UNIVERSITE DE LILLE
Département de Mécanique

Devoir surveillé du cours Mécanique et Ingénierie

Jeudi 15 Octobre 2024

Durée : 2h. Sans document ni calculatrice

- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.
- Le barème est donné à titre indicatif. Il pourra être modifié.
- L'examen est long. Concentrez-vous sur les questions principales avant de faire les 2 questions bonus.

Question de cours (1,5 points)

Q1) Démontrer la formule du transport du vecteur accélération (Formule de Rivals) à partir de la formule du transport du vecteur vitesse.

Exercice en autonomie (2,5 points)

Q2) Soient A et B deux points ayant pour coordonnées sphériques $(r_A, \theta_A, \varphi_A)$ et $(r_B, \theta_B, \varphi_B)$. Exprimer la distance d entre ces deux points en fonction des coordonnées sphériques.

Exercice original (3,5 points)

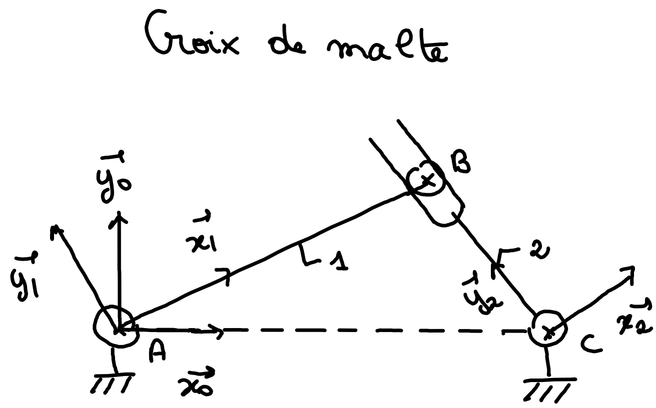

Figure 1 –

On considère le système représenté sur la Figure 1, appelé Croix de Malte. Dans ce système le solide (1) est en liaison pivot avec le bâti (0), le solide (2) est en liaison linéaire annulaire avec le solide (1). Enfin le solide (2) est en liaison pivot avec le bâti (0). Les centres et/ou axes de ces liaison sont spécifiés sur le schéma. Pour rappel la liaison linéaire annulaire autorise toutes les rotations et la translation suivant un seul axe (ici $(C, \vec{y}_2)$). Remarque : la représentation de la liaison linéaire annulaire utilisée ici n'est pas la représentation classique.

Q3) Faire le graphe des liaisons de ce système à partir du schéma cinématique représenté sur la Figure 1. (1,5 points)

Q4) Calculer le degré d'hyperstatisme du système. Expliquer pour quelle raison le système est hyperstatique ? (2 points)

QBonus) Comment pourriez-vous modifier le système pour le rendre le système isostatique ?

Problème (12,5 points)

