UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Dynamique des fluides

Lundi 16 décembre 2019

Durée : 2 heure. Sans document ni calculatrice

— Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Bon courage !

Questions de cours (8 points)

Q0) Donner la signification physique de l'ensemble des termes des équations de Navier-Stokes compressibles (2 points) :

$$\text{CM} : \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$
$$\text{BQM} : \rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})] = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \lambda\vec{\nabla}div(\vec{v}) + \vec{f_v}$$
$$\text{BEi} : \rho[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(e)] = -p div(\vec{v}) + 2\mu \,\overset{\Rightarrow}{D}:\overset{\Rightarrow}{D} + \lambda\left(div(\vec{v})\right)^2 + k\Delta T + r$$

Q1) Qu'est ce que la convection thermique naturelle (appelée aussi convection libre) ? Expliquer physiquement comment elle se développe et quels en sont les ingrédients essentiels ? (1 point)

Q2) Qu'est-ce que l'hypothèse de l'état local associé ? (1 points)

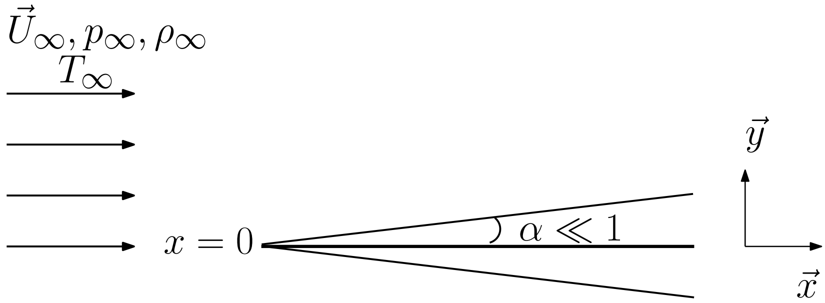
Q3) En partant du bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + div(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}) = div(\overset{\Rightarrow}{\sigma}) + \vec{f_v},$$

démontrer le bilan d'énergie cinétique. (1,5 points).

Q4) Démontrer le théorème de pythagore via l'analyse dimensionnelle (2,5 points).

Problème : Ecoulement supersonique et couche limite. (12 points)



L'objet de ce problème est d'étudier les écoulements supersoniques d'un gaz parfait (vérifiant donc $p/\rho = RT$) sur un profil d'aile représenté par un dièdre (Figure 1) et en particulier l'interaction entre la couche limite et l'écoulement externe. On rappelle les équations de Navier-Stokes compressibles (en l'absence de force volumique et de source de chaleur externe) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \lambda \vec{\nabla} div(\vec{v}) \tag{2}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p div(\vec{v}) + k\Delta T + 2\mu \stackrel{\Rightarrow}{D}:\stackrel{\Rightarrow}{D} + \lambda (div(\vec{v}))^2 \tag{3}$$

où d/dt désigne la dérivée particulaire.

P1) A partir du bilan d'énergie interne ci-dessus, de la loi de Gibbs et de la conservation de la masse, redémontrer l'équation bilan d'entropie :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = k\Delta T + 2\mu \stackrel{\Rightarrow}{D}:\stackrel{\Rightarrow}{D} + \lambda (div(\vec{v}))^2 \tag{4}$$

Ensuite, en utilisant l'égalité : $\frac{1}{T} div(\vec{q}) = div(\frac{\vec{q}}{T}) - \vec{q}.\vec{\nabla}(\frac{1}{T})$, réécrire cette équation sous une forme (4 bis) faisant intervenir les dissipations thermiques et visqueuses. Vous donnerez alors le sens physique (au sens du second principe) de ce bilan d'entropie.

Partie 1 : Solution externe de fluide parfait

P2) Simplifiez les équations (1), (2), (4) dans le cas d'un écoulement 2D stationnaire. On posera $\vec{v} = u\vec{x} + v\vec{y}$. Pour le bilan d'entropie, vous utiliserez préalablement l'égalité $\rho T ds = \rho C_p dT + \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dp$ et vous démontrerez que pour un fluide parfait : $\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -1$.

P3) En posant : $u = U_\infty \bar{u}$, $v = U_\infty \bar{v}$, $x = L\bar{x}$, $y = L\bar{y}$, $p = p_\infty \bar{p}$, $\rho = \rho_\infty \bar{\rho}$ et $T = T_\infty \bar{T}$, en adimensionnant les équations et en supposant que le nombre de Prandtl est de l'ordre de 1 et que le Reynolds est infini, montrer que l'on retrouve les équations d'Euler stationnaires (on se rappellera que λ et μ on le même ordre de grandeur). En particulier, montrer que le bilan d'entropie devient :

$$\rho_\infty C_p T_\infty \bar{\rho} \left[\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right] = p_\infty \left[\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}\right]$$

P4) Pour continuer la résolution du problème, nous allons supposer que la pente du profil d'ail est faible (d'ordre ϵ) et nous allons donc linéariser les équations en supposant que la perturbation apportée par l'aile reste faible, c'est à dire que :

$$\bar{u} = 1 + \epsilon\, \bar{u}_1, \quad \bar{v} = \epsilon\, \bar{v}_1, \quad \bar{p} = 1 + \epsilon\, \bar{p}_1, \quad \bar{\rho} = 1 + \epsilon\, \bar{\rho}_1, \quad \bar{T} = 1 + \epsilon\, \bar{T}_1. \tag{5}$$

Après avoir noté que le nombre de Mach s'écrit $M_\infty^2 = (\rho_\infty U_\infty^2)/(\gamma p_\infty)$ et démontré que $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, montrez que l'on obtient le système d'équations linéarisé suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{\rho}_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{u}_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{v}_1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{u}_1 = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{p}_1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{v}_1 = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{p}_1 \tag{8}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} \tag{9}$$

$$\bar{p}_1 = \bar{\rho}_1 + \bar{T}_1 \tag{10}$$

La dernière équation sera obtenue en linéarisant la relation des gaz parfaits écrite sous la forme : $p/p_\infty = (\rho T)/(\rho_\infty T_\infty)$ (que l'on démontrera).

P5) En éliminant la température des deux dernières équations, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} = \gamma \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x}$$

puis en éliminant les vitesses, montrer que l'on obtient l'équation d'onde classique :

$$(M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

P6) Quelle est la forme de la solution de ces équations ?

Partie 2 : Solution interne de couche limite

Dans la solution de fluide parfait, les conditions limites sur le profil d'aile ne peuvent être vérifiées.

P7) Expliquer pourquoi les conditions limites ne peuvent être vérifiées ? Quelle méthode peut on appliquer pour résoudre ce problème et pourquoi ?

Nous allons faire un changement d'échelle près de la paroi en posant :

$$u = U_\infty \tilde{u}, \quad v = V_\infty \tilde{u}, \quad \rho = \rho_\infty \tilde{\rho}, \quad T = T_\infty \tilde{T}, \quad x = L\tilde{x}, \quad y = \delta \tilde{y} \tag{11}$$

avec $\delta \ll L$.

P8) En appliquant le principe de moindre dégénérescence trouver les jauges inconnues.

Pbonus) Ecrire les équations vérifiées dans la couche limite puis écrire les conditions de raccordement avec la solution externe.