

Formation de Licence 2 de Mécanique

Cours Mécanique et Ingénierie

Pr. M. Baudoin

Table des matières :

Chapitre 1 : Modélisation cinématique d'un mécanisme.....	1
Chapitre 2 : Rappels de cinématique du solide.....	1
Chapitre 3 : Modélisation des actions mécaniques.....	1
Chapitre 4 : Principe fondamental de la statique.....	1
Chapitre 5 : Introduction à la mécanique du point.....	1

Chapitre 1 : Modélisation cinématique d'un mécanisme

La mécanique du solide est une branche de la physique dont l'objet est l'étude du mouvement, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes solides. La mécanique dite du solide *rigide* fait abstraction des déformations des corps considérés : elle se décompose en 3 branches principales :

- **La cinématique** qui s'intéresse au mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent.
- **La statique** qui consiste à calculer l'équilibre des forces d'un système à l'équilibre, en l'absence de mouvement.
- **La dynamique** qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui lui sont appliquées. Elle établit donc une relation entre la statique et la cinématique.

L'objectif de ce chapitre est d'établir un schéma simple permettant de représenter la cinématique d'un mécanisme réel à partir de dessins industriels et d'introduire les référentiels, paramètres et variables qui permettront de décrire son évolution. Après avoir rappelé les notions de repère, de système de coordonnées et de degré de liberté, nous introduirons la notion de liaison et les schémas qui permettent de les représenter. Nous terminerons le cours par une brève introduction au dessin industriel.

Ce cours s'inspire fortement des cours de Yves Brémont et Paul Réocreux de Mécanique aux éditions Ellipses.

1 Repérage d'un solide dans l'espace (3D)

1.1 Introduction

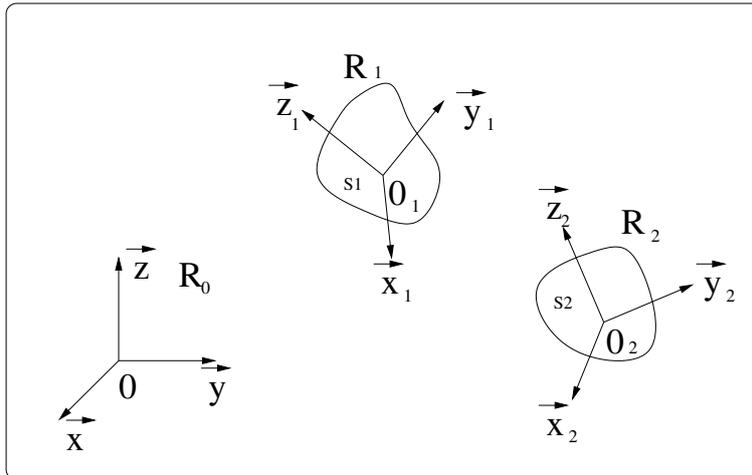
Depuis les travaux d'Henri Poincaré et d'Einstein sur la relativité, on sait qu'il n'existe pas de référentiel absolu, "fixe", qui servirait de référence pour décrire l'ensemble des mouvements des corps. En effet, les planètes, les étoiles, les galaxies, l'univers entier est en mouvement. Par conséquent, l'étude des mouvements est toujours l'étude des mouvements *relatifs* d'un corps par rapport à un autre.

Equivalence solide/repère :

Pour décrire ces mouvements relatifs, on associe généralement à tout solide (S_1), un repère ($\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$), lié à (S_1), qui permet d'étudier son mouvement dans l'espace :

- par rapport à un autre repère pris comme référence (\mathcal{R}_0)
- par rapport à un autre solide (S_2), ie par rapport au repère associé (\mathcal{R}_2).

Ce repère est constitué d'un centre O_1 qui permet de déterminer la *position* relative du solide associé et d'une base $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui permet de déterminer son *orientation*. Généralement, la base du repère est une *base orthonormée directe*, c'est à dire que (i) la norme des vecteurs de base est unitaire, (ii) les vecteurs de base sont perpendiculaires les uns aux autres et (iii) $\vec{z}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1$.



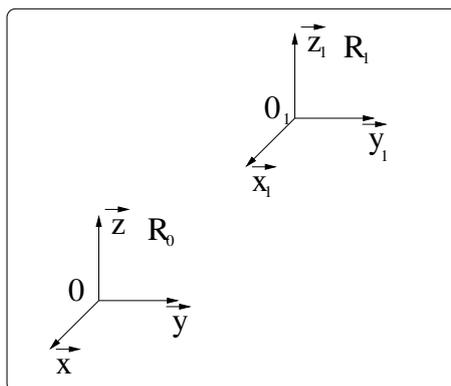
Degrés de liberté :

On appelle degrés de liberté des mouvements élémentaires *indépendants* (N mouvements sont indépendants si le $k^{\text{ième}}$ mouvement ne peut être obtenu par composition des N-1 autres). Un solide (S_1) se déplaçant librement dans l'espace possède 6 degrés de liberté :

- 3 degrés de translation qui correspondent au mouvement du centre du repère O_1 (par rapport à un autre repère).
- 3 degrés de rotation qui correspondent à l'orientation de la base $(b_1) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associée à (S_1) .

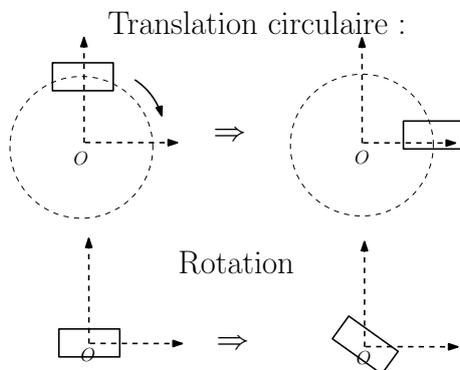
1.2 Mouvement de translation

Pour étudier le mouvement de translation de (\mathcal{R}_1) par rapport à un repère de référence (\mathcal{R}_0) , il faut choisir un *système de coordonnées* :



Lorsque l'on étudie le mouvement de translation, seul importe la position du centre (O_1) indépendamment de l'orientation de la base (b_1) .

Remarque : Attention, il ne faut pas confondre translation circulaire et rotation. Dans le cas d'une translation circulaire, l'objet translate sur une trajectoire circulaire sans changer d'orientation. Dans le cas d'une rotation, l'objet change d'orientation, sans translater (cf figure).



Les 3 principaux systèmes de coordonnées utilisés en physique sont les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Le choix d'un système de coordonnées se fait généralement suivant la symétrie du problème. Si les mouvements sont rectilignes, on choisira le système de coordonnées cartésiennes, s'ils sont circulaires autour d'un seul axe, le système de coordonnées cylindriques et enfin s'ils sont circulaires mais sans axe privilégié, on choisira le système de coordonnées sphériques.

Coordonnées cartésiennes :

Dans le système de coordonnées cartésiennes, un point O_1 est repéré par trois longueurs x, y, z qui correspondent aux 3 projections orthogonales du vecteur position suivant les vecteurs de base $(\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z})$.

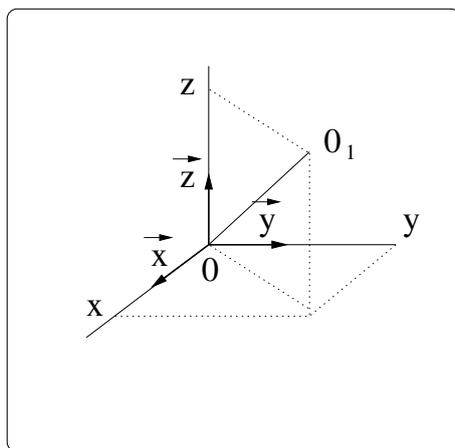


FIGURE 1 – Coordonnées cartésiennes

$$O\vec{O}_1 = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

avec :

- $x = O\vec{O}_1 \cdot \vec{x}$
- $y = O\vec{O}_1 \cdot \vec{y}$
- $z = O\vec{O}_1 \cdot \vec{z}$

Coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cylindriques, un point est repéré par deux longueurs r, z et un angle θ . Les vecteurs constituant la base sont appelés $\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$ et \vec{U}_z .

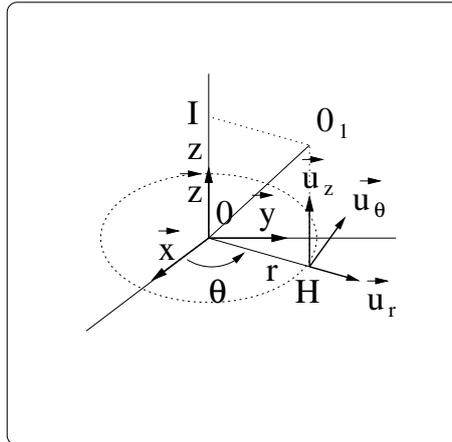


FIGURE 2 – Coordonnées cylindriques

Sur le schéma, H désigne la projection orthogonale de O_1 sur le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et I la projection de O_1 sur l'axe \vec{z} . On a alors :

- $r = \|\vec{OH}\|,$ • $\vec{U}_r = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$
- $\theta = (\vec{x}, \vec{OH}),$ • $\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}$
- $z = \|\vec{OI}\|.$ • $\vec{U}_z = \vec{z}$

et donc :

$$O\vec{O}_1 = r\vec{U}_r(\theta) + z\vec{U}_z$$

Etablir (dans les deux sens) la relation entre les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et cartésiennes (x, y, z) ?

Etablir (dans les deux sens) la relation entre les vecteurs de base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$ des coordonnées cylindriques et les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées sphériques, un point est repéré par une longueur r et deux angles θ, φ . Les vecteurs constituant la base sont appelés $\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$ et \vec{U}_φ .

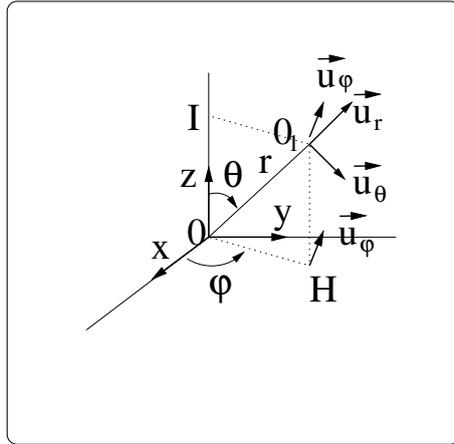


FIGURE 3 – Coordonnées sphériques

Sur le schéma, H désigne la projection de O_1 sur le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et I la projection de O_1 sur l'axe \vec{z} .

On a alors :

- $r = \|\vec{OO}_1\|$, • $\vec{U}_r = \frac{\vec{OO}_1}{\|\vec{OO}_1\|}$
- $\theta = (\vec{z}, \vec{OO}_1)$, • $\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}$
- $\varphi = (\vec{x}, \vec{OH})$. • $\vec{U}_\varphi = \frac{d\vec{v}}{d\varphi}$ avec $\vec{v} = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$

et donc :

$$\vec{OO}_1 = r\vec{U}_r(\theta, \varphi)$$

Etablir (dans les deux sens) la relation entre les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et cartésiennes (x, y, z) .

Etablir (dans les deux sens) la relation entre les vecteurs de base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ des coordonnées sphériques et les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.3 Mouvement de rotation

Lorsque l'on étudie le mouvement de rotation, seul importe l'orientation de la base (b_1) par rapport à la base de référence (b_o) indépendamment de la position du centre O_1 .

Etant donné que l'orientation relative de deux bases correspond à 3 degrés de libertés (3 rotations), il faut par conséquent 3 angles α , β , et γ pour la décrire. Ces angles sont appelés *angles d'Euler* (voir figure ci-dessous).

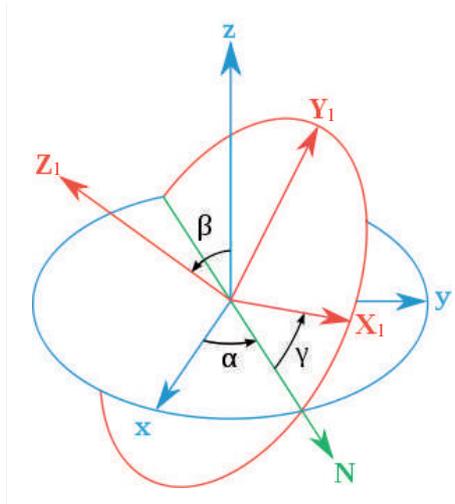
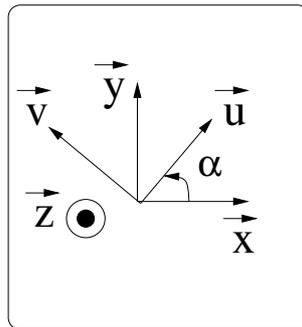


FIGURE 4 – Angles d'Euler

Ils sont composés :

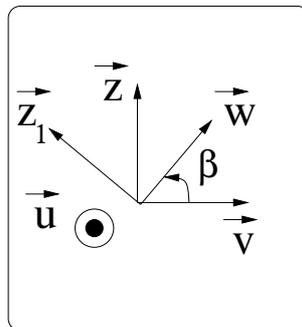
1. D'une première rotation autour de l'axe \vec{z} d'un angle α : $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.



$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$$

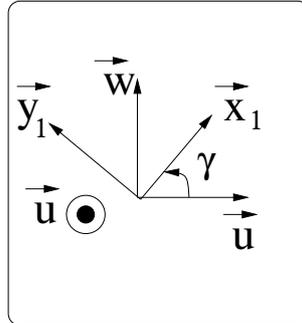
$$\vec{v} = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}$$

2. D'une seconde rotation autour de l'axe \vec{u} d'un angle β : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$.



$$\begin{aligned}\vec{w} &= \cos \beta \vec{v} + \sin \beta \vec{z} \\ \vec{z}_1 &= -\sin \beta \vec{v} + \cos \beta \vec{z}\end{aligned}$$

3. D'une dernière rotation autour de l'axe \vec{z}_1 d'un angle γ : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) \rightarrow (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.



$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \cos \gamma \vec{u} + \sin \gamma \vec{w} \\ \vec{y}_1 &= -\sin \gamma \vec{u} + \cos \gamma \vec{w}\end{aligned}$$

2 Repérage d'un solide dans le plan (2D)

Dans le cas d'un mouvement plan, un solide est astreint à se déplacer dans un ou plusieurs plan parallèles les uns aux autres.

2.1 Degrés de liberté

Un solide en mouvement libre dans un plan possède 3 degrés de liberté :

- 2 degrés de translation dans le plan
- 1 degré de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan considéré

2.2 Mouvement de translation

Coordonnées cartésiennes :

Dans le système de coordonnées cartésiennes plan, un point est repéré par deux longueurs x, y , qui correspondent aux 2 projections suivant les vecteurs de base \vec{x} et \vec{y} .

$$O\vec{O}_1 = x\vec{x} + y\vec{y}$$

Coordonnées polaires

Dans le système de coordonnées polaires, un point est repéré par une longueur r en angle θ . Les vecteurs constituant la base sont appelés $\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$.

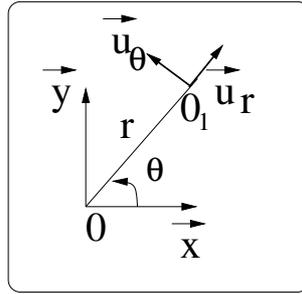


FIGURE 5 – Coordonnées polaires

$$O\vec{O}_1 = r\vec{U}_r(\theta)$$

avec par définition :

- $r = \|O\vec{O}_1\|$
- $\theta = (\vec{x}, O\vec{O}_1)$

Relation entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes :

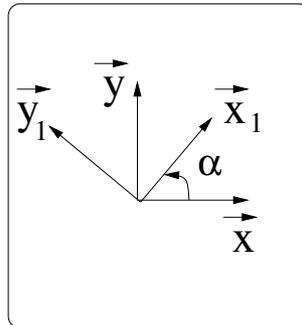
- $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Relation entre les vecteurs de base :

- $\vec{U}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}, \quad \vec{U}_\theta = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y}$
- $\vec{x} = \cos \theta \vec{U}_r - \sin \theta \vec{U}_\theta, \quad \vec{y} = \sin \theta \vec{U}_r + \cos \theta \vec{U}_\theta$

2.3 Mouvement de rotation

Les angles d'Euler se réduisent à un seul angle α : $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{x}_1, \vec{y}_1)$



$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} \\ \vec{y}_1 &= -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \end{aligned}$$

3 Liaison normalisées

Lorsqu'un solide ne peut pas se déplacer librement par rapport à un autre (c'est à dire qu'il n'a pas 6 degrés de liberté), il existe une liaison entre ces 2 solides qui restreint leurs possibilités de mouvements relatifs. Les liaisons les plus courantes sont normalisées par l'AFNOR. Cette norme a uniquement pour but de définir les possibilités de mouvement autorisées sans préjuger de la conception technologique. Pour toutes ces liaisons il existe des schématisations spatiales et planes qui permettent de réaliser un **schéma cinématique** 3D ou 2D du mécanisme, c'est à dire un schéma minimal qui décrit les possibilités de mouvement entre les pièces.

