de $\mathcal{C}$ dans $\overline{C_P}(\mathbb{C})$; $\overline{\mathcal{C}}$ est une surface de Riemann compacte connexe. La restriction $T|_{\overline{\mathcal{C}}}$ de la fonction T (vue comme fonction méromorphe sur $\overline{C_P}(\mathbb{C})$) à $\overline{\mathcal{C}}$ est une fonction méromorphe et non constante (car induite par p_T qui est non constante sur $\mathcal{C}$; $p_T:\mathcal{C}\to B'(\mathbb{C})$ est même surjective (Prop. 1.7 du Ch. 2)). D'après le Lemme 2.5 et le Th. 2.6, on a

$$[M(\overline{\mathcal{C}}):\mathbb{C}(T|_{\overline{\mathcal{C}}})]\leqslant \deg(p_T|_{\mathcal{C}})\leqslant \deg(p_T)=\deg_Y(P).$$

D'un autre côté, les éléments de $\mathbb{C}(C_P)$ induisent des fonctions méromorphes sur $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ et aussi sur $\overline{\mathcal{C}}$. D'où l'inclusion $\mathbb{C}(C_P)\subset M(\overline{\mathcal{C}})$ qui entraîne

$$[M(\overline{\mathcal{C}}):\mathbb{C}(T|_{\overline{\mathcal{C}}})]\geqslant[\mathbb{C}(C_P)|_{\overline{\mathcal{C}}}:\mathbb{C}(T|_{\overline{\mathcal{C}}})]=[\mathbb{C}(C_P):\mathbb{C}(T)]=\deg_Y(P).$$

[L'égalité $[\mathbb{C}(C_P)|_{\overline{\mathcal{C}}}:\mathbb{C}(T|_{\overline{\mathcal{C}}})]=[\mathbb{C}(C_P):\mathbb{C}(T)]$] ci-dessus provient du fait que la restriction $\mathbb{C}(C_P)\to\mathbb{C}(C_P)|_{\overline{\mathcal{C}}}$ (où $\mathbb{C}(C_P)|_{\overline{\mathcal{C}}}$ doit être vu à l'intérieur de $M(\overline{\mathcal{C}})$) est un isomorphisme de corps. Cette application est surjective par construction et injective comme morphisme de corps non identiquement nul.]

On obtient

$$[M(\overline{\mathcal{C}}):\mathbb{C}(T|_{\overline{\mathcal{C}}})]=\deg_Y(P)=\deg(p_T)=\deg(p_T|_{\mathcal{C}}).$$

Conclusions

• $\deg(p_T)=\deg(p_T|_{\mathcal{C}})$ donne que $\mathcal{C}=X'(\mathbb{C})$ est connexe (Prop. 1.7 du Ch. 2). Dans $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ on a donc $\overline{\mathcal{C}}=\overline{X'(\mathbb{C})}=\overline{C_P}(\mathbb{C})$,

• $[M(\overline{C_P}(\mathbb{C})):\mathbb{C}(T)]=\deg_Y(P)$, joint à $M(\overline{C_P}(\mathbb{C}))\supset\mathbb{C}(C_P)$, fournit ensuite l'égalité $M(\overline{C_P}(\mathbb{C}))=\mathbb{C}(C_P)$.

Cela termine la démonstration de (a) et (b).

(c) Pour le sens « $\Rightarrow$ », on peut invoquer le Th. 2.11 (b) combiné avec l'égalité $M(\overline{C_P}(\mathbb{C}))=\mathbb{C}(C_P)$. Mais cela utilise le Th. 2.8. L'argument suivant donne l'ensemble de l'énoncé (c) sans recourir au Th. 2.8.

Tout élément χ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T))$ induit un automorphisme du revêtement algébrique $T:\overline{C_P}\to\mathbb{P}^1$ (*i.e.*, un isomorphisme algébrique $\chi:\overline{C_P}\to\overline{C_P}$ tel que

$T \circ \chi = T$). La restriction de cet automorphisme à $C_P^*(\mathbb{C})$ est un automorphisme $\widetilde{\chi}$ du revêtement $p_T : C_P^*(\mathbb{C}) \to (\mathbb{A}^1)^*(\mathbb{C})$. La correspondance

$$\begin{cases} \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p_T) \\ \qquad\qquad \chi \qquad\qquad \longmapsto \quad \widetilde{\chi} \end{cases}$$

est injective.

