Corrigé DS2

2020/2021

1/

Exercice 1 (12,5 points)

Q1) Le point G décrit une translation circulaire 0,5

Une des deux méthodes peut être utilisée :

Méca point $\vec{OG} = (r_0 + r_2)\vec{x_1}$

$$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d_{R_0}}{dt}\left[(r_0+r_2)\vec{x_1}\right]$$

$$= \frac{d_{R_1}}{dt}\left[(r_0+r_2)\vec{x_1}\right] + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (r_0+r_2)\vec{x_1}$$

avec $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\,\vec{z_0}$

$$= (r_0+r_2)\,\dot{\theta}\,\vec{y_1}.$$

Méca solide La point G est lié au référentiel R_1.

$$\{T_c(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

donc $\vec{V}(G \in 1/0) = \cancel{\vec{V}(O \in 1/0)}^{\vec{0}} + \dot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge \left((r_0+r_2)\vec{x_1}\right)$

$$= (r_0+r_2)\,\dot{\theta}\,\vec{y_1}.$$ 1

Q2) $\{T_c(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\,\vec{z_0} \\ (r_0+r_2)\,\dot{\theta}\,\vec{y_1} \end{Bmatrix}$

$$\vec{V}(G \in 2/0) = \underbrace{\vec{V}(G \in 2/1)}_{0} + \vec{V}(G \in 1/0)$$

car G centre de rotation entre 2 et 1

2

3/

Q3) $\vec{V}(I\in 2/0) = \vec{V}(G\in 2/0) + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{GI}$

$\vec{GI} = -r_2 \vec{x_1}$

$= (r_0+r_2)\dot{\theta}\,\vec{y_1} + \dot{\varphi}\,\vec{z_0} \wedge (-r_2\vec{x_1})$

$= (r_0+r_2)\dot{\theta}\,\vec{y_1} - r_2\dot{\varphi}\,\vec{y_1}$

La condition de non glissement

donne $\vec{V}(I\in 2/0) = \vec{0}$

ie : $(r_0+r_2)\dot{\theta} = r_2\dot{\varphi}$

ie $\boxed{\dot{\varphi} = \dfrac{r_0+r_2}{r_2}\dot{\theta}}$

2

Q4) Même point

$\vec{\gamma}(G/R_0) = \dfrac{d_{R_0}}{dt}\vec{V}(G/R_0)$

$= \dfrac{d_{R_1}}{dt}\left[(r_0+r_2)\dot{\theta}\,\vec{y_1}\right]$

$+ \dot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge \left[(r_0+r_2)\dot{\theta}\,\vec{y_1}\right]$

$= (r_0+r_2)\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - (r_0+r_2)\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$

$= r_3\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - r_3\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$

3/ Méca Solide

$$\vec{\gamma}(G\in 1/0) = \cancel{\vec{\gamma}(O\in 1/0)} + \ddot{\theta}\,\vec{z_0}\wedge\vec{OG}$$

$$+\ \dot{\theta}\,\vec{z_0}\wedge(\dot{\theta}\,\vec{z_0}\wedge\vec{OG})$$

avec $\vec{OG} = (r_0+r_2)\,\vec{x_1} = r_3\,\vec{x_1}$

$$= r_3\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - r_3\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$$ 2

Q5) $m\,\vec{\gamma}(G/R_0) = \vec{P} + \vec{F_R} + \vec{R_{02}}$

avec $\vec{P} = -mg\,\vec{y_0}$

$\vec{F_R} = k\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)r_3 - l_0\right]\vec{y_1}$

$\vec{R_{02}} = R_{02}\,\vec{x_1}$

Nous ne connaissons pas R_{02} donc pour s'en débarasser, il faut utiliser la projection suivant $\vec{y_1}$.

On a $\begin{cases} \vec{x_1} = \cos\theta\,\vec{x_0} + \sin\theta\,\vec{y_0} \\ \vec{y_1} = -\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0} \end{cases}$

donc $\vec{y_0} = \sin\theta\,\vec{x_1} + \cos\theta\,\vec{y_1}$

Au final, on a donc :

3,5

$$m r_3\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + k\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)r_3 - l_0\right]$$

4/ Q6

$$m r_3 \ddot{\theta} + k r_3 \theta = -mg\cos\theta + k\left(\frac{\pi}{2} r_3 - l_0\right)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\theta = -\frac{\cancel{m}g}{r_3}\cos\theta + k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{l_0}{r_3}\right)$$

1,5

5/

Exercice 2.