3.1 Degrés de liberté d'une liaison

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison est le nombre de mouvements élémentaires indépendants que la liaison autorise.

3.2 Tableau des liaisons normalisées dans l'espace

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des liaisons possibles en 3D.

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur cinématique	Torseur des AM
Encastrement	tout point de l'espace	0			$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$_A \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & p \cdot \omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & pX_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Plane de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$_A \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Annulaire en A d'axe (A, \vec{x})	au centre de la liaison	4			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x}, \vec{y})	4			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	5			$_A \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

FIGURE 6 – Tableau des liaisons en 3D

Liaison hélicoïdale :

La liaison hélicoïdale correspond typiquement à une vis se déplaçant dans un écrou. Elle a un seul degré de liberté car la translation x et la rotation α (en radians) sont liés par la relation $x = p\alpha$ où p désigne le *pas réduit* (c'est à dire la translation correspondant à une rotation de 1 radian). Relation entre le pas réduit et le pas pour un tour de vis P :

$$p = \frac{P}{2\pi}$$

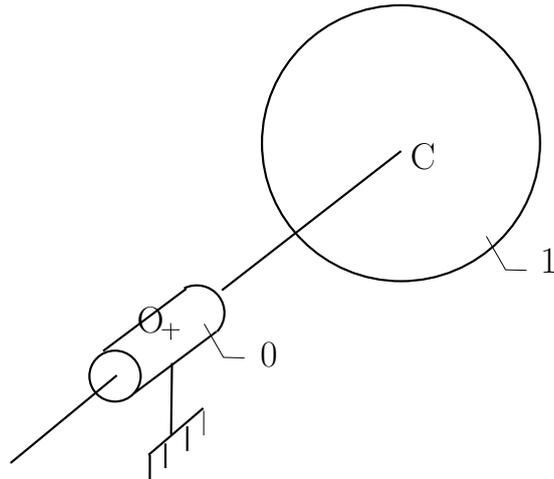
3.3 Tableau des liaisons dans le cas d'un mouvement plan

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Torseur cinématique	Torseur des AM
Encastrement	tout point de l'espace	0		$\begin{Bmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \\ 0 & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1		$\begin{Bmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \\ \omega_z & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & 0 \end{Bmatrix}_A$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1		$\begin{Bmatrix} \times & V_x \\ \times & 0 \\ 0 & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	2		$\begin{Bmatrix} \times & V_x \\ \times & 0 \\ \omega_z & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & 0 \end{Bmatrix}_A$

3.4 Paramétrage des liaisons

Pour paramétrer, à tout instant, la position relative de deux solides réunis par une liaison, il faut commencer par lier un repère à chaque solide **en plaçant les axes de ces repères sur les éléments caractéristiques de la liaison** : axe de symétrie, normale à un plan tangent, Le paramétrage de la position relative des deux repères s'effectue alors en introduisant des variables de position et d'orientation en nombre égal à celui des degrés de liberté. Bien sûr les **rotations seront caractérisées par un angle et les translations rectilignes par une distance**.

Exemple 1 :

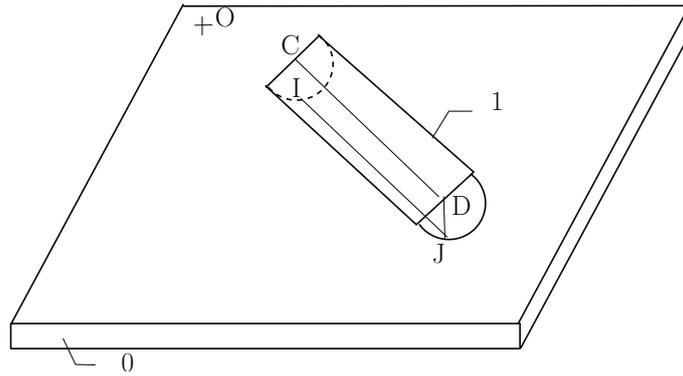


Ce premier exemple schématise une liaison pivot glissant entre un disque 1 de centre C et un bâti 0. L'axe de la liaison est normal au plan du disque.

- Combien y a-t-il de degrés de liberté entre ces deux solides et quels sont-ils ?
- Introduire un repère pour chacun des solides du système.
- Introduire les paramètres permettant de décrire la position et l'orientation relative des solides en présence.

Exemple 2 (à faire en TD) :

La figure suivante représente un demi-cylindre 1 d'axe CD, en contact avec le plan 0, suivant une génératrice IJ. On suppose que le cylindre reste en contact avec le plan.



- Combien y a-t'il de degrés de liberté entre ces deux solides et quels sont-ils? Quelle est la nature de la liaison?
- Introduire un repère pour chacun des solides du système.
- Introduire les paramètres permettant de décrire la position et l'orientation relative des solides en présence.
- Exercice : Exprimer les vecteurs de la base liés au solide 1 dans la base liée au solide 0.

4 Eléments de base de dessin industriel

Un dessin technique permet de représenter un objet pour la conception ou la fabrication à travers un certain nombre de vues ou de coupes. Dans le cas d'une vue, les contours extérieurs sont projetés sur un plan. Une coupe correspond à une section de l'objet. Parfois, les dessins techniques mélangent des éléments de coupe et de vue.

4.1 Vues ou plans de coupes

Un objet peut être représenté par plusieurs vues ou coupes permettant de le décrire dans son intégralité. Pour placer ces différentes vues, il existe principalement 2 conventions :

- La *convention européenne* consiste à placer la vue dessus sous la vue de face, la vue de droite, à gauche de la vue de face...
- La *convention américaine* consiste à placer la vue de dessus au-dessus de la vue de face, la vue de gauche à sa gauche...

Dans le cas d'une coupe, chaque plan de coupe (labellisé par une lettre A, B, C) peut être repéré sur les autres coupes via un trait mixte fort.

4.2 Les hachures

Dans le cas d'une coupe, les zones où le matériaux intersecte le plan sont hachurées. Par convention la pièce centrale n'est pas hachurée. Pour un dessin d'ensemble, les hachures se distinguent par un motif associé à un type de matériaux et plus généralement à une propriété physique ou technique. Sur chaque vue, une même pièce doit avoir le même motif (orientation et fréquence). Il faut alterner si possible l'orientation des hachures entre deux pièces conjointes.

4.3 Les différents traits

Le tableau suivant reprend les différents types de traits ainsi que leur signification.

Type de trait	Désignation	Applications
	Continu fort	Arrêtes et contours apparents
	Continu fin	Arrêtes fictives Lignes de cote, d'attache et de repère Hachures
	Mixte fin	Axes des formes de révolution Traces de plans de symétrie
	Mixte fort	Plans de coupe

Le centre des pièces sphériques est indiqué par une croix. Enfin le filetage d'une vis est représenté par un trait continu fin qui double le trait continu fort (cf figure 7).

4.4 Les roulements

Un roulement est un composant mécanique permettant la rotation entre deux pièces et la transmission d'efforts tout en minimisant les pertes mécaniques par frottement. Ainsi le frottement, source de dissipation et d'usure des pièces est remplacé par du roulement.

Il existe principalement 4 types de roulements :

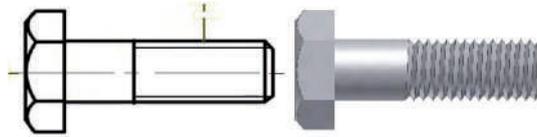


FIGURE 7 – Représentation d’une vis dans un dessin industriel.

- **Les roulements à bille :** Les éléments roulants sont des billes sphérique qui roulent sur une chemin usiné dans les bagues intérieure et extérieure. Une cage maintient les billes à une distance fixe.

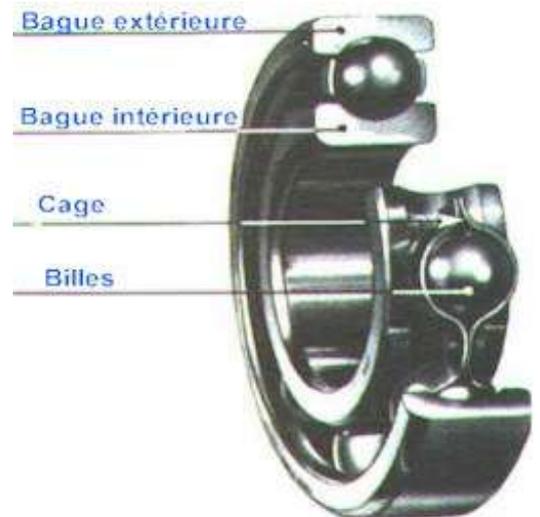
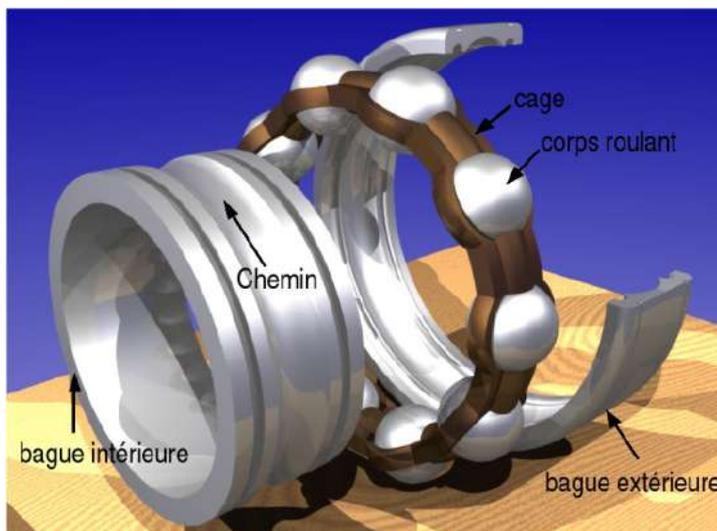


FIGURE 8 – Roulement à bille

- **Les roulements à rouleaux cylindriques :** Les éléments roulants sont des cylindres qui roulent entre deux bagues. Comme dans le cas des roulements à bille, la distance entre les cylindres est fixée par une cage. Etant donné la surface de contact plus importantes (que pour les roulement à billes), ils permettent la transmission d’efforts radiaux plus importants.

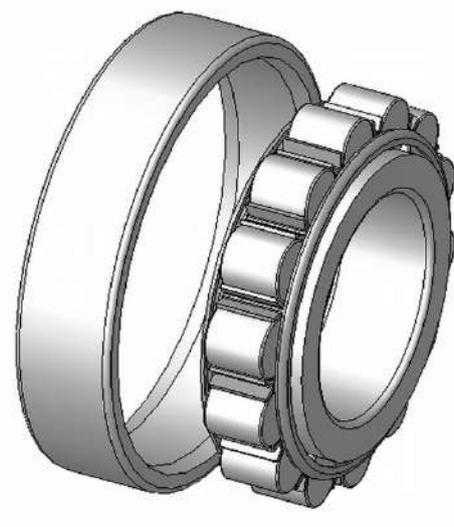


FIGURE 9 – Roulement à rouleaux cylindriques

- **Les roulements à rouleaux coniques :** Les éléments roulants sont des rouleaux coniques qui roulent sur une bague usinée avec le même angle que celui des rouleaux. L'avantage de ces roulements réside (i) dans l'assemblage plus simple que celui des roulements à bille et (ii) dans la surface de contact plus importante qui autorise donc la transmission d'efforts plus importants. Pour réaliser une liaison pivot, il est nécessaire d'utiliser 2 roulements à rouleaux coniques.



FIGURE 10 – Roulements à rouleaux coniques

- **Les roulement à aiguille** Il ressemble au roulement à rouleaux mais les éléments roulants sont de diamètre plus fin. Ils ont donc l'avantage d'être moins encombrants. Parfois, ceux-ci n'ont pas de bague intérieure et dans ce cas la liaison ainsi formée est une liaison pivot glissant.



FIGURE 11 – Roulement à aiguille

Le tableau suivant montre comment les différents types de roulements sont représentés :

Désignation	Coupe transverse	Coupe frontale
Roulement à bille		
Roulement à rouleaux		
Roulement à aiguille		

FIGURE 12 – Roulements : représentation sur un dessin industriel

4.5 Les engrenages

Un engrenage est un mécanisme élémentaire constitué de deux roues dentées, mobiles autour d'axes de position relative invariable, et dont l'une entraîne l'autre. Lorsque la différence entre les diamètres des deux roues est accentuée, la plus petite roue est appelée pignon.

Il existe différents types d'engrenage, selon la forme des roues, la position relative de leurs axes, l'emplacement des dentures (denture extérieure ou intérieure), etc. Ceux qui nous intéressent particulièrement et qui sont aussi les plus répandus sont :

- l'engrenage parallèle extérieur (figure 13) ;
- l'engrenage parallèle intérieur (figure 14) ;
- l'engrenage concourant extérieur (figure 15).



FIGURE 13 –



FIGURE 14 –



FIGURE 15 –

Les schémas cinématiques correspondants sont reportés sur les figures 16, 17 et 18 respectivement. Pour chaque engrenage, il y a un schéma en coupe transversale (celui de gauche) et un en coupe axiale (celui de droite).

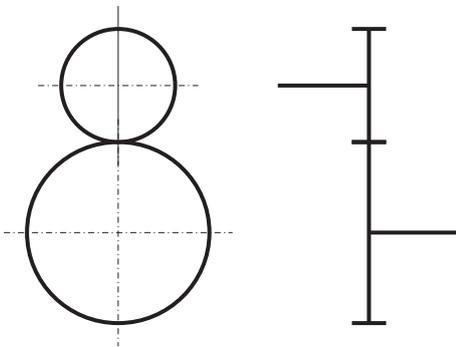


FIGURE 16 –

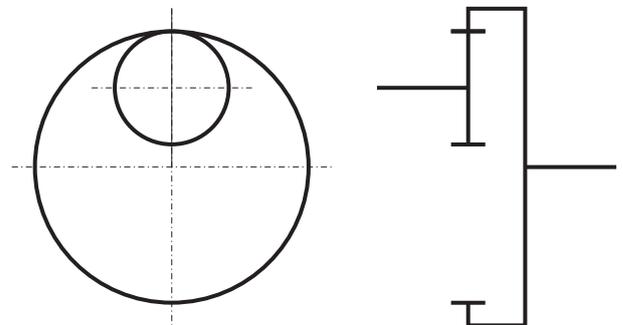


FIGURE 17 –

L'un des intérêts d'un engrenage est que le rapport des vitesses de rotation dépend du rapport des rayons et donc des nombres de dents. Dans le cas d'un engrenage (parallèle ou concourant) extérieur mettant en contact deux roues dentées 1 et 2, le rapport des vitesses de rotation des deux roues dentées Ω_2/Ω_1 correspond à l'opposé du rapport inverse du nombre de dents Z_1/Z_2 (cf cours suivant pour la démonstration) :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Les deux roues tournent alors en sens opposé. Dans le cas d'un engrenage intérieur, la relation est donnée par :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

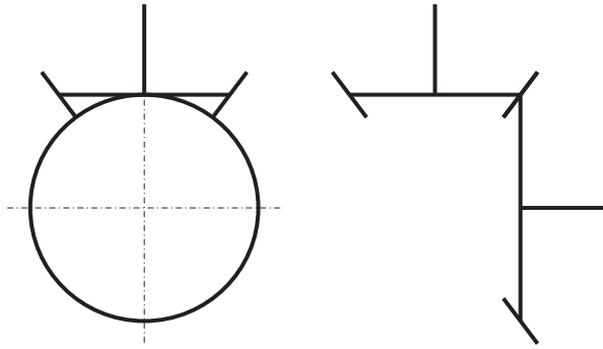


FIGURE 18 –

et les roues dentées tournent dans le même sens.

