Corrigé TD n°6
Couche limite de Prandtl-Blasius

Q1). Dans ce problème, il n'est pas mentionné de changement de température de la plaque. Par conséquent les variations de température du fluide peuvent être uniquement induites par les frottement entre les particules fluides et le frottement pariétal qui n'est pas suffisant pour induire un écoulement significatif de convection libre.

. De plus le nombre de Mach $M < 1$ et l'écoulement est donc subsonique.

Les effets de compressibilité peuvent donc être négligés.

. Ensuite les effets de gravité ne peuvent pas générer un écoulement lorsque l'on considère un écoulement ouvert (pas dans une conduite) si la densité du fluide considéré est homogène. Ceux-ci peuvent donc être négligés.

Les équations de Navier-Stokes deviennent donc :

$$\begin{cases} \text{CM} \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{BQn suivant } \vec{x} : \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \text{BQn} \quad \text{—} \quad \vec{y} : \rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

Adimensionnement :

$$\begin{cases} u = U_0 \bar{u} \\ v = U_0 \bar{v} \\ x = L \bar{x} \\ y = L \bar{y} \\ p = P \bar{p} \quad \text{avec } P \text{ inconnu (sera déterminé par les équations)} \end{cases}$$

Si l'on adimensionne, on obtient :

$$CM \quad \frac{U_0}{L}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U_0}{L}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$BQMx \quad \frac{\rho U_0^2}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = \mu\frac{U_0}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \frac{P}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

$$BQMy \quad \frac{\rho U_0^2}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = \mu\frac{U_0}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \frac{P}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

Enfin en divisant $CM/_{U_0/L}$ et $BQM/_{\frac{\rho U_0^2}{L}}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\[2ex] \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \dfrac{P}{\rho U_0^2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\[2ex] \bar{u}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \dfrac{P}{\rho U_0^2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

avec $Re = \dfrac{\rho U_0 L}{\mu}$. Le Principe de moindre dégénérescence donne : $P = \rho U_0^2$.

Q2) Les conditions aux limites sont :

* loin de la paroi, l'écoulement n'est plus modifié par la plaque ($\vec{v} \to U_0\vec{x}$), soit

$$\begin{cases} \bar{u} \xrightarrow[\bar{y}\to\infty]{} 1 \\ \bar{v} \xrightarrow[\bar{y}\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

* sur la plaque la vitesse s'annule :

$$\begin{cases} \bar{u} \xrightarrow[\substack{\bar{y} \to 0 \\ 0<\bar{x}<1}]{} 0 \\ \\ \bar{v} \xrightarrow[\substack{\bar{y} \to 0 \\ 0<\bar{x}<1}]{} 0 \end{cases}$$

Q3) Ici le nombre de Reynolds est très grand, donc $\varepsilon = \frac{1}{Re} \ll 1$. Or ce petit coefficient est situé devant la dérivée d'ordre le plus élevé. Par conséquent, si l'on néglige le terme en $\Delta\vec{v}$, on ne pourra plus vérifier l'ensemble des conditions limites (ici les conditions d'adhérence à la paroi).

Q4) Loin de la paroi (écoulement extérieur), on va négliger les termes en ε, ce qui revient à prendre $Re = \infty$, et donc à étudier l'écoulement d'un fluide parfait.

La plaque étant parallèle à l'écoulement ($U_0\vec{x}$), celle-ci ne le modifie pas et donc le champ de vitesse reste uniforme partout et égal à $U_0\vec{x}$, soit :

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{v} = 0$$

Q5) $\hat{y} = \bar{y}/\alpha(\varepsilon)$ avec $\alpha(\varepsilon) \ll 1$.

soit $\bar{y} = \alpha(\varepsilon)\hat{y}$

Si l'on remplace dans l'équation précédente, on trouve :

CM
$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu_1(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (1)$$

BQM$_x$
$$\hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu_1(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \hat{v}_0 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{y}} = \varepsilon \left(\overset{\ll}{\cancel{\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2}}} + \frac{1}{\alpha(\varepsilon)^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) - \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \bar{x}} \quad (2)$$

BQM$_y$
$$\nu_1(\varepsilon)\hat{u}_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu_1^2(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \hat{v}_0 \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{y}} = \varepsilon \left(\overset{\ll}{\cancel{\nu_1(\varepsilon)\frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \bar{x}^2}}} + \frac{\nu_1(\varepsilon)}{\alpha^2(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \hat{y}_0^2} \right) - \frac{1}{\alpha(\varepsilon)} \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{y}} \quad (3)$$

avec $\nu_1(\varepsilon) \ll 1$.
$\alpha(\varepsilon) \ll 1$.

