

## Corrigé du TD n°2 de Dynamique des fluides

### Exercice : Thermostatique d'un gaz parfait

L'objectif de ce TD est d'un point de vue physique de redémontrer la Loi de Mayer et d'un point de vue pédagogique de vous donner les principales clefs qui vous permettront d'obtenir les relations thermodynamiques que vous cherchez,... ce qui n'est pas toujours simple...

#### Question 1)

A notre disposition, nous avons :

1. La loi des gaz parfaits :

$$p\tau = RT$$

2. La relation de Gibbs :  $de = Tds - pd\tau$

La première relation exprime  $p$  en fonction de  $T$  et  $\tau$  et la seconde  $e$  en fonction de  $s$  et  $\tau$  :

$$p = p(T, \tau) \quad e = e(s, \tau)$$

Si l'on veut pouvoir démontrer que  $e$  ne dépend que de la température, il faudrait travailler avec une fonction d'état qui s'exprime en fonction des deux même variables d'état  $\tau$  et  $T$  que  $p$  ensuite éliminer  $\tau$ . Une telle fonction d'état peut être obtenue à partir de la transformation de Legendre qui consiste à soustraire le produit  $Ts$  à  $e$ , et permet d'introduire une nouvelle fonction d'état  $f = e - Ts$  (l'énergie libre) telle que  $df = de - Tds - sdT = -pd\tau + Tds - Tds - sdT = pd\tau - sdT$  soit  $f = f(T, \tau)$ .

Nous avons maintenant, d'une part :

$$df = -sdT - pd\tau \tag{1}$$

et d'autre part (via la définition mathématique de la différentielle d'une fonction) :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\tau dT + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_T d\tau \tag{2}$$

soit par identification et en utilisant la loi des gaz parfaits :

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\tau \tag{3}$$

$$p = -\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_T = \frac{RT}{\tau} \tag{4}$$

En intégrant (4), on obtient :

$$f(T, \tau) = -RT \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + f(T)$$

Ensuite, (3), nous donne :

$$s(\tau, T) = R \ln \left( \frac{\tau}{\tau_o} \right) - f'(T)$$

Au final :

$$e = f + Ts = -RT \ln \left( \frac{\tau}{\tau_o} \right) + f(T) + RT \ln \left( \frac{\tau}{\tau_o} \right) - Tf'(T)$$

soit  $e = f(T) - Tf'(T)$  donc ne dépend que de la température.

A retenir :

1. Si vous avez passé du temps à chercher cet exercice, vous avez dû vous rendre compte qu'il peut être difficile d'aboutir à l'équation thermodynamique escomptée. Pour ce faire, il existe néanmoins des astuces. La première est de bien récapituler les expressions thermodynamiques à disposition et en fonction de quelles variables elles s'expriment. Ensuite, la transformation de Legendre permet d'obtenir une fonction d'état  $f_2(x_2, x_3)$  dépendant des variables  $x_2$  et  $x_3$  à partir d'une fonction d'état  $f_1(x_1, x_2)$  en retranchant (ou additionnant selon les signes apparaissant dans la différentielle  $df_1$ )  $x_1 x_3$  à  $f_2$ . Enfin, en utilisant l'expression de la différentielle d'une fonction d'état et en la rapprochant de la définition mathématique de la différentielle de cette fonction, il est possible d'obtenir des expressions des variables d'état en fonction des dérivées partielles d'une fonction d'état.
2. Pour un gaz parfait l'énergie interne ne dépend que de la température.

## Question 2)

D'après la question précédente, nous savons  $e = e(T)$  et donc  $h = e(T) + p\tau = e(T) + RT$  ne dépend aussi que de la température. Donc les définitions de  $C_v$  et  $C_p$  deviennent pour un gaz parfait :

$$C_v(T) = \frac{de(T)}{dT} \quad (5)$$

$$C_p(T) = \frac{dh(T)}{dT} \quad (6)$$

Si  $C_v$  est constant, alors  $\frac{dh(T)}{dT} = \frac{de(T)}{dT} + \frac{dp\tau}{dT} = C_v + \frac{dRT}{dT} = C_v + R$ , soit  $C_p$  est aussi constant.

A retenir :

1. Nous venons en fait de redémontrer la loi de Mayer pour un gaz parfait.
2. Nous n'avons en fait pas utilisé le fait que  $C_v$  soit constant pour démontrer cette relation, elle est donc valable dans le cas général pour un gaz parfait :  $C_p(T) - C_v(T) = R$ .