UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Dynamique des fluides

Lundi 27 Novembre 2023

Durée : 2 heure. Sans document ni calculatrice

— Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Bon courage !

Questions de cours (8 points)

Q1) Exercice de cours : Démontrer que $div\ \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \vec{\nabla} p + \mu \Delta v + (\lambda+\mu) \vec{\nabla} div(\vec{v})$ si $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = -p\ \overrightarrow{\overrightarrow{1}} + 2\mu\ \overrightarrow{\overrightarrow{D}} + \lambda div(\vec{v})\ \overrightarrow{\overrightarrow{1}}$ où $\overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}\ \vec{v} + \overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}^t\ \vec{v})$ (3 points)

Q2) Donner la signification physique de l'ensemble des termes des équations de Navier-Stokes compressibles (1,5 points) :

$$\text{CM} : \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{BQM} : \rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} div(\vec{v}) + \vec{f_v}$$

$$\text{BEi} : \rho C_p[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(T)] = -\alpha T \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}(p)\right] + 2\mu\ \overrightarrow{\overrightarrow{D}} : \overrightarrow{\overrightarrow{D}} + \lambda\left(div(\vec{v})\right)^2 + k\Delta T + r$$

Q3) Dans quel cas peut-on appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés ? (1 point)

Q4) En partant du bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = div(\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}) + \vec{f_v},$$

démontrer le bilan d'énergie cinétique. (1 point).

Q5) Qu'est ce que la forme conservative et non conservative d'une équation ? Démontrer comment on passe de l'une à l'autre dans le cas général. Dans quel cas faut-il utiliser la forme conservative et la forme non conservative et pourquoi ? (1,5 points).

Problème : Propagation acoustique (12 points + 1 point bonus)

On considère dans ce problème une onde acoustique ultrasonore générée par un piston vibrant périodiquement dans l'eau à une fréquence $f = 1 MHz$ et avec une amplitude de vibration $d = 1\ nm$ (déplacement). L'eau est de densité $\rho = 1000\ kg\, m^{-3}$, viscosité $\mu = 10^{-3}\ kg\, m^{-1}\, s^{-1}$, second coefficient de viscosité $\lambda \sim \mu$ et vitesse du son $c_o = 1500\ m\, s^{-1}$. L'onde générée par le piston peut être considérée comme une onde quasiment plane de longueur d'onde $\lambda = c_o/f$. On négligera dans ce problème les termes sources (force volumique, source thermique volumique).

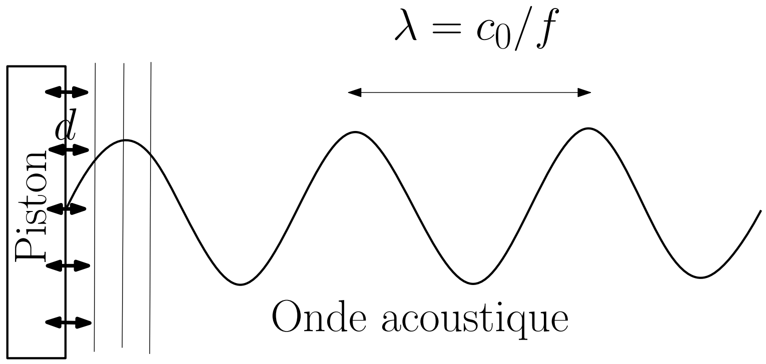

FIGURE 1 –

Equation de l'acoustique

Q6) A partir des données de l'énoncé, déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse caractéristique U des mouvement des particules fluides induits par la vibration du piston. Quel est la longueur caractéristique associée à la variation spatiale de l'onde acoustique ? (0,5 points)

Q7) Les ordres de grandeurs de la variation de pression δP et de la variation de densité $\delta\rho$, tel que $\rho = \rho_0 + (\delta\rho)\bar{\rho}$, où ρ_0 désigne la densité au repos supposée uniforme et constante, sont-ils fixés par les conditions limites ? Comment peuvent-ils alors être déterminé ? Obtenir ces ordres de grandeur en adimensionnant les bilans de masse et de quantité de mouvement des équations de Navier Stokes compressibles rappelées à la question Q1), et en supposant (i) que les termes instationnaires sont dominants et (ii) que $\delta\rho \ll \rho_0$ dans le bilan de quantité de mouvement. Pour la conservation de la masse, on comparera le terme $\rho_0 div(\vec{v})$ au terme instationnaire. (2 points)

Q8) Construire un nombre sans dimension Π_1 comparant l'ordre de grandeur des termes visqueux au terme instationnaire

$$\Pi_1 = \frac{\text{visqueux}}{\text{instationnaire}}$$

et calculer son ordre de grandeur (expression et valeur numérique) en fonction des données de l'énoncé. Quel(s) terme(s) cette analyse permet-elle donc de simplifier dans le bilan de quantité de mouvement ? (1 point)

