

Corrigé DS 1

$$Q1) \vec{V}(B \in 1/0) = \vec{V}(A \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AB}$$

On dérive par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt} \vec{V}(B \in 1/0) = \frac{d}{dt} \vec{V}(A \in 1/0) + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AB} + \vec{AB} \wedge \frac{d}{dt} \vec{AB} \quad (0,3)$$

$$O_2 \quad \frac{d}{dt} (\vec{AB}) = \cancel{\frac{d}{dt} \vec{AB}} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AB}$$

0 car A et B liés
à $\mathcal{R}_1$

(0,5)

Aut final

$$\vec{T}(B \in 1/0) = \vec{T}(A \in 1/0) + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge (\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AB})$$

(0,5)

$$Q2) d = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

$$Or \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -r_A \vec{u}_r(\theta_A, \varphi_A) + r_B \vec{u}_r(\theta_B, \varphi_B)$$

$$Donc d = \sqrt{(r_B \vec{u}_r(\theta_B, \varphi_B) - r_A \vec{u}_r(\theta_A, \varphi_A))^2} \quad (0,5)$$

$$or \vec{u}_r(\theta_B, \varphi_B)^2 = 1 \quad et \quad \vec{u}_r(\theta_A, \varphi_A)^2 = 1$$

$$\vec{u}_r(\theta_B, \varphi_B) = \sin \theta_B \cos \varphi_B \vec{x} + \sin \theta_B \sin \varphi_B \vec{y} + \cos \theta_B \vec{z}$$

$$\vec{u}_r(\theta_A, \varphi_A) = \sin \theta_A \cos \varphi_A \vec{x} + \sin \theta_A \sin \varphi_A \vec{y} + \cos \theta_A \vec{z}$$

(1)

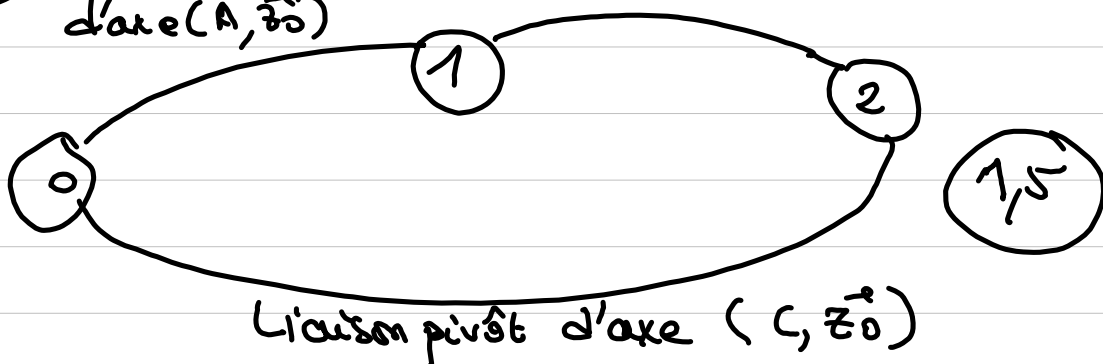
donc

$$d = \sqrt{(r_B^2 + r_A^2 - 2r_A r_B [\sin \theta_B \sin \theta_A (\cos \varphi_B \cos \varphi_A + \sin \varphi_B \sin \varphi_A) + \cos \theta_A \cos \theta_B])}$$

(0,5)

Q3) Liaison pivot
d'axe $(A, \vec{z}_0)$

Liaison linéaire annulaire
d'axe $(C, \vec{y}_2)$ et de centre B



$$Q4) h = 6\gamma + m - I_c$$

$$\gamma = 1 \quad m = 1 \quad I_c = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$h = 6 + 1 - 6 = 1 \quad (1)$$

Le système est hyperstatique car certains mvts sont empêchés par plusieurs liaisons.
Par ex: la translation des solides 1 et 2 suivant l'axe $\vec{z}_0$ (1)

Q Bonus) En transformant l'une des liaisons pivot en une liaison pivot glissant, alors on ne rajoute pas de mobilité interne mais on rajoute un degré de liberté (Inconnue cinématique) de la liaison et donc :

$$h = 6\gamma + m - I_c = 6 + 1 - 7 = 0.$$

Le système devient isostatique. (2)

Q5) La liaison linéaire rectiligne autorise

- les 2 translations dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ (0,5)
- la rotation d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$
- la rotation d'axe $(O_1, \vec{x}_1)$ (0,5)

soit 4 degrés de liberté (0,5)

Q6) Au point O_1 , car en ce point il n'y aura pas de vitesse liée aux rotations mais seulement aux translations. (0,5)

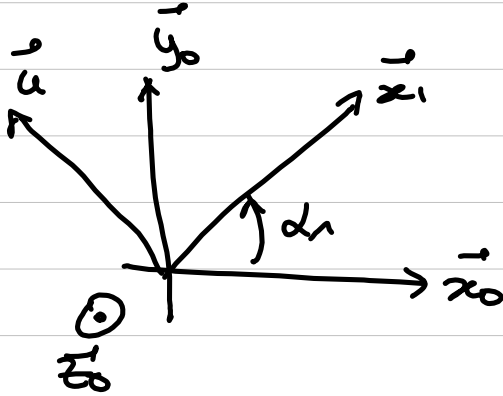
$$Q7) \vec{V}(O_1 \in 1/0) = \frac{d\vec{r}_{O_0}}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t) \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_0) = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0$$
(0,5)

$$\{T_c(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_1 \vec{z}_0 + \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_1}$$
(0,5)
(0,5)

