DS 1 M & I
Corrigé

Q1) (i) Dans le cas d'un mouvement de translation il n'y a pas de point particulier. 0,5

(ii) Dans ce cas il est plus simple d'écrire le torseur cinématique au centre de rotation 0,5

(iii) ______ ______ au centre instantané de rotation. 0,5

Q2) $df(M) = \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{d\ell}$

En coordonnées cylindriques :

- $df(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$.
- $\vec{d\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$.
- Si $\vec{\text{grad}} f = G_r \vec{e_r} + G_\theta \vec{e_\theta} + G_z \vec{e_z}$

alors $df(M) = \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{d\ell}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial r}} dr + \boxed{\frac{\partial f}{\partial \theta}} d\theta + \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}} dz$$

$$= \boxed{G_r} dr + \boxed{rG_\theta} d\theta + \boxed{G_z} dz.$$

On trouve donc $\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e_z}$.

2

Q3) $\vec{V}(A/R) = \dfrac{d_R \vec{OA}}{dt} = \dfrac{d_R}{dt}(\vec{OC} + \vec{CA})$

$= \dfrac{d_R}{dt}(a\vec{x_1} + b\vec{z_2})$

$\dfrac{d_R}{dt}(a\vec{x_1}) = \underbrace{\cancel{\dfrac{d_{R_1}}{dt}(a\vec{x_1})}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (a\vec{x_1})$

(avec $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \dot{\alpha}\vec{z}$)

$= a\dot{\alpha}\vec{y_1}$

$\dfrac{d_R}{dt}(b\vec{z_2}) = \underbrace{\cancel{\dfrac{d_{R_2}}{dt}(b\vec{z_2})}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge (b\vec{z_2})$

$\vec{\Omega}_{R_2/R} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} = \dot{\beta}\vec{x_1} + \dot{\alpha}\vec{z}$

donc

$\dfrac{d_R}{dt}(b\vec{z_2}) = (\dot{\beta}\vec{x_1} + \dot{\alpha}\vec{z}) \wedge b\vec{z_2}$

$= -\dot{\beta}b\vec{y_2} + \dot{\alpha}b\sin\beta\,\vec{x_1}$ 2

D'où $\boxed{\vec{V}(A/R) = a\dot{\alpha}\vec{y_1} - \dot{\beta}b\vec{y_2} + \dot{\alpha}b\sin\beta\,\vec{x_1}}$

$$\vec{\gamma}(A/R) = \frac{d_R}{dt}\vec{V}(A/R)$$

$$\frac{d_R}{dt}\left(a\dot{\alpha}\vec{y_1}\right) = \frac{d_{R_1}}{dt}\left(a\dot{\alpha}\vec{y_1}\right) + \dot{\alpha}\vec{z}\wedge\left(a\dot{\alpha}\vec{y_1}\right)$$

$$= a\ddot{\alpha}\vec{y_1} - a\dot{\alpha}^2\vec{x_1}$$

$$\frac{d_R}{dt}\left(-\dot{\beta}b\vec{y_2}\right) = \frac{d_{R_2}}{dt}\left(-\dot{\beta}b\vec{y_2}\right) + \left(\dot{\beta}\vec{x_1} + \dot{\alpha}\vec{z}\right)\wedge\left(-\dot{\beta}b\vec{y_2}\right)$$

$$= -b\ddot{\beta}\vec{y_2} - b\dot{\beta}^2\vec{x_2} + b\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{x_1}$$

$$\frac{d_R}{dt}\left(\dot{\alpha}b\sin\beta\,\vec{x_1}\right) = \frac{d_{R_1}}{dt}\left(\dot{\alpha}b\sin\beta\,\vec{x_1}\right) + a\dot{\alpha}\vec{y_1}\wedge\dot{\alpha}b\sin\beta\,\vec{x_1}$$

$$= b\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\right)\vec{x_1}$$

$$- a\dot{\alpha}^2 b\sin\beta\,\vec{z}.$$

Au final:

$$= 2\dot{\alpha}\dot{\beta}b\cos\beta$$

$$\vec{\gamma}(A/R) = \left[-a\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}b\cos\beta + b\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\right)\right]\vec{x_1}$$

$$+ a\ddot{\alpha}\vec{y_1} - b\ddot{\beta}\vec{y_2} - b\dot{\beta}^2\vec{x_2} - a\dot{\alpha}^2 b\sin\beta\,\vec{z}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma}(A/R) = &\left[-a\dot{\alpha}^2 + b\left[2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + \ddot{\alpha}\sin\beta\right]\right]\vec{x_1}\\ &+ a\ddot{\alpha}\vec{y_1} - b\ddot{\beta}\vec{y_2} - b\dot{\beta}^2\vec{x_2} - a\dot{\alpha}^2 b\sin\beta\,\vec{z}\end{aligned}}$$

3,5

Remarque : compter des points même si le calcul n'est pas mené au bout.

