UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Mécanique et Ingénierie

Mercredi 7 janvier 2021

Durée : 2h. Sans document ni calculatrice

— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— Le barème est donné à titre indicatif. Il pourra être modifié.
— Attention l'examen est long, il vous faut être efficace, précis et concis dans vos réponses. (24 points sont distribués pour une note finale sur 20).
— Les 3 exercices sont largement indépendants.
— Un formulaire à la fin de l'énoncé vous rappelle les formules nécessaires à la résolution du problème.
— Bon courage !

1 Exercice 1 : Roue qui roule sur une autre roue (12,5 points)

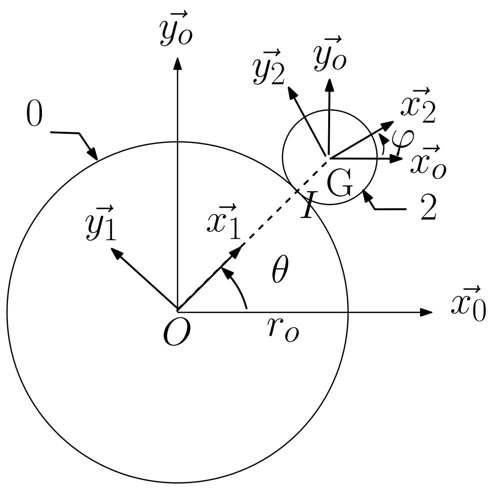

FIGURE 1 – Schéma d'un roue roulant sur une autre roue.

On considère une première roue fixe 0 de rayon r_o et un seconde roue 2 de rayon r_2 qui roule sans glissement sur la première roue fixe. On associe un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_o}, \vec{y_o}, \vec{z_o})$ à la première roue et un repère $\mathcal{R}_2 = (G, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_o})$ à la seconde roue, tel que $\varphi = (\vec{x_0}, \vec{x_2})$. Le point de contact entre les deux roues est noté I. De plus pour repérer la position du centre G de la deuxième roue, on introduit le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_o})$ et tel que $\theta = (\vec{x_o}, \vec{x_1})$.

Q1) Quel est le mouvement du centre de la roue 2 G ? Calculer le vecteur vitesse du point G par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ lorsque la roue 2 roule sans glisser sur la roue 0. (1,5 points)

Q2) Déterminer le torseur cinématique de la roue 2 par rapport à la roue fixe 0 en un point judicieusement choisi (2 points).

Q3) En déduire la vitesse $\vec{V}(I \in 2/0)$ et en appliquant la condition de non glissement, déterminer une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ en fonction de r_2 et r_0 (2 points).

Q4) Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(I \in 2/0)$ en calculant d'abord l'accélération du point G par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, puis en utilisant la formule de Rivals rappelée en annexe. Remarque : on pourra introduire $r_3 = r_o + r_2$ (2 points).

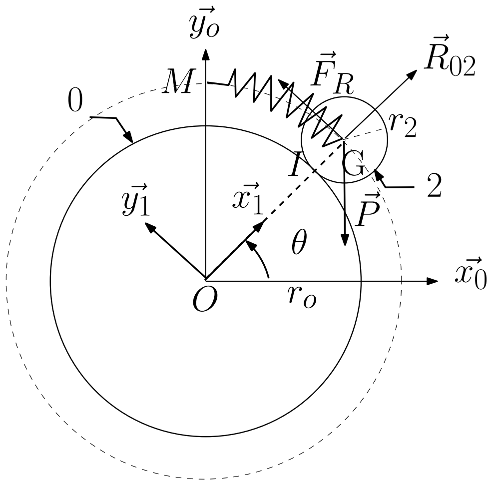

FIGURE 2 – Schéma des forces s'appliquant sur la roue en mouvement.

