DS du 21 octobre

1. Question de cours

Q1) Le théorème de la puissance mécanique est une conséquence du principe fondamental de la dynamique. Il est obtenu en projetant le PFD sur le vecteur vitesse :

$$m \frac{d\vec{V}(M/R_g)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \vec{F}_{NC}^{(k)} + \sum_{l=1}^{n} \vec{F}_{c}^{(e)}$$

$$\vec{F}_c^{e} = \vec{\nabla} \mathcal{E}_p^{(e)}$$

$$\underbrace{m \frac{d\vec{V}(M/R_g)}{dt} \cdot \vec{V}(M/R_g)}_{} = \sum_{k=1}^{m} \vec{F}_{NC}^{(k)} \cdot \vec{V}(M/R_g) + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p^{(e)} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt}}_{= -\sum_{l=1}^{n} \frac{d\mathcal{E}_p^{(e)}}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{V}(M/R_g)^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt} \mathcal{E}_c$$

Donc $$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\mathcal{E}_c + \sum_{l=1}^{n} \mathcal{E}_p^{(e)}}_{= \mathcal{E}_m}\Big) = \sum_{k=1}^{m} \vec{F}_{NC}^{(k)} \cdot \vec{V}(M/R_g)}$$

2

2/

Q2) $\begin{cases} \vec{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{y} + \cos\theta\,\vec{z} \\ \vec{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{y} - \sin\theta\,\vec{z} \\ \vec{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{x} + \cos\varphi\,\vec{y} \end{cases}$

Donc $\boxed{\begin{cases} \vec{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u_r} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{u_\theta} - \sin\varphi\,\vec{u_\varphi} \\ \vec{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u_r} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u_\theta} + \cos\varphi\,\vec{u_\varphi} \\ \vec{z} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}. \end{cases}}$

2,5

Q3) $\vec{V}(B\in S_2/S_1) = \vec{V}(A\in S_2/S_1) + \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{AB}$

Dém:

$$\vec{V}(B\in S_2/S_1) = \frac{d_{S_1}\vec{OB}}{dt} = \frac{d_{S_1}\vec{OA}}{dt} + \frac{d_{S_1}\vec{AB}}{dt}$$

$$= \vec{V}(A\in S_2/S_1) + \underbrace{\cancel{\frac{d_{S_2}\vec{AB}}{dt}}}_{\vec{0} \text{ car } A \text{ et } B \text{ liés à } S_2.} + \vec{\Omega}_{S_2/S_1}\wedge\vec{AB}$$

