Corrigé TD n°7 Convection libre et approximation de Boussinesq.

Q1) La variance de Gibbs vaut :

$$v = c + 2 - \phi \quad \text{avec} \quad c = 1, \quad \phi = 1$$

donc $v = 2$.

Par conséquent la densité dépend de 2 variables.

$$\rho = \rho(T, p) \simeq \underbrace{\rho(T_\infty, p_\infty)}_{\rho_\infty} + (T - T_\infty)\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + (p - p_\infty)\left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$$

$$= \rho_\infty - \alpha \rho_\infty (T - T_\infty) + \chi_T \rho_\infty (p - p_\infty)$$

Q2) Si l'on néglige les variations de pression devant celles de température, on obtient

$$\rho = \rho_\infty \left[1 - \alpha (T - T_\infty)\right]$$

Q3) On a $(T - T_\infty) = (T_p - T_\infty)\overline{T}$

donc $\alpha (T - T_\infty) = \varepsilon \overline{T}$

soit $\rho = \rho_\infty (1 - \varepsilon \overline{T})$

Q4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (i)$$

ou

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (ii)$$

2/ A partir de (ii), on a :

$$-\varepsilon \rho_\infty \frac{d\bar{T}}{dt} + \rho_\infty (1-\varepsilon \bar{T}) \, \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$

A l'ordre le + faible en ε, on retrouve :

$$\rho_\infty \,\mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$

Ce résultat parait étonnant car la compressibilité du fluide est le moteur d'un écoulement de convection libre. Or ici, on va utiliser dans l'approximation de Boussinesq l'équation de CM d'un éc̄lt incompressible.

Q5) $p = p_\infty - \rho_\infty g z + \delta p \, \bar{p}$

$\vec{v} = U_0 \vec{\bar{v}} \qquad \vec{x} = L \vec{\bar{x}}$

$$\rho \Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{\text{stationnaire}} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v}) \Big) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + (\lambda+\mu) \underbrace{\cancel{\vec{\nabla}(\mathrm{div}\, \vec{v})}}_{=0 \text{ dans l'approx de Boussinesq.}}$$

$$\rho (\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p - \rho_\infty (1-\varepsilon \bar{T}) g \vec{z}$$

$$\rho (\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \delta p \vec{\nabla} \bar{p} - \rho_\infty \varepsilon \bar{T} g \vec{z} .$$

L'écoulement étant une conséquence du terme de gravité (en ε), il est lui aussi petit. A l'ordre dominant, on aura donc :

$$\rho (\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})) \simeq \rho_\infty \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})$$

Enfin en finissant l'adimensionnement, on trouve :

$$\frac{\rho_\infty U_0^2}{L}\left(\bar{\vec{v}}\cdot\bar{\vec{\nabla}}(\bar{\vec{v}})\right) = \frac{\mu_\infty U_0}{L^2}\bar{\Delta}\bar{\vec{v}} - \frac{\delta p}{L}\bar{\vec{\nabla}}\bar{p} - \rho_\infty \varepsilon \bar{T} g \vec{z}.$$

=0 car stationnaire.

=0 car incompressible (dans l'approx. de Boussinesq)

Q6) $$\rho C_p\left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T)\right) + \cancel{\frac{T}{\rho}\overset{\alpha}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}\frac{dp}{dt}}$$

$$= \cancel{2\mu_\infty \bar{\bar{D}}:\bar{\bar{D}}} + \lambda\,\cancel{\left(\mathrm{div}(\vec{v})\right)^2} + k\Delta T.$$

<< 1 car échauffement visqueux.

=0 incompressible. (dans l'approx. de Boussinesq)

reste: $\rho C_p\, \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T) = k\Delta T$

Si l'on adimensionne:

$$\frac{\rho C_p U_0 (T_p - T_\infty)}{L}\bar{\vec{v}}\cdot\bar{\vec{\nabla}}(\bar{T}) = \frac{k}{L^2}\bar{\Delta}\bar{T}$$

Q7) L'écoulement étant de la convection, le PMD nous donne lorsque l'on compare le terme convectif au terme moteur $(-\rho_\infty \varepsilon \bar{T} g \vec{z})$:

$$\frac{\rho_\infty U_0^2}{L} = \rho_\infty \varepsilon g = \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g .$$

Soit $\boxed{U_0 = \sqrt{\alpha L (T_p - T_\infty) g}} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{Lg}$

De même :

$$\frac{\delta p}{L} = \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta p = \rho_\infty L g \alpha (T_p - T_\infty)} = \varepsilon \rho_\infty L g .$$

Q8) D'où en divisant le BQM par ρ_∞, on trouve :

$$\vec{\bar{v}} \cdot \vec{\bar{\nabla}}(\vec{\bar{v}}) = \frac{\mu_\infty \sqrt{\alpha L (T_p - T_\infty) g}}{L^2 \times \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g} \bar{\Delta} \bar{v} - \bar{\nabla} \bar{p} + \bar{T} \vec{z}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{Gr}} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty \sqrt{g \alpha (T_p - T_\infty)} L^2}$ CQFD.

$$\boxed{\vec{\bar{v}} \cdot \vec{\bar{\nabla}}(\vec{\bar{v}}) = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \bar{\Delta} \vec{\bar{v}} - \vec{\bar{\nabla}} \bar{p} + \bar{T} \vec{z} .}$$

Corrigé TD n°7 Convection libre et approximation de Boussinesq.

Q1) La variance de Gibbs vaut :

$$v = c + 2 - \phi \quad \text{avec } c = 1, \ \phi = 1$$

donc $v = 2$.