Problème : système masse-ressort en rotation :

Q4) Le référentiel R_1 n'est pas Galiléen car il est en rotation autour de R_0 supposé Galiléen.

0,5 points

Q5) $\vec{V}(M/R_1) = \frac{d_{R_1}}{dt}\left(x_1(t)\,\vec{x_1}\right) = \dot{x}_1(t)\,\vec{x_1}$

$\vec{\gamma}(M/R_1) = \ddot{x}_1(t)\,\vec{x_1}$.

0,5 points

Q6) $m\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{P} + \vec{F_R} + \vec{Fie} + \vec{Fco} = mg\,\vec{x_0} - k(x_1 - x_v)\,\vec{x_1} + \vec{Fie} + \vec{Fco}$

$$\vec{Fie} = -m\left[\ddot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge x_1\vec{x_1} + \dot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge (\dot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge x_1\vec{x_1})\right]$$

$$= -m\ddot{\theta}x_1\,\vec{y_1} + m\dot{\theta}^2 x_1\,\vec{x_1}$$

$$\vec{Fco} = -2m\,\dot{\theta}\,\vec{z_0} \wedge \dot{x}_1\vec{x_1} = -2m\dot{\theta}\dot{x}_1\,\vec{y_1}$$

D'où

$$m\ddot{x}_1\,\vec{x_1} = mg\,\vec{x_0} - k(x_1 - x_v)\,\vec{x_1} - m\ddot{\theta}x_1\,\vec{y_1} + m\dot{\theta}^2 x_1\,\vec{x_1} - 2m\dot{\theta}\dot{x}_1\,\vec{y_1}.$$

3 points

Q7) $\vec{x_1} = \cos\theta\,\vec{x_0} + \sin\theta\,\vec{y_0}$

$\vec{y_1} = -\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0}$

Donc $\vec{x_0} = \cos\theta\,\vec{x_1} - \sin\theta\,\vec{y_1}$.

1,5 points

Q8) Projection sur $\vec{x_1}$:

$$m\ddot{x}_1 = mg\cos\theta - k(x_1 - x_v) + m\dot{\theta}^2 x_1$$

Projection sur $\vec{y_1}$:

$$0 = -mg\sin\theta - m\ddot{\theta}x_1 - 2m\dot{\theta}\dot{x}_1$$

1 point

Ces deux équations sont linéaires car elles font intervenir des termes du type : $\dot{\theta}^2 x_1$, $\sin\theta$, $\dot{\theta}\dot{x}_1$, ...

Q9) $\vec{V}(M/R_0) = \frac{d_{R_0}}{dt}\vec{OM} = \frac{d_{R_0}}{dt} x_1(t)\vec{x_1}$

$= \frac{d_{R_1}}{dt} x_1(t)\vec{x_1} + \dot{\theta}\vec{z_0} \wedge x_1(t)\vec{x_1}$

$= \dot{x}_1(t)\vec{x_1} + \dot{\theta} x_1 \vec{y_1}$. 1 point

$\vec{\gamma}(M/R_0) = \frac{d_{R_0}}{dt}\vec{V}(M/R_0)$

$= \frac{d_{R_1}}{dt}\vec{V}(M/R_0) + \dot{\theta}\vec{z_0} \wedge \vec{V}(M/R_0)$

$= \ddot{x}_1\vec{x_1} + \ddot{\theta} x_1 \vec{y_1} + \dot{\theta}\dot{x}_1\vec{y_1}$

$+ \dot{\theta}\dot{x}_1\vec{y_1} - \dot{\theta}^2 x_1 \vec{x_1}$

Q10) $m\vec{\gamma}(M/R_0) = m\left[\ddot{x}_1\vec{x_1} + \ddot{\theta} x_1 \vec{y_1} + 2\dot{\theta}\dot{x}_1\vec{y_1} - \dot{\theta}^2 x_1\vec{x_1}\right]$

$= mg\vec{x_0} - k(x_1 - x_v)\vec{x_1}$. 2 points

Q11) Equation bien identique. 0,5 points

Q12) $m\ddot{x}_1 = mg\cos\theta - k(x_1 - x_v) + m\dot{\theta}^2 x_1$

Si l'on divise cette équation par k, on obtient :

$\frac{m}{k}\ddot{x}_1 = \frac{m}{k} g\cos\theta - (x_1 - x_v) + \frac{m\dot{\theta}^2}{k} x_1$

si $k \to \infty$, alors l'équation devient

$x_1 - x_v = 0$ soit $x_1 = x_v$.