Pour cette raison, les engrenages sont très utilisés pour la transmission de puissance entre deux éléments en rotation, lorsque la vitesse de rotation de l'élément « moteur » n'est pas adaptée à l'élément « récepteur ». Voici quelques exemples :

1. Treuil électrique (figure 19) – Le moteur entraîne le tambour autour duquel le câble s'enroule, provoquant ainsi la montée ou la descente de la charge.
2. Turbopropulseur (figure 20) – La turbine, entraînée en rotation par les gaz d'échappement issus de la combustion, entraîne à son tour l'hélice.
3. Eolienne (figure 21) – Le rotor entraîne l'arbre du générateur produisant l'énergie électrique.

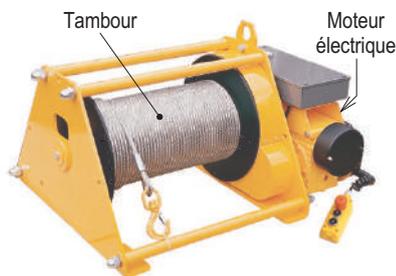


FIGURE 19 –



FIGURE 20 –



FIGURE 21 –

La vitesse de rotation du moteur électrique ($\approx 1.500 \text{ tours/mn}$) est trop importante pour le tambour et celle de la turbine ($\approx 40.000 \text{ tours/mn}$) trop importante pour l'hélice. En revanche, celle du rotor de l'éolienne ($\approx 15 \text{ tours/mn}$) est trop faible pour le générateur. On intercale alors un réducteur de vitesse dans les deux premiers cas, un multiplicateur dans le dernier (figure 22).



FIGURE 22 –

De tels dispositifs utilisent en général des trains d'engrenages, c'est-à-dire des combinaisons d'engrenages.

5 Graphe des liaisons et schéma cinématique

5.1 Graphe des liaisons

Classe d'équivalence cinématique

L'ensemble des solides d'un mécanisme sans mouvement relatif constitue une **classe d'équivalence**.

Exemple : Presse de modélisme :

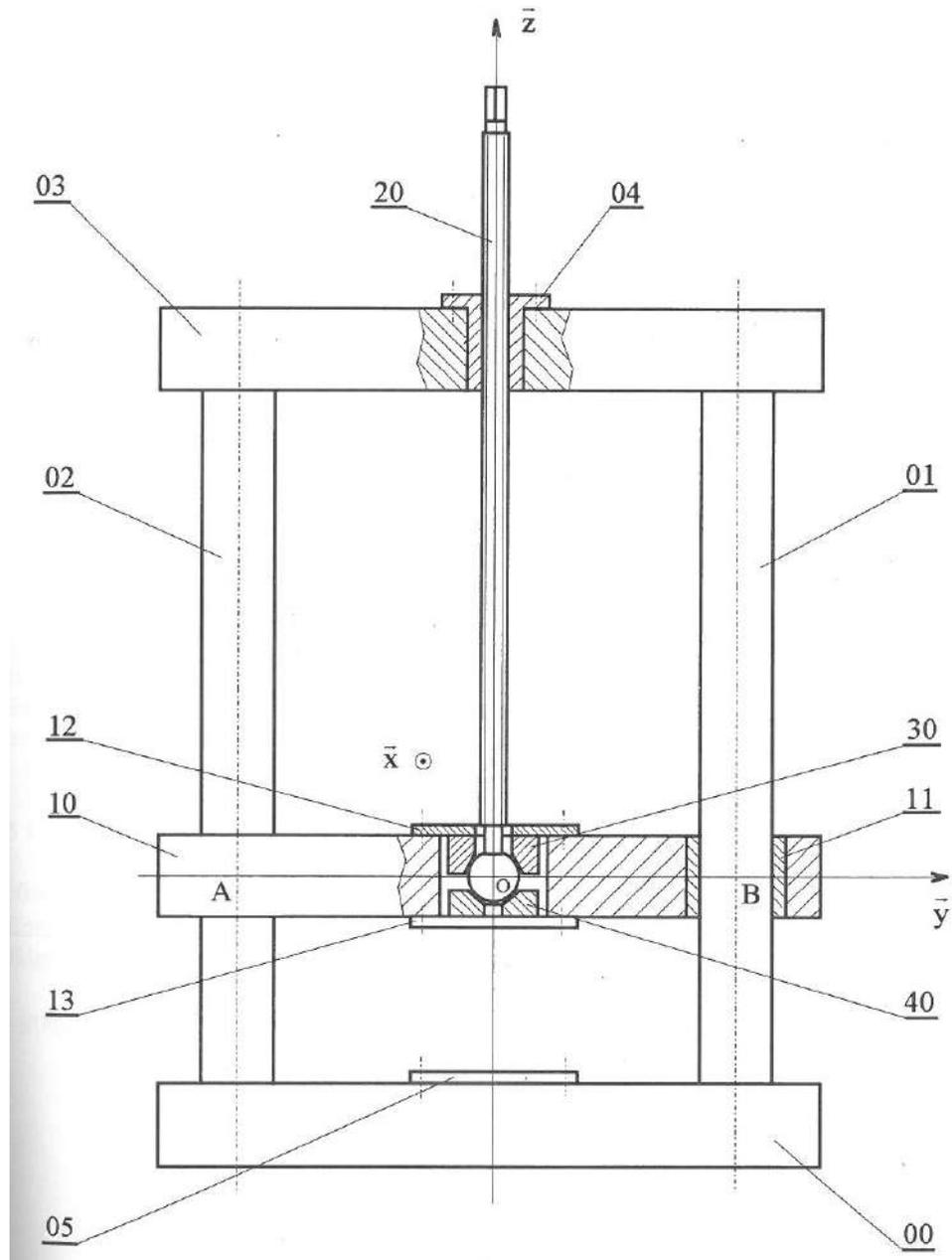


FIGURE 23 – Presse de modélisme.

Question (à faire en cours) : Quelles sont les classes d'équivalence de cette presse ?

Sur le niveau de modélisation :

Ici nous avons supposé que les pièces 30, 40 et 13 étaient des éléments internes à la liaison. Nous avons ici adopté une vision assez globale. Il aurait été possible d'adopter un niveau de modélisation plus fin en considérant les liaisons entre chacune de ces pièces et le reste du mécanisme.

Grphe des liaisons

Le graphe des liaisons est un schéma bulle dont l'objectif est de représenter les liaisons entre pièces ou classes d'équivalence d'un solide. Les pièces sont schématisées par une bulle et les liaisons par des traits joignant les cercles. Pour chaque liaison sont précisés les éléments nécessaires à la définition d'une liaison.

Exemple : Construire le graphe des liaisons de la presse de modélisme.

5.2 Liaisons en parallèle, en série et liaisons équivalentes

Liaisons en parallèle : n liaisons L_1, L_2, \dots, L_n sont disposées en parallèle entre deux solides 1 et 2 si chaque liaisons relie directement les deux solides, cf schéma ci-dessous.

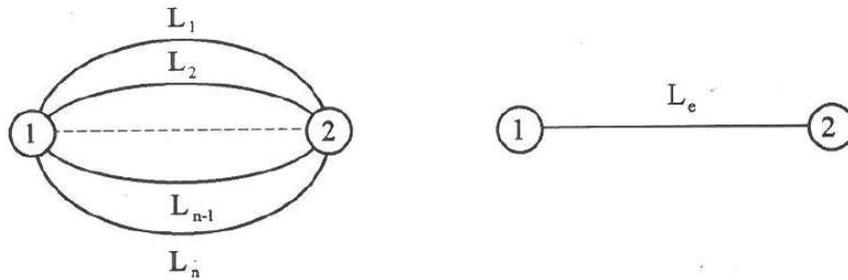


FIGURE 24 – Gauche : liaisons en parallèle. Droite : liaison équivalente.

Liaisons en série : n liaisons L_1, L_2, \dots, L_n sont en série, ou réalisent une chaîne ouverte entre deux solides 0 et n , si elles sont disposées l'une à la suite de l'autre par l'intermédiaire de $(n-1)$ solides.

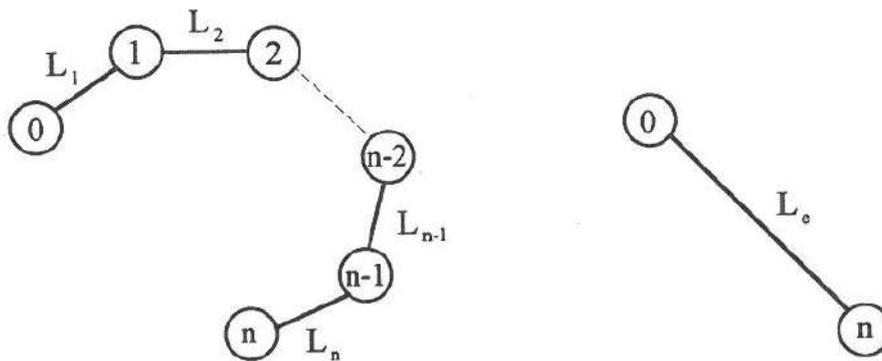


FIGURE 25 – Gauche : liaisons en parallèle. Droite : liaison équivalente.

Liaisons équivalentes : La liaisons équivalente L_e à un ensemble de n liaisons en parallèle ou en série est une liaison qui autorise le même mouvement relative entre les deux solides.

Exemple : Dans la presse de modélisme les deux liaisons pivot glissant L_1 et L_2 installées en parallèle sont équivalentes à une liaison glissière. Alors le graphe des liaisons devient :

5.4 Loi entrée sortie

La loi "entrée-sortie" d'un mécanisme est la relation entre les paramètres caractérisant la position et/ou l'orientation de la pièce d'entrée et les paramètres caractérisant la position et/ou l'orientation de sortie du mécanisme. Cette loi peut s'obtenir en exprimant la *fermeture géométrique* de chacune des chaînes fermées de solides du mécanisme.

5.5 Degré d'hyperstatisme d'un mécanisme.

En mécanique des solides, l'**hyperstatisme** est la situation d'un mécanisme pour lequel le fonctionnement se fait avec plus de contraintes que ce qui est strictement nécessaire pour aboutir à la fonction souhaitée, ce qui signifie qu'au moins un degré de mobilité d'une pièce est supprimé plusieurs fois. A contrario on parle d'**isostatisme** lorsque le fonctionnement se fait sans contrainte excessive, c'est à dire que les degrés de mobilité ne sont supprimés qu'une seule fois. Enfin on parle d'**hypostatisme** lorsque l'assemblage possède trop de mobilités. D'un point de vue mécanique, au moins une pièce conserve une possibilité de mouvement qui est nuisible au fonctionnement. L'hyperstatisme, en empêchant plusieurs fois un même mouvement peut être intéressant lorsque l'on cherche à consolider le système. L'isostatisme a pour intérêts de rendre le système le plus libre possible et donc d'éviter la cassure d'un système si celui-ci prend du jeu.

Exemples :

Considérons un cadre que l'on veut fixer sur un mur et supposons que les fixations correspondent à une liaison pivot (cf figure 28). Si l'on met une seule fixation, alors le cadre n'est pas fixé, on est dans une situation d'hypostatisme. Si l'on rajoute un clou (réalisant une liaison ponctuelle), alors le cadre est fixé et ne peut pas bouger. Si l'on rajoute une troisième ou une quatrième liaison pivot, alors cette fois-ci nous exerçons plus de contraintes que nécessaire sur le cadre pour le maintenir. L'intérêt est que nous consolidons le système. Le défaut est que si la plaque se déforme (par exemple par dilatation thermique), dans le cas isostatique, cela ne posera pas de problème : la plaque pivotera un peu et les liaisons ne casseront pas. En revanche, si cela se produit dans la plaque possédant les 3 liaisons pivot, la dilatation va exercer des contraintes très fortes sur les fixations pouvant aboutir à sa rupture.

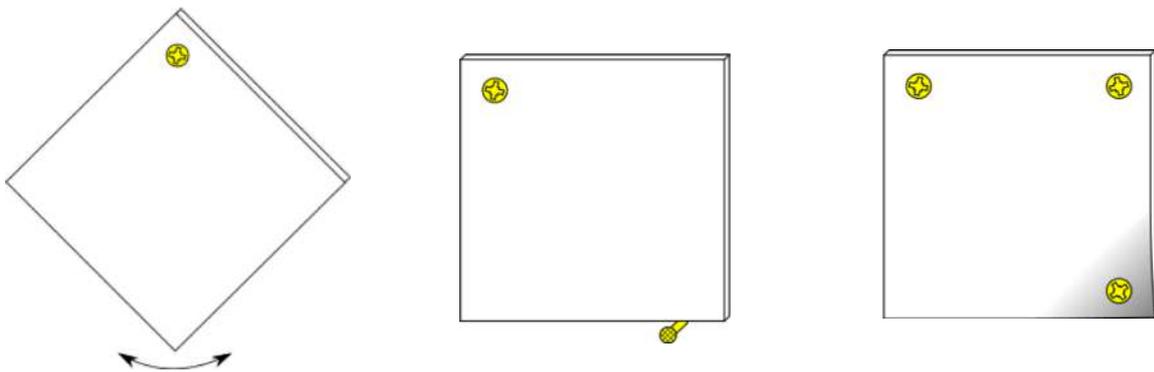


FIGURE 28 – Schéma cinématique.

Le **degré d'hyperstatisme** d'un mécanisme se calcule selon la formule :

$$h = 6\gamma + m - I_c$$

où

- $\gamma = L - N + 1$ désigne le nombre de cycles indépendants d'un mécanisme avec L nombre de liaisons et N nombre de solides
- $m = m_u + m_i$ désigne le nombre de mobilités du mécanisme, avec m_u le nombre de mobilité utile, et m_i le nombre de mobilités interne du mécanisme
- I_c désigne le nombre d'inconnues cinématiques (somme des degrés de libertés de chacune des liaisons composant le mécanisme)

Si $h = 0$ le mécanisme est dit isostatique, si $h > 0$ le mécanisme est dit hyperstatique, et enfin si $h < 0$ le mécanisme est dit hypostatique.

Exemple 1 : En partant du graphe des liaisons représenté sur la figure 25, calculer le degré d'hyperstatisme du système ? Le système est-il hyperstatique, isostatique ou hypostatique ? Pourquoi ?

En partant du graphe des liaisons avec la liaison équivalente représenté figure 26, calculer le degré d'hyperstatisme du système ? Le système est-il hyperstatique, isostatique ou hypostatique ? Pourquoi ?

Chapitre 2 : Rappels de cinématique du solide

La cinématique est la discipline de la mécanique qui s'intéresse au mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent. L'objectif de ce cours est de calculer les vitesses et accélérations en différents points d'un mécanisme constitués d'un ensemble de solide en liaison les uns avec les autres.

1 Points liés à un solide

Un point P est dit lié à un solide (S_1) s'il appartient physiquement à ce solide ou s'il suit les mêmes mouvement de rotation et de translation que celui-ci.

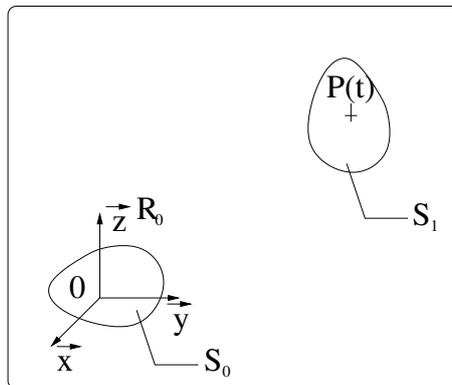


FIGURE 1 –

Les vitesses en différents points d'un solide ne sont pas nécessairement les mêmes. Par exemple, si l'on considère un solide en rotation autour d'un axe, la vitesse d'un point situé sur l'axe de rotation est nulle et elle augmente avec la distance par rapport à cet axe de rotation.

La vitesse et l'accélération d'un point P lié à un solide (S_1) en mouvement par rapport à un autre solide (S_0) ou au repère associé \mathcal{R}_o , seront notées dans ce cours $\vec{V}(P \in S_1/S_0)$ et $\vec{\Gamma}(P \in S_1/S_0)$. Dans cette notation, sont bien précisées (i) le point considéré, (ii) à quel solide est lié ce point, (iii) quel est le repère ou solide de référence.

Le mouvement de rotation d'un solide ne dépend pas du point considéré. Il est caractérisé par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(S_1/S_0)$ pour lequel la notation précise uniquement le solide considéré et le solide de référence.

Expression du vecteur vitesse angulaire :

Mouvement dans l'espace :

Nous avons introduit dans le chapitre précédent les 3 angles d'Euler définissant l'orientation d'un solide (S_1) par rapport à un solide (S_o). En conservant les notations du chapitre précédent, le vecteur vitesse angulaire s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S_1/S_o) = \dot{\alpha} \vec{z} + \dot{\beta} \vec{u} + \dot{\gamma} \vec{z}_1} \quad (1)$$

où $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, et $\dot{\gamma}$ correspondent aux dérivées temporelles de α , β et γ .