Inversement, tout élément $\chi \in \mathrm{Aut}(p_T)$ induit un automorphisme analytique $\overline{\chi}$ de $\overline{C_P}(\mathbb{C})$ (Lemme 1.4). Considérons l'homomorphisme

$$\begin{cases} \mathrm{Aut}(p_T) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(M(\overline{C_P}(\mathbb{C}))\,/\,\mathbb{C}(T)\right) \ (\simeq \mathrm{Aut}\left(\mathbb{C}(C_P)\,/\,\mathbb{C}(T)\right)) \\ \quad \chi \quad \longmapsto \qquad \chi^* : g \mapsto g \circ \overline{\chi} \end{cases}$$

L'argument ci-dessous montre que cet homomorphisme est injectif.

[Soit $\chi \neq 1 \in \mathrm{Aut}(p_T)$. Il existe $x \in \overline{\mathcal{X}}$ tel que $\overline{\chi}(x) \neq x$. En fait, $\chi(x) \neq x$ pour tout $x \in C_P^*(\mathbb{C})$ (l'action de $\mathrm{Aut}(p_T)$ est libre). On choisit x de telle façon qu'on connaisse une fonction $\overline{g} \in M(\overline{\mathcal{X}})$ qui sépare les points de $f^{-1}(f(x))$. Cela est plus facile que dans le Th. 2.11 où on avait dû invoquer le Th. 2.8 : on peut prendre pour $\overline{g}$ la projection p_Y sur la variable Y et alors tous les éléments $x \in C_P^*(\mathbb{C})$ conviennent sauf un nombre fini. Pour les x bien choisis, on a $\overline{g}(x) \neq \overline{g}(\chi(x))$, d'où $\chi^*(\overline{g}) \neq \overline{g}$.]

Les précédents arguments montrent que les groupes $\mathrm{Aut}(p_T)$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(C_P)/\mathbb{C}(T))$ sont (anti-)isomorphes. Le reste de l'énoncé (c) en découle immédiatement. □

Lemme 2.14. — *Si $P(T,Y) \in \mathbb{C}[T,Y]$ est un polynôme, l'ensemble $C_P(\mathbb{C})$ des points complexes de la courbe $C_P : P(t,y) = 0$ n'a pas de points isolés.*

Démonstration. — Soit $(t_o, y_o) \in \mathbb{C}_P^2$ un point tel que $P(t_o, y_o) = 0$. S'il s'agit d'un point régulier, on peut appliquer le théorème implicites : via une des deux projections, la courbe est au voisinage de (t_o, y_o) homéomorphe à un disque ouvert. Le cas d'un point (t_o, y_o) singulier est plus difficile. Le raisonnement ci-dessous explique comment se ramener au cas régulier.

On peut supposer que $(t_o, y_o) = (0,0)$ et que le polynôme $P(T,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[T,Y]$. Si $P(0,Y) = 0$, alors $P(T,Y) = aT$ avec $a \in \mathbb{C}$; ce cas est facile. Supposons donc $P(0,Y) \neq 0$. Soit e l'ordre de multiplicité de $P(0,Y)$ en 0.

Notons $D = \mathbb{C} \smallsetminus (\mathbb{R}^- \smallsetminus \{0\})$ et $u^{1/e}$ la détermination principale de la racine e-ième sur D. Posons ensuite $Q(t,u) = P(t, u^{1/e})$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u}(0,u) &= \frac{d}{du}(P(0,u^{1/e})) \\ &= \frac{\partial P}{\partial Y}(0,u^{1/e}) \cdot \frac{u^{(1-e)/e}}{e} \end{aligned}$$

Par définition de e, $(\partial P/\partial Y)(0,Y)$ a un zéro d'ordre $e-1$ en 0. On obtient donc

$$\frac{\partial Q}{\partial u}(0,u) = q(u^{1/e})$$

où q est un polynôme non nul en 0. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $Q(t,u)=0$. L'ensemble de ses solutions est, au voisinage de $(0,0)$, homéomorphe, via la projection sur t, à un disque. En particulier, le point $(0,0)$ n'est pas isolé sur la courbe $Q(t,u)=0$. Cela entraîne que le point $(0,0)$ n'est pas isolé sur la courbe $P(t,y)=0$ [si (t,u) est un zéro de $Q(t,u)=0$ proche de $(0,0)$, alors $(t,u^{1/e})$ est un zéro de $P(t,y)=0$ proche de $(0,0)$]. $\square$

P. Dèbes, Université de Lille I, Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : Pierre.Debes@univ-lille1.fr