UNIVERSITE DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé de Dynamique des Fluides - Master de Mécanique

Lundi 16 Décembre 2024

Durée : 2 heures. Sans document ni calculatrice

- Un formulaire vous rappelant un certain nombre d'équations et de formules est disponible à la fin de l'énoncé.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
- Dans la notation, beaucoup de points sont attribués à l'analyse du problème (plus qu'aux calculs), donc expliquez votre démarche (de manière concise et précise).

Questions de cours (7 points)

Q1) Dans quel cas la compressibilité d'un fluide doit-elle être prise en compte ? (1 point)

Q2) Dans quel cas un problème peut-il être considéré comme stationnaire ? (1 point)

Q3) En partant de la forme générale des équations bilans, démontrer le passage de la forme conservative à non conservative (1,5 points).

Q4) En utilisant l'analyse dimensionnelle, démontrer le théorème de Pythagore (2,5 points).

Q5) Qu'est-ce que le principe de moindre dégénérescence (1 point) ?

Problème : Etude d'une coulée de lave

L'objet de ce problème est l'étude très simplifiée d'une coulée de lave le long d'une pente de volcan, orientée suivant un vecteur $\vec{x}$ (cf figure 1). Le magma sort à la température T_o. Il se refroidit tout seul dans l'air ambiant (en $x > 0$) à température T_{ext}. Une coulée de lave peut être considérée comme un fluide incompressible Newtonien très visqueux et chaud, refroidi par l'air extérieur. Le coefficient de conductivité thermique k, la densité ρ et la viscosité μ de la lave peuvent être en première approximation supposés constants (ce qui revient à négliger leur variation avec la température et notamment le changement de phase de la lave). La figure 1 (bas gauche) représente cette coulée d'épaisseur $h \ll L$ où L désigne la longueur caractéristique de la coulée suivant $\vec{x}$. Le front avance en fonction du temps. Dans les questions 1, on se place au centre de la coulée (d'où la loupe en bas à gauche de la figure 1) et on oublie le front et la source (figure 1 droite). On note h l'épaisseur à une position donnée, et h_o son ordre de grandeur. Répétons qu'à la fin du problème h varie avec x et t, mais qu'au début du problème h est supposé constante égal à h_o. La pente du volcan est supposée constante d'inclinaison $-\theta$ (avec $\theta > 0$, la pente penche à droite). Pour ne pas confondre h, h_o et le coefficient d'échange, on note h_e le coefficient d'échange thermique par convection forcée entre la lave qui coule et l'air extérieur. On suppose que le problème est 2D plan, x le long de la pente, y perpendiculaire (invariance en z). On a donc le champ de gravité $\vec{g} = g(\sin\theta\vec{x} - \cos\theta\vec{y})$ et le champ de vitesse $\vec{v} = u\vec{x} + v\vec{y}$. En $y = h$, la dérivée normale de la vitesse est nulle (pas de contrainte imposée par l'air sur la lave), c'est à dire $\partial u/\partial y = 0$. De plus en $y = h$, la pression est nulle (pression de référence : l'air). On va montrer que l'écoulement est un demi-Poiseuille dans tout le problème. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes.