$$= \vec{V}(A\in S_2/S_1) + \vec{\Omega}_{S_2/S_1}\wedge\vec{AB}$$

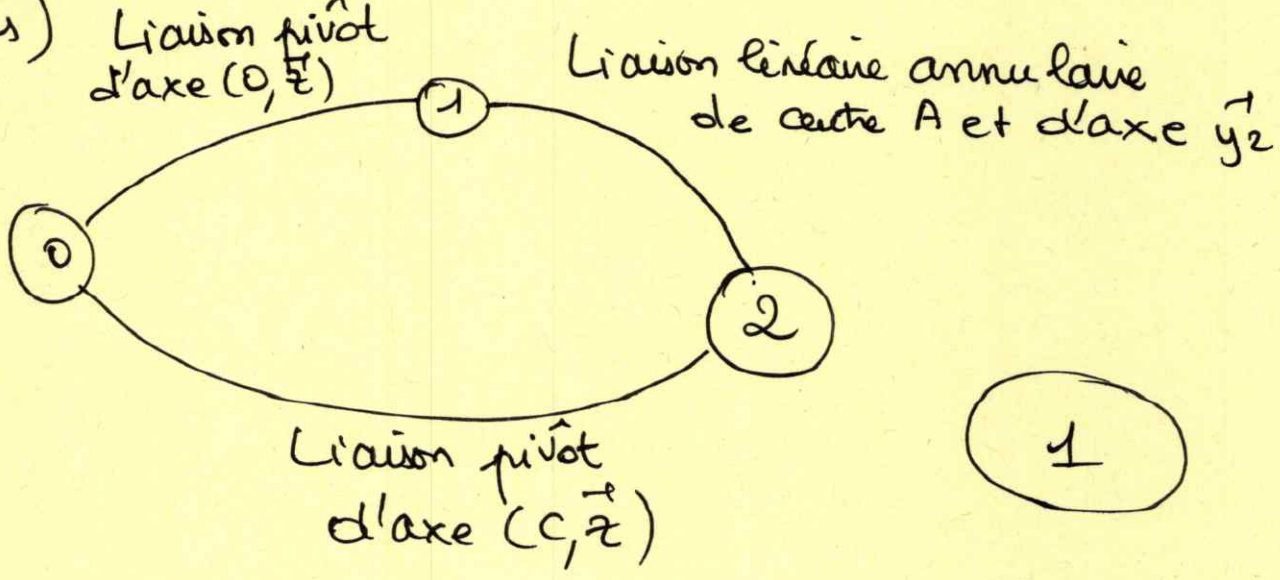
1,5

Q4) La cinématique d'un solide est entièrement déterminée par la connaissance du vecteur rotation et de la vitesse en un point du solide (puisque la vitesse en tout point du solide pourra être déterminée en utilisant la formule du transport de la vitesse

1

Problème 1.

Q3 bis)



1

Q4bis) $h = 6\gamma + m - I_c$.

$\gamma = L - N + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ (1 cycle) 2

$m = m_u + m_i = 1$ car pas de mobilité interne.

$I_c = 1 + 2 + 1 = 4$

$h = 6 + 1 - 4 = 3$ Le système est hyperstatique.

Q5) Fermeture géométrique :

$$\vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CO} = \vec{0}$$

avec $\vec{OA} = r\,\vec{x_1}$

$\vec{AC} = -y\,\vec{y_2}$

$\vec{CO} = -d\,\vec{x}$

$\vec{x_1} = \cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y}$

$\vec{y_2} = -\sin\beta\,\vec{x} + \cos\beta\,\vec{y}$

Projection suivant $\vec{x}$:

$$\begin{cases} r\cos\alpha + y\sin\beta - d = 0 & (1) \\ r\sin\alpha - y\cos\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

On veut éliminer y

$$y = \frac{r\sin\alpha}{\cos\beta}$$

donc $r\cos\alpha + r\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - d = 0$

donc $r(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = d\cos\beta$

i.e. $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{d}{r}\cos\beta$

3

Q6

$$1-(\alpha-\beta)^2 = \frac{d}{r}(1-\beta^2)$$

donc $1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2 = \frac{d}{r}-\frac{d}{r}\beta^2$

On peut donc écrire CAS 1

soit $\alpha^2 - 2\beta\alpha + \left[\beta^2\left(1-\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}-1\right)\right] = 0$

ou

CAS 2

$$\left(1-\frac{d}{r}\right)\beta^2 - 2\alpha\beta + \left(\alpha^2-1+\frac{d}{r}\right) = 0$$

Dans le cas 1

$$\Delta = 4\cancel{\beta^2} - 4\left[\beta^2\left(\cancel{1}-\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}+1\right)\right]$$

et $\boxed{\alpha = \beta \pm \sqrt{\beta^2\frac{d}{r} + \left(\frac{d}{r}+1\right)}}$

Dans le cas 2

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\left(1-\frac{d}{r}\right)\left(\alpha^2-1+\frac{d}{r}\right)$$

$$= 4\left[\cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha^2} + 1 - \frac{d}{r} + \frac{d}{r}\alpha^2 - \frac{d}{r} + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]$$

$$= 4\left[1 - 2\frac{d}{r} + \frac{d}{r}\alpha^2 + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]$$

$$= 4\left[\left(1-\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{d}{r}\alpha^2\right]$$

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha \pm \sqrt{\left(1-\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{d}{r}\alpha^2}}{\left(1-\frac{d}{r}\right)}}$$

