Exercice 2

Q1) Le système de coordonnées sphériques car l'on travaille sur la surface d'un cône qui correspond à l'équation $\theta = cste$ dans ce système de coordonnées. La normale en un point P de la surface de contact est $\vec{u_\theta}$

0,5

Q2) $\vec{f_s}(P, 3 \to 2) = \vec{t}(P, 3 \to 2) + \vec{n}(P, 3 \to 2)$

avec $\vec{n}(P, 3 \to 2) = p \vec{u_\theta}$

$\vec{V}(P \in 2/3) = \vec{V}(O \in 2/3) + \vec{\Omega_{2/3}} \wedge \vec{OP}$ (avec $\vec{V}(O \in 2/3) = \vec{0}$)

$= \omega \vec{z} \wedge r \vec{U_r}$

Or $\vec{z} = \cos\theta \vec{U_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{V}(P \in 2/3) = + \omega r \sin\theta \vec{U_\varphi}$

D'où $\vec{t}(P, 3 \to 2)$ suivant $\vec{u_\varphi}$

et $\vec{t}(P, 3 \to 2) \cdot \vec{V}(P \in 2/3) \leq 0$

$t \vec{u_\varphi} \cdot \underbrace{\omega r \sin\theta}_{\leq 0} \vec{U_\varphi} \leq 0 \Rightarrow t \geq 0$

2

Enfin loi de Coulomb,

$t = fp$

Au final

$$\vec{f_s}(P, 3\to 2) = p\,\vec{u_\theta} + f p\,\vec{u_\varphi}$$

Q3) $\vec{R}(3\to 2)\cdot\vec{z} = -F = \int_{r=r_m}^{r_M}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{f_s}(P,3\to 2)\cdot\vec{z}\, dS_{re}$ | 0,5

$\vec{u_\varphi}\cdot\vec{z} = 0$ } 0,5

$\vec{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{y} + \cos\theta\,\vec{z}$

$\vec{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{y} - \sin\theta\,\vec{z}$ } 0,5

$\vec{u_\theta}\cdot\vec{z} = -\sin\theta$

$dS_{re} = dr \times r\sin\theta\, d\varphi = r\sin\theta\, dr\, d\varphi$ } 0,5.

d'où :

$$-F = -\sin^2\theta \int_{r=r_m}^{r_M} r\,dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \times p$$

D'où $F = \left(\dfrac{r_M^2 - r_m^2}{2}\right) \times 2\pi \times \sin^2\theta \times p$. } 0,5

$$F = p\pi\,(r_M^2 - r_m^2)\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{F}{\pi(r_M^2 - r_m^2)\sin^2\theta}}$$

= 2,5

Q4) $C = \vec{z} \cdot \vec{M}_o(3 \to 2)$

$$\vec{M}_o(3\to2) = \int_{r=r_m}^{r_M} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\vec{OP} \wedge \vec{f_s}(P,3\to2)\right] dS_{r\varphi}$$

$$\vec{OP} \wedge \vec{f_s}(P,3\to2) = r\vec{U_r} \wedge \left(p\vec{u_\theta} + fp\vec{U_\varphi}\right)$$

$$= rp\vec{u_\varphi} - rfp\vec{u_\theta}$$

$$\left[\vec{OP} \wedge \vec{f_s}(P,3\to2)\right]\cdot\vec{z} = -rfp\,\vec{u_\theta}\cdot\vec{z}$$

$$= rfp\sin\theta$$

$$C = \vec{z}\cdot\vec{M}_o(3\to2) = \int_{r=r_m}^{r_M} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 fp\sin^2\theta \, dr\,d\varphi$$

$$C = \left(\frac{r_M^3 - r_m^3}{3}\right) fp\sin^2\theta \times 2\pi$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi}{3}\left(r_M^3 - r_m^3\right) fp\sin^2\theta}$$

2,5