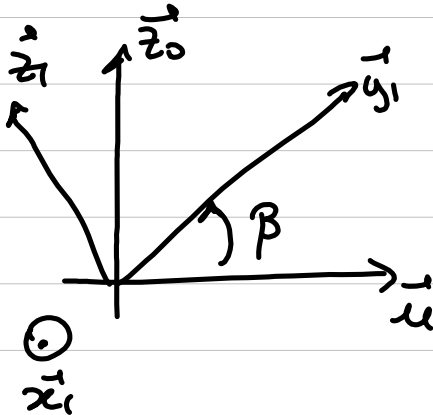
$$Q8) \{T_c(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_3 \vec{y}_2 \\ \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_3}$$
(0,5)

$$\{T_c(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_2 \vec{y}_1 \\ \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_2}$$
(0,5)

Q9) $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{Rot}(d_1, \vec{z}_0)} (\vec{x}_1, \vec{u}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{Rot}(\beta, \vec{x}_1)} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$



$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos d_1 \vec{x}_0 + \sin d_1 \vec{y}_0 \\ \vec{u} = -\sin d_1 \vec{x}_0 + \cos d_1 \vec{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$



$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \cos \beta \vec{u} + \sin \beta \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 = -\sin \beta \vec{u} + \cos \beta \vec{z}_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Q10) \quad \vec{V}(O_2 \in 2/0) = \underbrace{\vec{V}(O_2 \in 2/1)}_{=0} + \vec{V}(O_2 \in 1/0) \quad (0,1)$$

$$\vec{V}(O_2 \in 2/1) = \vec{V}(O_1 \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{O_1 O_2}$$

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}_1 \vec{e}_0 + \dot{\beta} \vec{e}_1 \quad \vec{O_1 O_2} = d_1 \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\sin\beta \vec{e} + \cos\beta \vec{e}_0 \\ &= -\sin\beta (-\sin\alpha_1 \vec{x}_0 + \cos\alpha_1 \vec{y}_0) + \cos\beta \vec{e}_0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\vec{e}_0 \wedge \vec{e}_1 = \sin\beta \sin\alpha_1 \vec{y}_0 + \sin\beta \cos\alpha_1 \vec{x}_0 \quad (1)$$

et

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{y}_1$$

Am final

$$\vec{V}(O_2 \in 2/0) = \dot{\alpha}_1 d_1 (\sin\beta \sin\alpha_1 \vec{y}_0 + \sin\beta \cos\alpha_1 \vec{x}_0) - \dot{\beta} d_1 \vec{y}_1$$

(0,1)

$$Q11) \vec{V}(O_3 \in 3/0) = \underbrace{\vec{V}(O_3 \in 3/2) + \vec{V}(O_3 \in 2/0)}_{=\vec{0}}$$

$$\vec{V}(O_3 \in 2/0) = \underbrace{\vec{V}(O_2 \in 2/0)}_{\substack{\text{cf question} \\ \text{précédente}}} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{O_2 O_3}$$

(1)

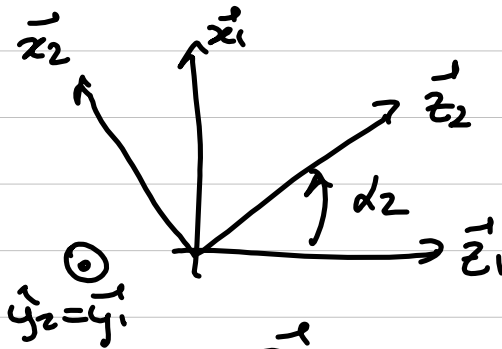
$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(2/0) &= \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) \\ &= \alpha_2 \vec{y}_1 + \alpha_1 \vec{z}_0 + \beta \vec{x}_1 \end{aligned} \quad (0,5)$$

$$\vec{O_2 O_3} = d_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{y}_2 = \vec{y}_1$$

$$\text{donc } \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 - \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 = -\vec{x}_2$$

Ensuite



$$\vec{z}_2 = \cos d_2 \vec{z}_1 + \sin d_2 \vec{x}_1$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_2 = \cos d_2 \vec{z}_0 \wedge \vec{z}_1 + \sin d_2 \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \wedge \vec{z}_1 & \text{ calculé à la question précédente} \\ \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 &= \vec{z}_0 \wedge (\cos d_1 \vec{x}_0 + \sin d_1 \vec{y}_0) \\ &= \cos d_1 \vec{y}_0 - \sin d_1 \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (1) \quad 0,5$$

$$\text{Enfin } \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = (\cos \alpha_2 \vec{e}_1 + \sin \alpha_2 \vec{e}_2) \wedge \vec{z}_1 \\ = \cos \alpha_2 \vec{y}_1. \quad (1)$$

Il ne reste plus qu'à tout mettre ensemble...

$$\vec{\nabla}(O_3 \in 3/0) = d_2 \left[d_2 \vec{z}_2 \right. \\ \left. + d_1 \left(\cos \alpha_2 (\sin \beta \sin \alpha_1 \vec{y}_0 + \sin \beta \cos \alpha_1 \vec{z}_0) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 \vec{y}_0 - \sin \alpha_1 \vec{z}_0) \right) \right. \\ \left. + \beta \cos \alpha_2 \vec{y}_1 \right] \\ + d_1 d_1 \left(\sin \beta \sin \alpha_1 \vec{y}_0 + \sin \beta \cos \alpha_1 \vec{z}_0 \right) \\ - \beta d_1 \vec{y}_1$$

(1)