UNIVERSITE DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Dynamique des fluides

Lundi 29 Novembre 2021

Durée : 2 heure. Sans document ni calculatrice

— L'examen est long. Vous n'arriverez sans doute pas au bout. Le barème en tiendra bien sûr compte.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Un certain nombre de formules vous sont rappelées en annexe.

1 Questions de cours.

Q1) Quelles sont les conditions qui doivent être vérifiées pour qu'un écoulement puisse être considéré comme stationnaire ?

Q2) Qu'est ce que le principe de moindre dégénérecence ?

2 Problème : Bulle en oscillation

Dans ce problème la gravité sera négligée. On considère une bulle de gaz entourée d'un liquide de densité $\rho_l = 1000 \ kg\, m^{-3}$, de viscosité $\mu = 10^{-3} \ kg\, m^{-1}\, s^{-1}$ et de pression au repos $p_{lo} = 1 \ bar$. L'oscillation radiale de cette bulle de rayon initial (sans forçage) $R_o \sim 1$mm est induite par une surpression homogène oscillante du liquide environnant $\delta p_l = P_a \cos(\omega t)$ avec $\omega \sim 10$kHz la pulsation du forçage en pression. Le gaz à l'intérieur de la bulle supposé homogène sera considéré comme un gaz parfait, et le liquide entourant la bulle comme incompressible, c'est à dire que les variations de densité du liquide ρ_l induite par les variations de pression δp_l seront négligées.

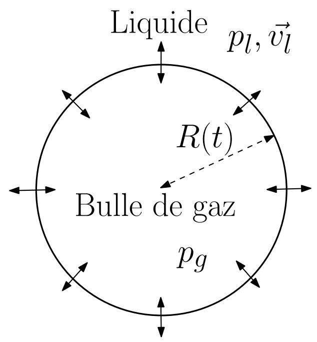

FIGURE 1 – Schéma du problème

2.1 Equation dans la bulle de gaz

Q3) On négligera les écoulement à l'intérieur de la bulle. Démontrer que si l'évolution du gaz est isentropique (adiabatique réversible) alors on peut écrire $p_g V^\gamma = cte$ où p_g désigne la pression du gaz à l'intérieur de la bulle, γ désigne le rapport des chaleurs massiques et V désigne le volume de la bulle. On fera cette hypothèse dans la suite de l'exercice.

Q4) Démontrer alors que la pression dans la bulle de gaz $p_g(t)$ vaut :

$$p_g(t) = p_{go}\left[\frac{R_o}{R(t)}\right]^{3\gamma}$$

où $R(t)$ désigne le rayon de la bulle et p_{go} la pression du gaz au repos (sans excitation en pression).

2.2 Equation dans le liquide entourant la bulle

Q5) Montrer qu'à partir du moment où le fluide est considéré comme incompressible, ni la pression ambiante p_{lo}, ni la suppression uniforme oscillante δp_l ne jouent un rôle sur l'écoulement du liquide autour de la bulle et donc que dans les équation de Navier-Stokes, la pression dans le liquide p_l peut être remplacée par la pression dynamique $p_l^* = p_l - \delta p_l - p_o$, ce que l'on fera dans la suite du problème.

Q6) Ecrire les équations de Navier-Stokes et les adimensionner. On supposera pour déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse dans le liquide, que l'amplitude d'oscillation de la bulle est typiquement de l'ordre de grandeur de son rayon au repos R_o.

Q7) En déduire que les termes instationnaire et convectifs sont du même ordre de grandeur. Introduire un nombre caractéristique comparant les effets convectifs et visqueux et le calculer à partir des données de l'énoncé. Si l'un des deux effets est petit devant l'autre, le négliger et simplifier les équations.

Q8) En utilisant le principe de moindre dégénérescence, déterminer l'ordre de grandeur ΔP de la pression dynamique p_l^*.

Q9) Peut-on normalement supposer que l'écoulement vérifie les symétries imposées par les conditions limites ? Pourquoi ?

On supposera néanmoins dans la suite du problème que les champs vérifient les symétries imposées par les conditions limites. On reprendra dans la suite du problème les équations avec dimension mais en conservant les simplifications faites dans les questions précédentes.

Q10) Simplifier l'équation de conservation de la masse en utilisant les symétries du problème et montrer en la résolvant que la vitesse radiale v_r peut se mettre sous la forme :

$$v_r(r,t) = \frac{K(t)}{r^2}.$$

Q11) En utilisant la condition limite correspondant à la conservation de la masse entre le liquide et le gaz et en supposant qu'il n'y a pas d'échange de masse entre les deux phases, montrer que l'on a :

$$v_r(r,t) = \frac{\dot{R}R^2}{r^2},$$

où $\dot{R}$ désigne l'évolution du rayon de la surface de la bulle en fonction du temps.

Q12) Rappeler les hypothèse de l'équation de Bernoulli instationnaire et redémontrer cette équation en introduisant le potentiel des vitesse ϕ tel que $\vec{v_l} = -\nabla\phi$.

Q13) Calculer le potentiel des vitesses ϕ à partir de l'expression de la vitesse.

