UNIVERSITE DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé de Dynamique des Fluides - Master de Mécanique

Lundi 28 novembre 2022

Durée : 2 heures. Sans document ni calculatrice

— Un formulaire vous rappelant un certain nombre d'équations et de formules est disponible à la fin de l'énoncé.
— Chaque question est annotée avec une, deux, trois ou quatre étoiles. Plus le nombre d'étoiles est grand, plus le nombre de points attribués sera grand. L'examen est long, le barème en tiendra compte.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Dans la notation, beaucoup de points sont attribués à l'analyse du problème (plus qu'aux calculs), donc expliquez votre démarche.
— Soyez concis et efficaces dans la réponse aux questions de cours, le problème est long.
— Bon courage !

Questions de cours

Q1) Quels fluides sont incompressibles ? Dans quels cas un écoulement peut-il être considéré comme incompressible ? Dans quel cas $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq \frac{d\rho}{dt}$, où la première dérivée correspond à la dérivée partielle par rapport au temps et la deuxième à la dérivée particulaire. (**)

Q2) Enoncer le premier principe de la thermodynamique. (*)

Q3) Démontrer l'équation de Bernoulli instationnaire à partir des équations de Navier Stokes incompressibles rappelées en annexe. (**)

Q4) Qu'est ce que la forme conservative et non conservative d'une équation bilan ? Comment passe t'on de l'une à l'autre ? Quelle formulation (conservative ou non conservative) faut-il utiliser lorsque l'on résout un problème numériquement ? (justifier) (**)

Q5) Donner la signification physique de chacun des termes des équations de Navier Stokes incompressibles (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) rappelées en annexe. (*)

Problème : Echauffement par dissipation visqueuse et discontinuité de température dans un tube

On considère un écoulement de Poiseuille incompressible stationnaire dans un tube cylindrique de rayon R et d'axe Oz sous l'action d'un gradient de pression constant connu $\frac{dp}{dz} = -\Pi$ avec $\Pi > 0$ (voir Fig. 1). On désigne respectivement par ρ, μ, C_p et k la masse volumique, la viscosité dynamique, la chaleur spécifique à pression constante et la conductivité thermique du liquide. On admet que le nombre de Reynolds construit avec le rayon R de la conduite et la vitesse V_o (vitesse sur l'axe) est relativement grand devant l'unité, mais que celui-ci reste inférieur à 500 de telle sorte que le régime soit encore laminaire (c'est à dire régulier et vérifiant la symétrie des conditions aux limites). La paroi est maintenue à la température constante T_o et on admet que le régime thermique est établi (ce qui signifie que $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$). Enfin on négligera les effets de gravité et on supposera qu'il n'y a pas de sources volumique externe de chaleur.

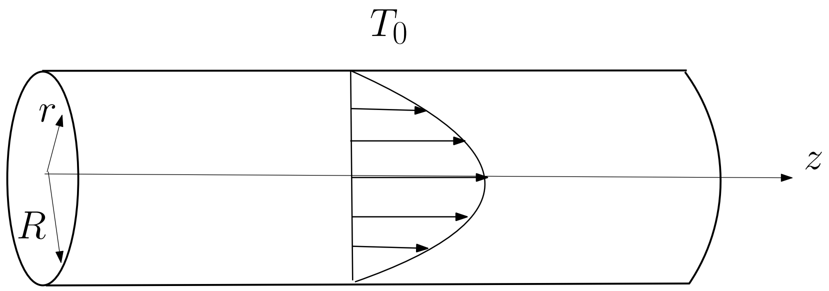

Figure 1 –

Q7) Simplifier les équations de Navier Stokes (conservation de la masse et bilan de quantité de mouvement) écrites en coordonnées cylindriques en fonction de toutes les approximations données dans l'énoncé et notamment de la symétrie des conditions limites. On supposera dans cette première partie le cylindre infini en z. On gardera le terme visqueux (malgré le nombre de Reynolds relativement élevé) et on justifiera après calcul pourquoi ce terme doit nécessairement être gardé. Résoudre ces équations et montrer que la forme de l'écoulement (forme du champ de vitesse) est du type $\vec{v} = \frac{1}{4\mu}\Pi(R^2 - r^2)\vec{e_z}$. (***)

Q8) Simplifier l'équation de conservation de l'énergie écrite en coordonnées cylindriques en utilisant les approximations de l'énoncé, puis l'adimensionner en posant pour la température $T = T_o + (\delta T)\bar{T}$ et pour la composante longitudinale de la vitesse sur l'axe des $\vec{e_z}$: $v_z = V_o\bar{v}_z$. (Attention on ne fera à ce stade aucune hypothèse sur la valeur du nombre d'Eckert). Ecrire les conditions limites sous forme adimensionnée.