Q9) De même introduire un deux autres nombre sans dimensions Π_2 et Π_3 dans l'équation de conservation de l'énergie, qui comparent respectivement le terme de diffusion thermique et les termes d'échauffements visqueux au terme instationnaire :

$$\Pi_2 = \frac{\text{diffusion thermique}}{\text{instationnaire}}, \ \Pi_3 = \frac{\text{échauffement visqueux}}{\text{instationnaire}} \tag{1}$$

On supposera aussi ici que $\delta\rho \ll \rho_0$ Montrer que $\Pi_2 = \Pi_1/Pr$ où Pr désigne le nombre de Prandtl (que l'on définira). En déduire que si $\Pi_1 \ll 1$ alors $\Pi_2 \ll 1$. Négliger le terme correspondant dans l'équation. Enfin montrer que $\Pi_3 = E\,\Pi_1$ où E désigne le nombre d'Eckert. En supposant que $E = O(1)$ (de l'ordre de 1) simplifier le(s) terme(s) correspondant dans l'équation. (2 points)

Q10) On rappelle que le bilan d'entropie s'écrie : $\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu \overset{\Rightarrow}{D} : \overset{\Rightarrow}{D} + \lambda \left(div(\vec{v})\right)^2 + k\Delta T$. Que devient cette équation si l'on supprime les termes négligés à la question précédente ? Si l'on suppose qu'initialement l'entropie est homogène que peut-on en déduire ? (1 point)

Q11) Comment s'appelle l'ensemble d'équation (bilan de masse, de quantité de mouvement et d'entropie) obtenu avec toutes les simplifications des 3 questions précédentes. ? (0,5 point)

Q12) Nous rappelons la définition de la vitesse du son : $c_o^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$. Quelle relation peut-on en déduire entre δP et $\delta\rho$. Montrer que cette relation est consistante avec les ordres de grandeurs déterminés à la question Q7). Quelle relation peut-on déduire entre $\partial\tilde{p}$ et $\partial\tilde{\rho}$, et donc entre (i) $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}}$ et $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}}$ et (ii) entre $\nabla\tilde{p}$ et $\nabla\tilde{\rho}$? (1 point)

Q13) Comparer les termes non linéaires restant dans les bilans de masse et de quantité de mouvement au terme instationnaire. Montrer que dans le cas de la conservation de la masse, comme dans celui de la quantité de mouvement le rapport entre les termes non linéaires et instationnaires sont de l'ordre d'un nombre M dont on donnera l'expression et on calculera la valeur numérique. Comment est ce nombre ? Négliger les termes correspondant dans la suite du problème. (1 point)

Q14) En combinant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et en utilisant la relation trouvé à la question Q12), montrer que la pression, la vitesse et la densité vérifient l'équation des ondes (équation de d'Alembert) sans dimension (1 point).

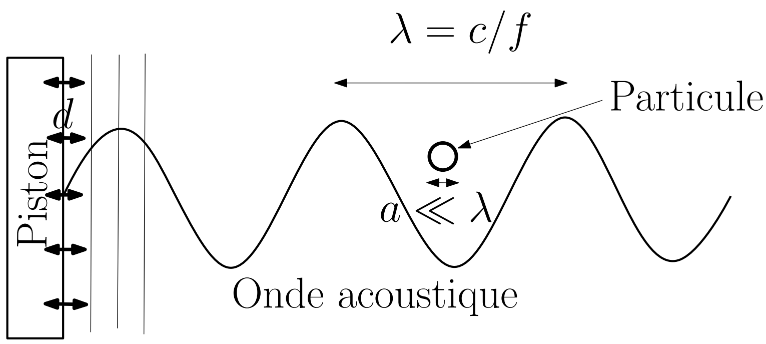

FIGURE 2 –

Petite particule dans un champs acoustique

On considère maintenant une toute petite particule $a \sim 1\mu m \ll \lambda$ baignant dans le champs acoustique précédent.

Q15) Quelle condition limite doit être vérifiée sur la particule ? Cette condition peut-elle être vérifiée avec les équations simplifiées obtenues dans la section précédente ? Pourquoi ? (0,5 point)

Q16) Expliquer pourquoi l'on se situe précisément dans la cas d'utilisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés ? (0,5 points)

Q17) Quelle est maintenant la longueur caractéristique à l'échelle de la particule ? Adimensionner à nouveau l'équation de conservation de la masse avec cette nouvelle grandeur caractéristique (on gardera en revanche les même ordre de grandeur pour la vitesse caractéristique U et la variation de densité $\delta\rho$. Montrer que localement à l'échelle de la particule, le champs vérifie la condition d'incompressibilité $div(\vec{v}) = 0$ (au premier ordre en a/λ. (1 point)

Q18) Calculer le nombre de Reynolds à cette nouvelle échelle. Quelles seront donc les équations de la dynamique vérifiée à l'échelle de la particule ? (1 point)