Mouvement plan :

Bien sûr dans le cas d'un mouvement plan, il n'y a plus qu'une seule rotation possible et (en conservant les notations du chapitre précédent) :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_o) = \dot{\alpha} \vec{z}$$

2 Formule du transport du vecteur vitesse

A partir de la formule de Bour, on peut déduire une relation entre la vitesse de deux points A et B liés au même solide (S_1) en mouvement par rapport à un solide de référence (S_o).

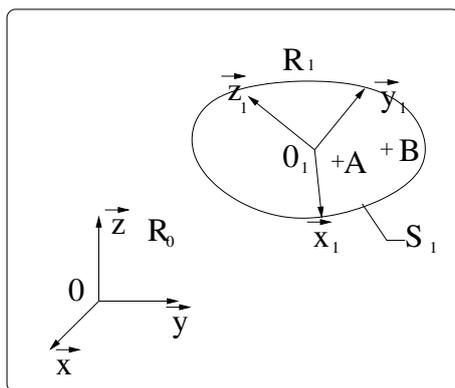


FIGURE 2 –

En effet, si l'on dérive le vecteur \vec{AB} par rapport à (S_o), on obtient à l'aide de la formule de Bour :

$$\frac{d_{S_o} \vec{AB}}{dt} = \frac{d_{S_1} \vec{AB}}{dt} + \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \vec{AB}$$

Comme A et B sont deux points liés à (S_1), le premier terme du membre de droites s'annule, et donc :

$$\frac{d_{S_o} \vec{AB}}{dt} = \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \vec{AB}$$

En utilisant la relation de Chasles, on peut décomposer le membre de gauche en :

$$\frac{d_{S_o} \vec{AB}}{dt} = \frac{d_{S_o} \vec{AO}}{dt} + \frac{d_{S_o} \vec{OB}}{dt} = -\frac{d_{S_o} \vec{OA}}{dt} + \frac{d_{S_o} \vec{OB}}{dt} \equiv -\vec{V}(A \in S_1/S_o) + \vec{V}(B \in S_1/S_o)$$

où O désigne le centre du repère \mathcal{R}_o associé au solide S_o .

En combinant ces 2 relations, on obtient donc la *formule du transport du vecteur vitesse* :

$$\boxed{\vec{V}(B \in S_1/S_o) = \vec{V}(A \in S_1/S_o) + \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \overrightarrow{AB}} \quad (2)$$

3 Torseur cinématique

Si l'on connaît le vecteur vitesse angulaire d'un solide ainsi que le vecteur vitesse en un point de ce solide, on peut, à l'aide de la formule du transport de la vitesse, déterminer sa vitesse en chaque point. Par conséquent, l'ensemble formé par le vecteur vitesse en un point et le vecteur vitesse angulaire permet de caractériser entièrement le mouvement de translation et de rotation d'un solide. On remarque qu'un solide se déplaçant dans l'espace possède 6 degrés de liberté, et que l'ensemble formé par ces 2 vecteurs correspond à 6 composantes dans l'espace. On a donc le bon nombre de variables pour représenter le mouvement.

Enfin on remarque que la formule du transport du vecteur vitesse, n'est ni plus ni moins que la formule de transport du moment d'un torseur, où $\vec{\Omega}(S_1/S_o)$ correspond à la résultante et $\vec{V}(P \in S_1/S_o)$ au moment. Par conséquent on peut introduire un *torseur cinématique* noté $\{T_c(S_1/S_o)\}$ qui caractérise le mouvement d'un solide (S_1) par rapport à un solide (S_o) :

$$\boxed{\{T_c(S_1/S_o)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_o) \\ \vec{V}(P \in S_1/S_o) \end{array} \right\}} \quad (3)$$

Comment et où calculer le torseur cinématique :

- Pour un solide uniquement en rotation (pas de translation), la vitesse du solide s'annule sur l'axe de rotation (s'il y en a qu'un) où à leur intersection (s'il y en a plusieurs). Par conséquent, il est toujours judicieux de choisir un point appartenant à l'axe ou aux axes de rotation pour exprimer le torseur cinématique. Il pourra ensuite être calculé en un autre point, en utilisant la formule de transport du moment.
- Pour un solide en translation et en rotation, il est judicieux d'exprimer le vecteur vitesse sur un point de l'axe instantané de rotation (c'est à dire l'axe de rotation à l'instant considéré, car celui-ci bouge) s'il est unique où à leur intersection s'il y en a plusieurs. En effet, dans ce cas la vitesse liée au mouvement de rotation s'annule et il ne reste plus que la vitesse liée au mouvement de translation.
- Enfin, pour un solide uniquement en translation, le point importe peu puisque la vitesse en tous points du solide est la même.

Remarque : La vitesse (moment du torseur cinématique) dépend du point considéré. Attention donc à toujours préciser le point où est exprimé le torseur cinématique.

4 Mouvement particuliers

4.1 Translation

Pour un solide (S_1) en translation par rapport à un solide (S_o), le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(S_1/S_o)$ est nul. Par conséquent, la formule de transport de la vitesse impose que la vitesse est la même en tous les

points du solide. Le torseur cinématique est donc un *torseur couple* :

$$\{T_c(S_1/S_o)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(P \in S_1/S_o) \end{array} \right\}$$

4.2 Rotation

Pour un solide (S_1) en rotation par rapport à un solide (S_o) suivant un axe, la vitesse est nulle sur l'axe de rotation (en 3D) ou au centre de rotation (en 2D). Par conséquent le mouvement de rotation est représenté par un *torseur glisseur*, tel que si K appartient à l'axe de rotation (ou aux axes de rotation, s'il y en a plusieurs) :

$$\{T_c(S_1/S_o)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_o) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K$$

Remarque : Un torseur glisseur est un torseur pour lequel la vitesse est nulle sur un axe. Il n'existe pas de torseur pour lequel la vitesse est nulle partout (à l'exception du torseur nul).

5 Formule du transport du vecteur accélération : la formule de Rivals

La formule de Rivals permet d'exprimer l'accélération en un point B en connaissant l'accélération en un point A :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(B \in S_1/S_o) = \vec{\Gamma}(A \in S_1/S_o) + \left[\frac{d_{S_o} \vec{\Omega}(S_1/S_o)}{dt} \right] \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \left[\vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \overrightarrow{AB} \right]} \quad (4)$$

Démonstration : Cette formule s'obtient assez simplement en dérivant la formule de transport de la vitesse dans le référentiel \mathcal{R}_o :

$$\frac{d_{S_o} \vec{V}(B \in S_1/S_o)}{dt} = \frac{d_{S_o} \vec{V}(A \in S_1/S_o)}{dt} + \frac{d_{S_o} \vec{\Omega}(S_1/S_o)}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \frac{d_{S_o} \overrightarrow{AB}}{dt}$$

Or la formule de Bour nous donne :

$$\frac{d_{S_o} \overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d_{S_1} \overrightarrow{AB}}{dt} + \vec{\Omega}(S_1/S_o) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Comme les points A et B sont liés à (S_1), le premier terme du membre de droite s'annule et on obtient ainsi la formule de Rivals.

Remarque : Comme pour le vecteur vitesse, il est toujours judicieux de calculer le vecteur accélération en un point de l'axe de rotation (si le solide est en mouvement de rotation) puis de le transporter en utilisant la formule de Rivals.

6 Composition des mouvements

Soient (S_2), (S_1) et (S_o) trois solides en mouvement. La composition des mouvements nous dit que le torseur cinématique décrivant le mouvement de (S_2) par rapport à (S_o) est la somme des torseurs cinématiques de (S_2) par rapport à (S_1) et (S_1) par rapport à (S_o) :

$$\boxed{\{T_c(S_2/S_o)\} = \{T_c(S_2/S_1)\} + \{T_c(S_1/S_o)\}} \quad (5)$$

Attention : Pour faire la somme de deux torseurs il faut les exprimer au même point.

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(S_2/S_0) &= \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(P \in S_2/S_0) &= \vec{V}(P \in S_2/S_1) + \vec{V}(P \in S_1/S_0)\end{aligned}$$

Remarque :

Les vecteurs vitesse et rotation vérifient :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(S_1/S_0) &= -\vec{\Omega}(S_0/S_1) \\ \vec{V}(P \in S_1/S_0) &= -\vec{V}(P \in S_0/S_1)\end{aligned}$$

7 Vitesse de glissement

7.1 Définition

Cas idéal du contact ponctuel

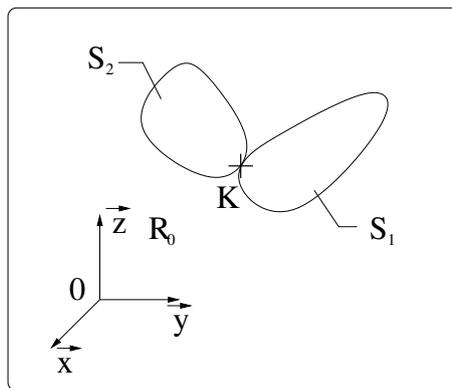


FIGURE 3 –

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel au point K , on appelle vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1), la vitesse : $\vec{V}(K \in S_2/S_1)$, c'est à dire la vitesse relative au point de contact.

Cas du contact surfacique

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel via une surface S . On appelle vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1) en un point K de la surface de contact, la vitesse : $\vec{V}(K \in S_2/S_1)$. Si le mouvement respectif des deux solides est une translation, alors cette vitesse de glissement est identique quel que soit le point de la surface de contact. Si le mouvement respectif de ces deux solides implique une rotation, alors la vitesse de glissement peut varier en fonction du point de contact considéré.

7.2 Condition de glissement

Il y a *adhérence* si la vitesse de glissement est nulle quelque soit le point de contact :

$$\vec{V}(K \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad \forall K \in S$$

En utilisant la composition des vitesses, on trouve donc :

$$\vec{V}(K \in S_2/S_0) = \vec{V}(K \in S_1/S_0)$$

Il y a *glissement* si la vitesse de glissement est non nulle en au moins un point de la surface de contact :

$$\exists K \in S, \quad \vec{V}(K \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$$

8 Liaisons normalisées sans frottement

Pour chaque liaison normalisée introduit dans le chapitre précédent le tableau suivant résume les mouvements autorisés par la liaison et la forme du torseur cinématique associé.

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur cinématique	Torseur des AM
Encastrement	tout point de l'espace	0			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_x & p\omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & pX_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Plane de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Annulaire en A d'axe (A, \vec{x})	au centre de la liaison	4			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x}, \vec{y})	4			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	5			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

Méthodologie

Comment calculer le torseur cinématique entre deux solides S_1 et S_2 ?

Pour résoudre la plupart des exercices de cinématique, il suffit de calculer le torseur cinématique au point où il est le plus simple de le calculer (cf section 3), puis d'utiliser la formule de transport de la vitesse pour calculer la vitesse au point choisi et éventuellement de combiner plusieurs torseurs cinématiques en utilisant la composition des mouvements.

Pour calculer le torseur cinématique entre deux solides S_1 et S_2 , soit (i) ils sont en liaison directe et pour calculer le torseur cinématique il faut considérer uniquement le mouvement entre ces deux solides (en faisant abstraction des autres mouvements), soit (ii) ils ne sont pas en liaison directe et il faudra utiliser la composition des mouvements.

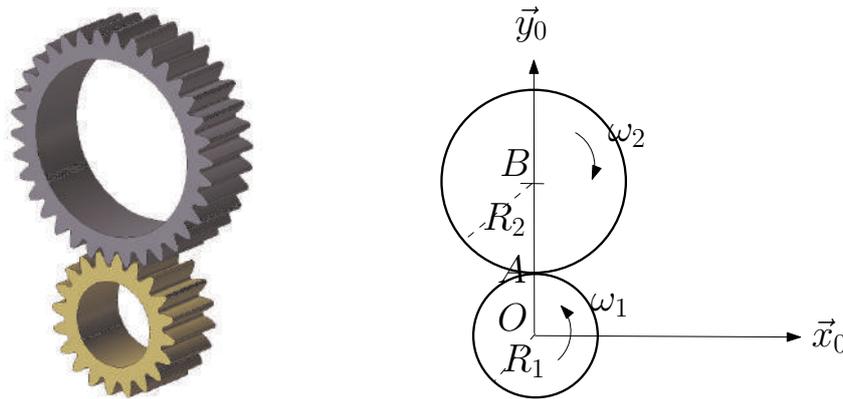
Comment calculer l'accélération entre deux solides S_1 et S_2 ?

Il est tentant pour calculer l'accélération de dériver la vitesse. Mais attention, il faut être très prudent quand on dérive la vitesse d'un point en mécanique du solide car il faut tenir compte du fait que certains points sont liés à un solide (cf dérivation de la formule de Rivals). La meilleure méthode est donc de calculer l'accélération en un point où il est simple de la calculer, puis d'utiliser la formule de Rivals pour la transporter en un point choisi.

Exercices d'application du cours

Exercice 1 : Engrenage parallèle extérieur

Pour vous convaincre qu'il est important de bien préciser à quel point un solide est lié et par rapport à quel référentiel (ou solide) on calcule sa vitesse, nous allons faire l'exercice suivant. Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un référentiel Galiléen et deux roues S_1 et S_2 dentées de rayon respectifs R_1 et R_2 en rotation à des vitesses de rotation ω_1 et ω_2 autour des axes (O, \vec{z}_0) et (B, \vec{z}_0) respectivement. Les deux roues sont en contact sans glissement en un point A (cf figure ci-dessous). Cette configuration est appelée engrenage externe.



1. Déterminer les torseurs cinématiques $\{T_c(S_1/\mathcal{R}_0)\}$, $\{T_c(S_2/\mathcal{R}_0)\}$ en un point judicieusement choisi.
2. Calculer les vitesses $\vec{V}(A \in \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_0)$, $\vec{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(A \in S_2/\mathcal{R}_0)$.
3. En utilisant la condition de non glissement, déterminer une relation entre ω_1 et ω_2 .

Corrigé :

1. Les mouvements entre S_1 et \mathcal{R}_0 et entre S_2 et \mathcal{R}_0 étant des rotations d'axes (O, \vec{z}_0) et (B, \vec{z}_0) , respectivement, les torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{T_c(S_1/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \quad \text{et} \quad \{T_c(S_2/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_2 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

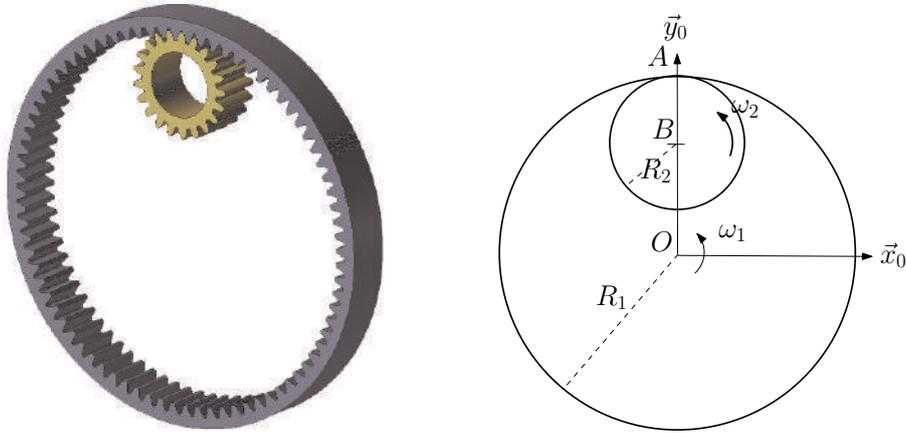
2. La vitesse $\vec{V}(A \in \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_0)$ vaut bien sûr $\vec{0}$. Pour calculer les deux autres vitesses, il faut utiliser la formule du transport de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(O \in S_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{OA} = \vec{0} + \omega_1 \vec{z}_0 \wedge R_1 \vec{y}_0 \\ &= -\omega_1 R_1 \vec{x}_0 \\ \vec{V}(A \in S_2/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(B \in S_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{BA} = \vec{0} + \omega_2 \vec{z}_0 \wedge -R_2 \vec{y}_0 \\ &= \omega_2 R_2 \vec{x}_0 \end{aligned}$$

3. La condition de non glissement s'écrit : $\vec{V}(A \in S_2/S_1) = \vec{0}$, soit en utilisant la composition de la vitesse $\vec{V}(A \in S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0)$. Au final, on obtient $\omega_1/\omega_2 = -R_2/R_1$ qui est la loi des engrenages externes.

