UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Département de Mécanique

# TD n°1 de Dynamique des fluides

## Ecoulement dans un tube cylindrique

On considère un écoulement d'eau à débit constant $Q = 4.7 \times 10^{-5}$ m$^3$ s$^{-1}$ dans une conduite cylindrique de rayon R = 1 cm et de longueur $L = 1$ m.

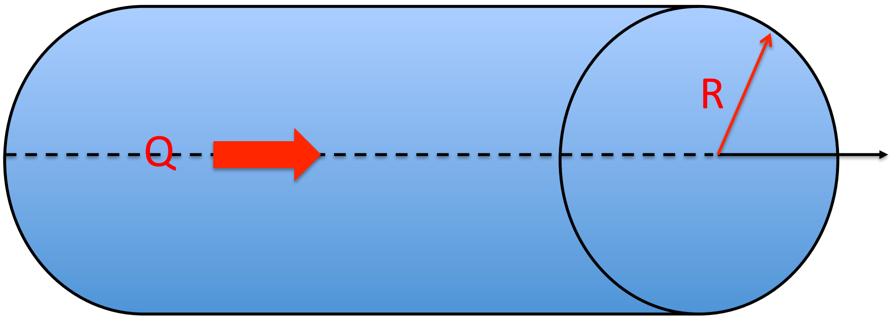


FIGURE 1 –

Q1) Simplifier au maximum les équations de Navier-Stokes dans ce cas.

Q2) Expliquer comment vous procéderiez pour calculer le profil de l'écoulement et si possible donner une expression des pertes de pression.

### Propriété de l'eau

On supposera en première approximation que la densité de l'eau est environ égale à $\rho = 1000$ kg m$^{-3}$ et que sa viscosité est de l'ordre de $10^{-3}$ Pa.s.

### Equations de Navier-Stokes incompressibles

Conservation de la masse

$$div(\vec{v}) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla(\vec{v}) \right) = \mu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

**Expression des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques :**

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

Opérateur de divergence en coordonnées cylindriques

$$div(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Opérateur laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\left(u_r + 2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \\ \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u_\theta\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$