Le principe de moindre dégénérescence nous dit :

CM : $1 \sim \frac{\nu_1(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)}$ soit $\nu_1(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$

BQM : $\frac{\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)^2} \sim 1$ soit $\alpha(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{Re}}$

Par conséquent la zone où la viscosité joue un rôle est la zone où $\hat{y} = O(1)$, soit $\frac{\bar{y}}{\alpha(\varepsilon)} = O(1)$,

soit $\frac{y}{L\alpha(\varepsilon)} = O(1)$ soit $y = O\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right)$

5

Soit l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de grandeur $\frac{L}{\sqrt{Re}}$.

Les conditions de raccord sont :

$$\begin{cases} \hat{u}_0 \xrightarrow[\hat{y} \to \infty]{} 1 \\ \hat{v}_0 \xrightarrow[\hat{y} \to \infty]{} 0 \\ \hat{p}_0 \xrightarrow[\hat{y} \to \infty]{} 1 \end{cases}$$

, c'est à dire que

$$\begin{cases} \lim_{\hat{y} \to \infty} \hat{u}_0 = \lim_{\bar{y} \to 0} \bar{u} \\ \lim_{\hat{y} \to \infty} \hat{v}_0 = \lim_{\bar{y} \to 0} \bar{u} \\ \lim_{\hat{y} \to \infty} \hat{p}_0 = \lim_{\bar{y} \to 0} \bar{p} \end{cases}$$

Les conditions à la paroi sont :

$$\begin{cases} \hat{u} \xrightarrow[\hat{y} \to 0]{} 0 \quad 0 < \bar{x} < 1 \\ \hat{v} \xrightarrow[\hat{y} \to 0]{} 0 \quad 0 < \bar{x} < 1 \end{cases}$$

Q6) $\text{div}\, \vec{v} = 0 \Rightarrow \exists\, \vec{\Psi}$ tel que $\vec{v} = \vec{\text{rot}}\, \vec{\Psi}$

Soit $\vec{\Psi} = \Psi_x \vec{x} + \Psi_y \vec{y} + \Psi_z \vec{z}$

$\vec{v} = \vec{\text{rot}}\, \vec{\Psi}$ en 2D s'écrit : $\vec{\text{rot}}\, \vec{\Psi} = \begin{vmatrix} \partial_{\bar{x}} \\ \partial_{\hat{y}} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{\hat{y}} \Psi_z \\ -\partial_{\bar{x}} \Psi_z \\ \times \end{vmatrix}$

En 2D, il y a donc besoin que d'une seule composante pour $\vec{\Psi}$, soit $\vec{\Psi} = \Psi \vec{z}$.

On a alors $\vec{v} = \hat{u}_0 \vec{x} + \hat{v}_0 \vec{y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{y}} \vec{x} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \vec{y}$

Soit $\hat{u}_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{y}}$

$\hat{v}_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}}$

Q7) Les équations (1), (2) et (3) se simplifient en :

$$CM : \quad \frac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \overset{1}{v_0}}{\partial \hat{y}} = 0$$

$$BQM_x : \quad \overset{1}{u_0} \frac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \bar{x}} + \overset{1}{v_0} \frac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial^2 \overset{1}{u}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \bar{x}}$$

$$BQM_y : \quad \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}(x)$$

car $\nu_1(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\nu_1^2(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon}) \\ \dfrac{\varepsilon \nu_1(\varepsilon)}{\alpha^2(\varepsilon)} = O\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = O(\sqrt{\varepsilon}) \\ \dfrac{1}{\alpha(\varepsilon)} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{array}\right.$$

qui est très supérieur aux autres termes.