Exercice 2 : Engrenage parallèle intérieur

Reprendre le même énoncé mais avec la configuration décrite dans la figure ci-dessous appelée engrenage interne.

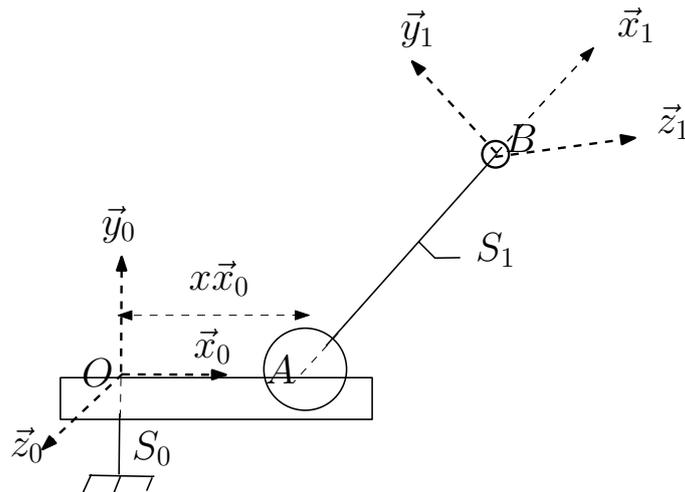


Corrigé :

Après résolution de l'exercice, on obtient $\omega_1/\omega_2 = R_2/R_1$ qui est la loi des engrenages externes.

Exercice 3 : Liaison annulaire

On considère un solide S_1 en liaison annulaire au point A avec un bâti S_0 . Au bâti S_0 , on associe le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et au solide S_1 le repère $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. La distance OA vaut $x\vec{x}_0$ et l'orientation respective des repères \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_0 est donnée par les 3 angles d'Euler : α , β et γ autour des axes \vec{z}_0 , \vec{u} et \vec{z}_1 respectivement, où le vecteur \vec{u} est défini conformément au cours. Enfin le solide S_1 est constituée d'une barre liant le point A à un point B, tel que $\vec{AB} = d\vec{x}_1$.



1. Calculer le torseur cinématique $\{T_c(S_1/S_0)\}$ en un point judicieusement choisi.
2. Calculer la vitesse au point B.

Corrigé :

1. Le solide 1 est en rotation et translation par rapport au repères \mathcal{R}_0 . Au centre de rotation instantané A , la vitesse de rotation s'annule. Il reste donc uniquement la vitesse liée à la translation. On a donc :

$$\{T_c(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{u} + \dot{\gamma}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_0 \end{array} \right\}_A$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{V}(B \in S_1/S_0) &= \vec{V}(A \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + [\dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{u} + \dot{\gamma}\vec{z}_1] \wedge d\vec{x}_1 \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + d [\dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{u} \wedge \vec{x}_1 + \dot{\gamma}\vec{y}_1] \end{aligned}$$

Or (i) $\vec{x}_1 = \cos \gamma \vec{u} + \sin \gamma \vec{v}$. Donc $\vec{u} \wedge \vec{x}_1 = \sin \gamma \vec{z}_1$.

Et (ii) $\vec{x}_1 = \cos \gamma [\cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0] + \sin \gamma [\cos \beta (-\sin \alpha \vec{x}_0 + \cos \alpha \vec{y}_0) + \sin \beta \vec{z}_0]$ donc $\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = [\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha] \vec{y}_0 - [\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha] \vec{x}_0$

Chapitre 3 : Modélisation des actions mécaniques

La statique consiste à calculer l'équilibre des forces d'un système à l'équilibre, en l'absence de mouvement.

L'objectif de la première partie de ce cours de statique est, à partir d'une description locale des actions mécaniques, de remonter à une modélisation globale de celles-ci en les caractérisant par un tenseur appelé *tenseur des actions mécaniques*. Nous nous placerons toujours dans ce chapitre dans le cadre de la mécanique des solides rigides et indéformables. Avant de commencer ce cours, nous allons faire le rappel de quelques notions mathématiques nécessaires à sa compréhension.

Rappels mathématiques 1 : les intégrales multiples

Soit une fonction f dépendant de plusieurs variables, par exemple 3 : $f = f(x, y, z)$. On appelle intégrale multiple, une intégrale portant sur plusieurs variables du type :

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Les bornes d'intégration sont alors spécifiées pour chacune des variables.

Comment calculer cette intégrale

Cas 1 : la fonction est "à variable séparée"

Une fonction est dite "à variable séparées" ssi elle peut se mettre sous la forme de produits de fonctions :

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z).$$

Dans ce cas, l'intégrale sur les variables multiple est simplement égale au produit des intégrales sur chacune des variables :

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} f(x, y, z) dx dy dz = \left[\int_{x=x_1}^{x_2} f_1(x) dx \right] \times \left[\int_{y=y_1}^{y_2} f_2(y) dy \right] \times \left[\int_{z=z_1}^{z_2} f_3(z) dz \right] \quad (1)$$

Cas général

Dans tous les autres cas (mais aussi dans celui des fonctions à variables séparées), le calcul s'effectue en intégrant successivement sur chaque variable, en supposant que les autres variables sont des constantes. Concrètement, cela signifie que l'on calcule de la manière suivante :

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=x_1}^{x_2} \left[\int_{y=y_1}^{y_2} \left[\int_{z=z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx \quad (2)$$

Remarque 1 : Nous avons pris l'exemple d'une fonction dépendant de 3 variables, mais les théorèmes précédents s'appliquent quel que soit le nombre de variables.

Remarque 2 : Les intégrales simples correspondent à une intégrale sur une ligne (une seule dimension de l'espace), les intégrales doubles à une intégrale sur une surface (deux dimensions de l'espace) et les intégrales triples à une intégrale sur un volume (3 dimensions de l'espace).

Exemples d'intégrales multiples :

Exemple 1

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{10} \cos(x)y^2 dx dy &= \left[\int_{x=0}^{\pi/2} \cos(x) dx \right] \left[\int_{y=0}^{10} y^2 dy \right] \\ &= [\sin(x)]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} = 1000/3\end{aligned}$$

Exemple 2

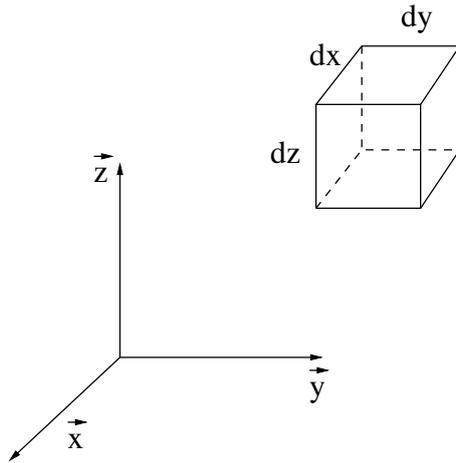
$$\begin{aligned}\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^2 ye^{xy} dx dy &= \int_{y=0}^2 \left[\int_{x=1}^2 ye^{xy} dx \right] dy = \int_{y=0}^2 [e^{xy}]_1^2 dy \\ &= \int_{y=0}^2 [e^{2y} - e^y] dy = \left[\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right]_0^2 \\ &= e^4/2 - e^2 + 1/2\end{aligned}$$

Remarque : Le choix de l'ordre d'intégration n'influe pas sur le résultat, mais il peut en revanche rendre les calculs plus ou moins compliqué. Ici nous avons choisi de commencer par intégrer sur x, car le calcul d'intégrale est simple. Comme exercice, vous êtes invités à faire le calcul en commençant par intégrer sur y. Cette intégration nécessite une intégration par parties.

Rappel mathématique 2 : Volume et surface infinitésimaux dans les différents systèmes de coordonnées

En mécanique, les calculs d'intégrale multiples interviennent généralement lorsque l'on veut intégrer une quantité sur une surface ou un volume. Pour faire ce type de calcul, il est nécessaire d'introduire les surfaces et volumes élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes



Surface infinitésimale :

En coordonnées cartésiennes les 3 surfaces infinitésimales dS_{xy} , dS_{yz} et dS_{xz} s'écrivent :

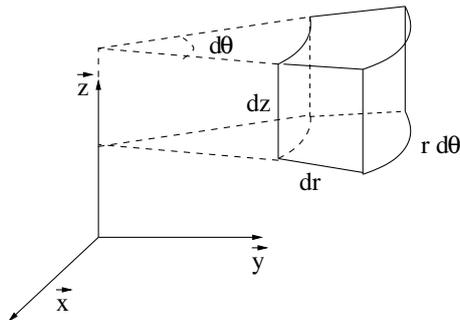
- $dS_{xy} = dx dy$
- $dS_{yz} = dy dz$
- $dS_{xz} = dx dz$

Volume infinitésimal :

Le volume infinitésimal en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\boxed{dV = dx dy dz} \quad (3)$$

Coordonnées cylindriques



Surface infinitésimale :

En coordonnées cylindriques les 3 surfaces infinitésimales $dS_{r\theta}$, dS_{rz} et $dS_{\theta z}$ s'écrivent :

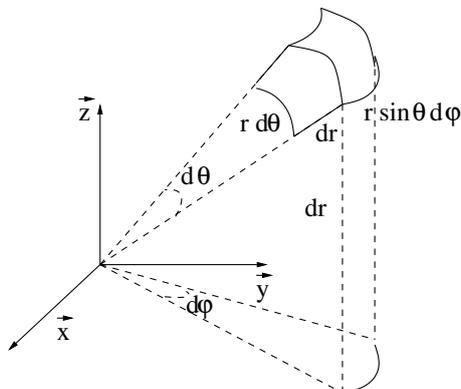
- $dS_{r\theta} = r d\theta dr$
- $dS_{rz} = dr dz$
- $dS_{\theta z} = r d\theta dz$

Volume infinitésimal :

Le volume infinitésimal en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$dV = r dr d\theta dz \quad (4)$$

Coordonnées sphériques



Surface infinitésimale :

En coordonnées sphériques les 3 surfaces infinitésimales $dS_{r\theta}$, $dS_{r\varphi}$ et $dS_{\theta\varphi}$ s'écrivent :

- $dS_{r\theta} = r dr d\theta$
- $dS_{r\varphi} = r \sin \theta dr d\varphi$
- $dS_{\theta\varphi} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

Volume infinitésimal :

Le volume infinitésimal en coordonnées sphériques s'écrit :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (5)$$

Exemples de calcul impliquant ces surfaces et volumes infinitésimaux :

Les surfaces et volumes d'un objet peuvent être calculés simplement en intégrant le bon volume ou surface élémentaire sur les bons intervalles d'intégration.

Exercice : Calculer la surface S_s et le volume V_s d'une sphère de rayon R. Pour ce faire, il suffit de bien choisir la surface et le volume élémentaire, ainsi que les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} S_s &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dS_{\theta\varphi} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= R^2 \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \right] \times \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_s &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ &= \left[\int_{r=0}^R r^2 dr \right] \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \right] \times \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Pour aller plus loin : exercices en autonomie.

Rappel mathématique 3 : le centre d'inertie ou barycentre des masses

Cas d'un système de points discrets

Cas 1 : 2 points. Soit un système E constitué de deux points P_1 et P_2 auxquels on associe les masses m_1 et m_2 . On appelle centre d'inertie du système E , ou barycentre des masses, le point G tel que :

$$m_1 \overrightarrow{GP_1} + m_2 \overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$$

Concrètement, si l'on matérialise le segment P_1P_2 par une barre, auquel on attache deux masses m_1 et m_2 aux points P_1 et P_2 , le point G correspondrait au point d'équilibre de la balance ainsi constituée (cf figure).

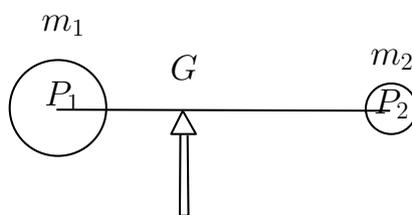


FIGURE 1 – Barycentre de deux masses m_1 et m_2 associées à deux points P_1 et P_2

Cas 2 : N points. La notion de centre d'inertie ou barycentre des masses est généralisable pour N points. Le barycentre des masses est alors défini par :

$$\sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

Cas d'un système continu

Définition 1

La définition du centre d'inertie pour un système continu E est juste la généralisation de la définition pour un système discret. En effet, nous rappelons que le signe intégral \int est le strict équivalent du signe somme \sum mais pour un système de points continu et non discret.

$$\boxed{\int_{P \in E} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}} \quad (6)$$

Evidemment la masse associée à chaque point P dans un système continu devient une masse infinitésimale dm .

Définition 2

On appelle centre d'inertie ou centre de masse d'un système E, le point G défini par :

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in E} \vec{AP} dm \quad \forall A} \quad (7)$$

où dm correspond à une masse infinitésimale. Il correspond tout simplement au barycentre des masses pour un système continu.

Preuve de l'équivalence entre ces deux définitions :

1 \Rightarrow 2 : Prenons dans la définition 1 $A = G$ puisque le point A est quelconque. On obtient 2.

2 \Rightarrow 1 : En introduisant un point quelconque A via la relation de Chasles $\vec{GP} = \vec{GA} + \vec{AP}$ dans 2, on obtient :

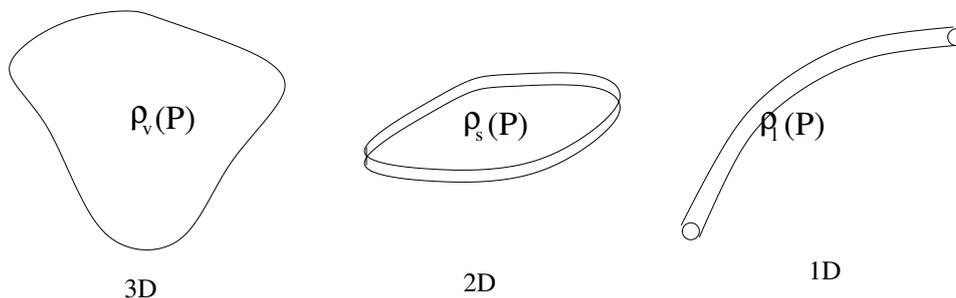
$$\int_{P \in E} \vec{GP} dm = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{P \in E} \vec{GA} + \vec{AP} dm = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{GA} + \int_{P \in E} \vec{AP} dm = \vec{0} \quad (8)$$

soit la définition 1.

Remarque : Le centre d'inertie peut différer du centre de gravité lorsque le champs de gravité n'est pas homogène. Dans le cas homogène, ces deux points sont confondus.

Notion de densité linéique, surfacique et volumique

Selon la nature (essentiellement 1D, 2D ou 3D) du système, on peut introduire la densité linéique ρ_l , surfacique ρ_s ou volumique ρ_v du matériau.



Dans le cas général, la densité dépend du point choisi. Si le matériau est homogène, on a $\rho(P) = \text{cste}$. En introduisant la densité on peut donc définir dm en fonction d'un volume infinitésimal :

<p><u>Cas volumique</u></p> $dm = \rho_v(P)dV$ $\vec{AG} = \frac{1}{m} \iiint_{P \in V} \vec{AP} dm$ <p>avec $m = \iiint_{P \in V} \rho_v(P)dV$</p>	<p><u>Cas surfacique</u></p> $dm = \rho_s(P)dS$ $\vec{AG} = \frac{1}{m} \iint_{P \in S} \vec{AP} dm$ <p>avec $m = \iint_{P \in S} \rho_s(P)dS$</p>	<p><u>Cas linéique</u></p> $dm = \rho_l(P)dl$ $\vec{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in L} \vec{AP} dm$ <p>avec $m = \int_{P \in L} \rho_l(P)dl$</p>
--	---	---

1 Introduction : actions mécaniques

On appelle *action mécanique* toute cause susceptible de maintenir un système matériel au repos, de créer ou de modifier un mouvement, de déformer un solide.

Elles sont de deux types :

- *Les actions mécaniques à distance* : Elles ont pour origine un champ de force (gravitation, magnétique, électrique, ...) et elles sont dites volumiques car elles s'appliquent en chacun des points du solide considéré.
- *Les actions mécaniques de contact* : Elles s'exercent au niveau de la surface de contact entre deux solides.