Dans ce cas la projection sur y_1 devient :

$0 = -\cancel{M}g\sin\theta - \cancel{m}\ddot{\theta} x_v$ car x_v est une constante.

Université Lille1
Sciences et Technologies

Place n°

Date : ____/____/________

coin à coller

NOM :

Prénom :

N° Etudiant :

coin à coller

DIPLOME : ....

EPREUVE : ....

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les : ..../.........

(partie réservée au correcteur)

NOTE : /20

Appréciations :

Soit si $\theta \ll 1$, alors $\sin\theta \simeq \theta$ et donc l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{x_v}\theta = 0$$

Soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_v}} \quad [\omega_0] = \sqrt{\frac{[g]}{[x_v]}} = \sqrt{\frac{m\,s^{-2}}{m}} = s^{-1} \text{ ok}$$

bien homogène à une fréquence.

3 points

Q13)) Solution $\theta = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. (0,5) 0,5 points

Q14)) Si $\theta = 0$, alors $\ddot{\theta} = 0$ et donc l'équation devient

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_v) = mg.$$

1,5 points

Q15)) Si l'on pose $X_1 = x_1 - x_v - \frac{mg}{k}$, alors

$\ddot{x}_1 = \ddot{X}_1$ et $x - x_v = X_1 + \frac{mg}{k}$

et donc

$$m\ddot{X}_1 + k\left(X_1 + \cancel{\frac{mg}{k}}\right) = mg .$$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1 X_1 = 0 .$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad [\omega_1] = \sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{kg\,s^{-2}}{kg}} = s^{-1}$

ok bien homogène à une fréquence. 1,5 points

Q16) Ici toutes les forces sont conservatives, donc le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$E_c + E_p = cte$ dans R_0. (⚠ le Théorème de l'Energie Cinétique ne peut être écrit que dans un Réf. Galiléen)

L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}(M/R_0)^2 = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}_1(t)\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}\, x_1 \vec{y}_1\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m\left[\dot{x}_1^2 + \dot{\theta}^2 x_1^2\right]$$

Les énergies potentielles élastiques et de pesanteur valent respectivement

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (x_1 - x_v)^2$$

$$E_{pp} = -mg \cos\theta \, x_1$$

On a donc :

$$\frac{1}{2} m \left[\dot{x}_1^2 + \dot{\theta}^2 x_1^2\right] + \frac{1}{2} k (x_1 - x_v)^2 - mg \cos\theta\, x_1$$

$$= 0.$$

2,5 points

Q16) Les deux équations que nous avons déterminées à la Q5 sont :

$$\text{et} \begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg\cos\theta - k(x_1 - x_v) + m\dot{\theta}^2 x_1 & (1) \\ 0 = -mg\sin\theta - m\ddot{\theta} x_1 - 2m\dot{\theta}\dot{x}_1 . & (2) \end{cases}$$

Il n'est à priori pas simple de retrouver l'équation ci-dessus à partir de ces deux équations.

Pour ce faire, on va donc suivre le même raisonnement que celui qui permet de démontrer le TEC, c'est à dire on va faire le produit scalaire du PFD avec la $\vec{V}(M/R_0)$ et ensuite, on va intégrer.

Il faut donc multiplier (1) par $\dot{x}_1$ et (2) par $\dot{\theta} x_1$.
On obtient :

$$m\ddot{x}_1\dot{x}_1 = mg\cos\theta\,\dot{x}_1 - k(x_1 - x_v)\dot{x}_1 + m\dot{\theta}^2 x_1\dot{x}_1$$
$$0 = -mg\sin\theta\,\dot{\theta} x_1 - m\ddot{\theta} x_1^2\dot{\theta} - 2m\dot{\theta}^2\dot{x}_1 x_1$$

Si l'on en fait la somme, on obtient :

$$\underbrace{m\dot{x}_1\ddot{x}_1}_{A} + \underbrace{\left[mg\cos\theta\,\dot{x}_1 + mg\sin\theta\,\dot{\theta}\,x_1\right]}_{B} + \underbrace{k(x_1 - x_v)\dot{x}_1}_{C}$$

$$\underbrace{+ m\dot{\theta}^2 x_1 + m\ddot{\theta} x_1 - 2m\dot{\theta}\dot{x}_1}_{D} = 0$$

$$A = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m\dot{x}_1^2\right] \qquad B = \frac{d}{dt}\left[-mg\cos\theta\, x_1\right]$$

3 points

$$C = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} k (x_1 - x_v)^2\right] \qquad D = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 x_1^2\right]$$

D'où en intégrant, on trouve l'expression démontrée à la question précédente.