UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Mécanique et Ingénierie

Licence 2 de Mécanique

Jeudi 10 Novembre 2022

Durée : 2 heures. Sans document ni calculatrice

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
- Bon courage !

1 Questions de cours (2,5 points)

Q1) Donner l'expression des coordonnées sphériques (r, θ, φ) en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z). (1,5 point)

Q2) Démontrer l'équivalence entre les deux définitions du centre d'inertie G d'un solide S. (1 point)

2 Exercice de cours (3,5 points)

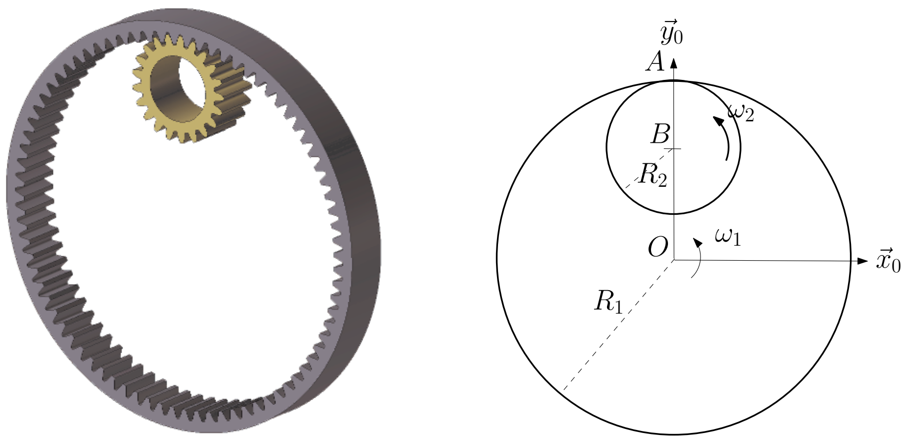

FIGURE 1 –

Soit $\mathcal{R}_0 = (0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un référentiel Galiléen et deux roues S_1 et S_2 dentées de rayon respectifs R_1 et R_2 en rotation à des vitesses de rotation ω_1 et ω_2 autour des axes (O,$\overrightarrow{z_0}$) et $(B, \overrightarrow{z_0})$ respectivement (cf Figure 1). Les deux roues sont en contact sans glissement en un point A (cf figure 1). Cette configuration est appelée engrenage interne.

Q3) En utilisant la mécanique des solides, redémontrer la loi $\omega_1/\omega_2 = R_2/R_1$.

3 Exercice : Calcul d'une surface (5 points)

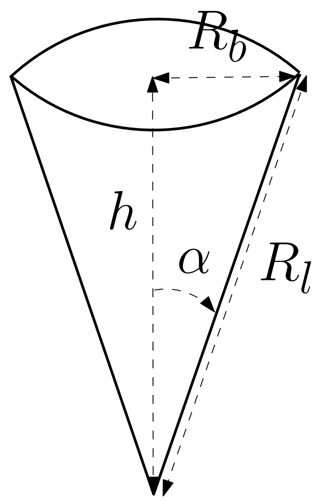

FIGURE 2 –

Q4) En utilisant les coordonnées sphériques, les surface élémentaires et les intégrales multiples calculer la surface latérale d'un cône de rayon de base R_b et de longueur latérale R_l (cf figure 2). (2 points)

Q5) Calculer le volume du même cône en fonction du rayon de la base R_b et de la hauteur du cône h mais cette fois-ci en utilisant les coordonnées cylindriques. (3 points)

4 Problème : Grue (9 points)

On considère dans ce problème une grue constituée de 4 solides numérotés de 1 à 4 et d'un bâti numéroté 0 (cf Figure 3). On associe à chaque solide un repère $\mathcal{R}_k = (A_k, b_k = (\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k))$ pour k allant de 0 à 4, où A_k désigne le centre du repère et $b_k = (\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ la base associée à ce repère. Le repère $\mathcal{R}_0 = (A_0, (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$ est supposé fixe. Le solide 1 est en liaison pivot d'axe $(A_1, \vec{z}_0)$ avec le solide 0. On aura donc $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ et l'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ sera noté $\alpha(t)$. Le solide 2 est en liaison pivot avec le solide 1 d'axe $(A_2, \vec{x}_1)$. On aura donc $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et l'angle $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ sera noté $\beta(t)$. Le solide 3 est en liaison pivot avec le solide 2 autour de l'axe $(A_3, \vec{x}_1)$. On aura donc $\vec{x}_3 = \vec{x}_1$ et l'angle $(\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ sera noté $\gamma(t)$ et sera tel que $\vec{z}_3 = -\vec{z}_0$, c'est à dire que l'axe A_3A_4 reste toujours parfaitement vertical. Enfin le solide 4 auquel est lié le repère $\mathcal{R}_4 = (A_4, (\vec{x}_4 = \vec{x}_3, \vec{y}_4 = \vec{y}_3, \vec{z}_4 = \vec{z}_3))$ est en liaison glissière avec le solide 3. La distance variable A_3A_4 sera noté $X(t)$. Enfin les distances A_1A_2 et A_2A_3 constantes seront notés d_1 et d_2.

Q6) Déterminer les torseurs cinématiques $\{T_c(1/0)\}$, $\{T_c(2/1)\}$, $\{T_c(3/2)\}$ et $\{T_c(4/3)\}$ en des points judicieusement choisis en fonction des données de l'énoncé. (2,5 points)

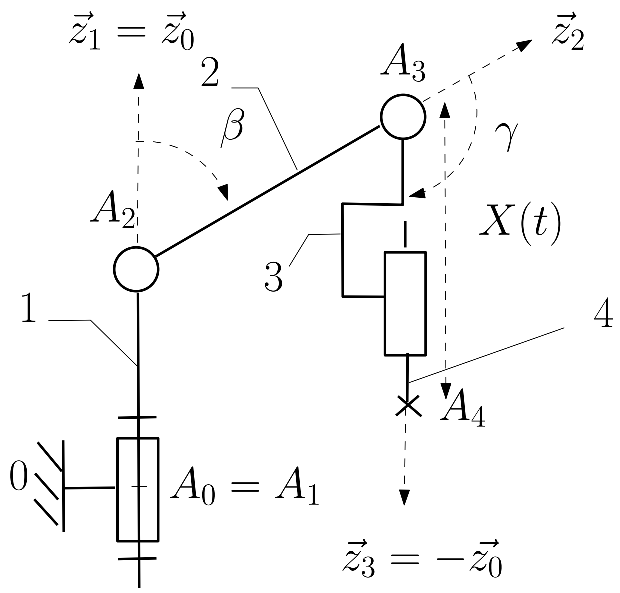

FIGURE 3 –

Q7) Déterminer la relation entre les angles β et γ puis entre les vitesses de rotation $\dot{\beta}(t)$ et $\dot{\gamma(t)}$ (0,5 points).

Q8) Faire un schéma pour chaque passage de base et exprimer les vecteurs de la base b_1 en fonction de la base b_0, b_2 en fonction de b_1 et b_3 en fonction de b_2 (1,5 points).

Q9) Transporter les torseurs cinématiques calculés à la question 1 au point A4. En utilisant la composition des mouvements déterminer la vitesse $\overrightarrow{V}(A_4 \in 4/0)$ du point A_4 lié au solide 4 par rapport au solide 0. Le résultat sera exprimé dans la base b_0 avec les termes bien regroupés par composantes ($\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) et simplifié au maximum. (4,5 points).