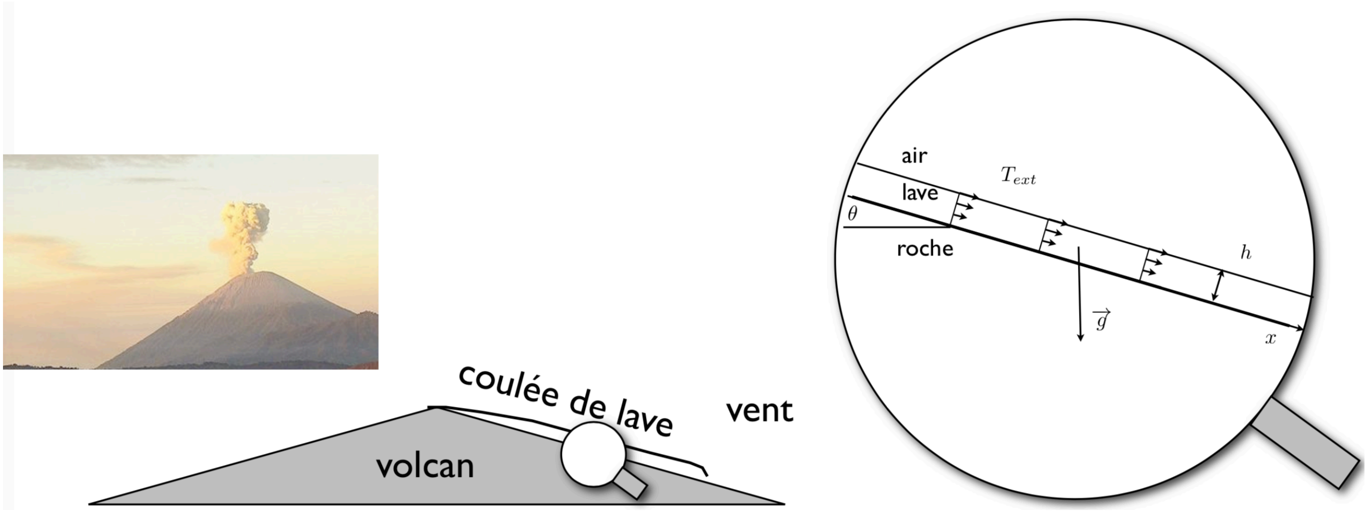

FIGURE 1 – Image de gauche : le volcan Bromo à Java en Indonésie. Image centrale : sketch de la coulée de lave d'un volcan. Image de droite : zoom sur une partie intermédiaire du problème loin du cratère et du front d'avancée de la lave.

Problème établi loin du cratère et loin du front, vitesse. (5,5 points)

On considère ici le problème loin du cratère et loin du front et donc l'écoulement (champs de vitesse, champ de pression) sera supposé stationnaire.

Q1.1.) Peut-on résoudre l'écoulement indépendamment du problème thermique (justifier) ? (0,5 point)

Q1.2) Etant donné que l'on se place loin du cratère et loin du front, la coulée sera supposée invariante par translation suivant l'axe x et la hauteur h dans cette zone supposée constante égale à h_o. Montrer que la vitesse transverse (suivant y) est nulle et que la pression ne dépend que de y (1 point).

Q1.3) Ecrire le bilan de quantité de mouvement projeté suivant $\vec{x}$ et la simplifier en tenant compte des hypothèse de l'énoncé et de la question précédente. Adimensionner cette équation. En utilisant le Principe de Moindre Dégénérescence, donner l'ordre de grandeur de la vitesse U_0 de la vitesse suivant x. Expliquer quel équilibre physique fixe cet ordre de grandeur. (1,5 points)

Q1.4) Adimensionner les conditions limites et résoudre l'équation sans dimension. En déduire que la vitesse peut se mettre sous la forme : $u = U_o f(y/h_o)$ où l'on précisera la fonction f. Tracer la forme de ce champ de vitesse en fonction de y entre 0 et h_o. (1,5 points)

Q.1.5) Ecrire l'équation de la quantité de mouvement projetée suivant $\vec{y}$ et la simplifier en tenant compte des hypothèse de l'énoncé de la question précédente. Déterminer l'ordre de grandeur de la variation de pression δP suivant y. En appliquant les conditions limites, déterminer l'expression de la pression. (1 point)

Problème loin du cratère et loin du front, température. (7,5 points)

On considère ici à nouveau le problème loin du cratère et loin du front. On va estimer L_T, la longueur caractéristique du refroidissement. Le problème thermique ne sera pas supposé ni stationnaire, ni invariant suivant x.

