UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Mécanique et Ingénierie

Licence 2 de Mécanique

Mercredi 5 Janvier 2022

Durée : 2 heures. Sans document ni calculatrice

— Les deux problèmes et les deux sous-parties du problème 1 peuvent aussi être traités indépendamment.
— Un formulaire vous rappelant un certain nombre d'équations est disponible à la fin de l'énoncé.
— Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— L'examen est long. 25,5 points sont distribués pour une note finale sur 20.
— Bon courage !

1 Problème 1 : Croix de Malte (18,5 points)

Le mécanisme représenté figure 1 est un mécanisme à croix de Malte qui transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre 1 en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre 2. Sur la figure :
— α, β, et γ désignent respectivement les angles $(\vec{x}, \vec{x_1})$, $(\vec{x}, \vec{x_2})$ et $(\vec{x_1}, \vec{y_2})$
— d et r désignent respectivement les distance OC et OA fixes telles que $d/r > 1$
— y désigne la distance variable AC

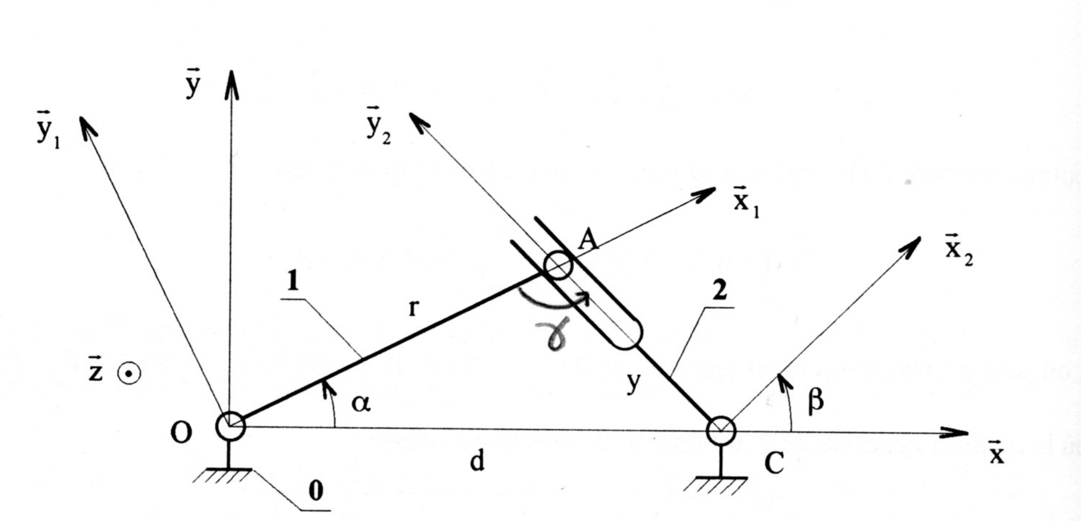

FIGURE 1 – Croix de Malte.

Le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti **0**, le repère $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$ est lié à **1** en liaison pivôt d'axe $(O, \vec{z})$ avec le batî **0**, et le repère $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z})$ est lié à **2** en liaison pivôt d'axe $(C, \vec{z})$ avec le batî **0**. La liaison entre **1** et **2** est une liaison linéaire annulaire qui autorise la translation d'axe $\vec{y_2}$ et la rotation d'axe $(A, \vec{z})$.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

1.1 Partie 1 : Cinématique (8,5 points)

Q1) Déterminer les torseurs cinématiques $\{T_c(1/0)\}$, $\{T_c(2/1)\}$ et $\{T_c(2/0)\}$ en fonction des paramètres de l'énoncé en des points judicieusement choisis. (2 points)

Q2) En utilisant la composition des mouvements (relations sur les vitesses de rotation et les vitesses au point O) en déduire deux équations vectorielle reliant les différentes variables de l'énoncé. (3 points)

Q3) Montrer que la relation sur les vitesse de rotation aurait pu être obtenue à partir de la relation sur la somme des angles du triangle OAC (1 point).

Q4) En projetant la relation sur les vitesses sur les vecteur de base $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et en combinant ces équations, déterminer une relation entre $\dot{\beta}$ et $(\dot{\beta} - \dot{\alpha})$ en fonction de r, d et des angles α et β (2,5 points).