Q1) $\vec{f_s}(P, 1 \to 2) = P_m \cos\theta \, \vec{e_r} - f P_m \cos\theta \, \vec{e_\theta}$

$$\vec{R}(1 \to 2) = \int_{\theta=-\beta}^{\beta} \int_{z=0}^{L} \left[P_m \cos\theta \, \vec{e_r} - f P_m \cos\theta \, \vec{e_\theta} \right] R \, d\theta \, dz.$$

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta \, \vec{x} + \sin\theta \, \vec{y} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta \, \vec{x} + \cos\theta \, \vec{y} \end{cases}$$

$$\int_{z=0}^{L} dz = L.$$

$\int_{-\beta}^{\beta} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = 0$ car fonction impaire

$$\int_{-\beta}^{\beta} \cos^2\theta \, d\theta = \beta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Donc $\boxed{\vec{R}(1 \to 2) = R L P_m \beta \left[\vec{x} - f \vec{y} \right]}$

3

Distribuer les points pour les ≠ parties

6/Q2) $\vec{M}(O, 1 \to 2)$

$$= \int_{\theta=-\beta}^{\beta} \int_{z=0}^{L} R\vec{e_r} \wedge \left[P_m \cos\theta \vec{e_r} - f P_m \cos\theta \vec{e_\theta} \right] R\,d\theta\,dz.$$

$\vec{e_r} \wedge \vec{e_r} = \vec{0}$

$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z}$

$$\int_{\theta=-\beta}^{\beta} \cos\theta\,d\theta = \left[\sin\theta\right]_{-\beta}^{\beta} = 2\sin\beta.$$

$\vec{M}(O, 1 \to 2) = 2R^2 L P_m \sin\beta \vec{z}$

3

7/

Exercice 3.

Q1) $\{T_a(p \to 3)\} = \begin{Bmatrix} pS\,\vec{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ 0,5.

$= \begin{Bmatrix} \vec{0} & \cancel{0} \\ pS & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 \end{Bmatrix}_C$ 2D

Q2) $\{T_a(C \to 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & C \end{Bmatrix}_A$ 0,5.

Q3) $\{T_a(0 \to 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & \cancel{0} \\ Y_{01} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 \end{Bmatrix}_A$ 0,5

$\{T_a(1 \to 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & \cancel{0} \\ Y_{12} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 \end{Bmatrix}_B$ 0,5

8

$$\{Ta\,(2\to3)\} = \left\{\begin{array}{c|c} X_{23} & \cancel{0} \\ Y_{23} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 \end{array}\right\}_C$$ 0,5

$$\{Ta\,(3\to0)\} = \left\{\begin{array}{c|c} X_{30} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & N_{30} \end{array}\right\}_D$$ 0,5

Q4) PFS : On isole le solide 1 :

$$\{Ta\,(\bar{1}\to1)\} = \{Ta\,(0\to1)\} + \{Ta\,(2\to1)\} + \{T(c\to1)\}$$

$$\vec{M}_B\,(0\to1) = \vec{M}_A\,(0\to1) + (X_{01}\,\vec{x_0} + Y_{01}\,\vec{y_0}) \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = L_1\,\vec{x_1} = L_1\,(\cos\theta_{10}\,\vec{x_0} + \sin\theta_{10}\,\vec{y_0})$$

$$\vec{M}_B\,(0\to1) = \begin{vmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} L_1\cos\theta_{10} \\ L_1\sin\theta_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1\,(X_{01}\sin\theta_{10} - Y_{01}\cos\theta_{10}) \end{vmatrix}$$

$$= L_1\,(X_{01}\sin\theta_{10} - Y_{01}\cos\theta_{10})$$

9/ $\{T_a(c \to 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B$

Donc PFS :

$$X_{01} - X_{12} = 0$$

$$Y_{01} - Y_{12} = 0$$

$$C + L_1 (X_{01} \sin\theta_{10} - Y_{01} \sin\theta_{10})$$

3