

Formation de Licence 2 de Mécanique

TDs de Mécanique et Ingénierie

Pr. M. Baudoin

Table des matières :

TDs :

TD1 : Étude cinématique d'un moteur à combustion interne

TD2 : Joint de Cardan

TD3 : Train épicycloïdal et différentiel de voiture

TD4 : Transmission par adhérence

TD5 : Embrayage

TD6 : Frein à disque

TD7 : Système bielle manivelle : point de vue statique

TD8 : Suspension d'un véhicule automobile

Feuilles d'exercices en autonomie :

F1 : Systèmes de coordonnées (Cours 1)

F2 : Croix de malte : point de vue cinématique (Cours 2)

F3 : Torseurs des actions mécaniques associés à des forces à distance
(Cours 3)

F4 : Frein à tambour (Cours 3)

F5 : Croix de Malte : point de vue statique (Cours 4)

F6 : Amortisseur, point de vue énergétique : cf TD8 (Cours MPA)

TD n° 1 : Etude cinématique d'un moteur à combustion interne

Durée : 4 heures

Enoncé

Le dessin technique qui vous a été fourni décrit un moteur à combustion. Bien que ce soit un moteur d'un avion télécommandé, sa conception est identique à celle du moteur d'un véhicule automobile.

Q1) Analyser le dessin technique : repérer les roulements, les axes de symétrie, les parties du dessin en coupe et en vue, et les correspondances entre les différentes coupes. Identifier les ensembles de pièces en liaison encastrement (appelés classes d'équivalence cinématiques) et les colorier d'une même couleur sur le dessin technique.

Q2) Donner un numéro à chaque classe d'équivalence cinématique, et faire un graphe des liaisons, c'est à dire un schéma bulle, où l'on indique le type de liaison entre chaque classe cinématique, ainsi que les éléments caractéristiques de ces liaisons (axes de rotations, direction de translation, ...)

Q3) A partir de ce schéma bulle, calculer le degré d'hyperstatisme du système.

Q4) Faire le schéma cinématique (schéma des liaisons) dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) du système bielle-manivelle. On utilisera pour ce faire la coupe de droite du dessin industriel. Remarque : dans la configuration représentée sur le schéma industriel, les 3 centres O, I et J sont alignés. On ne se placera pas dans cette configuration particulière et on considèrera la situation plus générale où la bielle n'est pas aligné avec l'axe (O, \vec{x}) .

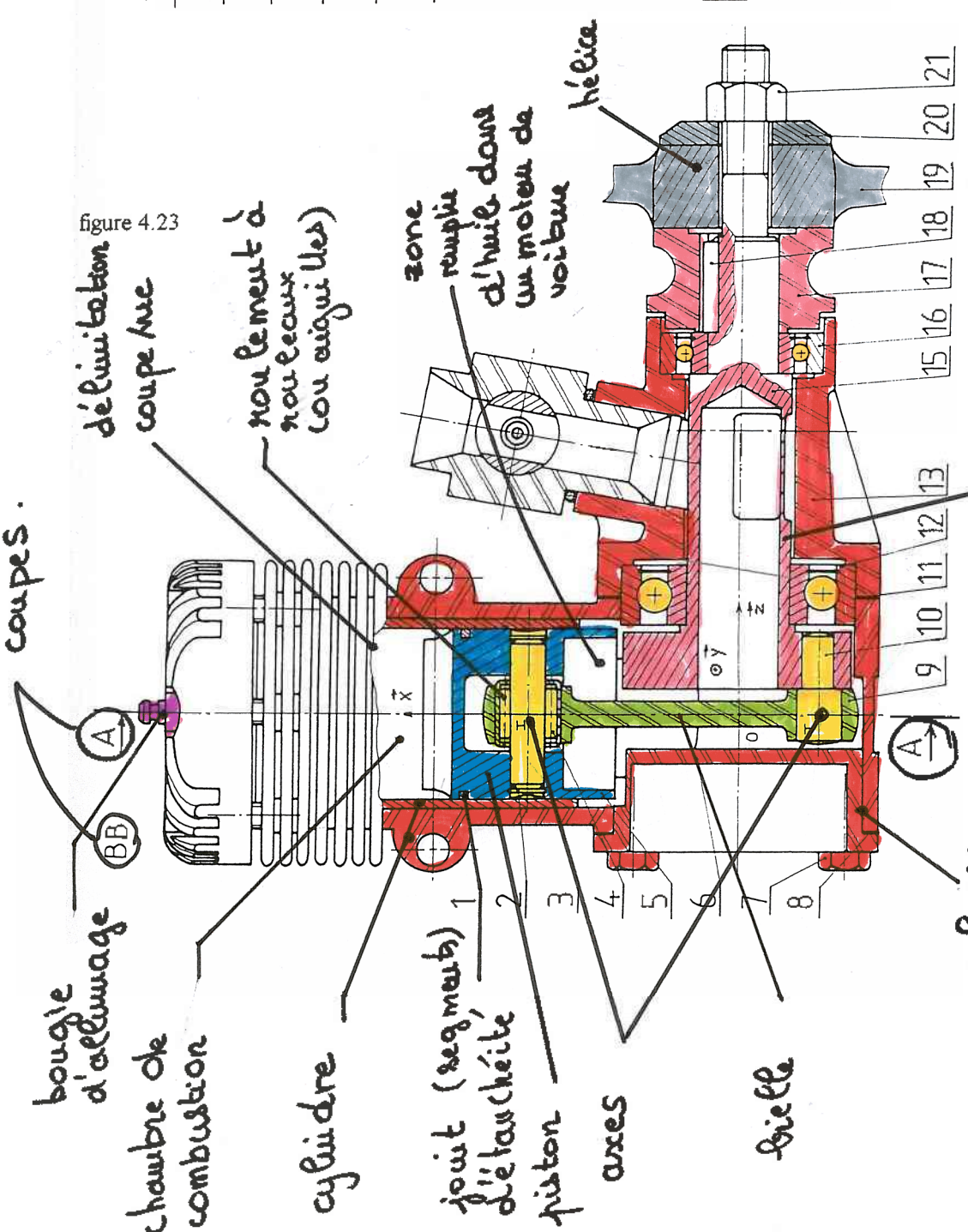
Q5) Comment pourriez-vous modifier ce système pour le rendre isostatique ?

Q6) Le mouvement de ce système est-il un mouvement plan ? Les liaisons de ce système autorisent-elles uniquement des mouvement dans le plan ? Faire un schéma cinématique plan équivalent dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , en supprimant les degrés de liberté inutiles. Calculer le degré d'hyperstatisme de ce schéma cinématique plan équivalent.

Q7) Introduire les référentiels nécessaires à la résolution du système, puis les variables permettant de décrire son évolution. Introduire les paramètres du systèmes, c'est à dire les paramètres constants qui caractérisent la géométrie des pièces. La combustion se faisant dans la partie vide du cylindre, quels sont d'après vous les variables d'entrée et de sortie de ce système ?

Q8) Etablir la loi d'entrée sortie, c'est à dire la relation entre le paramètre d'entrée et de sortie.

indications de coupes.



manivelle (ou vilebrequin pour un véhicule)

Moteur à combustion

indications de coupes

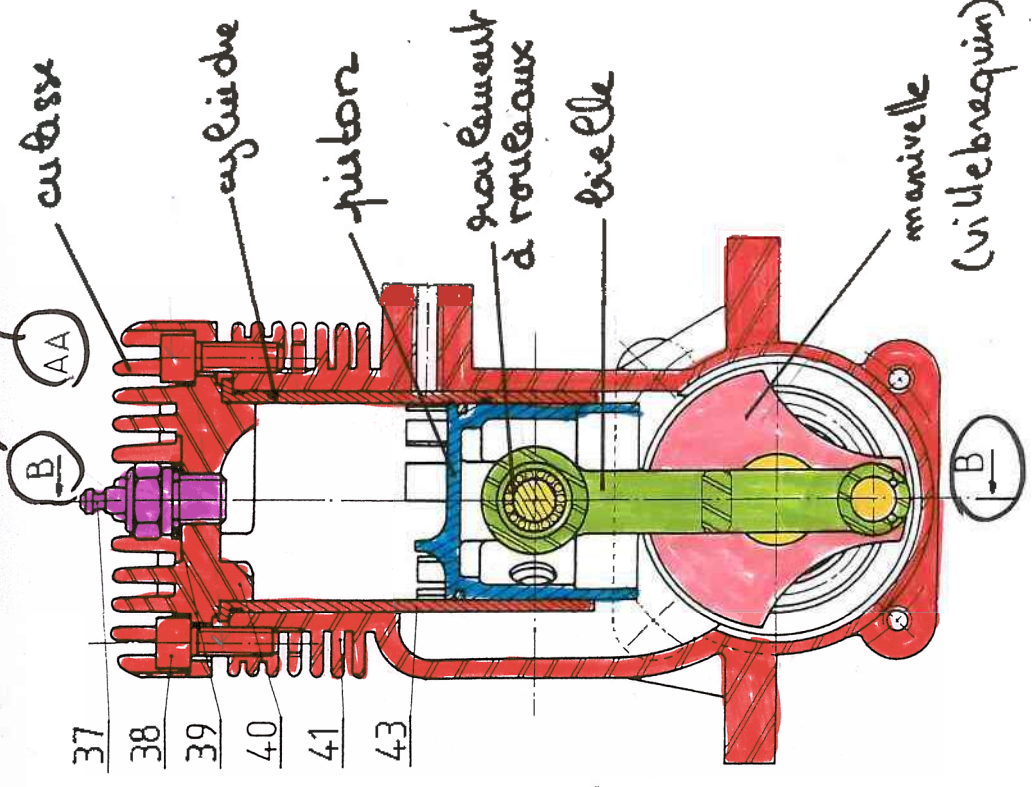


figure 4.23

délimitation coupe A-A

roulement à rouleaux (ou aiguilles)

zone remplie d'huile dans un moteur de voiture

bougie d'allumage

chambre de combustion

cylindre

joint (segments) d'étanchéité

piston

axes

bielle

cylindre

A

B

9

10

11

12

13

15

16

17

18

19

20

21

hélice

AA

B

37

38

39

40

41

43

cylindre

cylindre

piston

roulement à rouleaux

bielle

manivelle (vilebrequin)

TD n°2 : Boîtier arrière de direction Honda et cardan

2. Boîtier arrière de direction HONDA. Pour améliorer la stabilité et la maniabilité des le système à quatre roues directrices fait figure de progrès. Dans la conception de ce système, une même conclusion s'impose aux constructeurs d'automobiles: il faut différencier le comportement du véhicule à basse vitesse de celui à haute vitesse:

- à basse vitesse, les roues avant et arrière doivent avoir un braquage de sens opposé. Dans ce cas, la rotation du volant est relativement importante, en particulier lors des manoeuvres.

- à haute vitesse, les roues avant et arrière doivent avoir un braquage de même sens. Dans ce cas, la rotation du volant est de faible amplitude.

Les constructeurs semblent s'orienter vers deux options de commande:

- l'une entièrement mécanique:

- commandée par le volant: HONDA.

- ou utilisant la déformation de cales élastiques: CITROEN, PEUGEOT.

- l'autre "mécatronique": RENAULT.

L'étude porte sur le boîtier de direction arrière du type de celui mis au point par HONDA.

Le mécanisme HONDA se compose de deux sous-ensembles (figure 4.33):

- un boîtier de direction avant.

- un boîtier de direction arrière.

Le mouvement de rotation α du volant est transmis par le boîtier avant, l'arbre central et le double joint de Cardan, à l'arbre d'entrée **1** dont la rotation est repérée par l'angle β .

L'angle β est mesuré autour de l'axe (O, \bar{z}) du repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ lié au carter **0** du boîtier arrière (figure 4.34). Si on note $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z})$ un repère lié à l'arbre **1**, alors: $\beta = (\bar{x}, \bar{x}_1)$.

L'arbre d'entrée **1** communique son mouvement au pignon **2**, en liaison pivot d'axe (C, \bar{z}) avec l'arbre d'entrée **1**, tel que: $\vec{OC} = e \bar{x}_1$. Le pignon **2** engrène avec la couronne **3** d'axe (O, \bar{z}) , liée au carter **0**.

Le mouvement du pignon **2** par rapport à la couronne **3** se réduit au roulement sans glissement, au point **I**, de deux cercles de centres **C** et **O** et de rayons **CI** et **OI** respectivement (cercles primitifs de l'engrenage à axes parallèles). Ces deux cercles sont dans le plan (O, \bar{x}, \bar{y}) du repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Soit $R_2(C, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z})$ un repère lié au pignon **2**. On pose:

$$\gamma = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad r = CI \quad \text{et} \quad R = OI = r + e.$$

Le mouvement du pignon **2** est transmis à la bielle de transfert **5**, par l'intermédiaire du baladeur **4** en liaison rotule de centre **A** avec **2** et en liaison glissière de direction \bar{x} avec **5**.

On pose: $\vec{CA} = \lambda \bar{x}_2 + d \bar{z}$ et on note $y \bar{y}$ la translation de la bielle de transfert **5** par rapport au carter **0**.

Les paramètres β , γ et y sont nuls lorsque $\alpha = 0$.

Valeurs numériques:

- relation entre α et β : $\alpha = 1,75 \beta$

- rayon primitif: $r = 20 \text{ mm}$ (roue dentée de 32 dents de module 1,25 mm)

- rayon primitif: $R = 25,625 \text{ mm}$ (roue dentée de 41 dents de module 1,25 mm)

- position de la liaison rotule de centre **A**: $\lambda = 5,8 \text{ mm}$

- rotation des roues arrière: $\varphi = \frac{y}{120} \frac{180}{\pi}$, (y en mm, φ en degrés).

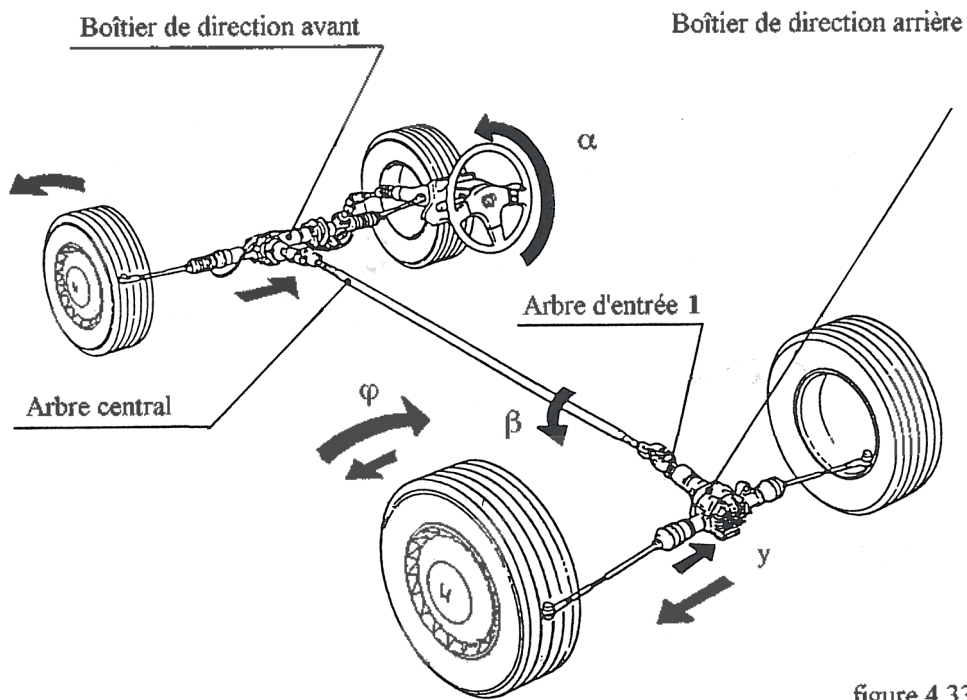


figure 4.33

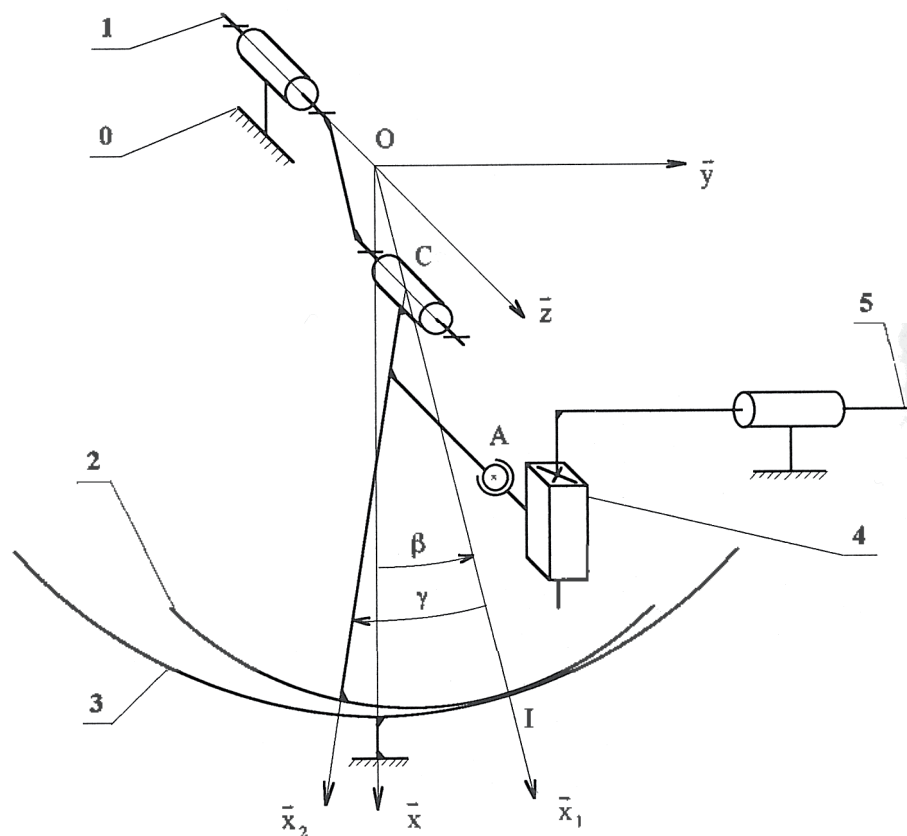


figure 4.34

Questions:

- 1- Déterminer la relation entre φ et α . Tracer le graphe de $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in [0^\circ, 480^\circ]$. Préciser les valeurs de α pour lesquelles $\varphi = 0$ et définir les extrémums de φ .
- 2- Déterminer la course totale de la bielle de transfert 5.
- 3- Déterminer la course totale du baladeur 4 par rapport à la bielle de transfert 5.