1.2 Partie 2 : Statique (10 points)

On considère maintenant dans cette deuxième partie la même Croix de Malte mais cette fois-ci, celle-ci est en équilibre statique sous l'action d'un couple $\vec{C_1} = C_1\vec{z}$ exercé sur le solide 1 au point O et un couple $\vec{C_2} = -C_2\vec{z}$ exercé au point C sur le solide 2. Evidemment dans cette partie les angles α, β et γ et la distance y sont supposés constants. On supposera que le problème est 2D.

Q5) Ecrire les torseurs des actions mécaniques correspondant aux deux couples $\{T_a(C_1 \to 1)\}$, $\{T_a(C_2 \to 2)\}$ et les torseurs des actions mécaniques associés à chaque liaison $\{T_a(0 \to 1)\}$, $\{T_a(1 \to 2)\}$ et $\{T_a(0 \to 2)\}$ en des points judicieusement choisis et exprimés dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. (2,5 points)

Q6) En utilisant le fait que la liaison entre les solides 1 et 2 autorise le glissement sans frottement dans la direction $\vec{y_2}$, déterminer une relation entre X_{12} et Y_{12}, les composantes de la résultante $\vec{R}(1 \to 2)$ suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ respectivement. Dans cette relation interviendra l'angle β. (1 point)

Q7) Isoler successivement les solides 1 et 2 et en déduire des 6 équations permettant de résoudre le problème (3,5 points).

Q8) En faisant le compte du nombre d'inconnues et d'équations, conclure si vous disposez de suffisamment d'équations pour déterminer une relation entre C_1 et C_2 (1 point).

Q9) En combinant les équations, déterminer une relation entre C_1 et C_2 (2 points).