Par conséquent les deux équations à considérer sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} CM & \dfrac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \overset{1}{v_0}}{\partial \hat{y}} = 0 \\ BQM_x & \overset{1}{u_0} \dfrac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \bar{x}} + \overset{1}{v_0} \dfrac{\partial \overset{1}{u_0}}{\partial \hat{y}} = \dfrac{\partial^2 \overset{1}{u}}{\partial \hat{y}^2} - \dfrac{d\hat{p}_0(\bar{x})}{d\bar{x}} \end{array}\right.$$

En introduisant ψ, on obtient :

$$CM : \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{y} \partial \bar{x}} = 0$$

soit $0 = 0$. C'est évident puisque l'on a déjà utilisé cette équation pour introduire ψ.

$$BQM_x \quad \frac{\partial \psi}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \hat{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \hat{y}^3} - \frac{d\hat{p}_0(\bar{x})}{d\bar{x}}$$

7

Remarque : comme $\frac{\partial \hat{p_0}}{\partial \bar{y}} = 0$, on a $\hat{p_0} = \hat{p_0}(\bar{x})$, ce qui veut dire que $\hat{p_0}$ ne dépend pas de $\hat{y}$.

Or comme $\hat{p_0} \xrightarrow[\hat{y} \to \infty]{} 1 \quad \forall x$, cela veut dire que $\hat{p_0}$ constant et égal à 1.

Donc $\frac{d\hat{p_0}}{d\bar{x}} = 0$.

Au final, on a donc :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \hat{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \hat{y}^3}}.$$

Q8) On pose $\psi = \sqrt{\bar{x}}\, f(\eta)$ avec $\eta = \bar{y}/\sqrt{\bar{x}}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} = \sqrt{\bar{x}}\, f'(\eta) \times \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} = f'(\eta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[f'(\eta)\right] = \frac{\partial}{\partial \eta} f'(\eta) \times \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}}$$

$$= f''(\eta) \times -\frac{1}{2} \times \bar{x}^{-3/2}\, \bar{y}$$

$$= -f''(\eta) \times \frac{\eta}{2\bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{y}^2} = \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} \times \frac{\partial}{\partial \eta}\left[f'(\eta)\right] = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \hat{y}^3} = \frac{1}{\bar{x}} f'''(\eta)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}\left(f(\eta) - \eta f'(\eta)\right)$$

Soit $$-\frac{\eta}{2\bar{x}} f'(\eta) f''(\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}\left(f(\eta) - \eta f'(\eta)\right) \times \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} f''(\eta) = \frac{1}{\bar{x}} f'''(\eta)$$

ie $$2 f'''(\eta) + f f''(\eta) = 0.$$

avec $$f(0) = \frac{\Psi(\bar{x}, \hat{y}=0)}{\sqrt{\bar{x}}} = 0$$

$$f'(0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{y}}(\bar{x}, \hat{y}=0) = \hat{u_0}(\bar{x}, \hat{y}=0) = 0.$$

$$f'(\eta) = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{y}}(\bar{x}, \hat{y}) = \hat{u_0}(\bar{x}, \hat{y})$$

$\eta \to \infty$ correspond à $\hat{y} \to \infty$

soit $$f'(\eta) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} \hat{u_0}(\bar{x}, \hat{y} \to \infty) = 1.$$

Pour résoudre tout le problème complexe de la couche limite il suffit donc de résoudre l'équation !

$$\boxed{\begin{cases} 2 f'''(\eta) + f f''(\eta) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0. \\ f'(\eta) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} 1 \end{cases}}$$

R1

Remarque : Si la gravité avait été prise en compte dans ce problème, l'équation BQM suivant $\vec{y}$ serait devenue

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g\,\vec{y}$$

il suffit de remplacer p par $p^* = p + \rho g y$ et l'on obtient

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p^*}{\partial y}$$

ce qui montre que l'équation du mvt est inchangée.

- Le seul effet de la gravité est donc d'augmenter la pression statique suivant l'axe $\vec{y}$. (C'est ce que l'on ressent lorsque l'on plonge profondément dans une piscine).
- Sur la taille d'une aile d'avion, cette variation de pression reste extrêmement faible.