Par conséquent la densité dépend de 2 variables.

$$\rho = \rho(T, p) \simeq \underbrace{\rho(T_\infty, p_\infty)}_{\rho_\infty} + (T - T_\infty)\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + (p - p_\infty)\left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$$

$$= \rho_\infty - \alpha \rho_\infty (T - T_\infty) + \chi_T \rho_\infty (p - p_\infty)$$

Q2) Si l'on néglige les variations de pression devant celles de température, on obtient

$$\rho = \rho_\infty [1 - \alpha (T - T_\infty)]$$

Q3) On a $(T - T_\infty) = (T_p - T_\infty)\overline{T}$

donc $\alpha (T - T_\infty) = \varepsilon \overline{T}$

soit $\rho = \rho_\infty (1 - \varepsilon \overline{T})$

Q4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (i)$$

ou

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \quad (ii)$$

2/ A partir de (ii), on a :

$$-\varepsilon \rho_\infty \frac{d\bar{T}}{dt} + \rho_\infty (1-\varepsilon \bar{T})\, \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$

A l'ordre le + faible en ε, on retrouve :

$$\rho_\infty\, \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$

Ce résultat parait étonnant car la compressibilité du fluide est le moteur d'un écoulement de convection libre. Or ici, on va utiliser dans l'approximation de Boussinesq l'équation de CM d'un écl^t incompressible.

Q5) $p = p_\infty - \rho_\infty g z + \delta p\, \bar{p}$

$\vec{v} = U_0 \vec{\bar{v}} \qquad \vec{x} = L \vec{\bar{x}}$

$$\rho\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{\text{stationnaire}} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\vec{v})\Big) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \underbrace{\cancel{(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v})}}_{= 0 \text{ dans l'approx de Boussinesq}}$$

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\vec{v})) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p - \rho_\infty (1-\varepsilon \bar{T})\, g\, \vec{z}$$

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\vec{v})) = \mu_\infty \Delta \vec{v} - \delta p\, \vec{\nabla} \bar{p} - \rho_\infty \varepsilon \bar{T} g\, \vec{z}.$$

L'écoulement étant une conséquence du terme de gravité (en ε), il est lui aussi petit. A l'ordre dominant, on aura donc :

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\vec{v})) \simeq \rho_\infty\, \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\vec{v})$$

Enfin en finissant l'adimensionnement, on trouve.

3)

$$\frac{\rho_\infty U_0^2}{L}\underbrace{\left(\bar{\vec{v}}\cdot\bar{\vec{\nabla}}(\bar{\vec{v}})\right)}_{=0 \text{ car stationnaire.}} = \frac{\mu_\infty U_0}{L^2}\bar{\Delta}\bar{\vec{v}} - \frac{\delta p}{L}\bar{\vec{\nabla}}\bar{p} - \rho_\infty \varepsilon \bar{T} g \vec{z}.$$

Q6)

$$\rho C_p\left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T)\right) + \cancel{\frac{T}{\rho}\overbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}^{\alpha}\frac{dp}{dt}}$$

= 0 car incompressible (dans l'approx. de Boussinesq)

$$= \underbrace{\cancel{2\mu_\infty \vec{D}:\vec{D}}}_{\ll 1 \text{ car échauffement visqueux.}} + \underbrace{\cancel{\lambda\left(\operatorname{div}(\vec{v})\right)^2}}_{=0 \text{ incompressible. (dans l'approx. de Boussinesq)}} + k\Delta T.$$

reste : $\rho C_p\, \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T) = k\,\Delta T$

Si l'on adimensionne :

$$\frac{\rho C_p U_0 (T_p - T_\infty)}{L}\bar{\vec{v}}\cdot\bar{\vec{\nabla}}(\bar{T}) = \frac{k}{L^2}\bar{\Delta}\bar{T}$$

4

Q7) L'écoulement étant de la convection, le PFD nous donne lorsque l'on compare le terme convectif au terme moteur $(-\rho_\infty \varepsilon \bar{T} g \vec{z})$:

$$\frac{\rho_\infty U_0^2}{L} = \rho_\infty \varepsilon g = \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g .$$

Soit $\boxed{U_0 = \sqrt{\alpha L (T_p - T_\infty) g}} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{Lg}$

De même :

$$\frac{\delta p}{L} = \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta p = \rho_\infty L g \alpha (T_p - T_\infty)} = \varepsilon \rho_\infty L g .$$

Q8) D'où en divisant le BQM par ρ_∞, on trouve :

$$\vec{\bar{v}} \cdot \vec{\bar{\nabla}}(\vec{\bar{v}}) = \frac{\mu_\infty \sqrt{\alpha L (T_p - T_\infty) g}}{L^2 \times \rho_\infty \alpha (T_p - T_\infty) g} \bar{\Delta} \bar{v} - \bar{\nabla} \bar{p} + \bar{T} \vec{z}$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{Gr}} = \dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty \sqrt{g \alpha (T_p - T_\infty) L^2}}$ CQFD.

$$\boxed{\vec{\bar{v}} \cdot \vec{\bar{\nabla}}(\vec{\bar{v}}) = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \bar{\Delta} \vec{\bar{v}} - \vec{\bar{\nabla}} \bar{p} + \bar{T} \vec{z} .}$$

5/ De même, on trouve facilement :

$$\vec{v}^{*} \cdot \vec{\nabla} \bar{T} = \frac{1}{Pr} \times \frac{1}{\sqrt{Gr}} \bar{\Delta} \bar{T}$$