2 Modélisation locale des actions mécaniques

2.1 Actions mécaniques à distance

Dans le cas d'une action mécanique à distance, un champ extérieur (c) va exercer une force sur un solide (1) via un champ de *force volumique* $\vec{f}_v(P, c \rightarrow 1)$ qui peut dépendre du point considéré. La *force élémentaire* $d\vec{F}(P, c \rightarrow 1)$ exercée par ce champ de force sur un volume élémentaire du solide (1) s'écrit alors :

$$d\vec{F}(P, c \rightarrow 1) = \vec{f}_v(P, c \rightarrow 1)dV$$

Exemple : la gravitation

Dans ce cas, on a $\vec{f}_v(P, g \rightarrow 1) = \rho_1(P)\vec{g}$, où $\rho_1(P)$ désigne la densité du solide 1 et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

2.2 Actions mécaniques de contact

Tout contact entre deux solides se fait suivant une surface (S) aussi petite soit-elle. En réalité, un contact ponctuel est impossible car il supposerait une pression infinie au point de contact, ce qui impliquerait nécessairement une déformation du matériau. Lorsque l'on parle de contact ponctuel, c'est que la surface de contact est très petite devant la surface des objets considérés. Pour modéliser cette action de contact entre deux solides (1) et (2), on introduit la force surfacique $\vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2)$ qui s'exerce en chaque point de la surface de contact entre (1) et (2). Dans ce cas la force élémentaire $d\vec{F}(P, 1 \rightarrow 2)$ exercée par le solide (1) sur le solide (2) s'écrit :

$$d\vec{F}(P, 1 \rightarrow 2) = \vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2)dS$$

3 Modélisation globale des actions mécaniques

Les actions mécaniques exercées par un système matériel (1) sur un système matériel (2) peuvent être représentées globalement par un torseur $\{F(1 \rightarrow 2)\}$ appelé "torseur des actions mécaniques" tel que :

$$\boxed{\{F(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}} \quad (9)$$

avec :

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int d\vec{F}(P, 1 \rightarrow 2) \quad (10)$$

$$\vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \int \vec{AP} \wedge d\vec{F}(P, 1 \rightarrow 2) \quad (11)$$

3.1 Actions mécaniques à distance

Pour des actions mécaniques à distance, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\vec{R}(1 \rightarrow 2) &= \iiint_{P \in \mathcal{E}2} \vec{f}_v(P, 1 \rightarrow 2) dV \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) &= \iiint_{P \in \mathcal{E}2} \vec{AP} \wedge \vec{f}_v(P, 1 \rightarrow 2) dV\end{aligned}$$

3.2 Actions mécaniques de contact

Pour des actions mécaniques de contact, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\vec{R}(1 \rightarrow 2) &= \iint_{P \in S_{12}} \vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2) dS \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) &= \iint_{P \in S_{12}} \vec{AP} \wedge \vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2) dS\end{aligned}$$

où S_{12} désigne la surface de contact entre les solides (1) et (2).

3.3 Théorème de transport du moment

Une fois les actions mécaniques locales intégrées pour obtenir le torseur des actions mécanique exprimé en un point A , le moment peut être calculé en un autre point B sans repasser par tout le mécanisme d'intégration en utilisant simplement la formule de transport du moment du torseur des actions mécaniques :

$$\boxed{\vec{M}_B(1 \rightarrow 2) = \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) + \vec{R}(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{AB}} \quad (12)$$

Remarque : En utilisant les propriétés du produit vectoriel, la formule de transport du moment peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\vec{M}_B(1 \rightarrow 2) = \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) + \vec{BA} \wedge \vec{R}(1 \rightarrow 2) \quad (13)$$

3.4 Notion de force

Dans le cas où la force élémentaire $d\vec{F}$ est homogène, le torseur des actions mécaniques est un torseur glisseur, c'est à dire qu'il existe au moins un point A où le moment s'annule. Dans ce cas, les actions mécaniques peuvent être modélisées de manière globale par une force \vec{F}_A appliquée au point A, c'est à dire par le torseur des actions mécaniques :

$$\{F_A\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ 0 \end{array} \right\}_A \quad (14)$$

Bien sûr dans le cas où le moment s'annule sur un axe, on pourra choisir n'importe quel point de cet axe comme point d'application de la force.

Exemple : effets de pesanteur

Soit un solide 1 homogène de densité ρ_1 soumis aux effets de pesanteur (on supposera l'accélération de pesanteur constante). La résultante des actions mécanique de pesanteur appliquées au solide (1) s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{R}(g \rightarrow 1) &= \iiint_{P \in 1} \rho_1 \vec{g} dV \\ &= \rho_1 \vec{g} \iiint_{P \in 1} dV \\ &= \rho_1 V_1 \vec{g} = m \vec{g}\end{aligned}$$

où V_1 désigne le volume du solide (1).

Le moment en un point A s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{M}_A(g \rightarrow 1) &= \iiint_{P \in 1} \vec{AP} \wedge \rho_1 \vec{g} dV \\ &= \iiint_{P \in 1} \vec{AP} dV \wedge \rho_1 \vec{g} \\ &= m \vec{AG} \wedge \vec{g}\end{aligned}$$

On remarque que le moment au centre de gravité est nul : $\vec{M}_G(g \rightarrow 1) = \vec{0}$. Par conséquent les actions du champ de gravité sur un solide (1) peuvent être modélisés par une force appliquée au centre de gravité G :

$$\{F_G\} = \left\{ \begin{array}{c} m \vec{g} \\ 0 \end{array} \right\}_A \quad (15)$$

4 La loi de coulomb

4.1 Contributions normales et tangentielles

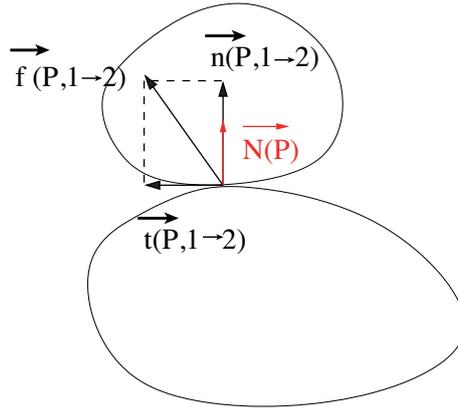
Soient deux solide 1 et 2 en contact suivant une surface S. La force surfacique $\vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2)$ exercée par le solide 1 sur le solide 2 peut être décomposée en 2 contributions :

- une *contribution normale* $\vec{n}(P, 1 \rightarrow 2)$ ou pression p orientée suivant la normale $\vec{N}(P)$ à la surface au point P : $\vec{n}(P, 1 \rightarrow 2) = p \vec{N}(P)$ telle que :

$$\vec{n}(P, 1 \rightarrow 2) = \left[\vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{N}(P) \right] \vec{N}(P)$$

- une *contribution tangentielle* $\vec{t}(P, 1 \rightarrow 2)$ orthogonale à $\vec{N}(P)$ telle que :

$$\begin{aligned}\vec{t}(P, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{N}(P) &= 0 \\ \vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2) &= \vec{n}(P, 1 \rightarrow 2) + \vec{t}(P, 1 \rightarrow 2)\end{aligned}$$



4.2 Adhérence et frottement

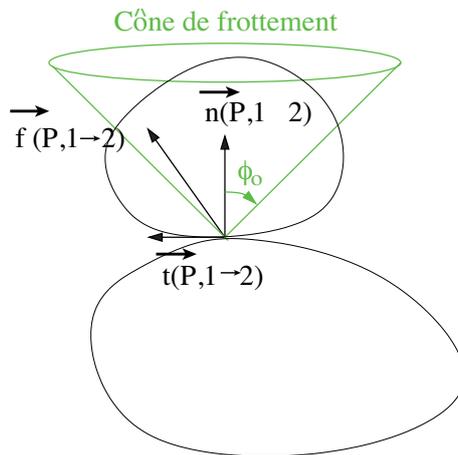
Dans le cas de deux solides en contact, il existe 2 cas distincts :

- il y a *adhérence* au point P entre (1) et (2) si $\vec{V}(P \in 1/2) = \vec{0}$, c'est à dire qu'il n'y a pas de vitesse relative entre les deux solides.
- il y a *frottement* au point P entre (1) et (2) si la vitesse de glissement $\vec{V}(P \in 1/2)$ est non nulle.

Adhérence

Il y a adhérence tant que la force reste dans le cône d'adhérence (voir figure ci-dessous) défini par l'angle limite $\phi_o = \arctan(f_o)$ où f_o désigne le *coefficient d'adhérence*, c'est à dire que l'on a :

$$\|\vec{t}(P, 1 \rightarrow 2)\| \leq f_o \|\vec{n}(P, 1 \rightarrow 2)\|$$



Frottement

S'il y a glissement (et donc frottement) entre 1 et 2, alors dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \vec{t}(P, 1 \rightarrow 2) \wedge \vec{V}(P \in 2/1) &= \vec{0} && \text{vecteurs colinéaires} \\ \vec{t}(P, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(P \in 2/1) &< 0 && \text{vecteurs de sens opposés} \\ \|\vec{t}(P, 1 \rightarrow 2)\| &= f \|\vec{n}(P, 1 \rightarrow 2)\| && \text{les normes vérifient la loi de Coulomb} \end{aligned}$$

où f désigne le coefficient de frottement.

Remarques :

- On a toujours $f < f_o$, c'est à dire que l'on peut transmettre davantage d'efforts tangentiels tant que l'on n'a pas glissement.
- La loi de Coulomb est valable uniquement pour les solides "peu déformables". On remarque que dans cette loi, le coefficient de frottement ne dépend pas de la surface de contact. Ce mystère se résout aux échelles moléculaires ...

Illustration : l'ABS

Une application technologique de cette loi de Coulomb dans le secteur automobile est l'ABS. L'ABS a pour but d'éviter le glissement des roues par rapport au sol et donc de se placer toujours à la limite du glissement. Cela a deux avantages (i) on profite du fait que le coefficient d'adhérence est toujours plus grand que le coefficient de frottement : on peut donc freiner le véhicule plus efficacement si les roues ne glissent pas (ii) s'il y a glissement la force de surface $\vec{f}_s(P, 1 \rightarrow 2)$ est nécessairement colinéaire au vecteur vitesse (d'après la loi de Coulomb) et donc on ne peut plus diriger le véhicule; en restant à la limite d'adhérence, on peut donc continuer à faire évoluer la trajectoire du véhicule.

5 Efforts transmis par les liaisons normalisées sans frottement

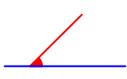
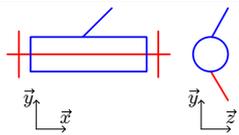
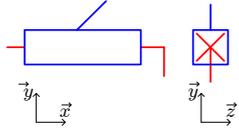
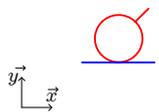
5.1 Cas 3D

Soient deux solides 0 et 1 liés par une liaison parfaite (sans frottement). A cette liaison on peut associer un torseur des actions mécanique représentant les efforts transmissibles par cette liaison. Si la liaison est supposée parfaite (sans frottement), alors celle-ci peut transmettre une résultante uniquement dans les directions où la translation n'est pas autorisée par la liaison et un couple uniquement dans les directions où la rotation n'est pas autorisée par la liaison. C'est pour cela que les composantes non nulles du torseur des actions mécaniques correspondent au complémentaire des composantes non nulles du torseur cinématique (cf tableau récapitulatif ci-dessous). La forme du torseur des actions mécanique transmissibles pour chaque liaison est résumée dans le tableau ci-dessous.

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur cinématique	Torseur des AM
Encastrement	tout point de l'espace	0			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_x & p \cdot \omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & pX_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Plane de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Annulaire en A d'axe (A, \vec{x})	au centre de la liaison	4			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x}, \vec{y})	4			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	5			$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

5.2 Cas 2D

Dans le cas 2D, les efforts transmissibles se réduisent à :

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Torseur cinématique	Torseur des AM
Encastrement	tout point de l'espace	0		$\begin{Bmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \\ 0 & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1		$\begin{Bmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \\ \omega_z & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_{01} & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & 0 \end{Bmatrix}_A$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1		$\begin{Bmatrix} \times & V_x \\ \times & 0 \\ 0 & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & N_{01} \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	2		$\begin{Bmatrix} \times & V_x \\ \times & 0 \\ \omega_z & \times \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & \times \\ Y_{01} & \times \\ \times & 0 \end{Bmatrix}_A$

Chapitre 4 : Principe fondamental de la statique

En statique, on s'intéresse aux actions mécaniques s'exerçant sur un système en équilibre par rapport à un référentiel supposé Galiléen. Dans le précédent chapitre nous avons modélisé les actions mécaniques s'exerçant sur un solide par un torseur des actions mécaniques. Dans ce chapitre, nous allons déterminer les relations entre les différents torseurs des actions mécaniques d'un système en utilisant le principe fondamental de la statique.

1 Principe fondamental de la statique

1.1 Système en équilibre

Un système matériel \mathcal{S} est dit en équilibre par rapport à un repère \mathcal{R} si au cours du temps, chaque point de \mathcal{S} conserve une position fixe par rapport à \mathcal{R} .

1.2 Principe fondamental de la statique (PFS)

Soit un système en équilibre par rapport à un repère Galiléen, le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à \mathcal{S} est nul. Si on note $\bar{\mathcal{S}}$ l'extérieur de \mathcal{S} , on a alors :

$$\boxed{\{F(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})\} = \{0\}} \quad (1)$$

Par conséquent, la résultante $\vec{R}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})$ et le moment associés à ce torseur en un point P quelconque $\vec{M}_P(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})$ sont nuls :

$$\begin{aligned} \vec{R}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) &= \vec{0} \\ \vec{M}_P(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) &= \vec{0} \quad \forall P \end{aligned}$$

Exemple :

Soit un système mécanique composé de 5 solides numérotés de 1 à 5, avec (i) une action du champ de gravité g sur chacun des solides, (ii) le solide 2 est en liaison uniquement avec le solide 1 et 3, et (iii) le solide 3 en liaison uniquement avec les solides 2 et 4. Considérons (Isolons) le système \mathcal{S} constitué des solides 2 et 3 ($\mathcal{S} = 2 \cup 3$) à l'équilibre. L'extérieur du système \mathcal{S} correspond donc au champ de gravité agissant sur les solides 2 et 3, et les solides 1, 4, 5. Comme le solide 5, n'agit pas directement sur les solides 1 et 2, le PFS appliqué au système \mathcal{S} s'écrira :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} + \{F(4 \rightarrow 3)\} + \{F(g \rightarrow 2)\} + \{F(g \rightarrow 3)\} = \{0\}$$

soit :

$$\begin{aligned} \vec{R}(1 \rightarrow 2) + \vec{R}(4 \rightarrow 3) + \vec{R}(g \rightarrow 2) + \vec{R}(g \rightarrow 3) &= \vec{0} \\ \vec{M}_P(1 \rightarrow 2) + \vec{M}_P(4 \rightarrow 3) + \vec{M}_P(g \rightarrow 2) + \vec{M}_P(g \rightarrow 3) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2)$$

Attention : Tous les moments doivent être exprimés au même point.

1.3 Théorème des actions mutuelles

Soit (1) et (2) deux solides en interactions, le torseur des actions mécaniques exercées par le solide (1) sur le solide (2) est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par le solide (2) sur le solide (1) :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = -\{F(2 \rightarrow 1)\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\vec{R}(1 \rightarrow 2) &= -\vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}_P(1 \rightarrow 2) &= -\vec{M}_P(2 \rightarrow 1)\end{aligned}$$

Remarque : Attention, les torseurs doivent être exprimés au même point.

Méthodologie

La résolution d'un problème de statique consiste donc essentiellement dans la plupart des cas à (i) isoler les bons solides pour appliquer le PFS, (ii) calculer les torseurs des actions mécaniques dont a besoin dans un premier temps au point où il est le plus simple de le calculer puis (iii) de les transporter au même point pour pouvoir écrire le PFS.

Pour calculer le torseur des actions mécaniques, il y a 3 possibilités :

1. L'expression de la *force surfacique ou volumique locale* agissant sur un solide est spécifiée dans le problème. Dans ce cas, il faudra intégrer cette force locale pour parvenir au torseur des actions mécanique global comme décrit en détail dans le chapitre précédent.
2. La force globale \vec{F}_A appliquée sur un solide \mathcal{S} au point A est spécifiée. Alors, on sait qu'une force \vec{F}_A correspond en réalité aux torseur glisseur des actions mécaniques :

$$\{F(\vec{F}_A \rightarrow \mathcal{S})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

3. Deux solides 1 et 2 sont liées par une liaison parfaite sans frottement. Dans ce cas, il faut utiliser l'expression du torseur des actions mécaniques fournie dans le tableau des liaisons normalisées du chapitre précédent. Par convention, on appellera les composantes non nulles de la résultante X_{12} , Y_{12} et Z_{12} et les composantes non nulles du moment en un point donné L_{12} , M_{12} et N_{12} .