Q.2.1) Le problème thermique peut-il être résolu indépendamment de l'écoulement calculé précédemment (justifier) ? (0,5 point)

Q.2.2) Ecrire l'équation de la chaleur générale pour une fluide incompressible et la simplifier en supposant que le nombre d'Eckert E est nul et en tenant compte des hypothèse de l'énoncé. Que néglige t'on en supposant que le nombre d'Eckert est nul ? (0,5 point)

Q.2.1 Adimensionner l'équation de la chaleur en en posant $T = T_{ext} + (T_o - T_{ext})\bar{T}$. On supposera que l'épaisseur caractéristique h_o de la coulée de lave est très petite devant la longueur caractéristique de refroidissement L_T de la coulée. (1 point)

Q.2.3) Montrer que l'on peut écrire (identifier α) :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}(\bar{y})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

A quel nombre sans dimension classique peut être relié ce paramètre α ? (1,5 points)

Q.2.4) Le haut de la coulée est refroidi par l'air avec un coefficient d'échange thermique h_e. Le condition limite avec la parois est supposé adiabatique. Commentez ces hypothèses. On rappelle que le coefficient d'échange est le coefficient tel que le flux thermique $\vec{q}$ est égal au coefficient thermique que multiple la différence de température : $\vec{q} = h_e(T_l - T_{ext})\vec{n}$ où T_l désigne la température de la lave à l'interface lave-air, T_{ext} la température de l'air et $\vec{n}$ la normale orientée de la lave vers l'air. (1 point)

Q.2.5) En déduire la valeur de $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$ en $\bar{y} = 0$. (0,5 point)

Q.2.6) En déduire la valeur de $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$ en $\bar{y} = 1$. (0,5 point)

Q.2.7) En déduire l'ordre de grandeur de la distance de réchauffement L_T en utilisant le principe de moindre dégénérescence. (0,5 point)

Q.2.8) En première approximation on suppose que $\bar{T}$ varie peu sur l'épaisseur : $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \approx \bar{\Theta}(\bar{x}, \bar{t})$. Intégrer l'équation 2.3 sur l'épaisseur compte tenu de cette hypothèse en tenant compte des conditions limites (2.5) et (2.6). En déduire (compte tenu de (2.7)) l'équation sans dimension (identifier β) (2 points) :

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}} = -\beta \bar{\Theta}$$

Evolution de la coulée en espace et en temps sur toute la longueur (5 points)

Dans cette section, on va supposer que la hauteur h de la coulée varie en x et t et on va établir sa forme en fonction du temps. On repasse au problème complet pour la vitesse. La pente du volcan est assez forte donc $\sin\theta = O(1)$.

Q.3.1) Ecrire les équations de Navier-Stokes sans dimension en utilisant les échelles L_T, h_o et U_o des questions précédentes. (1 point)

Q.3.2) Quelle est l'échelle de la vitesse transversale (suivant y) ? (0,5 point)

Q.3.3) Montrer que l'équation suivant $\vec{x}$ s'écrit (1 point) :

$$r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \bar{y}}\right) = -w\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\sin\theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}) + \gamma\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$$

Q.3.4) Montrer que les termes dominants de l'équation transverse sont (0,5 point) :

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \cos\theta$$

Q.3.5) Identifier r, γ et w. (1 point)

Q.3.6) La lave étant très visqueuse, r est très petit, simplifier ces équations dans l'approximation $h_o \ll L$. En déduire que les termes dominants de Navier-Stokes sont simplement (1 point) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{1}$$

$$0 = \sin\theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \tag{2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \cos\theta \tag{3}$$

Formulaire

Equations de Navier-Stokes incompressibles

Conservation de la masse :

$$div(\vec{v}) = 0 \tag{4}$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})\right) = \mu\Delta\vec{v} - \vec{\nabla}p + \rho\vec{g} \tag{5}$$

Bilan d'énergie :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(T)\right) = k\Delta T + 2\mu\,\overset{\Rightarrow}{D}:\overset{\Rightarrow}{D} + r \tag{6}$$

Expression de l'opérateur $\vec{v}.\nabla(\vec{v})$

On rappelle que l'opérateur $\vec{v}.\nabla(\vec{v})$ est tel que :

$$\vec{v}.\nabla(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{v}.\nabla(v_x) \\ \vec{v}.\nabla(v_y) \\ \vec{v}.\nabla(v_z) \end{bmatrix}$$