On considère maintenant, que le centre G de la roue 2 (de masse m) est maintenue par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_o qui s'étire sur un guide circulaire (le ressort n'a donc pas une forme droite mais une force circulaire, comme sur le dessin) et qui exerce une force de rappel orientée suivant $\vec{y_1}$. La roue est aussi soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale de la roue 0 $\vec{R}_{02}$ avec laquelle elle est en contact..

Q5) Ecrire le principe fondamental de la dynamique et en le projetant sur la bonne direction, déterminer une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par la variable θ (3,5 points).

Q6) En supposant que $\theta \ll 1$ et donc que $\cos(\theta) \approx 1$, montrer que l'on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique dont on donnera la fréquence propre (1,5 points).

2 Exercice 2 : Frein à tambour simplifié (6 points)

Le freinage d'un frein à tambour est obtenu en poussant une portion de cylindre S_1 contre un cylindre creux S_2 de rayon intérieur R dont la rotation est liée à celle des roues (voir Figure 4). On introduit le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe tel que l'axe $(0, \vec{z})$ correspond à l'axe de symétrie du cylindre S_2 et à son axe de rotation. On introduit de plus le système de coordonnées cylindriques $(r,\ \theta, z)$ et les vecteurs de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{z})$, tel que $\theta = (\vec{x}, \vec{e_r})$. La zone de contact entre S_1 et S_2 est telle que $-\beta < \theta < \beta$, $r = R$ et $0 < z < L$ (La Figure 4 représente seulement une coupe du système). Le coefficient de frottement entre S_1

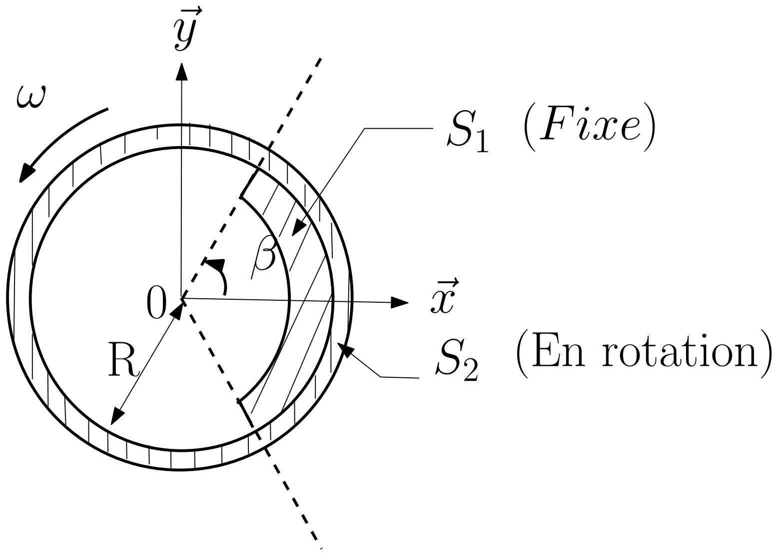

FIGURE 3 – Schéma simplifié d'un frein à tambour

et S_2 sera noté f et la pression exercée par S_1 sur S_2 vaut $p = P_m \cos(\theta)$.

Q1) En vous plaçant à la limite du glissement, déterminer le torseur des actions mécaniques des efforts appliqués par S_1 sur S_2 (6 points).

3 Exercice 3 : Exercice de cours de statique (6 points)

On étudie le système bielle manivelle présenté sur la figure 4. On suppose connue la pression p appliquée dans la chambre du cylindre issue de l'explosion du combustible. On supposera cette pression uniforme s'appliquant sur la surface plane S du piston dans la direction $\vec{y_0}$. Elle induit une action mécanique de résultante $\vec{F} = F\vec{y_o}$ sur le piston 3 ; Le moteur a pour rôle de transformer l'effort presseur de norme F en un couple moteur sortant $\vec{C_m} = C_m\vec{z_o}$. On note $\vec{C} = C\vec{z} = -C_m\vec{z_0}$ le couple exercé par le récepteur sur la pièce 1 (principe d'action et de la réaction). On supposera que ce mécanisme est plan, et on exprimera les torseurs dans la base $b_0 = (\vec{x_o}, \vec{y_o}, \vec{z_o})$. Enfin on supposera que toutes les liaisons sont parfaites.

