UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Dynamique des fluides

Lundi 23 Novembre 2020

Durée : 2 heure. Sans document ni calculatrice

— Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Bon courage !

1 Questions de cours (6,5 points)

Q1) Quelles sont les conditions qui doivent être vérifiées pour qu'un écoulement puisse être considéré comme stationnaire ? (1 point)

Q2) Qu'est ce que le principe de moindre dégénérecence (1 point) ?

Q3) Que valent les ordres de grandeur de la variation de la pression dans un écoulement à très bas et à très haut nombre de Reynolds respectivement (1,5 points)

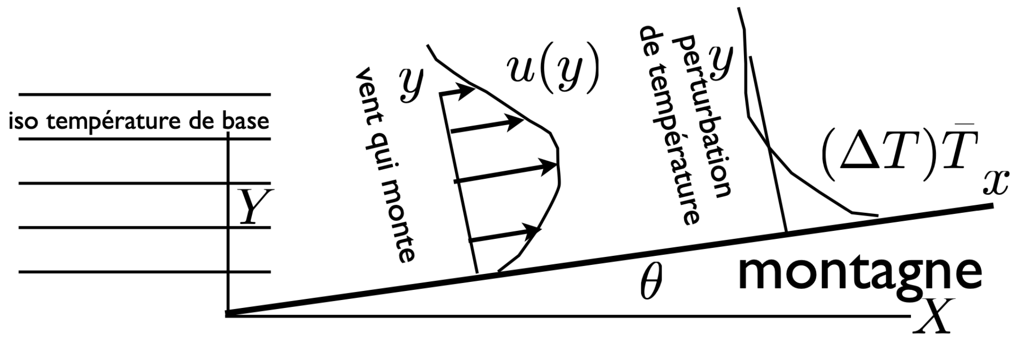
Q4) Quels termes sont nonlinéaires dans les équations suivantes : (1 point)

$$\text{CM} : \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$
$$\text{BQM} : \rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \lambda \vec{\nabla} div(\vec{v}) + \vec{f_v}$$
$$\text{BEi} : \rho[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(e)] = -p div(\vec{v}) + 2\mu \overset{\Rightarrow}{D} : \overset{\Rightarrow}{D} + \lambda \left(div(\vec{v})\right)^2 + k\Delta T + r$$

Q5) Redémontrer le théorème de Bernoulli instationnaire. (2 points)

2 Problème : Naissance des vents sur une montagne. (12 points)

L'objet de ce problème est l'étude (simplifiée) de vents naissant le long des montagnes. On distingue deux types de vents : les vents dit "anabatiques" et les vents dits "catabatiques". Les deux sont des vents gravitationnels créés par la force d'Archimède (terme de Boussinesq dans les équations). Les vents anabatiques sont créés par un mécanisme assez similaire à la brise de mer. Une pente de la montagne faisant face au soleil est réchauffée rapidement par le rayonnement. La température près de la pente sera donc plus chaude que celle de l'air dans l'atmosphère. La poussée d'Achimède produit un mouvement le long de la pente vers le haut. Inversement, la nuit, le vent descend de la montagne. On parle alors de "vent catabatique".



On va étudier l'écoulement dans le cadre de l'approximation de type "Boussinesq" en régime stationnaire. L'axe des x suit la pente de la montagne, y lui est perpendiculaire, alors que les axes X et Y correspondent respectivement à l'axe horizontal et vertical. L'angle $(\vec{X}, \vec{x}) = (\vec{Y}, \vec{y})$ est noté θ. Les équations vérifiées dans l'approximation de Boussinesq sont : (i) l'incompressibiilité de l'air, (ii) le bilan de quantité de mouvement :

$$\rho_o \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_o g \sin(\theta)(1 - \alpha(T - T_o)) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

$$\rho_o \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_o g \cos(\theta)(1 - \alpha(T - T_o)) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

où ρ_o désigne la densité de l'air à l'équilibre, T désigne la température de l'air, T_o désigne une température de référence, α le coefficient de dilatabilité thermique, μ la viscosité, u et v les composantes de la vitesse suivant les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, et enfin (iii) l'équation de la chaleur incompressible. On remarquera que le vent est une couche fine pariétale dont l'épaisseur sera notée δ.

2.1 Etat de base :

Dans l'atmosphère, la température évolue avec l'altitude. Dans le cas d'une atmosphère stable, la vitesse du vent est nulle et la température augmente en fonction de la hauteur $Y = cos(\theta)y + \sin(\theta)x$. On posera $T = T_o + B(cos(\theta)y + \sin(\theta)x)$ où B désigne le gradient vertical de température supposé constant. Dans le cas sans vent la pression varie aussi en fonction de la hauteur. C'est ce que l'on appelle la pression hydrostatique.