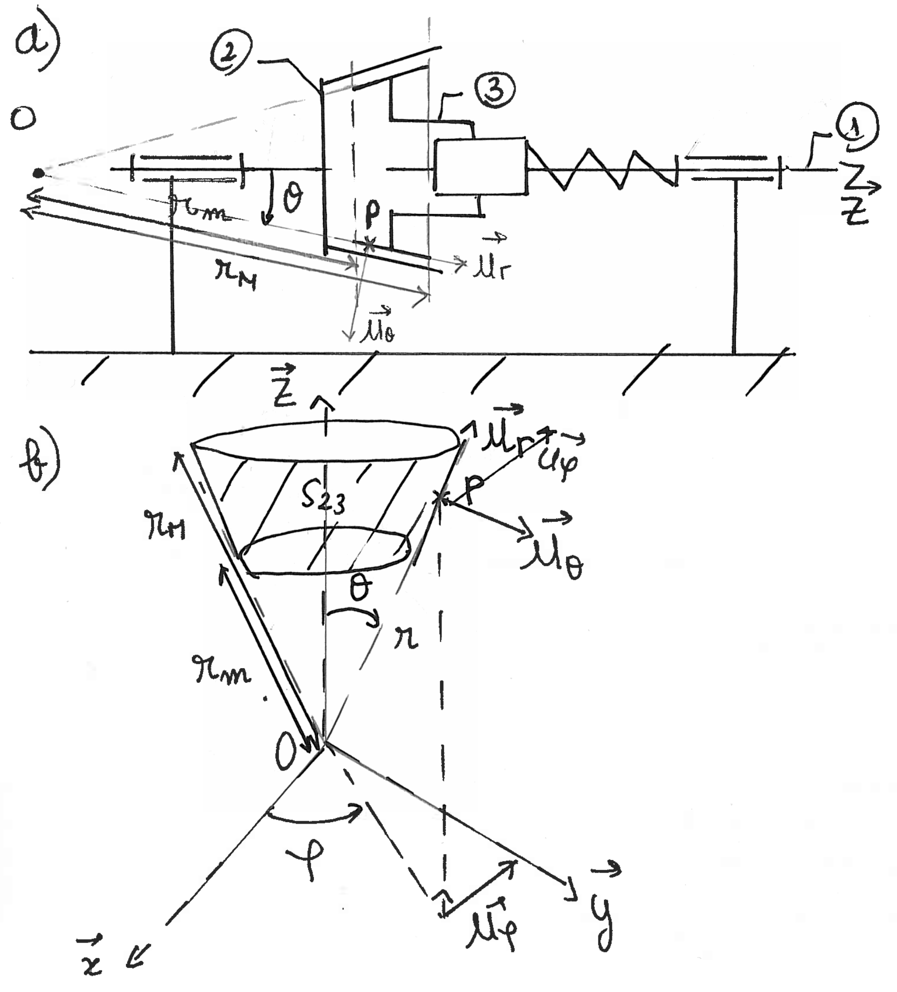

Figure 2

Figure 2 – a) Schéma cinématique d'un limiteur de couple. L'arbre (1) est en rotation autour de l'axe $(0, \vec{z})$, les roues coniques (2) et (3) sont mises en contact via la force exercée par le ressort. Enfin, pour un point quelconque P, r désigne la distance OP, θ désigne l'angle $(\vec{z}, \vec{u}_r)$ et φ l'angle $(\vec{x}, \vec{OH})$ où H désigne la projection du point P sur le plan $(0, \vec{x}, \vec{y})$. b) Schéma introduisant les principaux vecteurs et coordonnées, ainsi que la surface de contact S_{23} (portion de cône) entre les pièces 2 et 3. L'image est tournée de 90^o par rapport au schéma cinématique (a).

2 Problème 2 : Modélisation des actions mécaniques : Etude d'un limiteur de couple (7 points)

Sur un broyeur de paille attelé à un tracteur agricole, le moment (couple) transmissible par le moteur est limité par un limiteur de couple à roues coniques dont le schéma cinématique est représenté sur la figure 2. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$; un repère lié au bâti 0 du limiteur de couple. La roue conique motrice (3) est en liaison glissière avec l'arbre moteur (1) qui est, ainsi que la roue conique réceptrice (2) en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti 0. Les roues coniques sont en contact suivant une surface correspondant à une portion de cône de surface S_{23}. On notera $\vec{U_r}$ le vecteur unitaire tel que pour tout point $P \in S_{23}$, $\vec{OP} = r\vec{U}_r$. Soient θ le demi-angle au sommet du cône de contact, et r_m et r_M les rayons minimum et et maximum définissant les extrémités de la surface S_{23} (cf figures 2). Enfin f désigne le coefficient de frottement des surfaces en contact. Notons :

$$\{T_a(3 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(3 \to 2) \\ \vec{M}_O(3 \to 2) \end{array} \right\}$$

le torseur des actions mécaniques de 3 sur 2. On pose $F = -\vec{z}.\vec{R}(3 \to 2)$ et $C = \vec{z}.\vec{M}_O(3 \to 2)$. F représente l'effort presseur exercé axialement par la roue 3 sur la roue 2. C représente le moment du couple transmis pas le limiteur de couple. Le but de l'étude est la détermination du couple maximum C_M que peut transmettre ce mécanique. Pour cela nous considèrerons les roues 2 et 3 à la limite du glissement. Dans cette hypothèse, nous pourrons introduire en chaque point P de la surface de contact S_{23}, le vecteur force surfacique de contact $\vec{f_S}(P, 3 \to 2)$. Supposons qu'à la limite de glissement le vecteur rotation de 2 par rapport à 3, soit de la forme :

$$\vec{\Omega}_{2/3} = \omega\vec{z} \text{ avec } \omega < 0.$$

Q1) Quel système de coordonnées est adapté à la résolution de ce problème et pourquoi ? Quelle est la normale à la surface de contact entre 2 et 3 ? (0,5 points)

Q2) Décomposer la force surfacique de contact $\vec{f_S}(P, 3 \to 2)$ en une partie tangentielle et une partie normale (dont la norme sera appelée pression p) à la surface de contact. En supposant qu'il y a glissement et donc frottement, déterminer (i) l'orientation de chacune de ces composantes et (ii) la relation entre les normes de ces deux composantes. (2 points)

Q3) En supposant que la pression est uniforme, exprimer p en fonction de F et des autres paramètres de l'énoncé. (2 points)

Q4) Déterminer le moment maximum C_M du couple transmissible par le limiteur de couple en fonction de l'effort presseur F. (2,5 points)