UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Mécanique et Ingénierie

Licence 2 de Mécanique

Jeudi 21 Octobre 2021

Durée : 2 heures. Sans document ni calculatrice

— Un formulaire vous rappelant un certain nombre d'équations est disponible à la fin de l'énoncé.
— Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
— Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
— L'examen est long. 21,5 points sont distribués pour une note finale sur 20.
— Bon courage !

1 Question de cours (7 points)

Q1) D'où vient le théorème de la puissance mécanique. Démontrez-le. (2 points).

Q2) Exprimer les vecteurs de la base cartésienne $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction des vecteurs de base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et des coordonnées sphériques (r, θ, φ). (2,5 points)

Q3) Rappeler et démontrer le théorème du transport de la vitesse en cinématique du solide. (1,5 points)

Q4) Quelles informations minimales déterminent entièrement la cinématique d'un solide ? (1 point)

2 Problème 1 : Croix de Malte (7,5 points)

Le mécanisme représenté figure 2 est un mécanisme à croix de Malte qui transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre 1 en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre 2. Sur la figure :
— α, β, et γ désignent respectivement les angles $(\vec{x}, \vec{x_1})$, $(\vec{x}, \vec{x_2})$ et $(\vec{x_1}, \vec{y_2})$
— d et r désignent respectivement les distance OC et OA fixes telles que $d/r > 1$
— y désigne la distance variable AC

Le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti **0**, le repère $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$ est lié à **1** en liaison pivôt d'axe $(O, \vec{z})$ avec le batî **0**, et le repère $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z})$ est lié à **2** en liaison pivôt d'axe $(C, \vec{z})$ avec le batî **0**. La liaison entre **1** et **2** est une liaison linéaire annulaire qui autorise la translation d'axe $\vec{y_2}$ et la rotation d'axe $(A, \vec{z})$.

Q3bis) Faire le graphe des liaisons du mécanisme (1 point)

Q4bis) Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme. On détaillera le calcul et on précisera en particulier quelles sont les mobilités utiles et internes. Le système est-il isostatique, hyperstatique ou hypo-

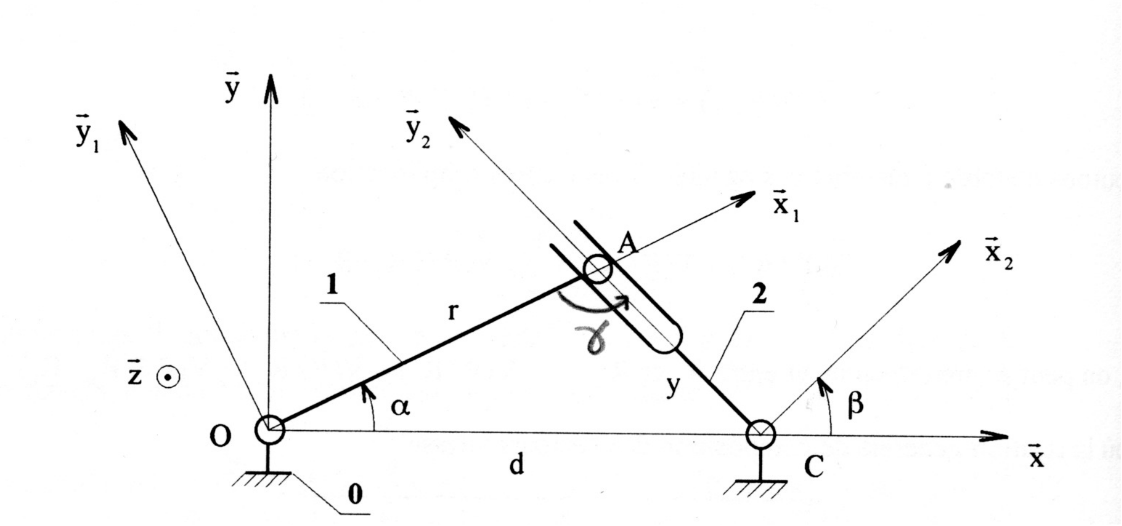

FIGURE 1 – Croix de Malte.

statique ? (2 points)

Q5) Montrez que la loi d'entrée sortie du mécanisme à croix de Malte, c'est à dire la relation entre les angles α et β s'écrit : $cos(\alpha - \beta) = \frac{d}{r} cos(\beta)$? (3 points)

Q6 bonus) Dans le cas où les angles $(\alpha - \beta)$ et β sont très faibles (ce qui est possible si le rapport d/r est proche de 1), établir une équation du second degré en α, en faisant le développement limité de l'équation établie à la question Q5. La résoudre et en déduire une relation entre α et β. (3 points)

3 Problème 2 : Mécanique du point (7,5 points)

On considère le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel de référence $\mathcal{R}_o = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé Galiléen, repéré dans le système de coordonnées cylindriques par les coordonnées (r, θ, z) tel que $r = R\,[1 + \epsilon \cos(\theta(t))]$, $\theta = \theta(t)$ et $z = 0$, où R désigne une constante. Au final le vecteur position vaut donc $\vec{OM} = R\,[1 + \epsilon \cos(\theta(t))]\,\vec{u}_r$ où $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z})$ désignent les vecteurs de base du système de coordonnée cylindriques et ϵ est une constante telle que $\epsilon \ll 1$. On appellera $\mathcal{R}_1$ le référentiel tel que $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z})$.

Q8) Dessiner la trajectoire du point M. (0,5 point).

Q9) Calculer la vitesse et l'accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}_o$. Montrer que lorsque $\epsilon \to 0$, on retrouve bien l'expression de l'accélération centripète d'un point évoluant sur un cercle de rayon constant. (3,5 points)

Q10) Calculer la vitesse et l'accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}_1$ (1,5 point)

On admet que le point M est soumis à une force extérieure $\vec{F}$ dont on cherche l'expression.

Q11) En appliquant le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}_o$, déterminer l'expression de cette force.(0,5 point)

Q12) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est-il Galiléen ? Pourquoi ? (0,5 point)

Q13) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ retrouvez l'expression de la force $\vec{F}$ et montrer qu'elle est identique à la forme trouvée à la question 11. (3 points)

Formulaire

Soient R' un référentiel quelconque et R_g un référentiel Galiléen.

- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(R'/R_g) = -m\left[\vec{\gamma}(O'/R_g) + \frac{d_{R_G}\vec{\Omega}_{R'/R_G}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R_g} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R_g} \wedge \overrightarrow{O'M})\right]$ désigne les forces d'entrainement et en particulier $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\Omega}_{R'/R_g} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R_g} \wedge \overrightarrow{O'M})$ la force centrifuge,
- et $\vec{F}_{cor} = -m\vec{\gamma}_{co}(R'/R_g) = -2m\vec{\Omega}_{R'/R_g} \wedge \vec{v}_{M/R'}$ désigne la force de Coriolis.