Donner l'expression de V_o et en appliquant le principe de moindre dégénérescence en déduire δT en fonction des propriétés physiques du liquide, de Π et de R. Physiquement d'où vient l'élévation de température δT ? Enfin résoudre l'équation de la thermique et déterminer l'expression du champs de température adimensionné $\bar{T}$ (****).

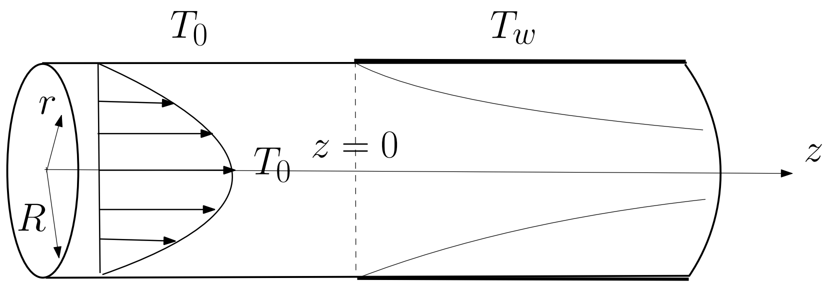

FIGURE 2 –

Q9) On suppose maintenant que la température de la paroi varie brusquement en $z = 0$ (voir Fig. 2). Pour $z < 0$, la paroi est maintenue à une température constante T_0 et pour $z > 0$ la paroi est maintenue à une température constante $T_w > T_o$. Le nombre d'Eckert construit sur $(T_w - T_o)$ est supposé très petit. Que devient l'élévation de température due aux frottements visqueux dans ce cas ? (*)

Q10) On s'intéresse maintenant à la région pour z proche de 0, $z > 0$ sur une distance de l'ordre de R ($z = R\tilde{z}$). Montrer qu'il faut changer d'échelle pour la température et que l'on peut choisir :

$$T = T_o + (T_w - T_0)\tilde{T}$$

où $\tilde{z}$ et $\tilde{T}$ désignent les variables sans dimension dans cette seconde partie du problème (on aura bien sûr $\tilde{r} = \bar{r}$ et $\vec{\tilde{v}} = \vec{\bar{v}}$). On supposera dans la suite du problème que $\tilde{T}(\tilde{z} = 0) \approx 0$

Ecrire l'équation de conservation de l'énergie, (le nombre d'Eckert étant supposé nul) pour $z > 0$. Compte tenu de la valeur du nombre de Prandtl Pr (d'ordre un) et du nombre de Reynolds Re élevé, montrer qu'il existe nécessairement une couche limite thermique sur la paroi $r = R$ et que l'on se situe dans le cas d'application de la méthode des développement asymptotiques raccordés. Donner alors l'expression du champ de température hors de cette couche limite. (***)

Q11) En zoomant sur cette couche limite, c'est à dire en introduisant un changement d'échelle $\hat{r} = \frac{(1-\tilde{r})}{\alpha(\epsilon)}$ avec $\alpha(\epsilon) \ll 1$ et $\epsilon = \frac{1}{Re \times Pr}$ et en appliquant la méthode des développement asymptotiques raccordés, déterminer l'épaisseur de la couche limite thermique, ainsi que l'équation simplifiée que doit vérifier la température dans cette zone (***).

Q12) Enfin, en supposant qu'il existe une solution semblable de cette équation de la forme : $\hat{T}_0(\hat{r}, \tilde{z}) = F(\eta)$ avec $\eta = \hat{r}\tilde{z}^{-1/3}$, déterminer l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par F. Enfin déterminer la solution du problème et appliquer les conditions limites. (****).

Formulaire

Equations de Navier-Stokes incompressibles

Conservation de la masse :

$$div(\vec{v}) = 0 \tag{1}$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})\right)=\mu\Delta\vec{v}-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g} \tag{2}$$

Bilan d'énergie :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}(T)\right)=k\Delta T+2\mu\,\overset{\Rightarrow}{D}:\overset{\Rightarrow}{D}+r \tag{3}$$

<u>**Opérateurs en coordonnées cylindriques**</u>

Gradient d'une fonction f

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

Laplacien d'une fonction f

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Gradient d'un vecteur $\vec{v}$

$$\overset{\Rightarrow}{\nabla}\vec{v}=\begin{bmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-v_\theta\right) & \frac{\partial v_r}{\partial z}\\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{bmatrix}$$

Laplacien d'un vecteur $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{B} &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(B_r+2\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}\right)\right]\vec{e_r}\\ &+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(B_\theta-2\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)\right]\vec{e_\theta}\\ &+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right]\vec{e_z}\end{aligned}$$

Divergence d'un vecteur $\vec{B}$

$$div\ \vec{B}=\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+B_r)+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Opérateur $\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})$

$$\begin{aligned}\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v}) &= \left[v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]\vec{e_r}\\ &+ \left[v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\theta v_r}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_\theta}\\ &+ \left[v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\vec{e_z}\end{aligned}$$