2 Solide en équilibre sous l'action de forces

2.1 Solide en équilibre sous l'action de 2 forces

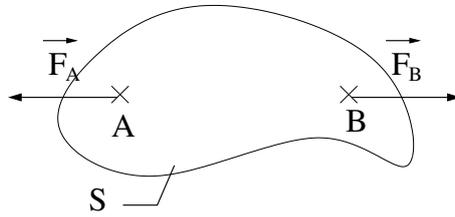


FIGURE 1 – Solide soumis à 2 forces

Soit un solide S en équilibre sous l'action de 2 forces \vec{F}_A et \vec{F}_B appliquées aux points A et B respectivement. Chaque force correspond à un torseur glisseur dont le moment est nul au point d'application :

$$\{F(\vec{F}_A \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{F(\vec{F}_B \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Si l'on transporte le second torseur au point A, on obtient :

$$\{F(\vec{F}_B \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{F}_B \wedge \vec{BA} \end{array} \right\}_A$$

Par conséquent, le torseur des actions mécaniques extérieur s'exerçant sur S exprimé en A est donc :

$$\{F(\vec{S} \rightarrow S)\} = \{F(\vec{F}_A \rightarrow S)\} + \{F(\vec{F}_B \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A + \vec{F}_B \\ \vec{F}_B \wedge \vec{BA} \end{array} \right\}_A$$

D'après le PFS, on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{F}_A + \vec{F}_B &= \vec{0} \\ \vec{F}_B \wedge \vec{BA} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Par conséquent, si un solide est en équilibre sous l'action de 2 forces, ces 2 forces sont *directement opposées* (alignées et de sens contraires) et *colinéaires au vecteur qui relie leurs points d'application*.

2.2 Solide en équilibre sous l'action de 3 forces

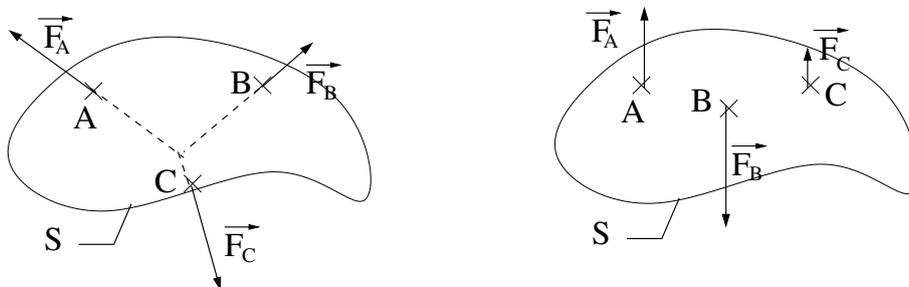


FIGURE 2 – Solide soumis à 3 forces. Gauche : forces concourantes en un point. Droite : forces parallèles.

Soit un solide S en équilibre sous l'action de 3 forces \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C appliquées aux points A , B et C respectivement. Le principe fondamental de la statique s'écrit au point A :

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C \\ \vec{F}_B \wedge \vec{BA} + \vec{F}_C \wedge \vec{CA} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Si l'on fait le produit scalaire de l'équation du moment avec \vec{BA} , on trouve :

$$(\vec{F}_B \wedge \vec{BA} + \vec{F}_C \wedge \vec{CA}) \cdot \vec{BA} = 0$$

avec bien sûr $(\vec{F}_B \wedge \vec{BA}) \cdot \vec{BA} = 0$ car $\vec{F}_B \wedge \vec{BA}$ est orthogonal à \vec{BA} . Par conséquent le produit mixte entre \vec{F}_C , \vec{CA} et \vec{BA} est nul ce qui veut dire que ces 3 vecteurs sont coplanaires.

De même si l'on fait le produit scalaire de l'équation du moment avec \vec{CA} , on trouve que les 3 vecteurs \vec{F}_B , \vec{CA} et \vec{BA} sont coplanaires.

Par conséquent, les 3 forces \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C sont coplanaires entre elles et coplanaires au plan formé par leurs points d'application A , B et C .

De plus,

- si les droites (B, \vec{F}_B) et (C, \vec{F}_C) ont un point d'intersection que l'on appellera I , alors l'équation du moment écrite au point I montre que la droite (A, \vec{F}_A) passe aussi par le point I .

Démonstration :

L'équation du moment au point I s'écrit :

$$\vec{F}_A \wedge \vec{AI} + \vec{F}_B \wedge \vec{BI} + \vec{F}_C \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

Or puisque (B, \vec{F}_B) et (C, \vec{F}_C) sont concourantes au point I , on a :

$$\vec{F}_B \wedge \vec{BI} = \vec{F}_C \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

- si les droites (B, \vec{F}_B) et (C, \vec{F}_C) n'ont pas de point d'intersection, c'est que celles-ci sont parallèles (car elles sont contenues dans le même plan). L'équation de la résultante, nous dit dans ce cas que (A, \vec{F}_A) est parallèle aux deux autres droites.

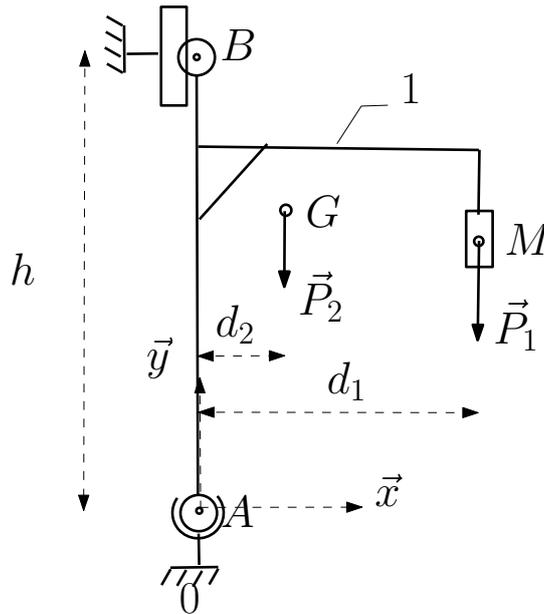
Conclusion : Si un solide S est en équilibre dans un référentiel Galiléen sous l'action de 3 forces, alors ces forces sont :

1. coplanaires
2. concourantes ou parallèles
3. de somme vectorielle nulle

Exercices d'application du cours

Exercice 1 : Potence

On considère dans cet exercice une potence d'atelier destinée à soulever des charges de poids \vec{P}_2 appliquée en un point M et le poids de la potence elle-même peut être modélisée par une force \vec{P}_1 appliquée au centre d'inertie de la potence G. Les valeurs de P_1 et P_2 sont supposées connues. La potence notée 1 est en liaison rotule au point A avec le bâti 0 et en liaison annulaire au point B. Les distances utiles à la résolution du problème sont indiquées sur la figure.



1. Déterminer les torseurs des actions mécaniques $\{F(\vec{P}_1 \rightarrow 1)\}$ et $\{F(\vec{P}_2 \rightarrow 1)\}$ appliquées par les deux forces sur le solide 1, ainsi que les torseurs des actions mécaniques associées aux liaisons rotule et annulaire $\{F(0^A \rightarrow 1)\}$ et $\{F(0^B \rightarrow 1)\}$.
2. Combien y a-t'il d'inconnu dans le problème, et combien aura-t'on d'équations pour le résoudre. Le problème est-il bien posé ?
3. En appliquant le Principe Fondamental de la Statique, déterminer toutes les inconnues de liaison.

Corrigé :

1. Les deux forces correspondent aux torseurs glisseurs :

$$\{F(\vec{P}_1 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_M \quad \text{et} \quad \{F(\vec{P}_2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

et les torseurs associés aux liaisons sont (cf tableau des liaisons normalisées) :

$$\{F(0^A \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^A & 0 \\ Y_{01}^A & 0 \\ Z_{01}^A & 0 \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{F(0^B \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^B & 0 \end{array} \right\}_B$$

Remarque : Ici il n'y a qu'un seul repère, donc il n'y a pas d'ambiguïté sur le repère dans lequel est exprimé le torseur. S'il y avait plusieurs repères, il faudrait préciser dans quel repère le torseur est exprimé.

2. En première analyse, on voit que l'on a 5 inconnues et 6 équations (3 équation sur la résultante, et 3 équations sur le moment pour le PFS), donc il semblerait que l'on aie une équation de trop. En réalité, on voit que le problème est entièrement 2D, donc les deux inconnues Z_{01}^A et Z_{01}^B vont s'annuler. Au final, on aura 3 inconnues et seulement deux équations pour la résultante (suivant \vec{x} et \vec{y}) et une équation pour le moment (suivant \vec{z}) seront utiles. On aura donc 3 équations et 3 inconnues, le problème est bien posé.
3. Ici il n'y a pas trop de question à se poser sur le solide à isoler puisqu'il n'y en a qu'un (hors bâti), le solide 1. La seule question à se poser est en quel point écrire l'équation du moment. Il faut toujours choisir le point où le transport des moments sera le plus simple. Le torseur possédant le plus grand nombre de composantes pour la résultante est le torseur associé à la liaison rotule. Ce sera le plus dur à transporter, il faut donc préférentiellement choisir ce point pour écrire le PFS. On aura donc pour la résultante, le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{01}^A + X_{01}^B = 0 \\ -P_1 - P_2 + Y_{01}^A = 0 \\ Z_{01}^A + Z_{01}^B = 0 \end{cases}$$

Pour les moments la première étape est de les transporter :

$$\begin{cases} M_A(\vec{P}_1 \rightarrow 1) = M_M(\vec{P}_1 \rightarrow 1) - P_1 \vec{y} \wedge \overrightarrow{M\vec{A}} = \vec{0} - P_1 \vec{y} \wedge (-d_1 \vec{x} + ?? \vec{y}) = -P_1 d_1 \vec{z} \\ M_A(\vec{P}_1 \rightarrow 1) = M_G(\vec{P}_1 \rightarrow 1) - P_2 \vec{y} \wedge \overrightarrow{G\vec{A}} = \vec{0} - P_2 \vec{y} \wedge (-d_2 \vec{x} + ?? \vec{y}) = -P_2 d_2 \vec{z} \\ M_A(0^B \rightarrow 1) = [X_{01}^B \vec{x} + Z_{01}^B \vec{z}] \wedge (-h \vec{y}) = -h X_{01}^B \vec{z} + h Z_{01}^B \vec{x} \end{cases}$$

Au final les 3 équations sur moments sont donc :

$$\begin{cases} h Z_{01}^B = 0 \\ 0 = 0 \\ h X_{01}^B + P_1 d_1 + P_2 d_2 = 0. \end{cases}$$

Au final on obtient en résolvant ce système :

$$\begin{cases} X_{01}^A = -X_{01}^B = (P_1 d_1 + P_2 d_2)/h \\ Y_{01}^A = P_1 + P_2 \\ Z_{01}^A = Z_{01}^B = 0. \end{cases}$$

Chapitre 5 : Introduction à la mécanique du point

1 Introduction : la mécanique classique ou Newtonienne

La mécanique *classique* ou *Newtonienne* s'applique aux corps (i) ayant une vitesse très faible devant la vitesse de la lumière (ii) une masse suffisamment faible (iii) une taille très supérieure à l'échelle moléculaire. Elle est une approximation de la mécanique *relativiste* introduite par Einstein en 1905, qu'il est nécessaire d'introduire pour tenir compte des déformations de l'espace-temps qui apparaît lorsque la vitesse d'un corps approche celle de la vitesse de la lumière ou qui peut être induite par la présence de corps massif. La théorie d'Einstein nous dit en effet que l'espace-temps est déformable : par exemple le temps s'écoule plus lentement pour les corps approchant la vitesse de la lumière.

Dans la mécanique classique, l'espace et le temps sont des variables indépendantes. L'introduction de la mécanique relativiste fait suite à l'observation, faite par Michelson en 1881 et complétée par des mesures de Michelson et Morley en 1887, que la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, mettant en défaut le principe de relativité de Galilée (composition des vitesses).

Notons que la mécanique relativiste n'est pas l'apanage des théoriciens. Elle est notamment prise en compte dans les systèmes de positionnement par satellite (GPS).

2 Cinématique du point

2.1 Introduction

En mécanique du point le mouvement d'un objet est réduit à l'étude du mouvement d'un seul point correspondant à son centre de masse (ou centre d'inertie). Si l'étude d'un solide est réduite à l'étude de son centre de masse, il n'est plus possible de décrire ses mouvements de rotation mais uniquement ses mouvements de translation. Par exemple si la terre est réduite à un seul point, on pourra décrire son mouvement autour du soleil mais plus son mouvement de rotation autour de son axe.

2.2 Repère et référentiel

Lorsque l'on décrit le mouvement d'un point et non plus seulement sa position, il est nécessaire d'introduire la notion de temps. Nous vivons en effet dans un espace à 4 dimensions : 3 dimensions d'espace et une dimension de temps. Il faut donc introduire non seulement un repère d'espace $\mathcal{R} = (O, b)$, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent mais aussi un repère de temps, c'est à dire tout simplement, un instant $t_o = 0$ pris comme origine des temps. La combinaison d'un repère d'espace et d'un repère de temps est appelé référentiel $\mathcal{R} = (O, b, t_o)$, que l'on notera par commodité de la même manière que le repère d'espace qui lui est associé. Notons, que l'origine des temps, n'a aucune influence sur le calcul de la vitesse ou de l'accélération, c'est pour cela que l'on parlera indifféremment de la vitesse ou de l'accélération d'un point dans un référentiel ou dans le repère qui lui est associé.

2.3 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point

La position d'un point M sera repérée dans un repère de référence $R = (O, b)$ à l'aide du vecteur position \vec{OM} exprimé dans la base b . La vitesse d'un point dans ce repère, notée $\vec{V}(M/R)$, correspond à la dérivée temporelle du vecteur position dans la base b : $\vec{V}(M/R) = \frac{d_b \vec{OM}}{dt}$. L'accélération de ce point notée $\vec{\Gamma}(M/R)$ à la dérivée du vecteur vitesse dans la base b et donc à la dérivée seconde du vecteur position : $\vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d_b \vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d_b^2 \vec{OM}}{dt^2}$.

Remarque 1 : Comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent, l'évolution d'un vecteur dans le temps dépend de la base b prise comme référence pour étudier son évolution. Elle est en revanche indépendante du centre du référentiel choisi car un vecteur est le même quel que soit sa position dans l'espace. Par conséquent, pour calculer la dérivée temporelle d'un vecteur il est suffisant de préciser la base choisie comme référence (la précision du centre du repère n'est donc pas nécessaire). Néanmoins, par abus de langage on parle parfois de dérivée temporelle par rapport à un référentiel ou repère (il faut comprendre par rapport à la base de ce référentiel ou repère). On peut donc indifféremment écrire : $\frac{d_b \vec{OM}}{dt}$ ou $\frac{d_R \vec{OM}}{dt}$. Nous adopterons cette dernière notation dans la suite de ce cours.

Remarque 2 : Lorsque l'on dérive un vecteur par rapport au temps, il est **absolument** nécessaire de bien préciser la base par rapport à laquelle on dérive. En revanche, dans le cas d'une fonction scalaire $f(t)$ dépendant du temps t , cette précision est inutile. On peut donc écrire tout simplement $\frac{df(t)}{dt}$ que l'on notera aussi parfois $\dot{f}(t)$.

Remarque 3 : Rappel mathématique. A toute fin utile, nous rappelons les formules de dérivées suivantes :

$$\frac{d_{\mathcal{R}}(\vec{U} + \vec{V})}{dt} = \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{U}}{dt} + \frac{d_{\mathcal{R}}\vec{V}}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d_{\mathcal{R}}\lambda(t)\vec{U}}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{U} + \lambda(t)\frac{d_{\mathcal{R}}\vec{U}}{dt} \quad (2)$$

2.4 Changement de repère

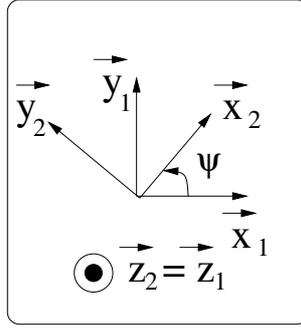
Parfois, il peut être intéressant d'effectuer des changements de bases afin de calculer la dérivée temporelle d'un vecteur. Nous allons étudier dans cette section comment la dérivée d'un vecteur dans une base b_1 peut s'exprimer en fonction de la dérivée de ce même vecteur dans une base b_2 .