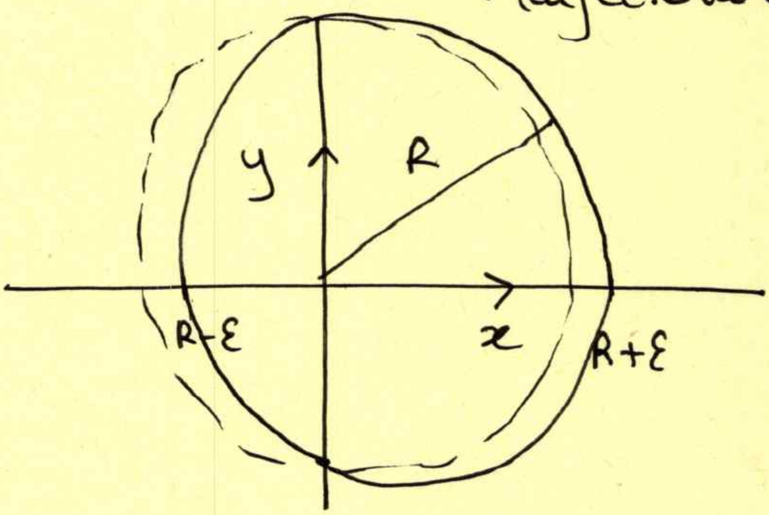
et donc

$$\cancel{\beta = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \left(1-\frac{d}{r}\right)^2}}{\left(1-\frac{d}{r}\right)}}$$

Problème 2 :

Q8

Trajectoire du point M.



$$r = R(1 + \varepsilon \cos\theta(t))$$

Q9 $\vec{V}(M/R_0) = \frac{d_{R_0}}{dt}\left[\left(R(1+\varepsilon\cos\theta(t)\right)\vec{u_r}\right]$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\right)\right)\vec{u_r} + R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\frac{d_{R_0}\vec{u_r}}{dt}$$

$$= -R\varepsilon\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_r} + R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}.$$

Pour le calcul de $\frac{d_{R_0}\vec{u_r}}{dt}$

Soit

① $\dfrac{d_{R0}\vec{u_r}}{dt} = \dfrac{d_{R0}\vec{u_r}}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

ou

② $\dfrac{d_{R0}\vec{u_r}}{dt} = \cancel{\dfrac{d_{R1}\vec{u_r}}{dt}} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{u_r} = \dot{\theta}\,\vec{z} \wedge \vec{u_r} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{0}$

1,5

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R_0) = & -R\,\varepsilon\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{u_r} \\ & -2R\varepsilon\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{u_\theta} \\ & + R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\left(\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{u_r}\right)\end{aligned}}$$

2

Pour $\varepsilon \to 0$, on retrouve

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_0) = R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}}$$

0,5

Q10) Dans le réf R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1) = \frac{d_{R1}}{dt}\left[\left(R(1+\varepsilon\cos\theta(t)\right)\vec{u_r}\right]$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R_1) = -R\,\varepsilon\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_r}}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_1) = -R\,\varepsilon\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{u_r}}$$ 1,5

Q11) $m\,\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{F}$

donc $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}(M/R_0)$ 0,5

Q12) R_1 est en rotation par rapport à R_0 Galiléen donc il n'est pas Galiléen

Q13) $$\vec{F_e} = -m\left[\cancel{\vec{\gamma}(O/R_0)}^{\vec{0}} + \frac{d_{R_0}\vec{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt}\wedge\vec{OM} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge(\vec{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{OM})\right]$$

$$= -m\left[\ddot{\theta}\,\vec{z}\wedge R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\,\vec{u_r} + \dot{\theta}\,\vec{z}\wedge(\dot{\theta}\,\vec{z}\wedge R(1+\varepsilon\cos\theta(t))\,\vec{u_r})\right]$$

$$\vec{F_e} = -m\left[R\ddot{\theta}(1+\varepsilon\cos\theta)\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2(1+\varepsilon\cos\theta)\,\vec{u_r}\right]$$

$$\vec{F}_{co} = -2m\,\dot{\theta}\vec{z} \wedge \vec{v}(M/R_1)$$

$$= -2m\,\dot{\theta}\vec{z} \wedge (-R\varepsilon\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_r)$$

$$\boxed{\vec{F}_{co} = 2mR\varepsilon\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{u}_\theta\,.}$$

Au final :

$$m\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_{co}$$

On a donc

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R_1) - \vec{F}_e - \vec{F}_{co}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} = &-mR\varepsilon(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{u}_r \\ &+ m\left[R\ddot{\theta}(1+\varepsilon\cos\theta)\,\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2(1+\varepsilon\cos\theta)\,\vec{u}_r\right] \\ &- 2mR\varepsilon\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{u}_\theta\end{aligned}}$$