3. Joint de CARDAN. C'est au XVIème siècle que le mathématicien italien, Gerolamo Cardano, inventa le joint qui porte son nom. Mais ce n'est qu'au XXème siècle qu'il fut utilisé pour transmettre une puissance entre deux arbres concourants, en particulier dans l'automobile avec l'adoption de la traction avant.

Le joint de Cardan de la figure 4.37 est celui d'un modèle réduit d'automobile. Le schéma cinématique paramétré de la figure 4.38 représente le joint de Cardan monté entre deux arbres 1 et 2, concourants en un point O, origine du repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ lié à un bâti 0. L'axe (O, \bar{z}) est perpendiculaire au plan déterminé par les deux arbres.

L'arbre 1, lié à la fourche 1, a une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}_1) avec le bâti 0. Le repère $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z})$ est tel que: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \alpha$ (angle de brisure, inférieur à 30°).

L'arbre 2, lié à la fourche 2, a une liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{y}) avec le bâti 0. Une liaison pivot glissant est nécessaire pour éviter un risque de coincement du mécanisme.

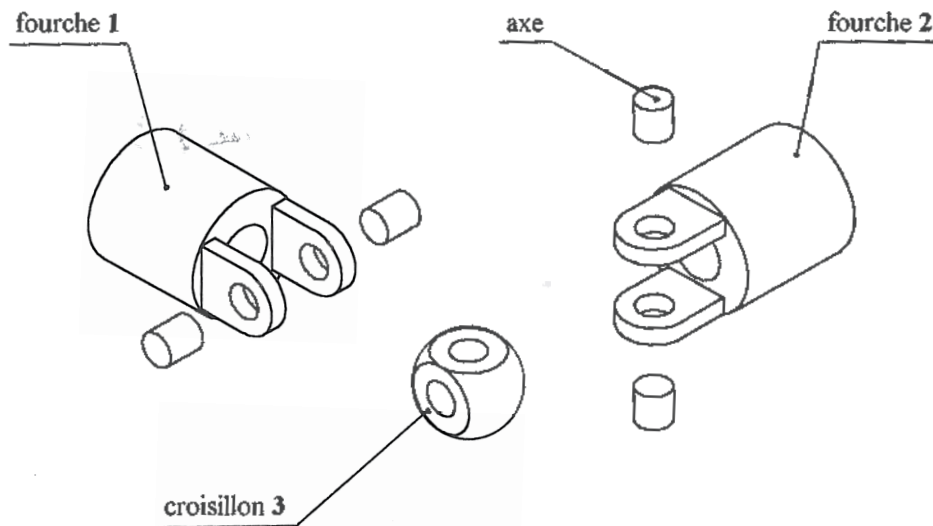


figure 4.37

Questions

- 1-Déterminer une relation entre $\tan(\theta_2)$ et $\tan(\theta_1)$.
- 2-Déterminer en connaissant la formule $\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$, la formule de $\tan(a-b)$
- 2- En utilisant les deux question précédentes, exprimer $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ en fonction des angles α et de $\tan(\theta_1)$.
- 3- Enfin à partir de la relation déterminée à la question 1, trouver une expression du rapport ω_2/ω_1 entre la vitesse de rotation des fourchettes 2 et 1 en fonction des angles α et θ_1 .
- 4- A partir de la question précédente, déterminer dans quel cas le rapport ω_2/ω_1 est égal à 1 (quel que soit θ_1). Pour ce faire, on déterminera une équation du second degré sur $\cos(\alpha)$.

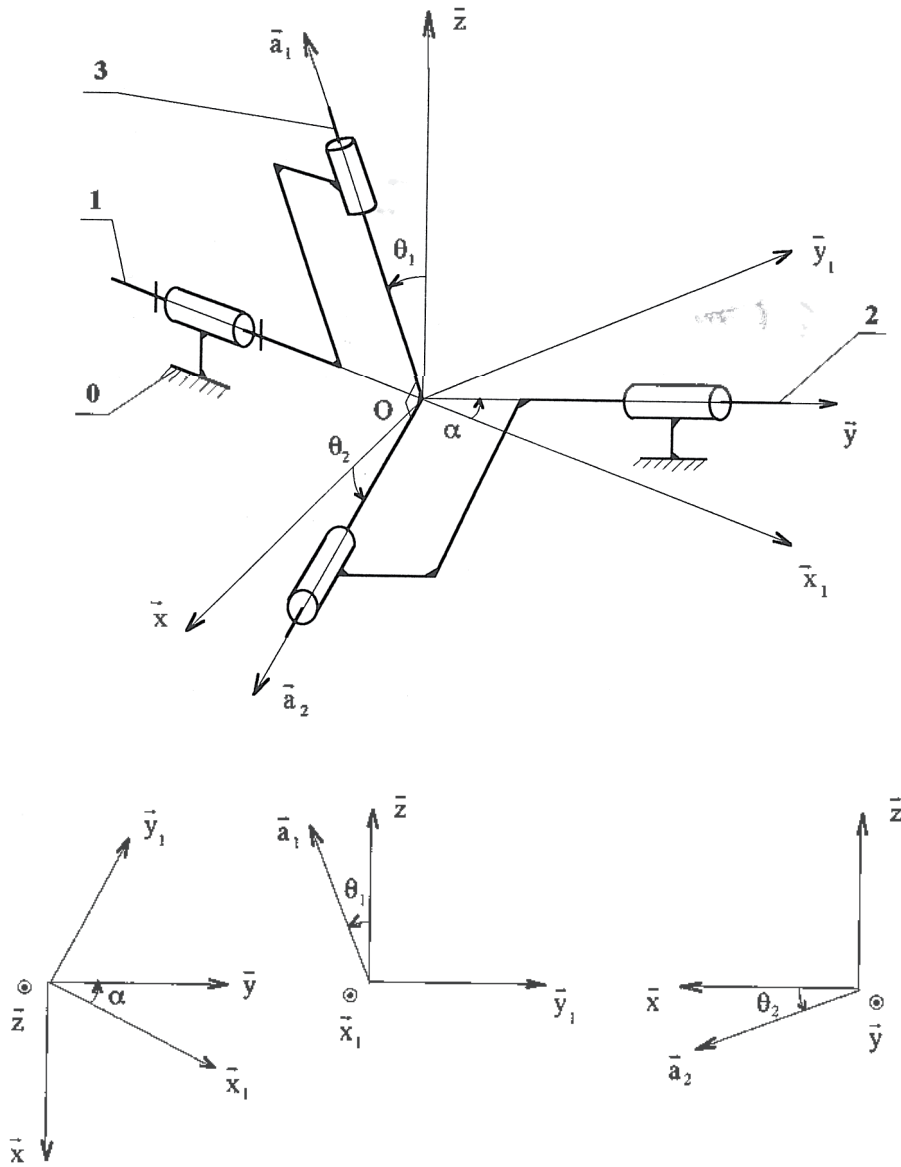


figure 4.38

Dans la figure ci-dessus, \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont 2 vecteurs unitaires orthogonaux.

TD n° 3 : Train épicycloïdal et différentiel de voiture

Durée : 3 heures

Un engrenage est un mécanisme élémentaire constitué de deux roues dentées, mobiles autour d'axes de position relative invariable, et dont l'une entraîne l'autre. Lorsque la différence entre les diamètres des deux roues est accentuée, la plus petite roue est appelée pignon.

Il existe différents types d'engrenage, selon la forme des roues, la position relative de leurs axes, l'emplacement des dentures (denture extérieure ou intérieure), etc. Ceux qui nous intéressent particulièrement et qui sont aussi les plus répandus sont :

- l'engrenage parallèle extérieur (figure 1) ;
- l'engrenage parallèle intérieur (figure 2) ;
- l'engrenage concourant extérieur (figure 3).



FIG. 1 –



FIG. 2 –

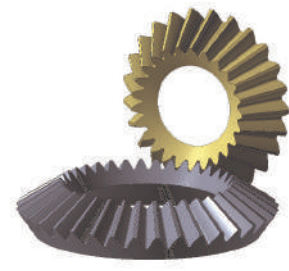


FIG. 3 –

Les schémas cinématiques correspondants sont reportés sur les figures 4, 5 et 6 respectivement. Pour chaque engrenage, il y a un schéma en coupe transversale (celui de gauche) et un en coupe axiale (celui de droite).

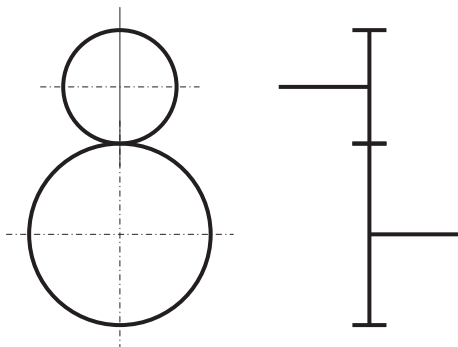


FIG. 4 –

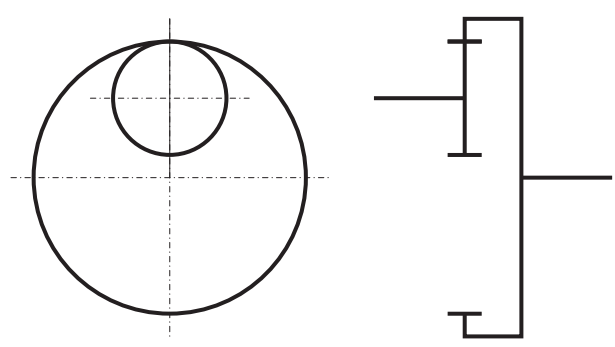


FIG. 5 –

L'un des intérêts d'un engrenage est que le rapport des vitesses de rotation dépend du rapport des rayons et donc des nombres de dents.

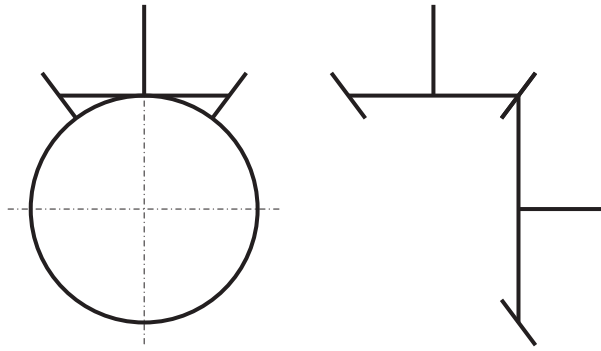


FIG. 6 –

Pour cette raison, les engrenages sont très utilisés pour la transmission de puissance entre deux éléments en rotation, lorsque la vitesse de rotation de l'élément « moteur » n'est pas adaptée à l'élément « récepteur ». Voici quelques exemples :

1. Treuil électrique (figure 7) – Le moteur entraine le tambour autour duquel le câble s'enroule, provoquant ainsi la montée ou la descente de la charge.
2. Turbopropulseur (figure 8) – La turbine, entraînée en rotation par les gaz d'échappement issus de la combustion, entraîne à son tour l'hélice.
3. Eolienne (figure 9) – Le rotor entraîne l'arbre du générateur produisant l'énergie électrique.

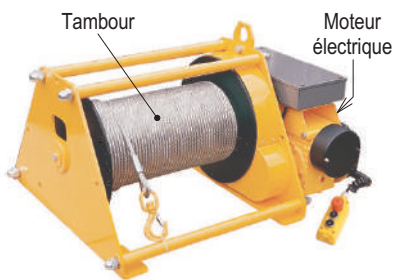


FIG. 7 –



FIG. 8 –



FIG. 9 –

La vitesse de rotation du moteur électrique ($\simeq 1.500 \text{ tours}/mn$) est trop importante pour le tambour et celle de la turbine ($\simeq 40.000 \text{ tours}/mn$) trop importante pour l'hélice. En revanche, celle du rotor de l'éolienne ($\simeq 15 \text{ tours}/mn$) est trop faible pour le générateur. On intercale alors un réducteur de vitesse dans les deux premiers cas, un multiplicateur dans le dernier (figure 10).



FIG. 10 –

De tels dispositifs utilisent en général des trains d'engrenages, c'est-à-dire des combinaisons d'engrenages.

Partie 1 : Engrenage parallèle

On considère les engrenages parallèles extérieurs et intérieurs des figures 11 et 12. Les rayons des roues 1 et 2 sont notés r_1 et r_2 , leurs nombres de dents Z_1 et Z_2 . On désigne par $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti 0. Les vitesses angulaires (vitesses de rotation) des roues par rapport à ce même bâti sont notées $\vec{\Omega}_{1/0} = \Omega_{1/0} \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{2/0} = \Omega_{2/0} \vec{z}_0$.

QA) En écrivant la condition de non glissement en A, montrer que l'on a respectivement :

$$\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{2/0}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad ; \quad \frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{2/0}} = +\frac{r_2}{r_1} = +\frac{Z_2}{Z_1}$$

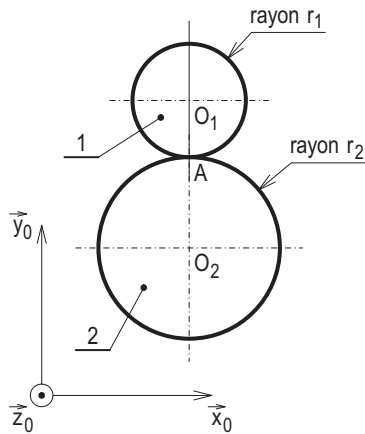


FIG. 11 –

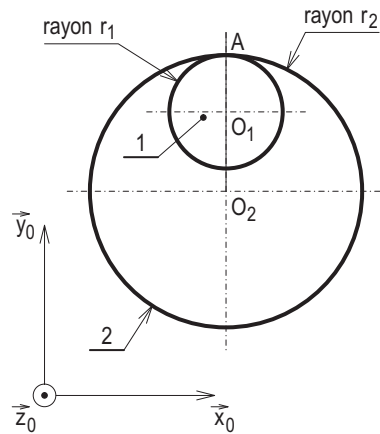


FIG. 12 –

Partie 2 : Train classique

Un train d'engrenages est dit classique lorsque les positions relatives des axes de toutes les roues sont invariables.

La figure 13 donne un exemple, constitué de deux engrenages et de trois roues 1, 2 et 3.

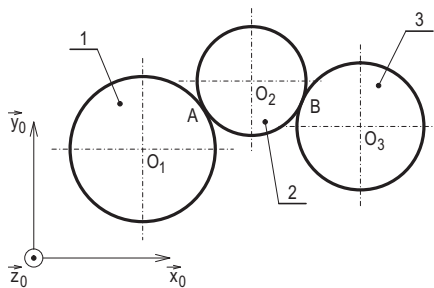


FIG. 13 –

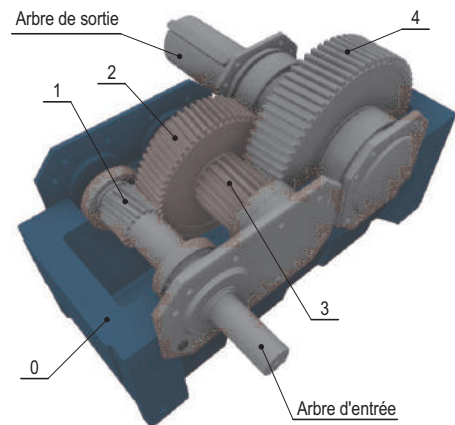


FIG. 14 –

QB) Déterminer le rapport des vitesses de rotation des roues extrêmes, c'est-à-dire $\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{3/0}}$, en fonction des nombres de dents Z_1 , Z_2 et Z_3 .

QC) La figure 14 représente un réducteur de vitesse utilisant un autre type de train d'engrenages. Ce réducteur est dit « à deux étages ».

1. En effectuer le schéma cinématique.
2. Déterminer le rapport de réduction $\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{4/0}}$ en fonction des nombres de dents Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 .

Partie 3 : Train épicycloïdal parallèle

La figure 15 montre un exemple de train épicycloïdal parallèle. Un train épicycloïdal tire son nom du terme « épicycloïde » qui désigne la trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un autre cercle dit directeur (figure 16).