Q1) Déterminer le torseur $\{T_a(p \rightarrow 3)\}$ de l'action de la pression sur le piston au point C en fonction de F. (0,5 point)

Q2) Déterminer le torseur $\{T_a(C \rightarrow 1)\}$ du couple sur la pièce 1. (0,5 point)

Q3) Donner la forme de tous les torseurs des actions mécanique de chaque liaison du mécanisme étudié. (2 points)

Q4) Appliquer le PFS au solide 1 en B dans la base b_0 et en déduire un système de 3 équations. (3 points)

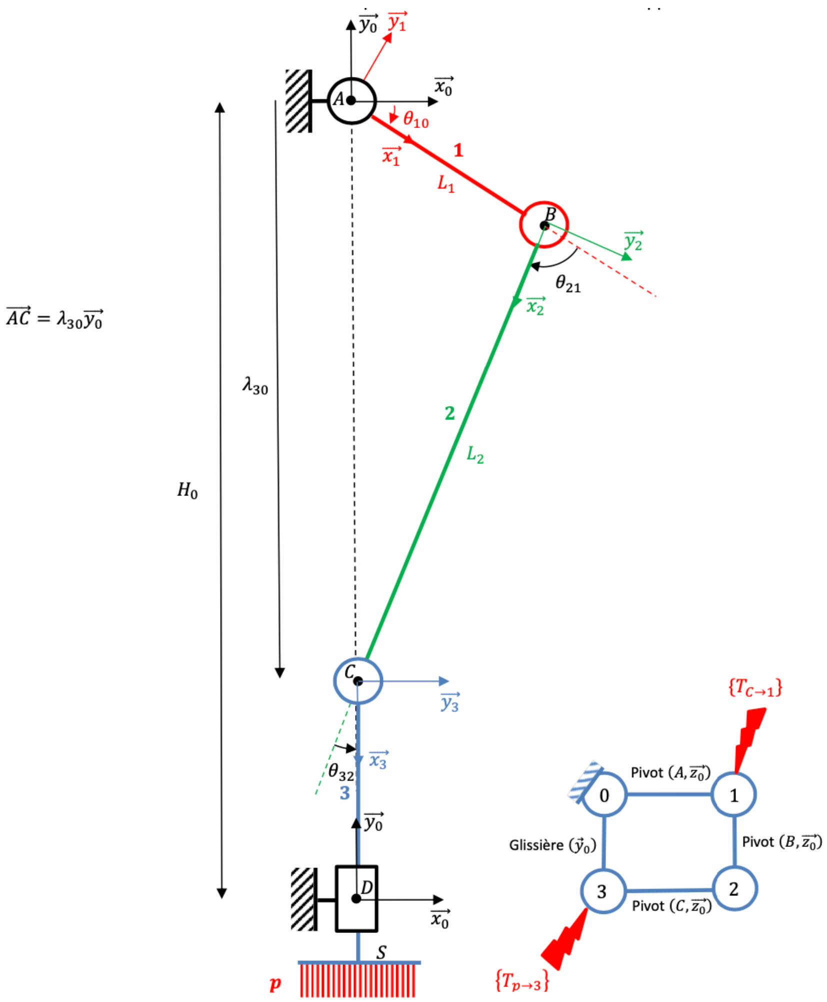

FIGURE 4 – Système bielle manivelle.

Formulaire

A toute fin utile, nous rappelons la formule de Rivals qui permet d'exprimer l'accélération en un point B en connaissant l'accélération en un point A :

$$\vec{\gamma}(B \in S_1/S_o) = \vec{\gamma}(A \in S_1/S_o) + \left[\frac{d_{\mathcal{S}_o}\ \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_o}}{dt}\right] \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_o} \wedge \left[\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_o} \wedge \vec{AB}\right]$$