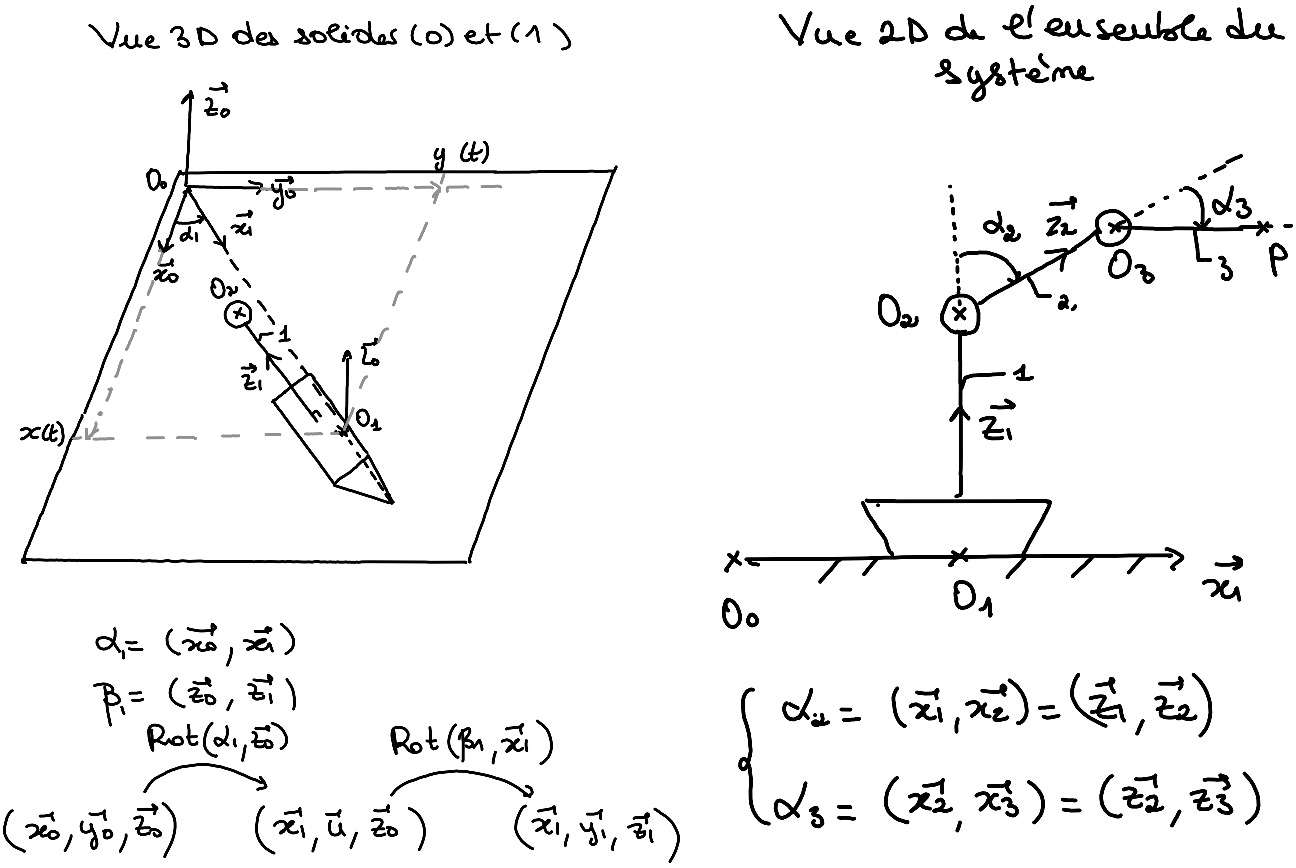

FIGURE 2 –

Nous étudions le système représenté sur la Figure 2, constitué d'un bâti (0) et de 3 solides (1), (2) et (3). A chaque solide k (pour k=1, 2, 3) est lié un repère $\mathcal{R}_k = (O_k, (\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k))$ tel que $\vec{O_0O_1}= x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0$, $\vec{O_1O_2}= d_1\vec{z}_1$, $\vec{O_2O_3}= d_2\vec{z}_2$. Enfin le solide (3) est constitué d'une barre s'étendant du point O_3 au point P et telle que : $\vec{O_3P}= d_3\vec{z}_3$. Les longueurs d_1, d_2 et d_3 sont constantes. Le solide (1) est en liaison linéaire rectiligne avec le bâti (0). Le passage de la base $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ se fait via deux rotations. Une première rotation d'angle $\alpha_1(t)$ et d'axe $\vec{z}_0$ transformant la base $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en une base intermédiaire $b_* = (\vec{x}_1, \vec{u}, \vec{z}_0)$ et une seconde d'angle $\beta(t)$ et d'axe $\vec{x}_1$ transformant la base $b_* = (\vec{x}_1, \vec{u}, \vec{z}_0)$ en la base $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Le solide (2) est en liaison pivot d'axe (O_2,$\vec{y_1}$) avec le solide (1). La rotation entre les solides (2) et (1) est repéré par un angle $\alpha_2(t) = (\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\vec{z_1}, \vec{z_2})$. Le solides (3) est en liaison pivot d'axe (O_3,$\vec{y_2}$) avec le solide (2), avec $\vec{y}_2 = \vec{y}_1$. La rotation entre les solides (3) et (2) est repéré par un angle $\alpha_3(t) = (\vec{x_2}, \vec{x_3}) = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$

Q5) Combien de degrés de liberté autorise la liaison linéaire rectiligne (liaison qui peut être représentée comme dans la Figure 2 par une prisme triangulaire dont l'une des arrêtes doit rester en contact avec le plan) ? Quels sont ces degrés de libertés (les définir correctement) ? (1,5 points)

Q6) En quel point est-il judicieux de calculer le torseur cinématique $\{T_c(1/0)\}$ et pourquoi (0,5 point) ?

Q7) En utilisant la définition du vecteur vecteur vitesse, calculer la vitesse $\vec{V}(O_1 \in 1/0)$. En déduire l'expression du torseur cinématique $\{T_c(1/0)\}$. (1,5 points)

Q8) Calculer les torseurs cinématiques $\{T_c(3/2)\}$ et $\{T_c(2/1)\}$ en des points judicieusement choisis.(1 point)

Q9) Exprimer les vecteurs de la base $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en fonction des vecteurs de la base $b_* = (\vec{x}_1, \vec{u}, \vec{z}_0))$ puis ceux de la base b_* en fonction de la base $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$. (2 points)

Q10) Calculer la vitesse $\vec{V}(O_2 \in 2/0)$. (3 point)

Q11) Calculer la vitesse $\vec{V}(O_3 \in 3/0)$. (3 points)

Qbonus) Calculer la vitesse $\vec{V}(P \in 3/0)$.