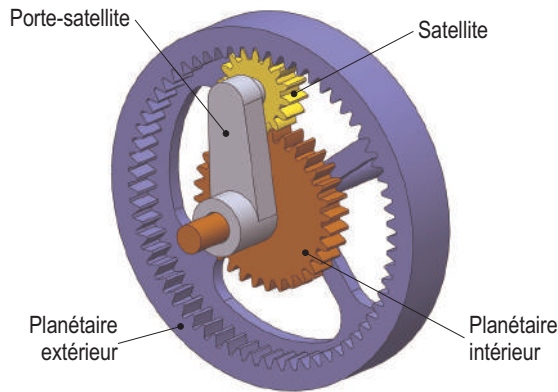


FIG. 15 –

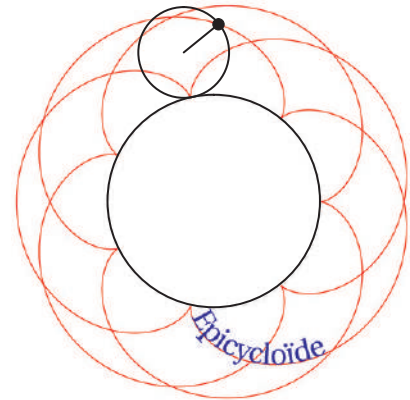


FIG. 16 –

Q1) A partir de la vidéo projetée et de la figure 15, établir le graphe des liaisons puis le schéma cinématique (coupe axiale et transversale) d'un train épicycloïdal. On adoptera les notations suivantes : 0 désigne le bâti, 1 le planétaire intérieur, 2 le satellite, 3 le planétaire extérieur et 4 le porte satellite. Les satellites sont les seuls engrenage en contact avec deux autres engrenages. Dans la vidéo, il y en a 3, mais en réalité un seul suffit. Nous en modéliserons un seul dans cet exercice. Le porte satellite est seul élément qui ne comporte pas de dents. Enfin les planétaires intérieur et extérieur sont les 2 roues dentées coaxiales telles que la première est en engrenage externe avec le satellite et la deuxième en engrenage interne avec le satellite. Sur le schéma cinématique O désignera le centre de rotation du planétaire intérieur, A le point de contact entre le planétaire intérieur 1 et le satellite 2, B le centre de rotation du satellite et C le point de contact entre le planétaire extérieur 3 et le satellite 2. On introduira les référentiels $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti et $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié au porte satellite et tel que $\vec{y}_1 = \vec{OB}/\|\vec{OB}\|$. Enfin on notera respectivement r_1 , r_2 , et r_3 les rayons des 3 engrenages. On supposera dans ce problème que les contacts entre 1 et 2, et 2 et 3 sont sans glissement.

Q2) a) Ecrire les torseurs cinématiques du planétaire intérieur, du planétaire extérieur et du porte satellite par rapport au bâti en un point judicieusement choisi en fonction des vitesses angulaires (vitesses de rotation) $\Omega(1/0)$, $\Omega(3/0)$, $\Omega(4/0)$ et $\Omega(2/4)$ (on précisera bien les directions des vecteurs vitesse angulaire).

b) Ecrire les torseurs cinématiques du planétaire intérieur, du planétaire extérieur et du satellite par rapport au porte satellite en un point judicieusement choisi en fonction de $\Omega(1/0)$, $\Omega(3/0)$, $\Omega(4/0)$ et $\Omega(2/4)$.

Q3) Ecrire les 2 conditions de non-glissement.

Q4) En utilisant la composition des mouvements et la question précédente, exprimer des vitesses des planétaires intérieur et extérieur par rapport au porte satellite aux points A et C respectivement en fonction de la vitesse du satellite par rapport au porte satellite aux mêmes points.

Q5) Enfin utiliser l'expression des torseurs cinématiques et la loi de transport de la vitesse pour trouver une relation entre $\Omega(1/0)$, $\Omega(3/0)$ et $\Omega(4/0)$.

Q6) En analysant le nombre de variables et d'équations, réfléchir si la relation entre les vitesses de rotation des planétaires intérieur et extérieur est complètement déterminée.

Q7) *Remarque* : La formule obtenue à la question 5 est la *formule dite de Willis* qui est valable pour tous les trains épicycloïdaux quel que soit leur complexité. Sous sa forme générale, elle s'écrit :

$$\boxed{\Omega(pi/ba) - \lambda\Omega(pe/ba) + (\lambda - 1)\Omega(psat/ba) = 0}$$

avec $\Omega(pi/ba)$, $\Omega(pe/ba)$ et $\Omega(psat/ba)$ les vitesses de rotation du planétaire intérieur, du planétaire extérieur et du porte satellite par rapport au bâti et λ un coefficient tel que :

$$\lambda = \left[\frac{\Omega(pi/ba)}{\Omega(pe/ba)} \right]_{\Omega(psat/ba)=0}$$

c'est à dire calculé à partir des relations classiques des engrenages internes et externes lorsque l'on bloque le porte satellite. Vérifier que l'on retrouve bien la formule obtenue à la question 5 à partir de la formule de Willis.

Partie 4 : Différentiel automobile

Q8) Existe t'il une représentation plane de ce mécanisme ? Justifier votre réponse.

Q9) Faire le schéma cinématique de ce mécanisme.

Q10) En utilisant la formule de Willis, exprimer la relation entre les vitesses de rotation des planétaires qui, pour une automobile, correspondent aux vitesses de rotation des deux roues.

Q11) Dans un différentiel, l'arbre moteur impose la vitesse de rotation du porte satellite, ce qui induit la rotation des 2 roues. Dans la question 6, nous avons vu qu'il manque une relation pour déterminer complètement l'évolution du système. D'où vient cette relation pour un différentiel de voiture (à quoi sert le différentiel) ?

QAutonomie) Nous avons utilisé dans cet exercice directement la formule de Willis. Reprendre les questions 1 à 7 dans le cas du différentiel pour redémontrer la formule de Willis.

TD n° 4 : Transmission par adhérence

Durée : 3 heures

Introduction

Transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres est très courant. Cette transmission peut se faire, soit par obstacle comme dans le cas d'un engrenage, soit par adhérence.

C'est au second cas que nous allons nous intéresser.

D'une manière générale, une liaison, ou la suppression d'un degré de liberté, peut être obtenue par obstacle, par adhérence ou par les deux moyens à la fois. Illustrons-le à l'aide du moteur à combustion interne dont la figure 1 donne le plan technique.

- liaison 10/15 : la suppression de la translation et de la rotation suivant l'axe est obtenue par adhérence ;
- liaison 17/15 : la suppression de la rotation suivant l'axe est obtenue par obstacle (par le biais de la clavette 18) ;
- liaison 19/15+17+... : la suppression de la rotation suivant l'axe est obtenue par adhérence ;
- liaison 3/5 : la suppression de la translation suivant l'axe est obtenue par obstacle (par le biais des deux anneaux élastiques 2) ;
- etc.

Partie 1 : Système Poulies-Courroies

Un système poulies-courroie (figure 2) permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres éloignés. Il se compose de deux poulies 1 et 2, mobiles en rotation par rapport à un bâti 0 (non représenté), et d'une courroie 3 qui s'enroule autour de chacune d'entre elles.

La poulie motrice entraîne la courroie qui, à son tour, entraîne la poulie réceptrice. Pour cela, il faut que la courroie soit tendue.

Lorsque la courroie et les poulies sont lisses, comme c'est le cas pour le système de la figure 2, la transmission se fait par adhérence. En revanche, lorsque la courroie et les poulies sont crantées (figure 3), la transmission se fait par obstacle.

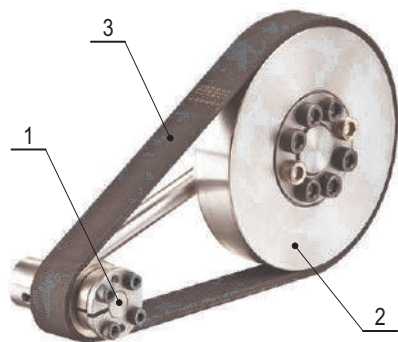


FIG. 2

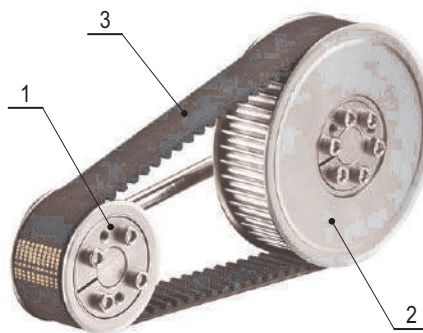


FIG. 3

La figure 4 représente le schéma cinématique d'un système poulies-courroie. Les rayons des poulies 1 et 2 sont notés r_1 et r_2 . On désigne par $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti 0.

Les vitesses angulaires des poulies par rapport à ce même bâti sont notées $\vec{\Omega}_{1/0} = \Omega_{1/0} \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{2/0} = \Omega_{2/0} \vec{z}_0$.

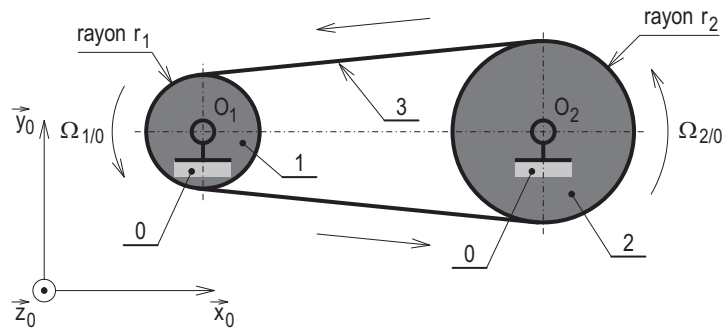


FIG. 4

Q1) En se basant sur la figure 5, établir le rapport $\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{2/0}}$. Pour ce faire, on admettra les hypothèses suivantes :

- H1) Le brin rectiligne de la courroie se comporte comme un solide rigide ;
- H2) Il y a non glissement en B et en C.

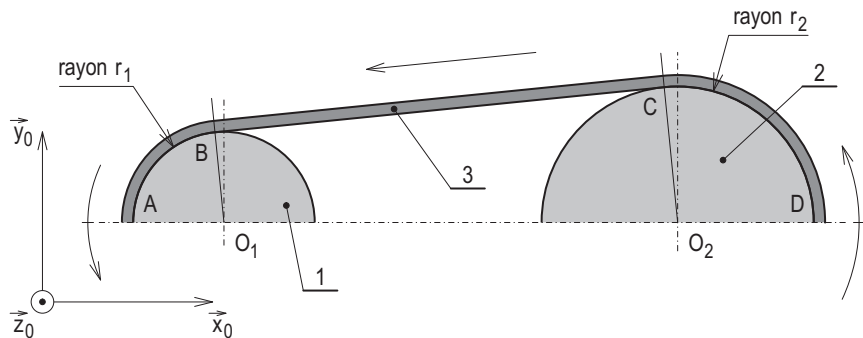


FIG. 5

Q2) Un système poulies-courroie peut comporter plus de deux poulies. La distribution d'un moteur à combustion interne l'illustre parfaitement.

Considérons le système de la figure 6. En se basant sur l'étude précédente, établir la relation liant les vitesses de rotation $\Omega_{1/0}$, $\Omega_{2/0}$ et $\Omega_{3/0}$ des poulies et leurs rayons r_1 , r_2 et r_3 .

Partie 2 : Variateur de vitesse à courroie

Un variateur de vitesse est un dispositif permettant de faire varier de manière continue, et ce dans une plage donnée, le rapport des vitesses de rotation de deux arbres. Diverses solutions existent et ont pour point commun d'utiliser une transmission par adhérence.

L'une des solutions est basée sur le système poulies-courroie. Le variateur est alors dit « à courroie ». Son schéma cinématique est donnée par la figure 7.

Le mécanisme comprend deux poulies sur lesquelles circule une courroie généralement trapézoïdale. Chacune de ces deux poulies présente un flasque fixe (1 et 3) et un flasque mobile axialement (2 et 4). Le déplacement du flasque mobile modifie le rayon d'entraînement de la poulie correspondante. Par ailleurs, les écartements des flancs des deux poulies varient de façon conjuguée, afin de conserver constante la tension de la courroie 5.

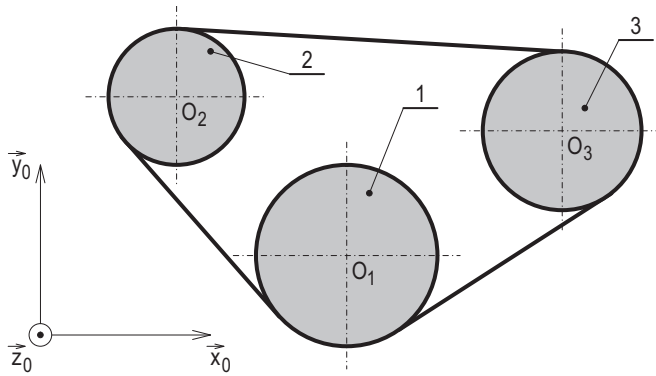


FIG. 6

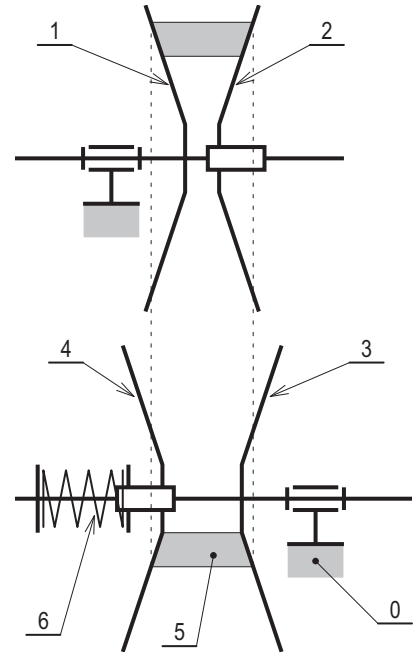


FIG. 7

La modification du rapport de réduction est obtenu en déplaçant 2 (au moyen d'un dispositif dédié, non représenté ici). 4 se déplace alors sous l'action conjuguée de la courroie et du ressort 6. Ainsi, l'augmentation du rayon d'entraînement de l'une des deux poulies entraîne la diminution de celui de l'autre et vice-versa, modifiant ainsi le rapport de réduction.

Q3) La figure 8 donne le plan technique d'un variateur de vitesse à courroie. Le déplacement de l'un des flasques mobiles est commandé manuellement, au moyen d'un volant entraînant le pignon d'un système pignon-crémaillère. Le mécanisme comprend un engrenage parallèle extérieur.

Etudier le plan. Repérer notamment les flasques fixes et mobiles, la courroie, le dispositif permettant de déplacer l'un des deux flasques mobiles, les deux roues dentées, etc.

Q4) Les variateurs de vitesse à courroie sont largement utilisés sur les cyclomoteurs et les scooters depuis de très nombreuses années. Ils jouent alors le rôle de la boîte de vitesses. Dans le secteur de l'automobile, ils gagnent du terrain en remplaçant la boîte de vitesses classique à engrenages (manuelle ou automatique). On parle alors de « boîte CVT » (*Continuously Variable Transmission*). En général, le déplacement du flasque mobile de la poulie motrice est obtenu par un dispositif centrifuge, de manière à ce que le diamètre d'enroulement de ladite poulie augmente avec la vitesse de rotation.

Quels sont les principaux avantages et inconvénients d'une boîte CVT ?

Partie 3 : Variateur de vitesse à plateaux et galet

A présent, on s'intéresse à un variateur de vitesse utilisant une autre solution. Son plan technique est donné par la figure 9, son schéma cinématique par la figure 10.

La rotation du plateau 1 entraîne (par adhérence) celle du galet 3; la rotation de ce dernier entraîne celle du plateau 4 (toujours par adhérence).

Le rapport $\frac{\Omega_{4/0}}{\Omega_{1/0}}$ dépend de la position y du galet. Le déplacement de ce dernier est obtenu au moyen d'un système vis-écrou.

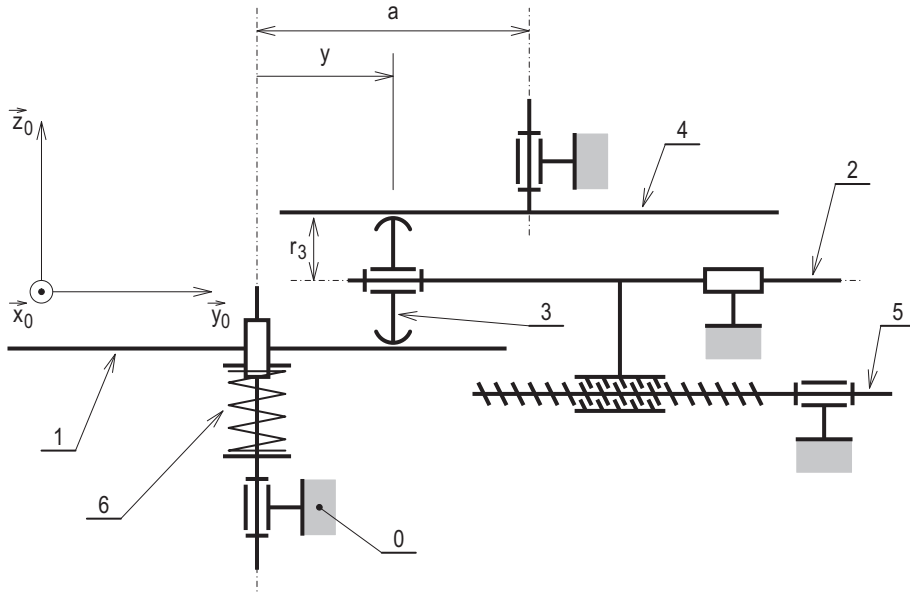


FIG. 10

Q5) Etudier le plan. Repérer notamment les deux plateaux, le galet, le ressort, etc.