Q14) On supposera dans la suite que l'écoulement est irrotationnel. En utilisant l'équation de Bernoulli instationnaire, montrer que l'on obtient l'équation :

$$-\frac{\ddot{R}R^2}{r} - 2\frac{\dot{R}^2 R}{r} + \frac{\dot{R}^2 R^4}{2r^4} + \frac{p_l^*(r,t)}{\rho_l} = C(t)$$

Q15) En utilisant le fait que cette constante ne dépend pas de l'espace montrer que :

$$C(t) = -\ddot{R}R - \frac{3}{2}\dot{R}^2 R + \frac{p_l^*(R,t)}{\rho_l}$$

Q16) En combinant les équation obtenues dans les deux questions précédentes, montrer que l'on obtient :

$$R\ddot{R}\left(1 - \frac{R}{r}\right) + \frac{3\dot{R}^2}{2}\left(1 + \frac{R^4}{3r^4} - \frac{4R}{3r}\right) = \frac{p_l^*(R,t) - p_l^*(r,t)}{\rho_l}$$

Q17) On rappelle que la pression $p_l^*(r,t)$ est la pression dynamique résultant de l'écoulement autour de la bulle créée pas son oscillation. Que devient cette pression quand on s'éloigne de la bulle ($r \to \infty$) ? Ecrire l'équation précédente lorsque $r \to \infty$ et montrer qu'elle se réduit à l'équation suivante :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_l^*(R,t)}{\rho_l}$$

Q18) Montrer que la condition limite sur la quantité de mouvement (rappelée en annexe) à l'interface entre le liquide et le gaz se réduit en l'absence de changement de phase à :

$$p_g - p_l = \frac{2\gamma_s}{R}$$

où $2/R$ correspond à la courbure d'une sphère de rayon R et γ_s désigne la tension superficielle.

2.3 Raccord entre le gaz et le liquide.

Q19) En utilisant les expressions obtenues dans le gaz et le liquide, déduire l'équation finale :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = p_{go}\left[\frac{R_o}{R(t)}\right]^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - \delta p_l - p_{lo} \tag{1}$$

appelée équation de Rayleigh.

2.4 Développement asymptotique (classique) de cette équation

Q20) L'équation différentielle (1) est elle linéaire ? Justifier.

Q21) En supposant maintenant que l'oscillation de la bulle est très petite, c'est à dire que $R = R_o(1 + \epsilon\, x(t))$ avec $\epsilon \ll 1$ et que le forçage en pression est aussi très petit : $\delta p_l = \epsilon P_a \cos(\omega t)$, développer l'équation précédente à l'ordre 0 (en epsilon). En déterminer une relation entre p_{go} et p_{lo}.

Q22) Développer l'équation à l'ordre 1 (en gardant uniquement les termes de l'ordre de ϵ) et montrer que l'on obtient l'équation d'un oscillateur linéaire dont on précisera la pulsation propre ω_o.

Q23) Résoudre cette équation différentielle. Que se passe t'-il lorsque $\omega = \omega_o$?

Q24) Que manque t'il dans l'équation pour résoudre ce paradoxe ?

2.5 Question bonus : Rôle de la viscosité.

Qbonus) Reprendre tout le calcul effectué dans les questions précédentes mais cette fois-ci en ne négligeant plus les effets visqueux et montrer qu'en fait la viscosité intervient uniquement lors de l'écriture du bilan de quantité de mouvement à l'interface. En déduire une nouvelle équation qui tient compte de la viscosité.

3 Annexe : Rappel de formules

A toute fin utile, nous vous rappelons les formules suivantes :

Equations de Navier Stokes incompressibles :

$$\text{Bilan de masse : } div\vec{v} = 0$$

$$\text{Bilan de quantité de mouvement : } \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})\right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f_v}$$

Opérateurs en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$div\,(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta\vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_r - \frac{2}{r^2}\left[v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{tan\theta} + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] \\ \\ \Delta v_\theta + \frac{1}{r^2}\left[2\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{sin^2\theta} - \frac{2cos\theta}{sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] \\ \\ \Delta v_\phi + \frac{1}{r^2}\left[\frac{2}{sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{sin^2\theta} + \frac{2cos\theta}{sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \\ \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}.gr\vec{a}d(\vec{v}) = \begin{bmatrix} v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[v_\theta\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - {v_\theta}^2 - {v_\phi}^2\right] \\ \\ v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + v_\theta v_r - \frac{{v_\phi}^2}{tan\theta}\right] \\ \\ v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[v_\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_\phi v_r + \frac{v_r v_\phi}{tan\theta}\right] \end{bmatrix}$$

Condition limite sur la conservation de la masse :

$$\rho_1(\vec{v}_1 - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n} = \rho_2(\vec{v}_2 - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n}$$

Condition limite sur la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}(\rho_1\vec{v}_1(\vec{v}_1 - \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_1).\overrightarrow{n} &= (\rho_2\vec{v}_2(\vec{v}_2 - \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_2).\overrightarrow{n} \\ &+ \gamma_s div(\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\end{aligned}$$

où γ_s désigne la tension superficielle, $\overrightarrow{n}$ la normale à l'interface entre les fluides 1 et 2, $div(\overrightarrow{n})$ la courbure de l'interface entre 1 et 2 et $\vec{u}$ la vitesse de l'interface.