Q1) Ecrire l'équilibre hydrostatique (en absence d'écoulement).

Q2) On appelle p_o la pression de référence. Exprimer p_{hydro} la pression hydrostatique.

2.2 Mouvement le long d'une pente infinie

Pour étudier l'écoulement dans la zone intermédiaire de la montagne (sans se préoccuper du bas de la montagne et du sommet), on suppose que la longueur de la pente de la montagne est infinie. Comme expliqué plus haut, le sol de la montagne est chauffé et par voie de conséquence échauffe le fluide. On introduit donc une perturbation de la température autour de l'état hydrostatique $T = T_o + B(\cos(\theta)y + \sin(\theta))x + (\delta T)\bar{T}$. Cette élévation de température de l'ordre de δT provoque le mouvement du fluide. On pose $u = U_o \bar{u}$. Dans l'hypothèse où la montagne est assez longue et que l'on se place loin du bas de la montagne et du sommet, l'écoulement est "établi" et donc ne dépend plus de x. Le champs de vitesse dépend alors uniquement de y et $v = 0$. On remarquera que dans ce cas la perturbation de pression par rapport à la pression hydrostatique est nulle car elle ne joue pas de rôle dans le mouvement.

Q3) Montrer que dans ces conditions, même sans évoquer l'approximation de Boussinesq, la condition d'incompressiblité est vérifiée.

Q4) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement compte de tenu de l'invariance suivant x du champs de vitesse.

Q5) Adimensionner le bilan de quantité de mouvement suivant x et trouver, en appliquant le principe de moindre dégénérescence, une première relation entre les ordres de grandeur U_o et δT.

Q6) Ecrire l'équation de la chaleur complète dans l'approximation stationnaire et incompressible en négligeant l'échauffement induit par frottement visqueux. Quel est le nombre sans dimension associé à ce phénomène (rappeler son expression). Les équations de la chaleur (conservation de l'énergie interne) complètes pour un écoulement compressible sont rappelée en annexe.

Q7) Montrer que compte tenu de ces hypothèse, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$u = A\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^2}.$$

Identifier le coefficient A en fonction des caractéristiques du fluide et des paramètres du problème.

Q8) Adimensionner l'équation de la chaleur en utilisant δ l'épaisseur caractéristique du vent pariétal. En appliquant le principe de moindre dégénérescence, déterminer une deuxième relation entre U_o et δT.

Q9) En déduire une expression de δ en fonction de g, θ, le nombre de Prandtl Pr, B et α.

Q10) Exprimer ensuite U_o.

Q11) Vérifier que le système à résoudre de réduit à $\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{y}^4} + \bar{u} = 0$.

Q12) Quelles sont toutes les conditions aux limites ?

Q13) Montrer que la solution est en $e^{-K\bar{y}}\sin(K\bar{y})$. Calculer $\bar{T}$.

2.3 Longueur d'établissement

Dans la section précédente, nous avons supposé que l'écoulement était établi en nous plaçant loin du début de la montagne et nous n'avons donc pas prix en compte, ni le terme convectif $\rho_o(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y})$, ni le gradient de pression hors pression hydrostatique $= (\delta p)\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$. La vitesse est bien toujours de l'ordre de grandeur U_o déterminé plus haut.

Q14) Quelle serait l'échelle de longueur L_e (selon x) pertinente qui permettrait de tenir compte de la longueur d'établissement de l'écoulement ?

Q15) Quel serait l'ordre de grandeur de la vitesse v ?

Q16) Quel serait l'ordre de grandeur de δp ?

Q17) Comment relier L_e et l'invariance en x de la question 3.

2.4 Influence de la force de Coriolis

Dans le cas du vent catabatique en région polaire, il est si fort que la force de Coriolis n'est plus négligeable et crée un écoulement w suivant $\vec{z}$. On se place encore une fois dans le cas du régime établi. Il n'y a donc plus de terme convectif, et les symétries du problème donnent : $u = u(y)$, $v = 0$, $w = w(y)$ et $T = T_o + \delta T \bar{T}(y)$.

Q18) Montrer que l'on obtient alors les équations suivantes :

$$0 = g\sin(\theta) + \alpha(\delta T)\bar{T} - fw\cos(\theta) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$0 = fu + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$0 = -B\sin(\theta)u + \frac{k\delta T}{\rho_o C_p}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \tag{5}$$

3 Appendix

L'équation de la chaleur (Bilan d'énergie interne) pour un écoulement compressible vaut :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}T\right) = -\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\frac{dp}{dt} + 2\mu\ \overset{\Rightarrow}{D}:\overset{\Rightarrow}{D}: + \lambda div\vec{v}^2 + k\Delta T + r$$