Afin de déterminer $\frac{\Omega_{4/0}}{\Omega_{1/0}}$, on considère un problème-modèle (figures 11, 12 et 13).

On désigne par $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti S_0 .

Le disque S_1 , représenté partiellement, est lié au bâti S_0 au moyen d'une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) . Le bras S_2 est lié au bâti S_0 au moyen d'une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) . Le disque S_3 , de rayon r , est lié au bras au moyen d'une liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{z}_3) coïncidant avec l'axe de révolution du disque. Par ailleurs, ce disque est assujéti à rester en contact en un point K avec le disque S_1 .

On associe à chaque solide S_i une base b_i , où :

$$b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) , \quad b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0) , \quad b_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) , \quad b_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

b_1 se déduit de b_0 par une rotation d'angle $\psi(t)$ autour de \vec{z}_0 (figure 12), b_2 de b_0 par une rotation d'angle $\alpha(t)$ autour de \vec{z}_0 . b_3 se déduit de b_2 par une rotation d'angle $\beta = \frac{\pi}{2}$ autour de \vec{u} puis une rotation d'angle $\varphi(t)$ autour de \vec{z}_3 .

Par ailleurs : $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{z}_3$

Q6) Préciser les paramètres permettant de repérer les positions par rapport au bâti S_0 des solides S_1 , S_2 et S_3 .

Q7) Exprimer le torseur cinématique du mouvement de S_1 par rapport à S_0 en un point judicieusement choisi. En déduire $\vec{V}(K \in S_1/S_0)$.

Q8) Exprimer le torseur cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_0 en un point judicieusement choisi. En déduire $\vec{V}(B \in S_2/S_0)$.

Q9) Exprimer le torseur cinématique du mouvement de S_3 par rapport à S_2 en un point judicieusement choisi. Déduire des résultats précédents le torseur cinématique de S_3 par rapport à S_0 .

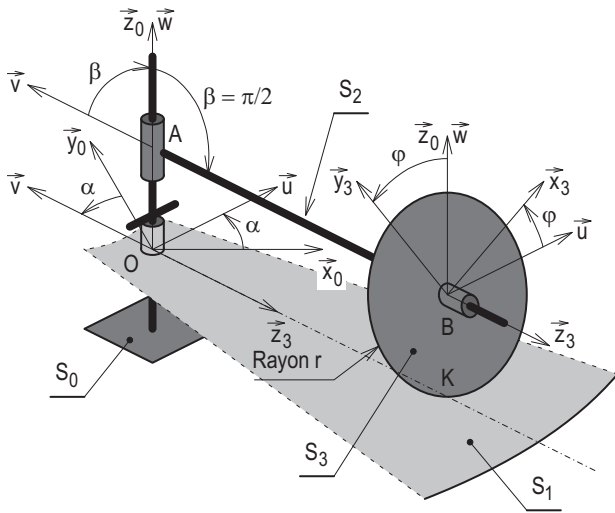


FIG. 11

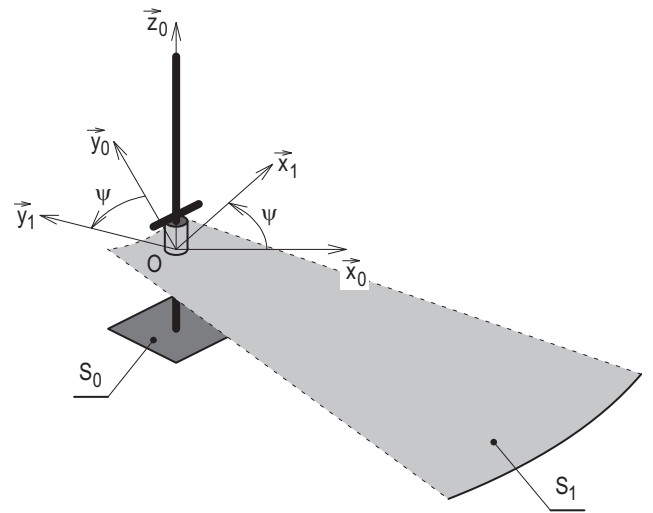


FIG. 12

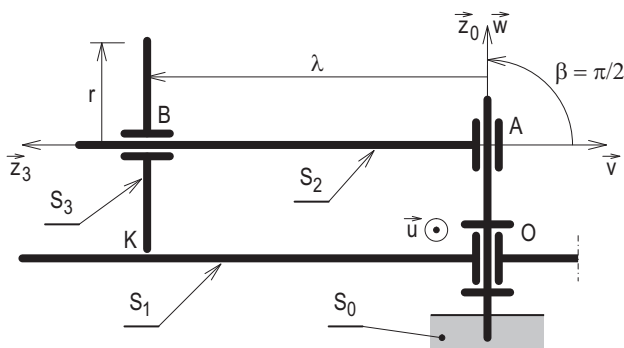
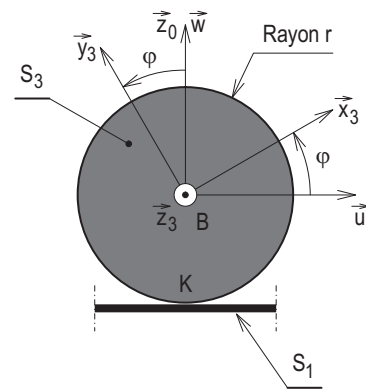


FIG. 13



Q10) Exprimer la vitesse de glissement en B de S_3 par rapport à S_2 , puis la vitesse de glissement en K de S_3 par rapport à S_1 .

Q11) En K il y a adhérence entre les solides S_1 et S_3 . En déduire $\dot{\lambda}$ ainsi qu'une relation entre λ , r , $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\varphi}$.

Q12) A présent, on s'intéresse au variateur de vitesse. En utilisant un résultat établi à la question précédente, exprimer le rapport $\frac{\Omega_{4/0}}{\Omega_{1/0}}$ en fonction de a et de y .

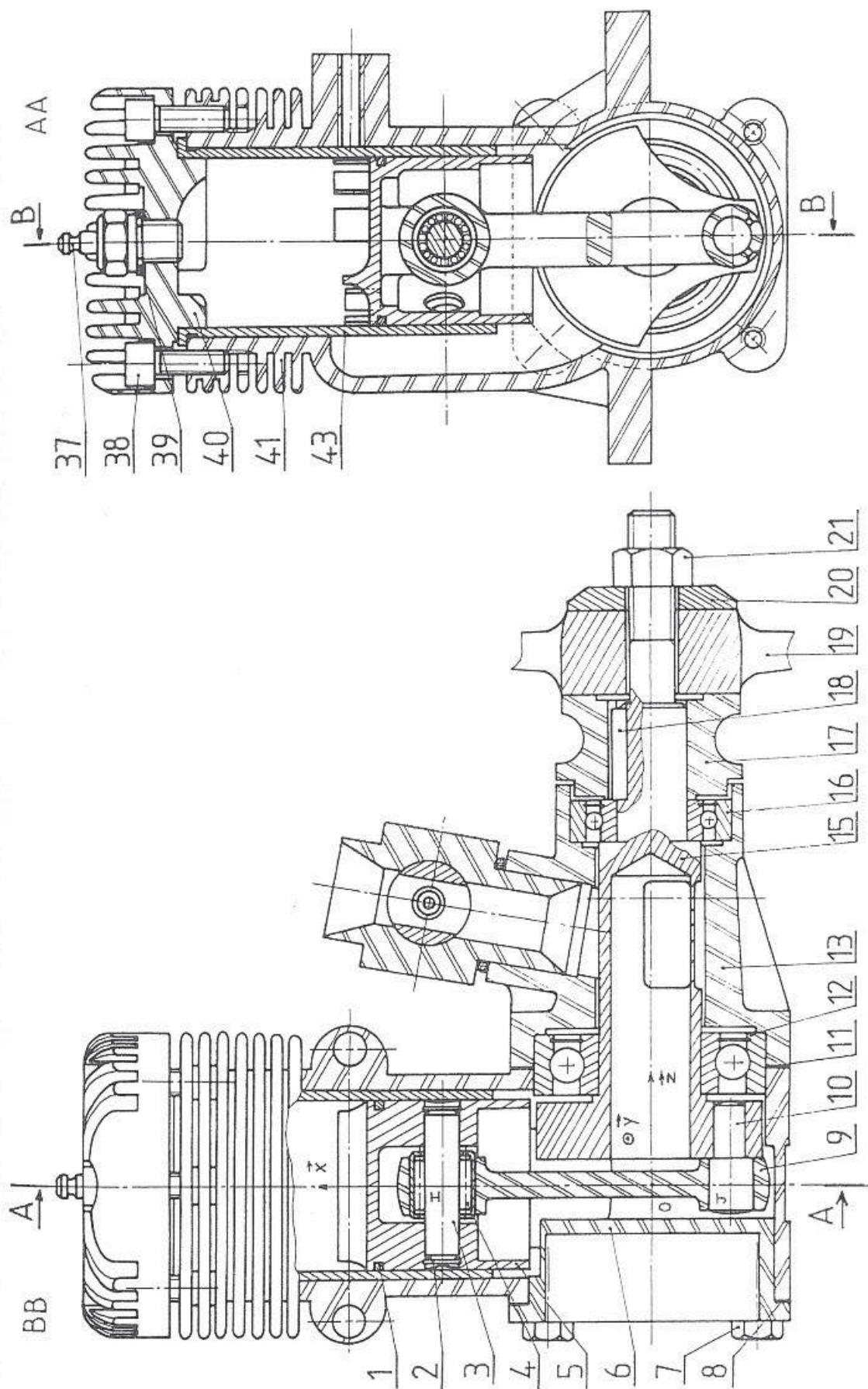


FIG. 1

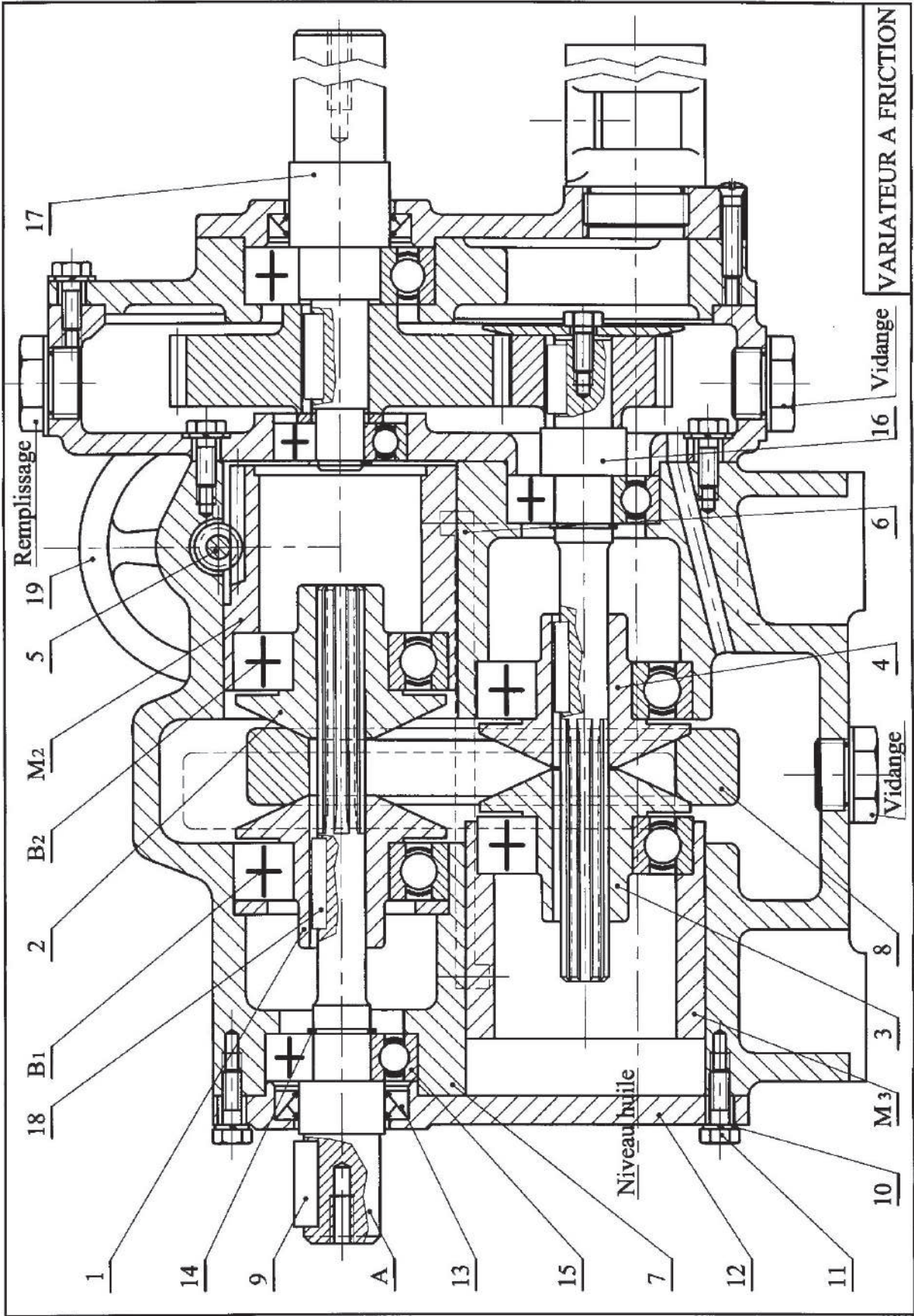


FIG. 8

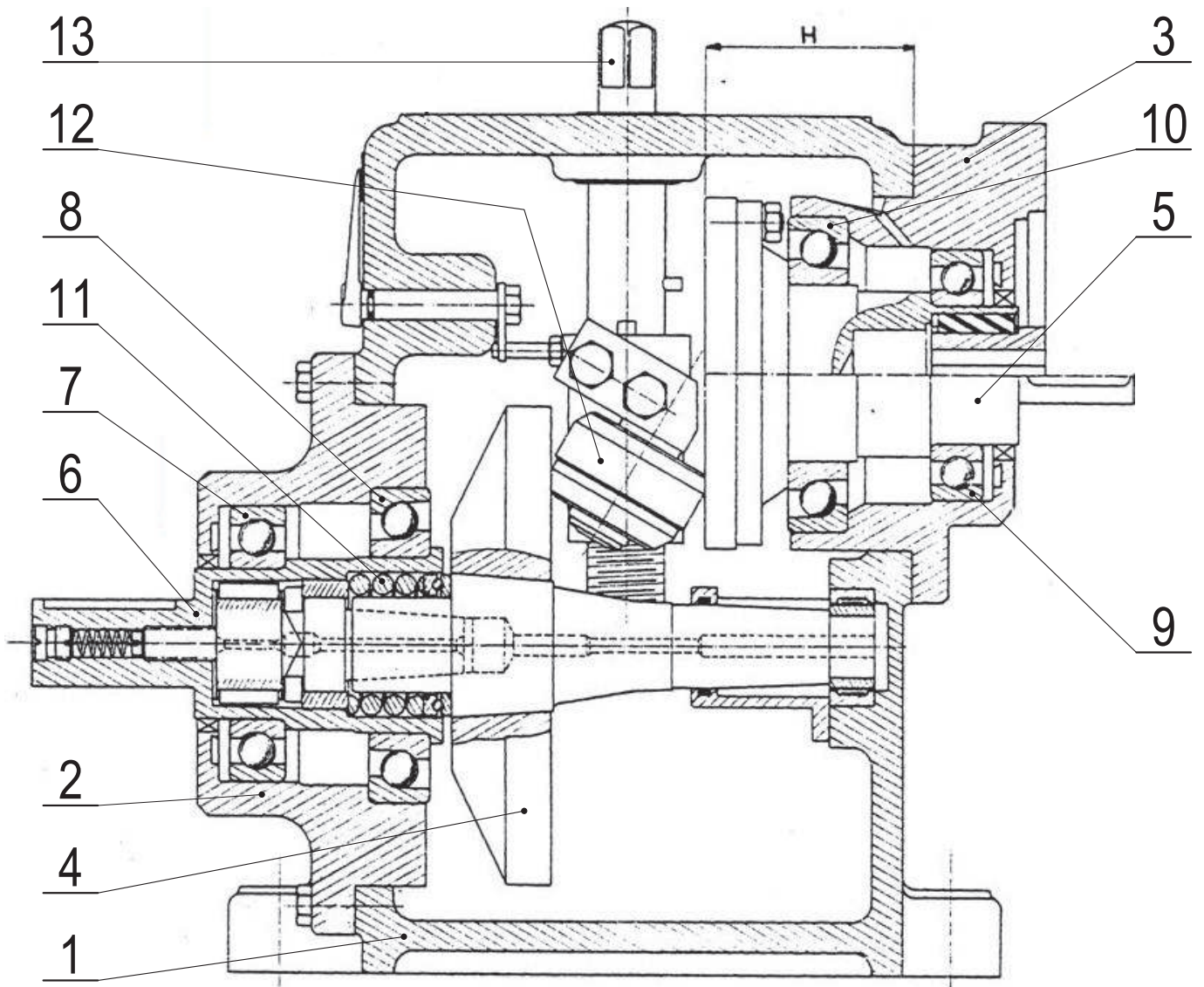


FIG. 9

TD n°5 : Embrayage

11. Embrayage. Le dessin de la figure 8.46 représente un embrayage VOLVO de véhicule automobile avec son système de commande. Un embrayage sert à désaccoupler (débrayage) l'arbre vilebrequin 5 du moteur de l'arbre primaire 13 de la boîte de vitesses et à réaccoupler progressivement ces deux arbres (embrayage), à chaque changement de vitesse.

