Eléments de correction du DS de Dynamique des fluides 2024/2025.

Questions de cours

Cf cours.

Problème

Q1.1) Oui car lorsqu'un fluide est incompressible, l'écoulement est indépendant du pb thermique car la densité est constante.

0,5

Q1.2) On a un pb invariant suivant $\vec{x}$. Donc

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

En utilisant la conservation de la masse, on a donc

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Comme $\underbrace{v(y=0) = 0}_{\forall x}$ (conditt° d'adhérence) on a donc $v = 0 \ \forall (x, y)$.

1

Q1.3) BQM.$\vec{x}$ $\vec{v}.\vec{\nabla}(u) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \rho g \sin\theta$.

$$\vec{v}.\vec{\nabla}(u) = \begin{vmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

0,5

Au final $\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin\theta = 0$. 0,5

Q.1.3) $\dfrac{\mu U_0}{h_0^2} \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \rho g \sin\theta = 0$

On a donc $\dfrac{\mu U_0}{h_0^2} = \rho g \sin\theta$

$$U_0 = \frac{\rho g \sin\theta \, h_0^2}{\mu}.$$ 0,5

et l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 1 = 0.$$

L'ordre de grandeur de la vitesse est fixé par l'équilibre entre la gravité et la diffusion visqueuse. 0,5

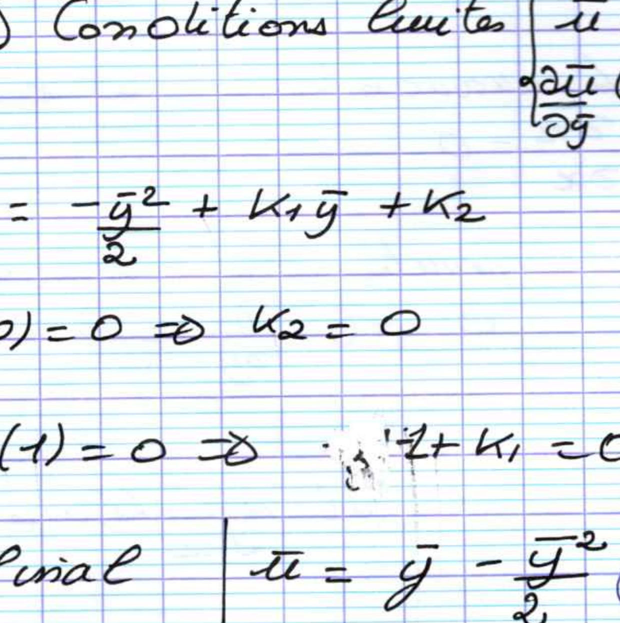
Q.1.4) Conditions limites $\begin{cases} \bar{u}(\bar{y}=0) = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}(\bar{y}=1) = 0 \end{cases}$

$\bar{u} = -\dfrac{\bar{y}^2}{2} + K_1 \bar{y} + K_2$ 0,5

$\bar{u}(0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$

$\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}(1) = 0 \Rightarrow -1 + K_1 = 0 \quad K_1 = 1$

au final $\boxed{\bar{u} = \bar{y} - \dfrac{\bar{y}^2}{2}}$ 0,5 $\bar{u}(1) = \dfrac{1}{2}$



0,5

Q1.5) $-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos\theta = 0$ 0,5

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\theta$$

$$\frac{\delta P}{h_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\rho g \cos\theta$$

$$\delta P = \rho g \cos\theta\, h_0 .$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -1 \qquad \bar{p} = -\bar{y} + K_3$$

$$\bar{p}(1) = 0 \Rightarrow -1 + K_3 = 0 \Rightarrow K_3 = 1.$$

$$\boxed{\bar{p} = 1 - \bar{y}}$$ 0,5

Q2.1) Non car la vitesse apparaît dans l'équat° thermique 0,5

Q2.2) $\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T)\right) = k\Delta T + 2\mu \bar{\bar{D}}:\bar{\bar{D}} + r.$

Pas de source de chaleur $r = 0$
Echauf nul : on néglige le terme $2\mu \bar{\bar{D}}:\bar{\bar{D}}$
L'équat° devient donc

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(T)\right) = k\Delta T.$$ 0,5

$\vec{v} = u(y)\,\vec{x}.$

On obtient donc $\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$

On néglige l'échauffement visqueux en supposant $\mathcal{E}=0$ 0,5

Q.2.2bis) $$\rho C_p\left[\frac{(\cancel{T_0-T_{ext}})}{e}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}}+\frac{U_0}{L_T}(\cancel{T_0-T_{ext}})\bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}\right]$$

$$=k\,(\cancel{T_0-T_{ext}})\left(\cancel{\frac{1}{L_T}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2}}+\frac{1}{h_0^2}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}\right)$$

<<

avec $t=e\bar{t}$ 1

Q.2.3) On divise par $\rho C_p U_0/L_T$.

$$\frac{L_T}{U_0 e}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}}+\bar{u}(\bar{y})\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}=\frac{kL_T}{h_0^2\rho C_p U_0}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}$$

Au final PHD $\frac{L_T}{U_0 e}=1 \Rightarrow e=\frac{L_T}{U_0}$.

$\alpha=\frac{k L_T}{h_0^2\rho C_p U_0}$ On a $\alpha=\frac{1}{P_e}$ avec P_e le nombre de Péclet.

1

Q.2.4) Adiabatique : pas d'échange thermique avec la paroi. Cela suppose que soit les parois du volcan soit dans un matériaux peu conducteur de la chaleur, soit que la T° de la paroi est identique à celle de la lave. 0,5

Q.2.5) Si pas d'échange de chaleur :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{en } \bar{y} = 0$$

0,5

Q.2.6)
$$-\frac{k(T_0 - T_{ext})}{h_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = h_e\,(T - T_{ext})$$
$$= h_e (T_0 - T_{ext}) \bar{T}$$

0,5

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{h_e h_0}{k} \bar{T}$$

Q.2.7) PMD : $\alpha = \frac{k L_T}{h_0^2 \rho C_p U_0} = 1$.

$$L_T = \frac{h_0^2 \rho C_p U_0}{k} \quad \text{avec} \quad U_0 = \frac{\rho g \sin\theta h_0^2}{\mu}.$$

0,5

Q.2.8)
$$\int_{\bar{y}=0}^{1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} d\bar{y} + \int_{\bar{y}=0}^{1} \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} d\bar{y} = \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} d\bar{y}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{t}} + \left[\int_{\bar{y}=0}^{1} \bar{u}(\bar{y}) d\bar{y}\right] \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right]_0^1$$

$$\int_{\bar{y}=0}^{1} \bar{u}(\bar{y})\,d\bar{y} = \left[\frac{\bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{y}^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right]_0^1 = -\frac{h_e h_o}{k}\,\bar{T} = -\frac{h_e h_o}{k}\,\bar{④}$$

Erreur!

d'où $\beta = \dfrac{h_e h_o}{k}$, il manque un 3 dans l'équat°

$$\boxed{\frac{\partial \bar{④}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{3}\frac{\partial \bar{④}}{\partial \bar{x}} = -\beta\,\bar{④}}$$

3