UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Département de Mécanique

TD n°7 de Dynamique des fluides

Convection libre et approximation de Boussinesq

On considère l'écoulement stationnaire généré par une plaque verticale de longueur L chauffée à la température T_p, plongée dans un fluide initialement au repos de température T_∞, densité ρ_∞ et pression p_∞. La viscosité μ_∞ de ce fluide sera supposée constante. L'écoulement provient de la dilatabilité du fluide et de la force d'Archimède (et donc du champ de gravité $\vec{g}$, qui pousse le fluide plus chaud (et donc plus léger) vers le haut.

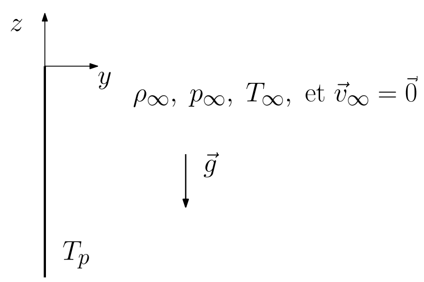

FIGURE 1 – Shéma

Nous allons étudier ce problème en nous plaçant dans l'approximation de Boussinesq (faible dilatation du fluide) et en supposant le problème bidimensionnel.

Q1) De combien de variables thermodynamiques dépend la densité (justifier) ? En écrivant la densité comme une fonction de la pression et de la température, $\rho = \rho(T, p)$, et en considérant de faibles variations de pression et de température autours de l'état d'équilibre (ρ_∞, T_∞, p_∞), écrire un développement limité au premier ordre de la densité. On introduira le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = \frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$ et le coefficient de dilatation isobare $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$.

Etant donné que l'on impose une variation de température, on négligera les variations de pression devant celles de température.

Q2) Montrer alors que $\rho = \rho_\infty(1 - \alpha(T - T\infty))$.

L'approximation de Boussinesq consiste à supposer que les variations de densité liées aux variations de température restent faibles, c'est à dire que $\epsilon = \alpha(T_p - T_\infty) \ll 1$.

Q3) En adimensionnant la température sous la forme : $T = T_\infty + (T_p - T_\infty)\bar{T}$, déterminer une expression de ρ en fonction de ρ_∞, ϵ et $\bar{T}$.

Q4) Déterminer à l'ordre le plus faible (en ϵ) l'expression de l'équation de la conservation de la masse. En quoi ce résultat parait-il étonnant ?

Q5) En posant $p = p_\infty - \rho_\infty g z + \delta p \bar{p}$ (c'est à dire en décomposant la pression, en la somme d'une pression de référence, de la variation de pression liée au champ de gravité et de la pression dynamique liée à l'écoulement), adimensionner l'équation de bilan de quantité de mouvement et simplifier les termes qu'il est possible de simplifier.

Q6) Simplifier l'équation de l'énergie en partant de la forme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \left.\frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dt} = 2\mu \stackrel{\Rightarrow}{D}:\stackrel{\Rightarrow}{D} + \lambda\left(div(\mathbf{v})\right)^2 + k\Delta T$$

et l'écrire sous forme adimensionnée.

Q7) En appliquant le principe de moindre dégénérescence sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement, montrer que l'ordre de grandeur de la vitesse vaut $U_o \sim \sqrt{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}$, et celui de la pression $\delta p \sim \rho_\infty L g \alpha (T_p - T_\infty)$.

Q8) Montrer alors que les bilans de quantité de mouvement et d'énergie s'écrivent sous la forme :

$$\vec{\bar{v}}.\vec{\bar{\nabla}}(\vec{\bar{v}}) = \vec{\bar{\nabla}}\bar{p} + \bar{T}\vec{z} + \frac{1}{\sqrt{Gr}}\bar{\Delta}\vec{\bar{v}} \tag{1}$$

$$\vec{\bar{v}}.\vec{\bar{\nabla}}(\bar{T}) = \frac{1}{Pr}\frac{1}{\sqrt{Gr}}\bar{\Delta}\bar{T} \tag{2}$$

où Pr désigne le nombre de Prandtl et $Gr = \frac{\rho_\infty^2 g\alpha(T_p - T_\infty)L^4}{\mu_\infty^2}$ le nombre de Grashof.

Le nombre de Grashoff correspond au rapport entre les termes de forçage (qui créent l'écoulement) et les termes de freinage. Pour qu'un écoulement de convection forcée se crée, il faut donc que $Gr \gg 1$.

Q9) Montrer que si $Gr \gg 1$, il n'y a pas d'écoulement. Montrer alors que l'on est typiquement dans un cas où il est pertinent d'utiliser un développement en échelle multiple et qu'il existe une couche limite près de la paroi où l'on ne peut pas négliger les effets de diffusion thermique et visqueuse.

Q10) En faisant un développement en échelles multiples, donner l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (visqueuse et thermique) en fonction du nombre de Grashof et déterminer le système d'équation à résoudre pour calculer l'écoulement et les variations de température dans la couche limite.