L'embrayage, utilisant l'adhérence de deux surfaces planes appliquées l'une contre l'autre avec un certain effort, est constitué du disque d'embrayage 3 recouvert sur ses deux faces d'une garniture de friction et monté sur un moyeu cannelé qui lui permet de coulisser sur les cannelures de l'arbre primaire de la boîte de vitesses. Le plateau de pression 17, sur lequel agit un ressort en diaphragme 16, commandé par la pédale d'embrayage, permet d'appuyer le disque d'embrayage 3 sur un volant 4 lié à l'arbre vilebrequin 5 du moteur.

Le but de l'étude est de déterminer le couple maximum transmissible par l'embrayage.

Le disque d'embrayage 3 est schématisé par une couronne circulaire de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 (figure 8.47).

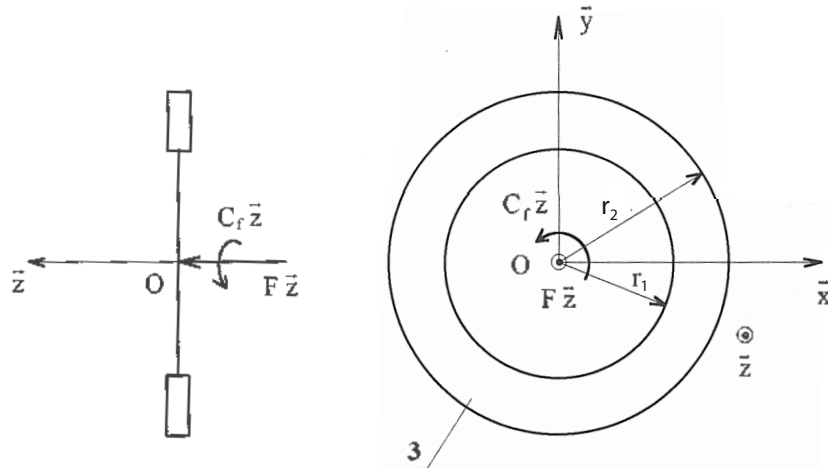


figure 8.47

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère, tel que l'axe (O, \bar{z}) soit confondu avec l'axe de symétrie du disque d'embrayage. Le plateau de pression 17 exerce sur le disque d'embrayage 3, une action mécanique représentée, au point O, par le torseur :

$$\{F(17 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} F \bar{z} \\ C_r \bar{z} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad F > 0 \quad \text{et} \quad C_r > 0$$

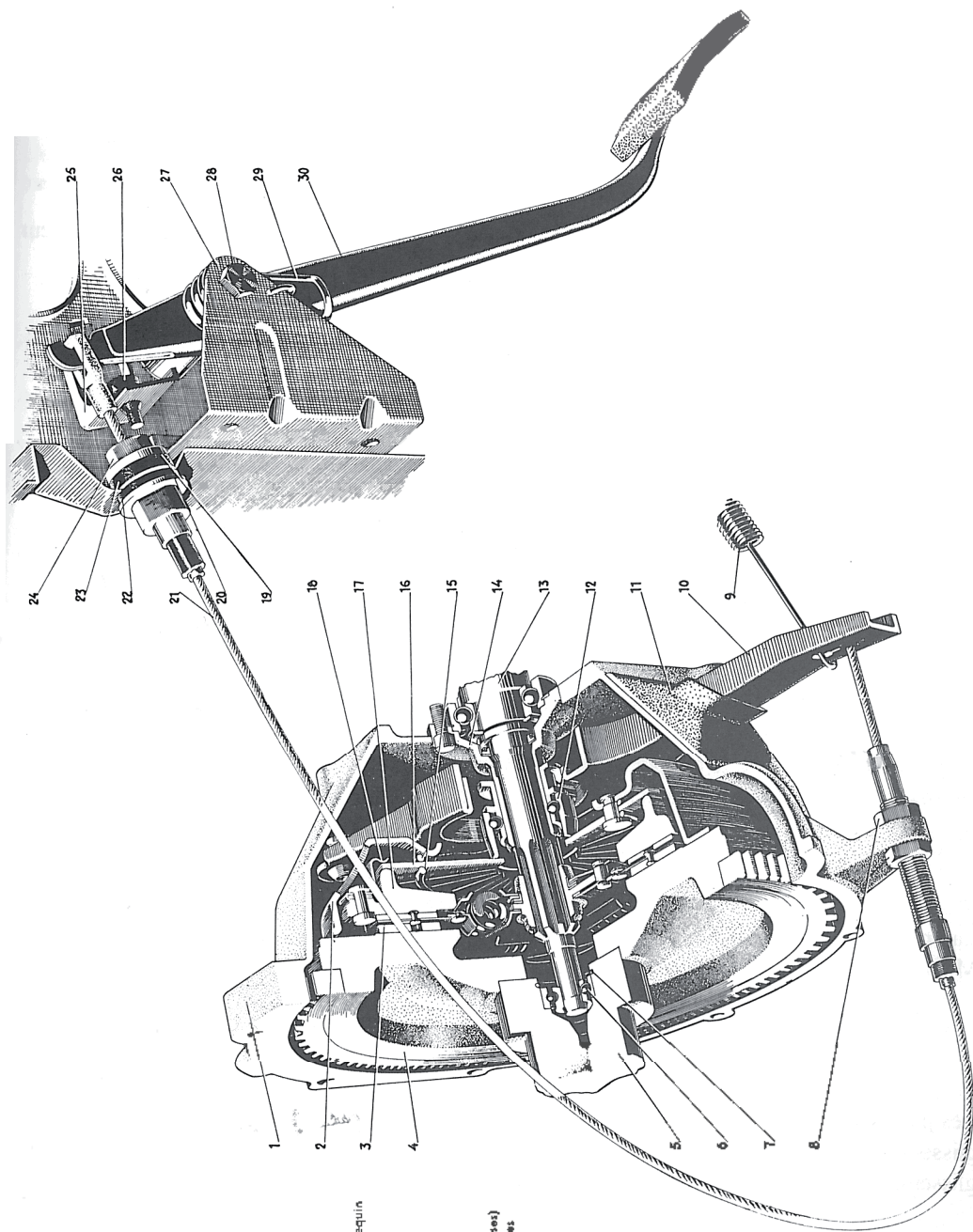
On note f le coefficient de frottement (et d'adhérence) entre les garnitures du disque d'embrayage 3 et le plateau de pression 17, ainsi qu'avec le volant 4 le l'arbre vilebrequin 5.

Données numériques : $r_1 = 72 \text{ mm}$ $r_2 = 105 \text{ mm}$ $F = 3500 \text{ N}$ $f = 0,35$

Question

Déterminer le couple maximum transmissible C_r par le plateau de pression 17 au disque d'embrayage 3, dans les deux cas suivants :

- la pression de contact p est supposée uniforme,
- la pression de contact p est supposée inversement proportionnelle à l'usure, c'est à dire à la vitesse de glissement au point considéré.



1. Center de volant
2. Carter d'embrayage
3. Disque d'embrayage
4. Volant
5. Vilebrequin
6. Paillasson dans vilebrequin
7. Châssis
8. Ecrou de réglage
9. Ressort de rappel
10. Fourchette de débrayage
11. Pare-pousière
12. Butée de débrayage
13. Arbre d'embrayage (arbre primaire de boîte de vitesses)
14. Couvreur, boîte de vitesses
15. Anneaux d'appui
16. Ressort en diaphragme
17. Plaque de pression
18. Support
19. Rondelle
20. Rondelle
21. Câble de débrayage
22. Rondelle caoutchouc
23. Rondelle caoutchouc
24. Ecrou
25. Support
26. Butée de pédale
27. Support
28. Vis
29. Ressort de rappel
30. Pédale d'embrayage

figure 8.46 (document VOLVO)

TDn°6 : Frein à disque

12. Frein à disque. Le document BENDIX de la figure 8.49 représente un frein à disque de véhicule automobile de la première génération. Il est essentiellement constitué du disque 1 lié à la roue du véhicule, des plaquettes 2 et 3 serrées contre le disque 1, pendant le freinage, par un piston guidé en translation dans l'étrier 4.

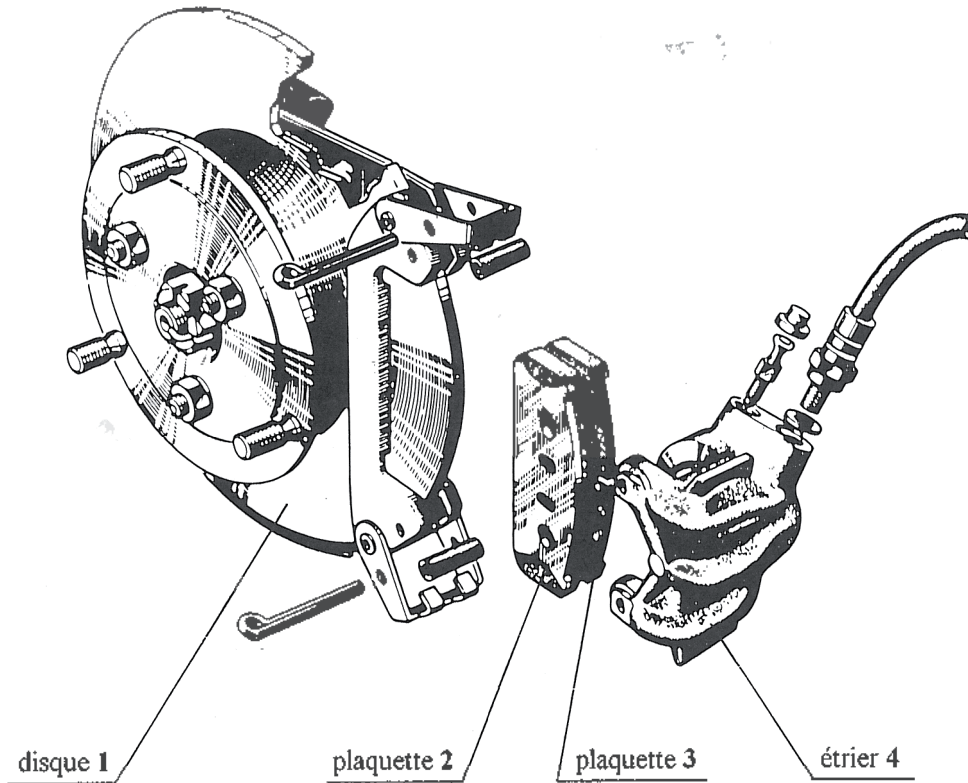


figure 8.49 (document BENDIX)

Le but de l'étude est de déterminer l'action mécanique exercée par la plaquette 3 sur le disque 1 lors d'un freinage. Pour cela, la plaquette 3 est schématisée par une surface limitée par un secteur circulaire d'angle 2α et d'une couronne circulaire de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 (figure 8.50).

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère tel que l'axe (O, \bar{z}) soit confondu avec l'axe de la roue. Le plan (O, \bar{x}, \bar{y}) est placé dans le plan médian du disque d'épaisseur $2e$.

La plaquette 3 exerce sur le disque 1 une action mécanique représentée, en chaque point M de la surface de contact, par la densité surfacique de forces $\vec{f}(M) = p \vec{z} + t \vec{u}_\theta$, sachant que le repère $R_1(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z})$ est tel que :

$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{u}_r &= r & \text{avec} & & r_1 \leq r \leq r_2 \\ \theta &= (\bar{x}, \vec{u}) & \text{avec} & & -\alpha \leq \theta \leq \alpha \end{aligned}$$

Les composantes normale et tangentielle p et t sont positives.

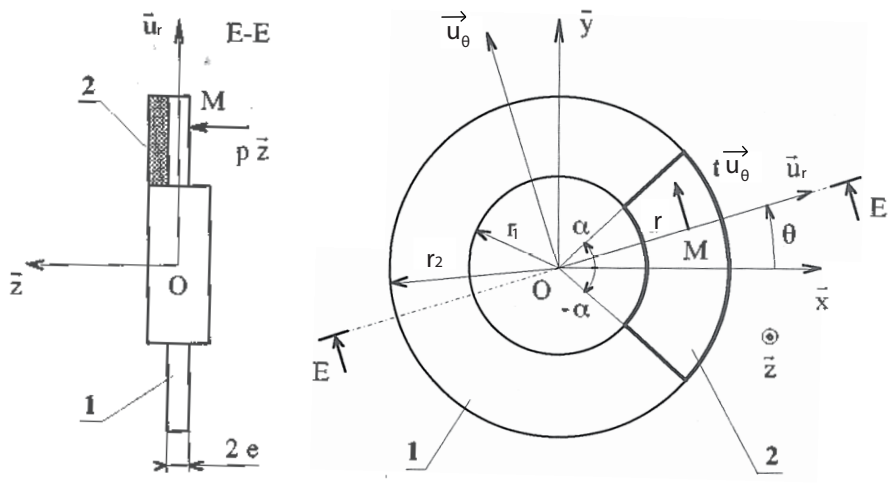


figure 8.50

On suppose la pression p uniforme sur la surface de contact et on note f le coefficient de frottement entre le disque 1 et la garniture de la plaquette 3.

Données numériques

$$r_2 = 90 \text{ mm} \quad r_1 = 60 \text{ mm} \quad \alpha = 30^\circ \quad f = 0,35 \quad p = 2 \text{ MPa}$$

Questions

1- Déterminer, au point O, le torseur d'action mécanique de la plaquette 3 sur le disque 1 en fonction de p , f , r_1 , r_2 , e et α .

2- En déduire, le torseur d'action mécanique de l'ensemble des deux plaquettes 2 et 3 sur le disque 1. Application numérique.

TD n° 7 : Système bielle manivelle : point de vue statique.

On étudie le système bielle manivelle présenté sur la figure 1. **L'étude sera conduite en 2D** et le système sera supposé à l'équilibre. On suppose connue la pression p uniforme appliquée dans la chambre de combustion sur la surface plane S du piston dans la direction \vec{y}_0 . Elle induit une action mécanique qui peut être modélisée par une force $\vec{F}_c = F\vec{y}_o = pS\vec{y}_o$ sur le piston 3 appliquée au point C. Le moteur a pour rôle de transformer l'effort presseur de norme F en un couple moteur sortant $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_o$. On note $\vec{C} = C\vec{z} = -C_m\vec{z}_0$ le couple exercé par le récepteur sur la pièce 1 (principe d'action et de la réaction). On supposera que ce mécanisme est plan, et on exprimera les torseurs dans la base $b_0 = (\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$. Enfin on supposera que toutes les liaisons sont parfaites.

Q1) Déterminer le torseur $\{F(p \rightarrow 3)\}$ de l'action de la pression sur le piston en un point judicieusement choisi en fonction de F .

Q2) Déterminer le torseur $\{F(C \rightarrow 1)\}$ du couple sur la pièce 1.

Q3) Donner la forme de tous les torseurs des actions mécanique de chaque liaison du mécanisme étudié en un point judicieusement choisi. (2 points)

Q3bis) Combien y a t'il d'inconnues dans ce problème et combien y a t'il d'équation? Ce problème peut-il être résolu?

Q4) Appliquer le PFS en B en isolant le solide 1 et en déduire un système de 3 équations dans la base b_0 .

Q5) Appliquer le PFS en B en isolant le solide 2 et en déduire un système de 3 équations dans la base b_0 .

Q6) Appliquer le PFS en C en isolant le solide 3 et en déduire un système de 3 équations dans la base b_0 .

Q7) Récapituler les 9 équations statiques du système bielle-manivelle en faisant apparaître en rouge les données et en bleu les actions inconnues de liaison.

Q8) Résoudre le système afin d'exprimer toutes les inconnues de liaison en fonction de l'effort F et ensuite déterminer la relation entre C et F .

Q9) Vérifier l'exactitude de la relation entre C et F obtenu pour deux positions particulières $\theta_{10} = 0$ et $\theta_{10} = -\pi/2$

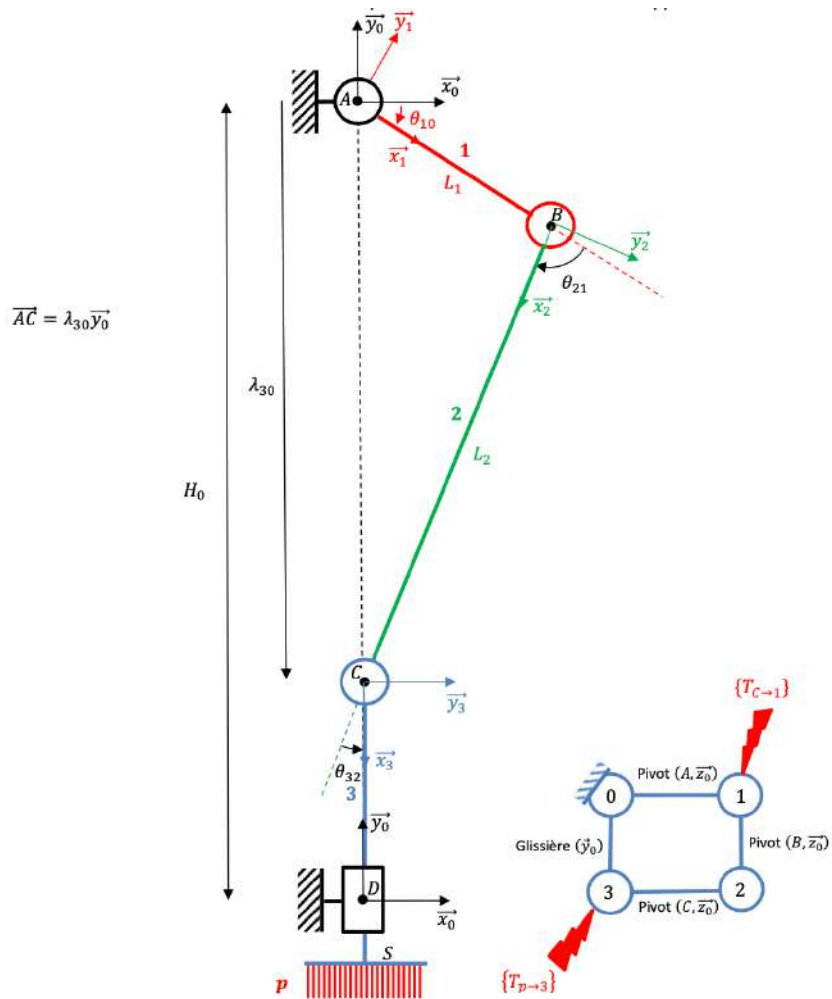


FIGURE 1 – Système bielle manivelle.

