UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Département de Mécanique

TD n°6 de Dynamique des fluides

La couche limite de Prandtl-Blasius

Un écoulement de fluide parfait autour d'un profil d'aile d'avion ne crée pas de trainée car en l'absence de viscosité le fluide glisse sur l'aile sans exercer de contrainte tangentielle. C'est le paradoxe de d'Alembert. Un autre paradoxe est que la condition d'adhérence à la paroi doit normalement être vérifiée, c'est à dire que dans le référentiel de l'avion, la vitesse doit être nulle sur la paroi de l'aile. Or un fluide parfait "glisse" sur la paroi et la vitesse serait donc non nulle à la paroi. Ces deux paradoxes se résolvent en tenant compte d'une fine couche près de la paroi appelée couche limite visqueuse. Nous verrons qu'en utilisant les développements en échelles multiples, cette couche limite apparaît naturellement.

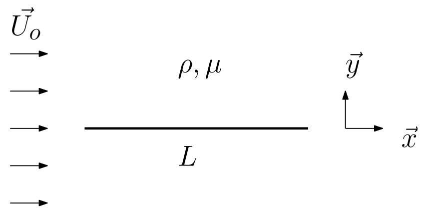

Figure 1 – Shéma

Nous allons donc considérer un écoulement bidimensionnel stationnaire d'un fluide de densité ρ et de viscosité μ à nombre de Mach $M \ll 1$ autour d'une plaque plane de longueur L. Loin de la plaque l'écoulement est supposé uniforme de vitesse U_o et parallèle à la plaque. Le problème étant symétrique, il suffit d'étudier l'écoulement dans le demi-plan $y > 0$. On supposera que le nombre de Reynolds est très grand devant l'unité.

Q1) Simplifier les équations de Navier-Stokes dans le cas présent et adimensionner les équations. On notera la vitesse $\vec{v} = u\vec{x} + v\vec{y}$, la pression p et les variables adimensionnées $\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{p}$. Attention on ne supprimera pas pour l'instant le terme de diffusion visqueuse.

Q2) Ecrire les conditions aux limites.

Q3) Montrer que l'on se situe dans le cas d'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Quel est le petit paramètre ϵ dans ce problème ?

Q4) Montrer que la solution de l'écoulement extérieur est tout simplement : $\bar{u} = 1$, $\bar{v} = 0$ et $\bar{p} = -1/2$.

Cet écoulement ne peut vérifier les conditions aux limites d'adhérence sur la paroi. Afin d'assurer celles-ci, on est donc amené à introduire une couche limite au voisinage de la paroi en dilatant l'échelle des ordonnées de façon à réintroduire la diffusion visqueuse, on posera donc $\hat{y} = \bar{y}/\alpha(\epsilon)$ avec $\alpha(\epsilon) \ll 1$. Les conditions de raccord avec l'écoulement de fluide parfait imposent que les ordres de grandeur de la vitesse parallèle à la plaque et de la pression sont inchangés. En revanche celui de la vitesse normale à la plaque peut être modifié. Le développement intérieur aura donc la forme :

$$\bar{u} = \hat{u}_o(\bar{x}, \hat{y}), \quad \bar{v} = \nu_1(\epsilon)\hat{v}_0(\bar{x}, \hat{y}), \quad \bar{p} = \hat{p}_o(\bar{x}, \hat{y})$$

avec $\nu_1(\epsilon) \ll 1$

Q5) Déterminer les équations vérifiées par $\hat{u}_o$, $\hat{v}_0$ et $\hat{p}_o$. Simplifier ces équations. En appliquant le principe de moindre dégénérescence, déterminer $\nu_1(\epsilon)$ et montrer que $\alpha = 1/\sqrt{Re}$. En déduire (i) quel est l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite visqueuse, (ii) les équation finales vérifiées par $\hat{u}_o$, $\hat{v}_o$ et $\hat{p}_o$, ainsi que les conditions aux limites (en appliquant les conditions de raccord).

Q6) A l'aide de la condition d'incompressibilité, montrer qu'il existe une fonction de courant Ψ telle que :

$$\hat{u_o} = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{y}}, \quad \hat{v}_o = -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}}$$

Q7) Déterminer l'équation vérifiée par Ψ ainsi que les conditions aux limites.

Q8) Montrer que la fonction $\Psi = \sqrt{\bar{x}} f(\eta)$ avec $\eta = \hat{y}/\sqrt{\bar{x}}$ est solution de l'équation ssi $2f''' + ff'' = 0$ avec les conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = 0 \qquad (1)$$

$$f'(\eta) \to 1 \text{ quand } \eta \to \infty \qquad (2)$$

Ces équations sont les équations décrivant la couche limite démontrée par Blasius en 1908. Elles ne peuvent être intégrées analytiquement mais peuvent être résolues très simplement de manière numérique. Il est possible à partir de ces équations de déterminer la trainée sur un profil en écoulement. Il suffit d'intégrer la contrainte tangentielle sur la plaque.