Q10) Donner l'expression des torseurs de chaque liaison en fonction de F .

TD n° 8 : Suspension d'un véhicule automobile

Durée : 3 heures

Enoncé

L'objet de cet exercice est de comprendre quels rôles respectifs sont joués par le ressort et l'amortisseur d'un système automobile. Pour ce faire, nous étudierons dans un premier temps une roue liée à un véhicule uniquement par un ressort et dans un second temps un ressort couplé à un amortisseur en parallèle. Dans tout l'exercice, les effets de pesanteur seront négligés, et on prendra comme origine O du repère, le centre de la roue quand le ressort n'est soumis à aucune force extérieure qui le comprime ou l'étire. On se placera dans le référentiel du véhicule $\mathcal{R}_v = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé Galiléen.

On considère dans cette première partie une roue de masse m reliée à un véhicule par un ressort de raideur k et sur laquelle s'applique (en son centre M) une force périodique $\vec{F} = F \cos \omega t \vec{x}$ (voir figure 1) qui correspond à la force exercée par le sol sur la roue si le profil du sol est périodique. La distance OM sera notée x .

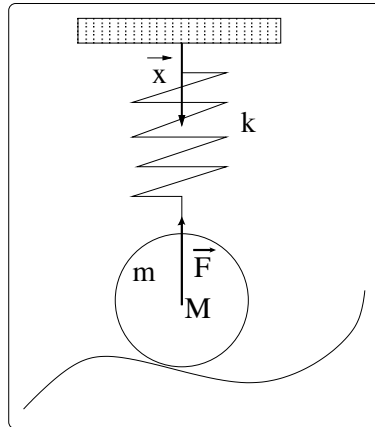


FIGURE 1 –

Q1) Etablir en utilisant la mécanique du point l'équation vérifiée par le système masse ressort représenté sur la figure 1 sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (1)$$

Q2) Déterminer l'expression de ω_0 et sa dimension, et donner la signification physique de cette variable.

Q3) Déterminer la solution homogène de cette équation.

Q4) Déterminer une solution particulière en en intuitant la forme. Enfin donner la solution globale de ce problème.

Q5) Que se passe t'il lorsque $\omega \approx \omega_0$.

Q6) En déduire pour quelle raison il est fondamental de coupler le ressort avec un système d'amortissement.

On considère maintenant un système masse ressort couplé à un amortisseur en parallèle (voir figure2). L'amortisseur est bien sûr un système de frottement qui permet de dissiper de l'énergie.

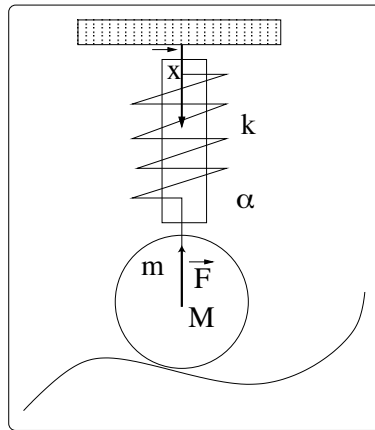


FIGURE 2 –

Q7) Quelle est la forme de la force exercée par l'amortisseur sur le système ? On supposera que la force de frottement (due à l'amortisseur) est proportionnelle à la vitesse de déplacement de la masse avec un coefficient de proportionnalité α (ce que l'on appelle le frottement visqueux).

Q8) Ecrire la nouvelle équation vérifiée par le système sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (2)$$

On précisera la valeur de Q , et on essaiera de déterminer la signification physique de ce paramètre.

Q9) Dans la précédente, nous avons vu que la réponse d'un système non amorti forcé à une fréquence ω et ayant une fréquence propre ω_0 est une combinaison de ces deux fréquences. Si le système est amorti, que va devenir la partie correspondant à la fréquence propre ω_0 qui n'est pas entretenue. A quelle fréquence répondra donc le système en régime établi (c'est à dire après disparition du transitoire).

Q10) On va maintenant travailler sur l'équation complexe associée à l'équation (2) :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (3)$$

avec z tel que $Re(z) = x$. Cette équation est telle que sa partie réelle correspond à l'équation (2). Par conséquent, si l'on trouve la solution de cette équation complexe, il suffira d'en prendre la partie réelle pour

obtenir la solution du problème. En supposant que la solution s'écrit sous la forme $z = Ke^{i(\omega t + \varphi)}$, résoudre l'équation, c'est à dire déterminer les constantes K et φ en fonction de la pulsation adimensionnée $u = \omega/\omega_0$.

Q11) A quoi correspondent K et φ ? Pourquoi avoir choisi la solution sous cette forme.

Q12) Tracer l'évolution de K et φ en fonction de la fréquence.

Les 3 questions suivantes sont à faire en autonomie

Q13) En utilisant le théorème de la puissance mécanique, retrouver une équation différentielle déterminant l'évolution du système masse ressort (sans amortisseur et avec).

Q14) Montrer que cette équation est équivalente à l'équation obtenue avec le principe fondamental de la dynamique.

Q15) Résoudre complètement l'équation différentielle (2). On déterminera la solution de l'équation homogène par les méthodes usuelles puis une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante. En déduire quel est le temps caractéristique de disparition du régime transitoire (temps qu'il faut pour que les oscillations à la fréquence ω_0 disparaissent).

Feuille d'exercices 1 : Système de coordonnées

Coordonnées cylindriques

Exercice 1) Soient A et B deux points ayant pour coordonnées cylindriques (r_A, θ_A, z_A) et (r_B, θ_B, z_B) . Exprimer la distance d entre ces deux points en fonction des coordonnées cylindriques.

Exercice 2) Montrer que le vecteur de base \vec{u}_r est égal à $-\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$.

Exercice 3) Soient A, B et C 3 points ayant pour coordonnées cartésiennes $(x_A, y_A, z_A) = (1, 0, 0)$, $(x_B, y_B, z_B) = (0, -1, 0)$ et $(x_C, y_C, z_C) = (1, 1, -1)$. Déterminer les coordonnées cylindriques de ces 3 points.

Exercice 4) Le point P a pour coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Calculer les coordonnées cylindriques (r', θ', z') du symétrique du point P par rapport (i) au plan Oxy , (ii) Oxz , (iii) Oyz .

Exercice 5) Calculer une équation en coordonnées cylindrique des la sphère passant par l'origine et centrée au point C de coordonnées cylindriques (r_C, θ_C, z_C) .

Coordonnées sphériques

Exercice 1) Soient A et B deux points ayant pour coordonnées sphériques $(r_A, \theta_A, \varphi_A)$ et $(r_B, \theta_B, \varphi_B)$. Exprimer la distance d entre ces deux points en fonction des coordonnées sphériques.

Exercice 2) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A, B dont les coordonnées sphériques sont : $(r_A, \theta_A, \varphi_A) = (1, \pi/2, \pi)$, $(r_B, \theta_B, \varphi_B) = (8, \pi/4, 5\pi/4)$.

Exercice 3) Identifier les parties de l'espace décrites par les équations suivantes : (i) $r = 2$, (ii), $\varphi = 0$, (iii) $\theta = \pi$.

Exercice 4) Calculer l'angle AOB si les coordonnées sphériques de A et B sont respectivement $(r_A, \theta_A, \varphi_A) = (1, \pi/3, \pi/4)$ et $(r_B, \theta_B, \varphi_B) = (2, \pi/2, 2\pi/3)$.

Coordonnées cylindriques :

(Exercice 1 :

Méthode 1 :

$$\vec{OA} = r_A \vec{u}_r(\theta_A) + z_A \vec{z}$$

$$\vec{OB} = r_B \vec{u}_r(\theta_B) + z_B \vec{z}$$

$$\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = r_B \vec{u}_r(\theta_B) - r_A \vec{u}_r(\theta_A) + (z_B - z_A) \vec{z}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

$$= \sqrt{(r_B \vec{u}_r(\theta_B) - r_A \vec{u}_r(\theta_A) + (z_B - z_A) \vec{z})^2}$$

$$= \sqrt{r_B^2 + r_A^2 + (z_B - z_A)^2 + 2 r_B r_A \vec{u}_r(\theta_B) \cdot \vec{u}_r(\theta_A)}$$

Or $\vec{u}_r(\theta_A) = \cos \theta_A \vec{x} + \sin \theta_A \vec{y}$

$\vec{u}_r(\theta_B) = \cos \theta_B \vec{x} + \sin \theta_B \vec{y}$

Donc $\vec{u}_r(\theta_A) \cdot \vec{u}_r(\theta_B) = \cos \theta_A \cos \theta_B + \sin \theta_A \sin \theta_B$.

Donc $\|\vec{AB}\| = \sqrt{r_B^2 + r_A^2 + (z_B - z_A)^2 - 2 r_A r_B [\cos \theta_A \cos \theta_B + \sin \theta_A \sin \theta_B]}$

Méthode 2 :

2
/

$$\vec{OA} = r_A \cos \theta_A \vec{x} + r_A \sin \theta_A \vec{y} + z_A \vec{z}$$

$$\vec{OB} = r_B \cos \theta_B \vec{x} + r_B \sin \theta_B \vec{y} + z_B \vec{z}.$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (r_B \cos \theta_B - r_A \cos \theta_A) \vec{x} + (r_B \sin \theta_B - r_A \sin \theta_A) \vec{y} + (z_B - z_A) \vec{z}.$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(r_B \cos \theta_B - r_A \cos \theta_A)^2 + (r_B \sin \theta_B - r_A \sin \theta_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exercice 2

$$\vec{U}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}.$$

$$\vec{U}_\theta = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y}$$

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -[\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}] = -\vec{U}_r$$

Exercice 3

Point A $x_A = 1$ $y_A = 0$ $z_A = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Or } x_A = r_A \cos \theta_A = 1 \\ y_A = r_A \sin \theta_A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r_A = 1, \theta_A = 0$$

$$z_A = 0.$$

Point B $x_B = r_B \cos \theta_B = 0$
 $y_B = r_B \sin \theta_B = -1$
 $z_B = 0$

$$\left. \right\} \Rightarrow r_B = 1, \theta_B = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x_c = r_c \cos \theta_c = 1 & (1) \\ y_c = r_c \sin \theta_c = 1 & (2) \\ z_c = -1 & (3) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow r_c^2 (\underbrace{\cos^2 \theta_c + \sin^2 \theta_c}_1) = 2 \Rightarrow r_c = \sqrt{2}$$

$$\text{et donc } \left. \begin{array}{l} \cos \theta_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_c = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4) $P(r, \theta, z)$

(i) Symétrique de P par rapport à Oxy : $(r, \theta, -z)$

(4) _____ Oxy : $(r, -\theta, z)$

(3) _____ Oyz : $(r, \pi - \theta, z)$

Exercice 5)

- Cette sphère a pour rayon, la distance $\|OC\| = r_c$
et pour centre le point C de coordonnées (r_c, θ_c, z_c)

- Son équation est donc

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r_c^2$$

c'est à dire

$$(r \cos \theta - r_c \cos \theta_c)^2 + (r \sin \theta - r_c \sin \theta_c)^2 + (z - z_c)^2 = r_c^2$$

Coordonnées sphériques

Exercice 1

$$\vec{OA} = r_A \sin \theta_A \cos \varphi_A \vec{x} + r_A \sin \theta_A \sin \varphi_A \vec{y} + r_A \cos \theta_A \vec{z}$$

$$\vec{OB} = r_B \sin \theta_B \cos \varphi_B \vec{x} + r_B \sin \theta_B \sin \varphi_B \vec{y} + r_B \cos \theta_B \vec{z}$$

donc

$$d = \sqrt{(r_B \sin \theta_B \cos \varphi_B - r_A \sin \theta_A \cos \varphi_A)^2 + (r_B \sin \theta_B \sin \varphi_B - r_A \sin \theta_A \sin \varphi_A)^2 + (r_B \cos \theta_B - r_A \cos \theta_A)^2}$$

Exercice 2

Point A :

$$\begin{cases} x_A = r_A \sin \theta_A \cos \varphi_A = -1 \\ y_A = r_A \sin \theta_A \sin \varphi_A = 0 \\ z_A = r_A \cos \theta_A = 0 \end{cases}$$

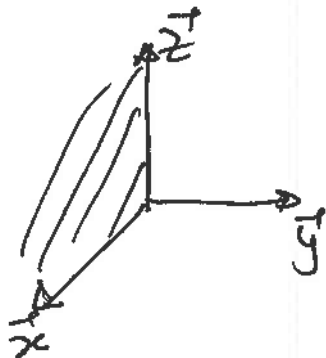
Point B :

$$\begin{cases} x_B = r_B \sin \theta_B \cos \varphi_B = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 \\ y_B = r_B \sin \theta_B \sin \varphi_B = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 \\ z_B = r_B \cos \theta_B = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

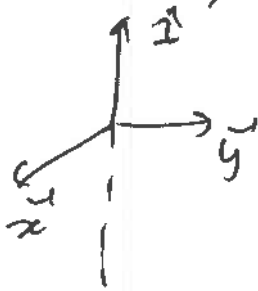
Exercice 3

(i) $x=2$: sphère de rayon 2 et de centre O

(ii) $\varphi=0$: plan semi-infini Oxy avec $x \geq 0$.



(111) $\theta = \pi$ la demi droite (O, \vec{z}) avec $z < 0$



Exercice 4

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$$

$$\|\vec{OA}\| = 1$$

$$\|\vec{OB}\| = 2$$

$$\vec{OA} = r_A \sin \theta_A \cos \varphi_A \vec{x} + r_A \sin \theta_A \sin \varphi_A \vec{y} + r_A \cos \theta_A \vec{z}$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{x} + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{y} + 1 \times \frac{1}{2} \vec{z}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{z}$$

$$\vec{OB} = 2 \times 1 \times -\frac{1}{2} \vec{x} + 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{y} + 0 \vec{z}$$

$$= -\vec{x} + \sqrt{3} \vec{y}$$

$$\text{et donc } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 2 \times \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$$

$$\cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = \text{Arccos} \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right) \approx 1,34 \text{ radians.}$$

Feuille d'exercices 2 : Croix de malte, point de vue cinématique

Le mécanisme représenté figure 1 est un mécanisme à croix de Malte qui transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre 1 en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre 2. Sur la figure :

- α , β , et γ désignent respectivement les angles (\vec{x}, \vec{x}_1) , (\vec{x}, \vec{x}_2) et (\vec{x}_1, \vec{y}_2)
- d et r désignent respectivement les distance OC et OA fixes telles que $d/r > 1$
- y désigne la distance variable AC

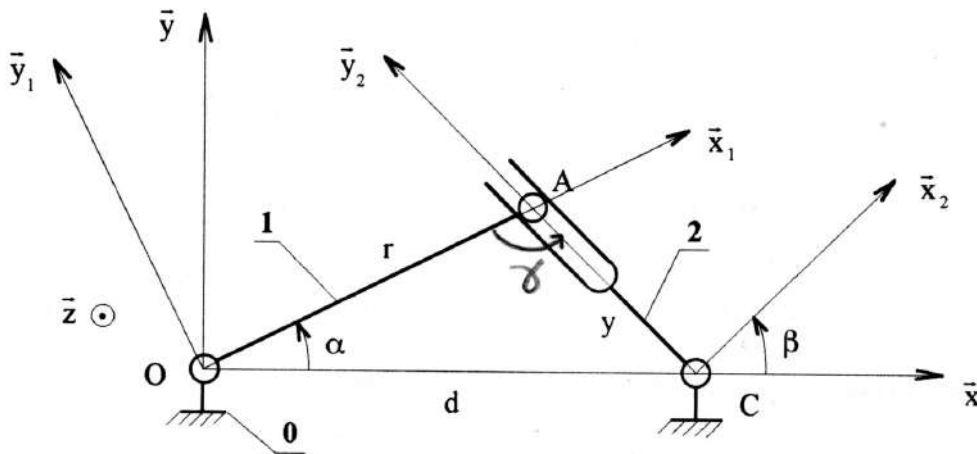


FIGURE 1 – Croix de Malte.

Le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti $\mathbf{0}$, le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est lié à $\mathbf{1}$ en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti $\mathbf{0}$, et le repère $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est lié à $\mathbf{2}$ en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}) avec le bâti $\mathbf{0}$. La liaison entre $\mathbf{1}$ et $\mathbf{2}$ est une liaison linéaire annulaire qui autorise la translation d'axe \vec{y}_2 et la rotation d'axe (A, \vec{z}) .

Q1) Déterminer les torseurs cinématiques $\{T_c(1/0)\}$, $\{T_c(2/1)\}$ et $\{T_c(2/0)\}$ en fonction des paramètres de l'énoncé en des points judicieusement choisis.

Q2) En utilisant la composition des mouvements (relations sur les vitesses de rotation et les vitesses au point O) en déduire deux équations vectorielle reliant les différentes variables de l'énoncé.

Q3) Montrer que la relation sur les vitesse de rotation aurait pu être obtenue à partir de la relation sur la somme des angles du triangle OAC.

Q4) En projetant la relation sur les vitesses sur les vecteur de base \vec{x} et \vec{y} et en combinant ces équations, déterminer une relation entre $\dot{\beta}$ et $(\dot{\beta} - \dot{\alpha})$ en fonction de r , d et des angles α et β .

1) Cinématique

Q1) $\{T_c (1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$ (0,5)

$\{T_c (2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma} \vec{z} \\ -\dot{\gamma} \vec{y}_2 \end{array} \right\}_A$ (1)

$\{T_c (2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$ (0,5)

Q2) Composition des mouvements :

$\{T_c (2/0)\} = \{T_c (2/1)\} + \{T_c (1/0)\}$

Résultante :

$\dot{\beta} \vec{z} = \dot{\alpha} \vec{z} + \dot{\gamma} \vec{z}$

$\boxed{\dot{\beta} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}}$

(0,5)

Moment en O :

$$\vec{V}(O \in 2/1) = \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{AO}$$

$$= -\dot{y} \vec{y}_2 + (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \wedge -r \vec{x}_1$$

$$= -\dot{y} \vec{y}_2 - (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \vec{y}_1 \quad (1)$$

$$\vec{V}(O \in 2/0) = \vec{V}(C \in 2/0) + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{CO}$$

$$= \vec{0} + \dot{\beta} \vec{z} \wedge -d \vec{x}$$

$$= -\dot{\beta} d \vec{y} \quad (1)$$

Soit:

$$\dot{\beta} d \vec{y} = \dot{y} \vec{y}_2 + (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \vec{y}_1$$

(0,5)

En projetant sur \vec{x} et \vec{y} :

$$\begin{cases} \vec{y}_2 = -\sin \beta \vec{x} + \cos \beta \vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \end{cases}$$

(1,5)

Au final:

$$\textcircled{\vec{x}} : \begin{cases} 0 = \dot{y} \sin \beta + (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\textcircled{\vec{y}} : \begin{cases} +\dot{\beta} d = +\dot{y} \cos \beta + (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \cos \alpha \end{cases}$$

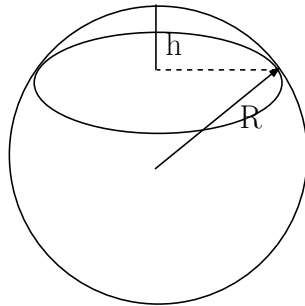
$$\dot{y} = -(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

d'où $\dot{\beta} d = -(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} + (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) r \cos \alpha$

$$\dot{\beta} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \frac{r}{d} \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \right) \quad \textcircled{1}$$

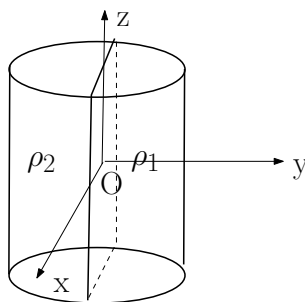
Feuille d'exercices 3 : Torseurs des actions mécaniques associés à des forces à distance

Exercice 1 : Exercices sur les intégrales



Q1) En utilisant les intégrales triples, redémontrer la formule de la surface et du volume d'une calotte sphérique de rayon R et de hauteur h . Attention pour le premier calcul il faut se placer en coordonnées sphériques et pour le deuxième en coordonnées cylindriques.

Exercice 2 : Torseur des actions mécaniques



Q2) On considère un cylindre de hauteur L et de rayon R constitué de deux matériaux et soumis à un champ de gravité supposé constant $\vec{g} = -g\vec{z}$. Celui-ci est tel que la masse volumique $\rho_v = \rho_1$ pour $\theta \in [0, \pi]$, et $\rho_v = \rho_2$ pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$, où (r, θ, z) désignent les coordonnées cylindriques. Calculer le torseur cinématique au point O correspondant au centre géométrique du cylindre.

Q3) On considère une boule magnétique de rayon R soumise à un champs magnétique qui exerce une force volumique $\vec{f}_v = K \cos(\varphi)r\vec{e}_r$ sur la sphère où K désigne une constante, (r, θ, φ) les coordonnées sphériques et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Calculer le torseur des actions mécaniques exercée par le champs magnétique sur la sphère.

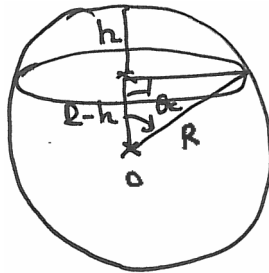
Feuille d'exercice 4

Corrigé

1

Exercice 1

Q1)



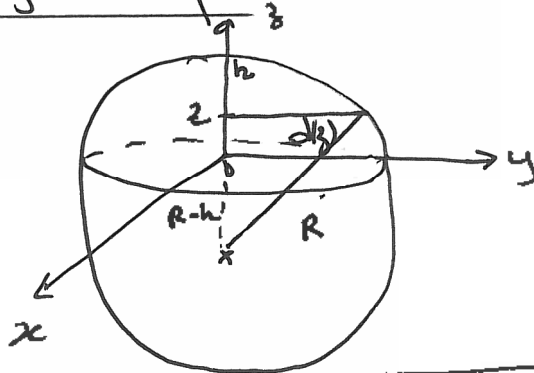
Coordonnées sphériques $\cos \theta_c = \frac{R-h}{R}$

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta_c} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= R^2 \times 2\pi \times \left[-\cos \theta \right]_0^{\theta_c} = R^2 \times 2\pi \times - \left[\frac{R-h}{R} - 1 \right]$$

$$= R^2 \times 2\pi \times \frac{h}{R} = 2\pi R h.$$

Coordonnées cylindriques



$$d(z) = \sqrt{R^2 - (R-h+z)^2}$$

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{d(z)} r \, dr \, d\theta \, dz.$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^h \left[\frac{R^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2 - (R-h+z)^2}} dz.$$

$$= \pi \int_{z=0}^h \left[R^2 - (R-h+z)^2 \right] dz.$$

$$R^2 - (R-h+z)^2 = R^2 - (R^2 + h^2 + z^2 - 2hR + 2Rz - 2hz)$$

$$= \pi \int_{z=0}^h (-h^2 - z^2 + 2hR - 2Rz + 2hz) dz$$

$$= \pi \left[-\cancel{h^3} - \frac{h^3}{3} + 2h^2R - \frac{2Rh^2}{2} + \frac{2h^3}{2} \right] dz$$

$$= \pi \left[Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right]$$

Exercice 2

$$Q2) \vec{R}(\vec{g} \rightarrow \mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} \vec{f}_v dV = - \iiint_{\mathcal{E}} P(M) \vec{g} dV$$

$$= - \int_{r=0}^R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{\pi} p_1 g \vec{z} dV - \iiint_{r=0}^R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} p_2 g \vec{z} dV$$

$$= -\frac{\pi R^2 L g}{2} [p_1 + p_2] \vec{z}$$

$$\vec{M}_0(\vec{g} \rightarrow \mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} \vec{OP} \wedge \vec{f}_v dV = - \iiint_{\mathcal{E}} (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \wedge P(M) g \vec{z} dV$$

$$= +\pi g \int_{r=0}^R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{\pi} r \vec{e}_\theta (r dr dz d\theta) + p_2 g \int_{r=0}^R \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} r \vec{e}_\theta (r dr dz d\theta)$$

$$\text{avec } \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}$$

$$= \frac{p_1 g R^3 L}{3} \int_{\theta=0}^{\pi} (-\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}) d\theta + \frac{p_2 g R^3 L}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} (-\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}) d\theta$$

$$= \frac{g R^3 L}{3} \times [-2p_1 + 2p_2] \vec{x} = \frac{2}{3} g R^3 L (-p_1 + p_2) \vec{x}$$

On retrouve si $p_1 = p_2$ $\vec{M}_0(\vec{g} \rightarrow \mathcal{E}) = \vec{0}$
et homogénéité ok.

Exercice 3

$$\vec{R}(E \rightarrow \mathcal{P}) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} k \omega \varphi \pi \vec{e}_r (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr)$$

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{x} + \sin \theta \sin \varphi \vec{y} + \cos \theta \vec{z}$$

Or $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$, donc la composante suivant \vec{z} s'annule.

Ensuite

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \quad \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0 \text{ donc la composante suivant } \vec{y} \text{ s'annule.}$$

Reste à calculer $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\int_{r=0}^R r^3 dr = \frac{R^4}{4}$

Soit $\vec{R}(E \rightarrow \mathcal{P}) = k \times \pi \times \frac{\pi}{2} \times \frac{R^4}{4} \vec{x} = \frac{k \pi^2 R^4}{8} \vec{x}$

$$\vec{M}_O(E \rightarrow \mathcal{P}) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\underbrace{r \vec{e}_r \wedge k \omega \varphi r \vec{e}_r}_{\vec{0}}) dV$$

$$= \vec{0}$$

C.Q.F.D

Feuille d'exercice 4 : Frein à tambour

13. Frein à tambour. Le document FERODO de la figure 8.54 représente un frein à tambour de véhicule automobile.

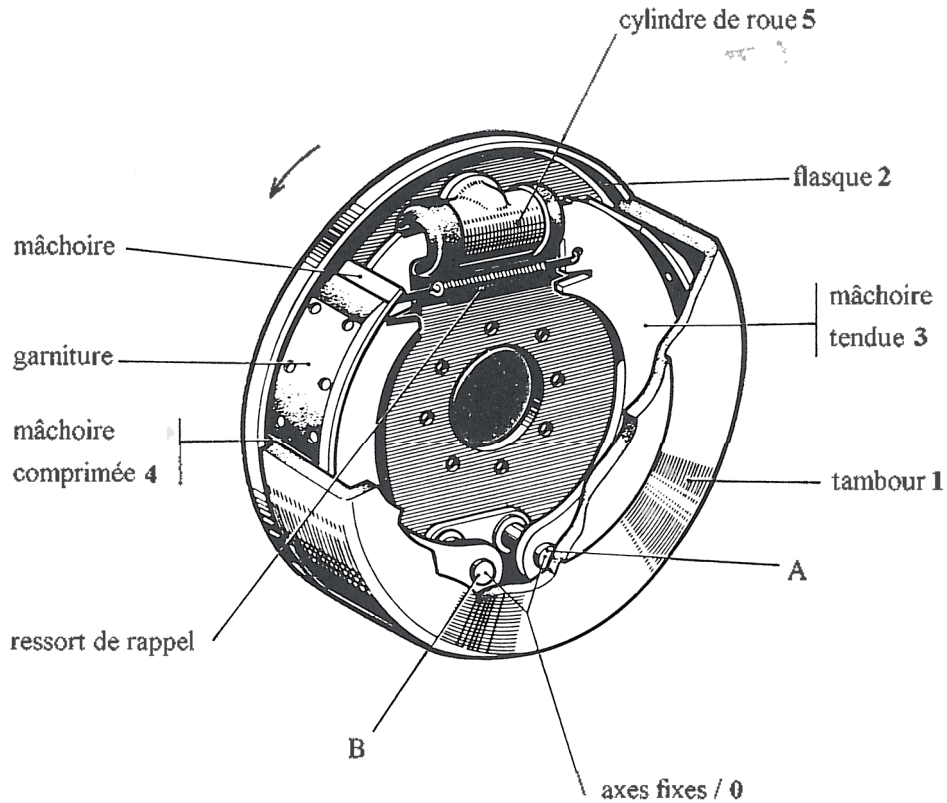


figure 8.54 (document FERODO)

Le frein à tambour se compose essentiellement :

- d'une partie mobile liée à la roue : le tambour 1 et le flasque 2,
- d'une partie liée au support de la roue : celle-ci comprend deux mâchoires 3 et 4, articulées en A et B avec le support 0 de la roue. Ces mâchoires, sur lesquelles sont fixées les garnitures (pièces d'usure), peuvent être écartées par l'intermédiaire du cylindre de roue 5 et pressées sur le tambour 1. L'énergie cinétique du véhicule est alors transformée en chaleur par frottement des garnitures sur le tambour.

L'étude a pour but de déterminer la répartition des pressions entre les garnitures et le tambour, et l'action mécanique globale de chaque mâchoire sur le tambour.

Pour cela, on adopte la modélisation simplifiée plane suivante, dans le plan (O, \bar{x}, \bar{y}) du repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ lié au support de la roue, l'axe (O, \bar{z}) étant confondu avec l'axe de rotation du tambour (figure 8.55) :

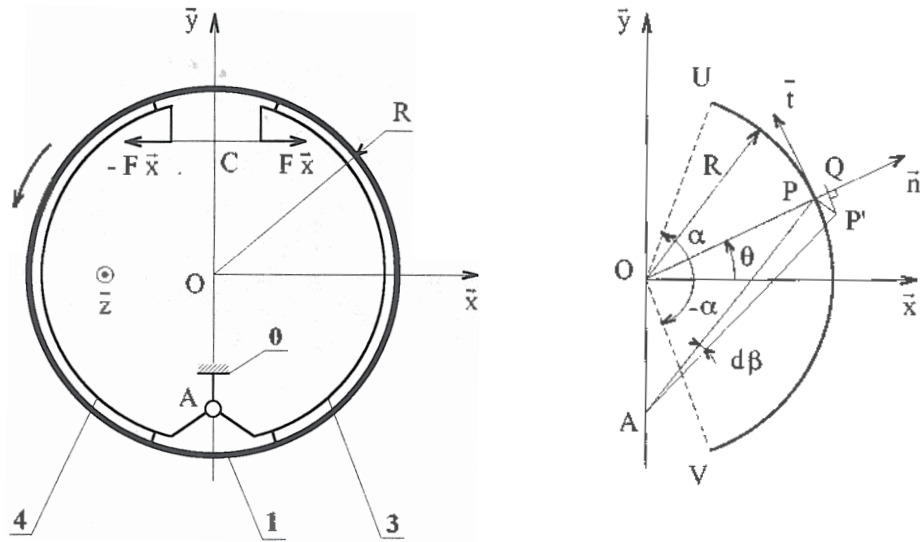


figure 8.55

- les mâchoires sont intérieures au tambour de rayon R et disposées symétriquement par rapport à l'axe (O, \bar{y}) .

- les mâchoires sont supposées toutes deux articulées au même point A , tel que :

$$\vec{OA} = -h \bar{y} \quad 0 < h < R$$

- la garniture de la mâchoire **3** est limitée par les rayons OU et OV inclinés d'un angle $\pm \alpha$ par rapport à l'axe (O, \bar{x}) , ($\alpha > 0$). La largeur des garnitures est notée L .

- l'action mécanique du cylindre **5** sur la mâchoire **3** est représentée par le glisseur $(C, F \bar{x})$ et sur la mâchoire **4** par le glisseur $(C, -F \bar{x})$, telle que :

$$F > 0 \quad \text{et} \quad \vec{OC} = d \bar{y} \quad 0 < d < R$$

- le sens de rotation du tambour par rapport aux mâchoires est le sens positif indiqué sur la figure.

- on note f le coefficient de frottement entre les garnitures et le tambour et φ l'angle de frottement ($f = \tan \varphi$).

Questions :

Première partie : étude de la répartition des pressions entre les garnitures et le tambour

Pour ce type de frein, on admet généralement que la valeur de la pression en un point, entre les garnitures et le tambour, est proportionnelle à l'usure radiale de la garniture en ce point.

Dans le repère $R_1(O, \bar{n}, \bar{t}, \bar{z})$, considérons le point P situé sur la surface extérieure de la garniture 3, tel que :

$$\vec{OP} = R \bar{n} \quad \text{et} \quad \theta = (\bar{x}, \bar{n})$$

L'usure de la garniture entraîne une rotation de la mâchoire 3 d'un angle $d\beta$ autour du point A (petite rotation). Le point P vient en P' ; l'usure radiale est égale à la longueur du segment PQ.

Questions

1- Déterminer la relation qui lie l'usure radiale PQ à l'angle de rotation $d\beta$ de la mâchoire 3, en tout point P de la garniture 3. En déduire le point d'usure maximum.

2- Déterminer la loi de répartition des pressions, de l'action mécanique de la garniture 3 sur le tambour 1, en fonction de la pression maximum notée p_{M3} .

Deuxième partie : action mécanique globale des garnitures sur le tambour

Etudions d'abord l'action mécanique sur le tambour 1 de la garniture 3 tendue par l'action tangentielle du tambour et l'action mécanique sur le tambour 1 de la garniture 4 comprimée par cette action tangentielle.

Questions

1- Déterminer, au point O, le torseur d'action mécanique de la garniture 3 sur le tambour 1, en fonction de la pression maximum p_{M3} .

$$\vec{f}(P) = p \vec{n} - t \vec{t} \quad p > 0, t > 0 \quad (\text{figure 8.57})$$

avec $t = f p$ (lois de Coulomb) et $p = p_{M3} \cos \theta$

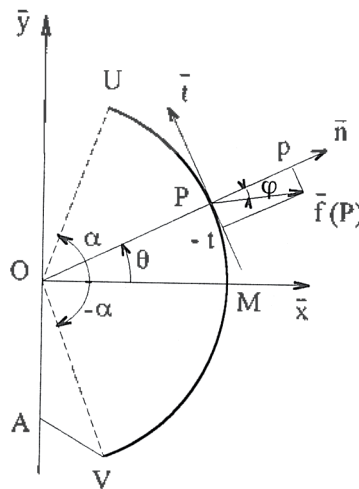


figure 8.57

Le torseur d'action mécanique de 3 sur 1 s'écrit au point O :

$$\{F(3 \rightarrow 1)\} = \begin{cases} \vec{R}(3 \rightarrow 1) = \int_{P \in 3} \vec{f}(P) dS \\ \vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = \int_{P \in 3} \vec{OP} \wedge \vec{f}(P) dS \end{cases}$$

Calcul de la résultante

$$\vec{R}(3 \rightarrow 1) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (p \vec{n} - t \vec{t}) R L d\theta = R L p_{M3} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\vec{n} - f \vec{t}) \cos \theta d\theta$$

$$\vec{R}(3 \rightarrow 1) = R L p_{M3} \int_{-\alpha}^{\alpha} [(\cos \theta + f \sin \theta) \vec{x} + (\sin \theta - f \cos \theta) \vec{y}] \cos \theta d\theta$$

Sachant que : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

on obtient : $\vec{R}(3 \rightarrow 1) = R L p_{M3} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (\vec{x} - f \vec{y})$

Calcul du moment

$$\vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = \int_{-\alpha}^{\alpha} R \vec{n} \wedge (p \vec{n} - t \vec{t}) R L d\theta = -R^2 L f p_{M3} \vec{z} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta$$

Soit : $\vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = -2 R^2 L f p_{M3} \sin \alpha \vec{z}$

D'où l'expression du torseur d'action mécanique de 3 sur 1 :

$$\{F(3 \rightarrow 1)\} = \begin{cases} R L p_{M3} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (\vec{x} - f \vec{y}) \\ -2 R^2 L f p_{M3} \sin \alpha \vec{z} \end{cases}$$

Feuille d'exercice 4 : corrigé

Réponses : Première partie

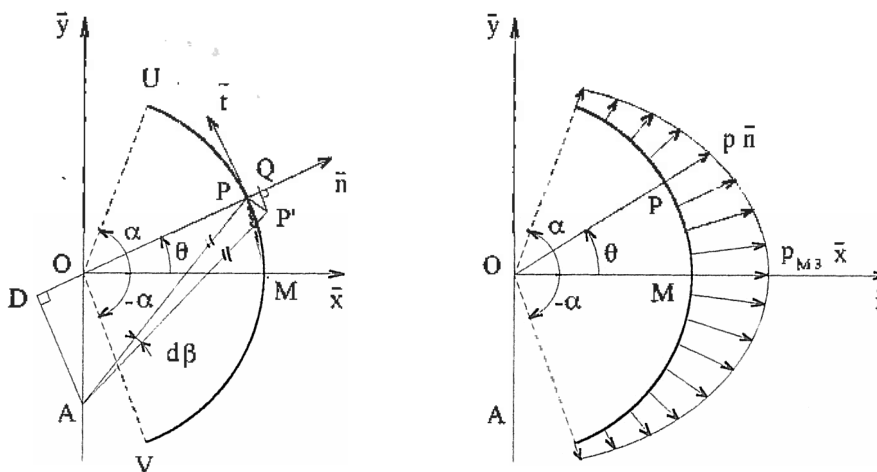


figure 8.56

1- Soit D la projection orthogonale du point d'articulation A sur le rayon OP (figure 8.56).

Les triangles PDA et P'QP sont semblables. D'où : $\frac{PQ}{AD} = \frac{PP'}{AP} = \frac{AP d\beta}{AP} = d\beta$

(PP' est assimilé à un segment de droite perpendiculaire à AP)

Par suite : $PQ = AD d\beta = OA \cos\theta d\beta$

L'usure radiale au point P est donc égale à :

$$PQ = h \cos\theta d\beta$$

L'usure est maximum pour $\theta = 0$, c'est à dire au point M situé sur l'axe (O, \bar{x}) .

2- L'usure radiale est supposée proportionnelle à la pression au point considéré, c'est à dire de la forme $p = k (h \cos\theta d\beta)$, où k est une constante positive.

En notant la pression maximum au point M : p_{M3} , la loi de répartition des pressions le long de la garniture 3 est la suivante (figure 8.56) :

$$p = p_{M3} \cos\theta$$

Réponses : Deuxième partie

1- Etant donné le sens de rotation du tambour 1 par rapport à la mâchoire 3, la densité surfacique des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de 3 sur 1, est de la forme :

$$\vec{f}(P) = p \vec{n} - t \vec{\tau} \quad p > 0, t > 0 \quad (\text{figure 8.57})$$

avec $t = f p$ (lois de Coulomb) et $p = p_{M3} \cos \theta$

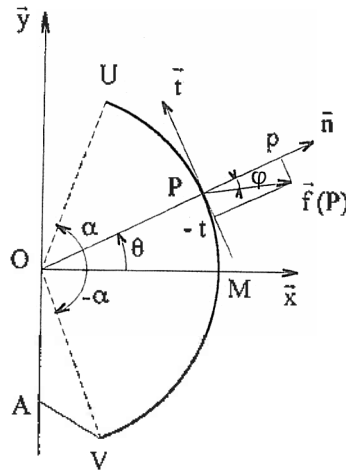


figure 8.57

Le torseur d'action mécanique de 3 sur 1 s'écrit au point O :

$$\{F(3 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(3 \rightarrow 1) = \int_{PE3} \vec{f}(P) dS \\ \vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = \int_{PE3} \vec{OP} \wedge \vec{f}(P) dS \end{array} \right\}$$

Calcul de la résultante

$$\vec{R}(3 \rightarrow 1) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (p \vec{n} - t \vec{\tau}) R L d\theta = R L p_{M3} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\vec{n} - f \vec{\tau}) \cos \theta d\theta$$

$$\vec{R}(3 \rightarrow 1) = R L p_{M3} \int_{-\alpha}^{\alpha} [(\cos \theta + f \sin \theta) \vec{x} + (\sin \theta - f \cos \theta) \vec{y}] \cos \theta d\theta$$

Sachant que : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

on obtient : $\vec{R}(3 \rightarrow 1) = R L p_{M3} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (\vec{x} - f \vec{y})$

Calcul du moment

$$\vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = \int_{-\alpha}^{\alpha} R \vec{n} \wedge (p \vec{n} - t \vec{\tau}) R L d\theta = -R^2 L f p_{M3} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta$$

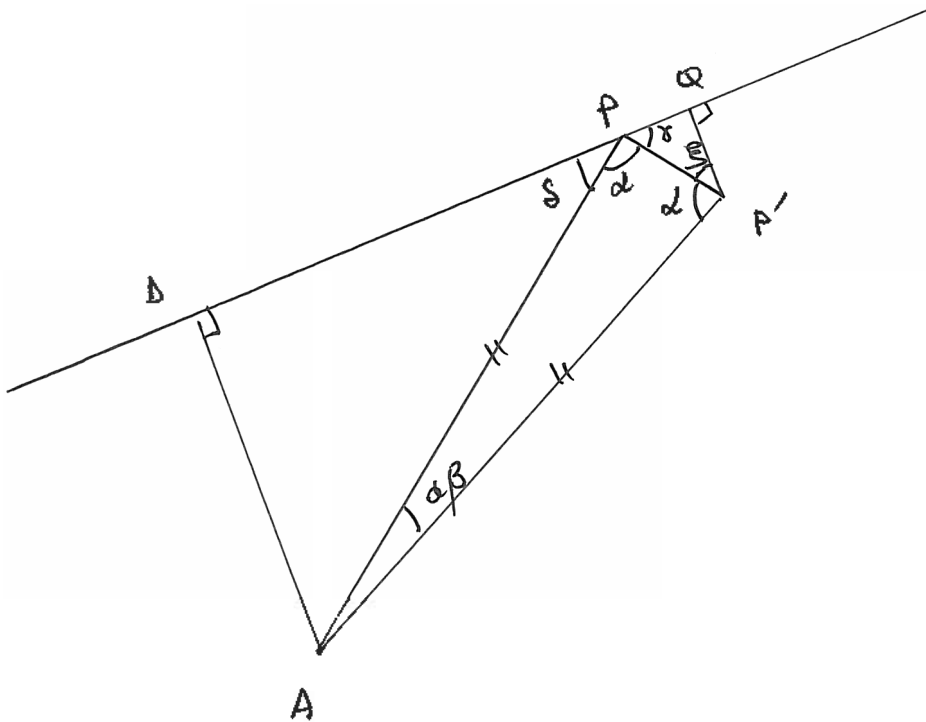
Soit : $\vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = -2 R^2 L f p_{M3} \sin \alpha \vec{z}$

D'où l'expression du torseur d'action mécanique de 3 sur 1 :

$$\{F(3 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} R L p_{M3} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (\vec{x} - f \vec{y}) \\ - 2 R^2 L f p_{M3} \sin \alpha \vec{z} \end{array} \right\}$$

Supplément de connexion

Pour quoi les triangles PDA et P'QP sont semblables ?



- In formations $\triangle APP'$ isocèle donc $AP = AP'$ et les angles $\widehat{APP'}$ et $\widehat{P'PA}$ sont égaux
 - * \widehat{ADP} et $\widehat{P'QP}$ sont des angles droits.

- Pour montrer que les 2 triangles sont identiques il faut prouver $\delta = \delta$

- Or $\gamma + \alpha + \delta = \pi$ (1)

$$\gamma + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Si jamais $\delta = \delta$, on a $\delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ d'après (2) et

donc en remplaçant dans (1)

$$\cancel{\gamma} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \cancel{\gamma} = \pi$$

Donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Ceci n'est pas vrai dans le cas général mais si

$d\beta \rightarrow 0$, alors $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et dans ce cas

$$(1) \text{ devient } \gamma + \frac{\pi}{2} + \delta = \pi \Rightarrow \gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\text{soit avec (2) } \gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

on retrouve $\delta = \delta$.

Q.E.D.

Feuille d'exercices 5 : Croix de malte, point de vue statique

Le mécanisme représenté figure 1 est un mécanisme à croix de Malte qui transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre 1 en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre 2. Sur la figure :

- α , β , et γ désignent respectivement les angles (\vec{x}, \vec{x}_1) , (\vec{x}, \vec{x}_2) et (\vec{x}_1, \vec{y}_2)
- d et r désignent respectivement les distance OC et OA fixes telles que $d/r > 1$
- y désigne la distance variable AC

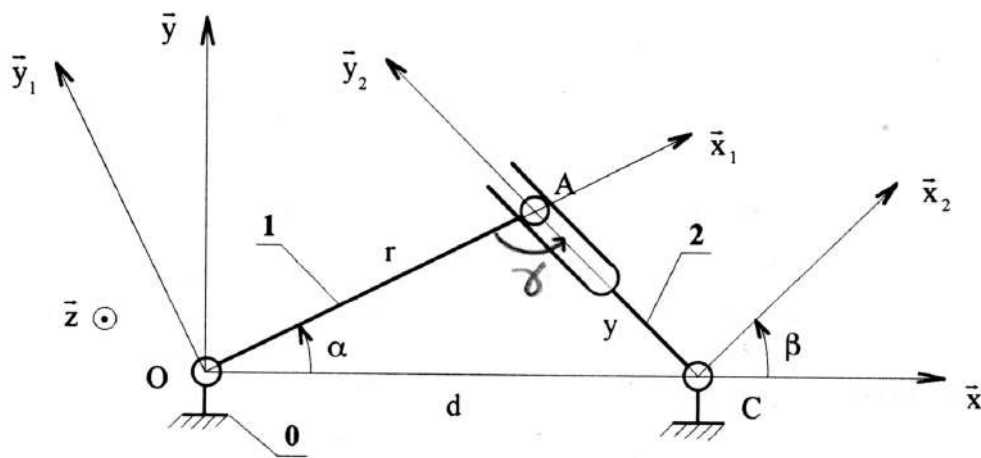


FIGURE 1 – Croix de Malte.

Le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti $\mathbf{0}$, le repère $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est lié à $\mathbf{1}$ en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti $\mathbf{0}$, et le repère $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est lié à $\mathbf{2}$ en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}) avec le bâti $\mathbf{0}$. La liaison entre $\mathbf{1}$ et $\mathbf{2}$ est une liaison linéaire annulaire qui autorise la translation d'axe \vec{y}_2 et la rotation d'axe (A, \vec{z}) . On considère dans cet exercice que la croix de Malte est en équilibre statique sous l'action d'un couple $\vec{C}_1 = C_1 \vec{z}$ exercé sur le solide 1 au point O et un couple $\vec{C}_2 = -C_2 \vec{z}$ exercé au point C sur le solide 2. Evidemment cette fois-ci les angles α , β et γ et la distance y sont supposés constants. On supposera que le problème est 2D.

Q5) Ecrire les torseurs des actions mécaniques correspondant aux deux couples $\{T_a(C_1 \rightarrow 1)\}$, $\{T_a(C_2 \rightarrow 2)\}$ et les torseurs des actions mécaniques associés à chaque liaison $\{T_a(0 \rightarrow 1)\}$, $\{T_a(1 \rightarrow 2)\}$ et $\{T_a(0 \rightarrow 2)\}$ en des points judicieusement choisis et exprimés dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Q6) En utilisant le fait que la liaison entre les solides 1 et 2 autorise le glissement sans frottement dans la direction \vec{y}_2 , déterminer une relation entre X_{12} et Y_{12} , les composantes de la résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ suivant \vec{x} et \vec{y} respectivement. Dans cette relation interviendra l'angle β .

Q7) Isoler successivement les solides 1 et 2 et en déduire des 6 équations permettant de résoudre le problème.

Q8) En faisant le compte du nombre d'inconnues et d'équations, conclure si vous disposez de suffisamment d'équations pour déterminer une relation entre C_1 et C_2 .

Q9) En combinant les équations, déterminer une relation entre C_1 et C_2 .

2 Statique

$$Q5) \{T_a(C_1 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & X \\ 0 & X \\ X & C_1 \end{array} \right\}_0 \quad (0,5)$$

$$\{T_a(C_2 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & X \\ 0 & X \\ X & -C_2 \end{array} \right\}_C \quad (0,5)$$

$$\{T_a(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & X \\ Y_{01} & X \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_0 \quad (0,5)$$

$$\{T_a(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{12} & X \\ Y_{12} & X \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A \quad (0,5)$$

$$\{T_a(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{02} & X \\ Y_{02} & X \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_C \quad (0,5)$$

Q6) Résultante nulle suivant \vec{y}_2

$$(X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y}) \cdot \vec{y}_2 = 0$$

$$\boxed{-X_{12} \sin \beta + \cos \beta Y_{12} = 0}$$

(1)

(Q7) On isole 1:

Résultante $\begin{cases} X_{01} - X_{12} = 0 \\ Y_{01} - Y_{12} = 0 \end{cases}$ (0, J)

Moment en O $\vec{M}_O (2 \rightarrow 1) = \vec{M}_A (2 \rightarrow 1) + (X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y}) \wedge \vec{AO}$

$$= -(X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y}) \wedge -r (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y})$$
$$= -(-r \sin \alpha X_{12} + r \cos \alpha Y_{12}) \vec{z}$$
$$= r (\sin \alpha X_{12} - \cos \alpha Y_{12}) \vec{z}$$

Au final $C_1 + r (\sin \alpha X_{12} - \cos \alpha Y_{12}) = 0$ (A)

On isole 2:

Résultante $\begin{cases} X_{12} + X_{02} = 0 \\ Y_{12} + Y_{02} = 0 \end{cases}$ (0, J)

Moment en C $\vec{M}_C (1 \rightarrow 2) = \vec{M}_A (1 \rightarrow 2) + (X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y}) \wedge \vec{AC}$

$$= (X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y}) \wedge -y (-\sin \beta \vec{x} + \cos \beta \vec{y})$$
$$= (-X_{12} y \cos \beta - Y_{12} y \sin \beta) \vec{z}$$

Au final

$$\boxed{-C_2 - (X_{12}y\cos\beta + Y_{12}y\sin\beta) = 0} \quad (1)$$

Q8) Au final: 8 inconnues, 7 équations \Rightarrow on peut trouver une relation entre C_1 et C_2 . (1)

Q9) $X_{01} = X_{12} = -X_{02}$ ou.
 $Y_{01} = Y_{12} = -Y_{02}$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1 = r (\sin\alpha X_{12} + \cos\alpha Y_{12}) \\ C_2 = -y (\cos\beta X_{12} + \sin\beta Y_{12}) \end{array}} \quad \checkmark \quad (1)$$

avec $Y_{12} = \tan\beta X_{12} \checkmark$

d'où $C_1 = r (\sin\alpha + \cos\alpha \tan\beta) X_{12}$

$$C_2 = -y (\cos\beta + \sin\beta \tan\beta) X_{12}$$

Au final $C_2 = C_1 \frac{[\cos\beta + \sin\beta \tan\beta] y}{[-\cos\alpha \tan\beta + \sin\alpha] r}$ (1)