Orientation relative de bases et vecteur vitesse angulaire

Dans le cas d'un mouvement plan, l'orientation relative de deux bases (b_1) et (b_2) est définie par un unique angle α . Par conséquent le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(b_2/b_1)$ dont la norme correspond à la vitesse de rotation (appelée aussi vitesse angulaire), la direction à l'axe de rotation et le sens est donné par la règle de la main droite sera défini par :

$$\vec{\Omega}(b_2/b_1) = \dot{\alpha}(t)\vec{z}_1$$

où $\dot{\alpha}$ désigne la dérivée temporelle de l'angle α et $\vec{\Omega}(b_2/b_1)$ est parfois notée $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ bien que seule l'orientation de la base est nécessaire pour définir la rotation relative de deux solides. Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons cette dernière notation.



Dans le cas d'un mouvement dans l'espace, l'orientation des deux bases b_1 et b_2 est définie par trois angles d'Euler (α, β, γ) définissant des rotations successives autour de 3 axes $(\vec{z}_1, \vec{u}, \vec{z}_2)$:

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{Rot}(\alpha, \vec{z}_1)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{Rot}(\beta, \vec{u})} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2) \xrightarrow{\text{Rot}(\gamma, \vec{z}_2)} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

Dans ce cas, le vecteur vitesse angulaire est défini par :

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\alpha}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{u} + \dot{\gamma}\vec{z}_2$$

Formule de Bour :

La formule de Bour permet d'exprimer la dérivée d'un vecteur \vec{W} par rapport à une base (b_1) (d'un repère $R_1 = (O_1, b_1)$) par rapport à la dérivée de ce même vecteur par rapport à une (b_2) (d'un repère $R_2 = (O_2, b_2)$) :

$$\frac{d_{R_1}\vec{W}}{dt} = \frac{d_{R_2}\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{W}$$

où $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ désigne le vecteur vitesse angulaire de R_2 par rapport à R_1 .

2.5 Composition de la vitesse et de l'accélération

De même il est parfois intéressant d'exprimer la vitesse et l'accélération d'un point dans différents référentiels. Cela permet dans de nombreux cas de simplifier les calculs en utilisant des référentiels intermédiaires où le mouvement est plus simple.

Composition des vitesses :

La loi de composition permet d'exprimer la vitesse d'un point dans un référentiel par rapport à la vitesse du même point dans un autre référentiel :

$$\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}(M/R_2) + \vec{V}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

avec $\vec{V}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{V}(P/R_1)$, c'est à dire la vitesse du point P coïncidant à M dans (R_2) .

Le point coïncidant est le point tel que :

- quel que soit t , $\overrightarrow{O_2P} = \overrightarrow{O_2M}$, c'est à dire que la position des points P et M coïncident à chaque instant,

- mais tel que la vitesse du point P dans le référentiel (R_2) est nulle : $\vec{V}(P/R_2) = \vec{0}$ car P est lié à (R_2) .

Démonstration :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/R_1) &= \frac{d_{R_1} \overrightarrow{O_1 M}}{dt} = \frac{d_{R_1} \overrightarrow{O_1 O_2}}{dt} + \frac{d_{R_1} \overrightarrow{O_2 M}}{dt} \\ &= \vec{V}(O_2/R_1) + \frac{d_{R_2} \overrightarrow{O_2 M}}{dt} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2 M} \quad (\text{Formule de Bour}) \\ &= \vec{V}(O_2/R_1) + \vec{V}(M/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2 M}\end{aligned}$$

Composition des accélérations :

La loi de composition permet d'exprimer l'accélération d'un point dans un référentiel par rapport à l'accélération du même point dans un autre référentiel :

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \vec{\Gamma}(M/R_2) + \vec{\Gamma}_e(R_2/R_1) + \vec{\Gamma}_{co}(R_2/R_1)$$

où :

- $\vec{\Gamma}_e(R_2/R_1) = \vec{\Gamma}(O_2/R_1) + \frac{d_{R_1} \vec{\Omega}_{R_2/R_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2 M} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2 M} \right)$ désigne l'accélération d'entraînement et en particulier $\vec{\Gamma}_{cen} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2 M} \right)$ l'accélération centrifuge,
- et $\vec{\Gamma}_{co}(R_2/R_1) = 2 \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}(M/R_2)$ désigne l'accélération de Coriolis.

Démonstration : (à faire à la maison)

3 Dynamique du point

Nous allons étudier dans cette section, comment une force appliquée à un corps peut induire un mouvement de translation de ce corps en introduisant le principe fondamental de la dynamique.

3.1 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel Galiléen

Référentiel Galiléen :

Un référentiel *Galiléen* est un référentiel dans lequel le *principe d'inertie* s'applique, c'est à dire qu'un objet isolé (sur lequel il ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante de toutes les forces est nulle) est soit immobile, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Si un premier référentiel est Galiléen, un second référentiel en mouvement de translation uniforme par rapport au premier est aussi Galiléen.

Remarque : il n'existe pas à proprement parler de référentiel Galiléen. On peut néanmoins faire l'approximation pour certains problèmes que tel ou tel référentiel est Galiléen si les forces que l'on devrait prendre en compte s'il ne l'était pas ont un effet négligeable sur la dynamique observée.

Principe fondamental de la dynamique (PFD) (cas d'une masse constante) :

Soit un corps de masse constante m et un référentiel Galiléen R_g , alors la somme des forces extérieures $\sum_k \vec{F}_k$ qui s'applique sur un corps de centre d'inertie M est égal au produit de sa masse et de l'accélération du point M dans le référentiel R_g :

$$m\Gamma(\vec{M}/R_g) = \sum_k \vec{F}_k$$

Bien sûr il n'existe pas d'objet ponctuels et la mécanique du point M est donc une approximation que l'on utilise lorsque les déplacements que l'on observe sont très grands devant la taille de l'objet et ou que l'objet est uniquement en translation.

Pour aller plus loin...

En réalité l'écriture correcte du PFD est :

$$\frac{d_{R_g}}{dt} \left[\vec{P}(M/R_g) \right] = \sum_k \vec{F}_k$$

où $\vec{P}(M/R_g) = m\vec{V}(M/R_g)$ désigne la quantité de mouvement. La différence réside dans le cas où la masse de l'objet considéré est variable : $m = m(t)$. Bien sûr en l'absence de force extérieures, la quantité de mouvement se conserve : $\frac{d_{R_g}}{dt} \left[\vec{P}(M/R_g) \right] = 0$. Le principe de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé est l'un des principes les mieux vérifiés. La masse d'un système isolé ne se conserve pas nécessairement, ni son énergie (cf la formule $E = mc^2$). Un exemple d'application du principe de conservation de la quantité de mouvement est la propulsion d'une fusée par éjection de gaz brûlés

3.2 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

Soit $(R') = (O', b')$ un référentiel non Galiléen en déplacement par rapport à un référentiel Galiléen $(R_g) = (O, b)$, dans ce cas le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(M/R') = \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{co}$$

où :

- $\vec{F}_e = -m\vec{\Gamma}_e(R'/R_g) = -m \left[\vec{\Gamma}(O'/R_g) + \frac{d_{R_g} \vec{\Omega}_{R'/R_g}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R_g) \wedge \left(\vec{\Omega}(R'/R_g) \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \right]$ désigne la force d'entraînement et en particulier $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\Omega}(R'/R_g) \wedge \left(\vec{\Omega}(R'/R_g) \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$ la force centrifuge,
- et $\vec{F}_{cor} = -m\vec{\Gamma}_{co}(R'/R_g) = -2m\vec{\Omega}(R'/R_g) \wedge \vec{V}_{M/R'}$ désigne la force de Coriolis.

On voit apparaître deux forces supplémentaires (force d'inertie d'entraînement et de Coriolis) dues au caractère non-Galiléen du référentiel.

Démonstration :

$$\vec{\Gamma}(M/R_g) = \vec{\Gamma}(M/R') + \vec{\Gamma}_e(R'/R_g) + \vec{\Gamma}_{co}(R'/R_g)$$

et donc :

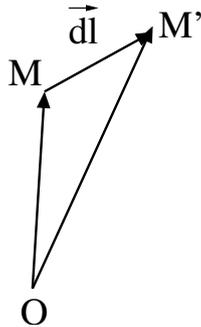
$$m\vec{\Gamma}(M/R_g) = m\vec{\Gamma}(M/R') + m\vec{\Gamma}_e(R'/R_g) + m\vec{\Gamma}_{co}(R'/R_g) = \sum_k \vec{F}_k$$

soit au final en posant $\vec{F}_e = -m\vec{\Gamma}_e(R'/R_g)$ et $\vec{F}_{cor} = -m\vec{\Gamma}_{co}(R'/R_g)$, on trouve la relation recherchée.

Rappels mathématiques : L'opérateur gradient

Définition

Le gradient est un opérateur différentiel agissant sur un champ scalaire $f = f(M)$ qui à chaque point de l'espace M associe un scalaire. Le résultat obtenu est un champ vectoriel.



Soit \vec{dl} , le déplacement infinitésimal entre deux points M et M' et tels que $\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{dl}$ et $df(M)$ la variation du champ scalaire f entre M et M' , alors l'opérateur gradient est tel que :

$$df(M) = \text{grad } f(M) \cdot \vec{dl} \quad (3)$$

Remarque : L'opérateur gradient est l'analogie de la dérivée d'une fonction d'une seule variable mais pour une fonction dépendant des 3 coordonnées de l'espace. Par exemple pour une fonction dépendant d'une seule variable $g(t)$, on écrirait :

$$dg(t) = g'(t)dt$$

Expression dans les différents systèmes de coordonnées

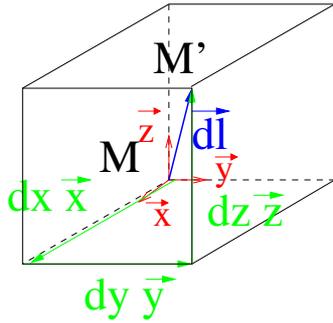
Coordonnées cartésiennes :

Dans le système de coordonnées cartésiennes, un point M est défini par 3 longueurs x, y, z correspondant aux 3 projections sur les 3 vecteurs de base : \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} :

$$M = M(x, y, z)$$

et le déplacement infinitésimal \vec{dl} est tel que :

$$\vec{dl} = dx \vec{x} + dy \vec{y} + dz \vec{z}$$



Etant donné que la fonction f dépend des 3 coordonnées d'espace $f = f(x, y, z)$, la différentielle df s'écrit en fonction des dérivées partielles :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

En partant de la définition (équation 3), et en notant G_x , G_y et G_z , les 3 composantes du vecteur gradient :

$\vec{grad}(f) = (G_x, G_y, G_z)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = G_x dx + G_y dy + G_z dz$$

soit en identifiant G_x , G_y et G_z :

$$\vec{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}$$

Coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cartésiennes, un point M est défini par 2 longueurs r , z et un angle θ :

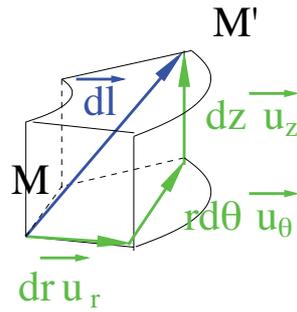
$$M = M(r, \theta, z)$$

et le déplacement infinitésimal \vec{dl} est tel que :

$$\vec{dl} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

où \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_z désignent les 3 vecteurs de base en coordonnées cylindriques. Cette expression du vecteur déplacement élémentaire \vec{dl} peut être obtenue soit géométriquement à partir de la figure ci-dessous, soit en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= d(\vec{OM}) = d(r\vec{u}_r(\theta) + z\vec{u}_z) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(r\vec{u}_r(\theta) + z\vec{u}_z)dr + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\vec{u}_r(\theta) + z\vec{u}_z)d\theta + \frac{\partial}{\partial z}(r\vec{u}_r(\theta) + z\vec{u}_z)dz \\ &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \end{aligned}$$



Etant donné que la fonction f dépend des 3 coordonnées d'espace $f = f(r, \theta, z)$, la différentielle df s'écrit en fonction des dérivées partielles :

$$df(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

En partant de la définition (équation 3), et en notant G_r , G_θ et G_z , les 3 composantes du vecteur gradient : $\vec{\text{grad}}(f) = (G_r, G_\theta, G_z)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz = G_r dr + G_\theta r d\theta + G_z dz$$

soit en identifiant G_r , G_θ et G_z :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées cartésiennes, un point M est défini par 1 longueurs r , et deux angles θ et φ :

$$M = M(r, \theta, \varphi)$$

et le déplacement infinitésimal \vec{dl} est tel que :

$$\vec{dl} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

où \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_φ désignent les 3 vecteurs de base en coordonnées sphériques.

Etant donné que la fonction f dépend des 3 coordonnées d'espace $f = f(r, \theta, \varphi)$, la différentielle df s'écrit en fonction des dérivées partielles :

$$df(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

En partant de la définition (équation 3), et en notant G_r , G_θ et G_φ , les 3 composantes du vecteur gradient : $\vec{\text{grad}}(f) = (G_r, G_\theta, G_\varphi)$, on obtient :

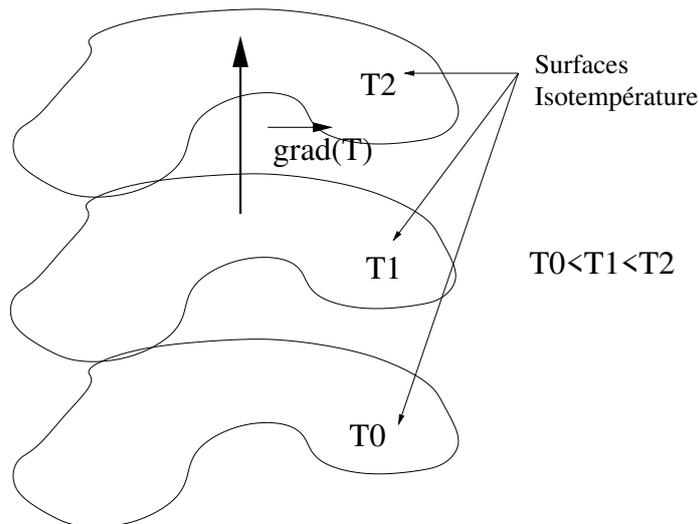
$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = G_r dr + G_\theta r d\theta + r \sin \theta G_\varphi d\varphi$$

soit en identifiant G_r , G_θ et G_φ :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Physiquement

Considérons par exemple un champ de température T variant dans l'espace. La direction et le sens du vecteur gradient donnent la direction et le sens de variation du champ de température et sa norme donne l'intensité de cette variation.



Quelques propriétés

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et donc :

$$\vec{\nabla}(\alpha f + g) = \alpha \vec{\nabla}(f) + \vec{\nabla}(g)$$

Le gradient d'un produit de champs scalaires vaut :

$$\vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla}(g) + g \vec{\nabla}(f)$$

L'opérateur nabla

Parfois le gradient d'un champs scalaire est noté $\vec{\nabla}f(M)$ au lieu de $\vec{\text{grad}}f(M)$ où $\vec{\nabla}$. On dit alors que l'on applique l'opérateur nabla au champ f , avec $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ dans le système de coordonnées cartésiennes.

4 Théorème de conservation de l'énergie cinétique

On se placera dans cette section dans un référentiel Galiléen.

4.1 Forces conservatives et forces non conservatives

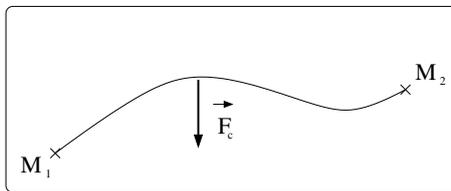
Définitions :

1. Une force conservative \vec{F}_c est une force dérivant d'une énergie potentielle ξ_p , c'est à dire qu'il existe un champ ξ_p tel que :

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla}\xi_p$$

2. Une force conservative est une force pour laquelle le travail associé fourni entre deux points M_1 et M_2 ne dépend pas du chemin suivi, c'est à dire qu'il existe une fonction φ telle que :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = \varphi(M_2) - \varphi(M_1)$$



Démonstration de l'équivalence de ces deux définitions :

1 \Rightarrow 2 : Supposons, $\vec{F}_c = -\vec{\nabla}\xi_p$. Alors :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{\nabla}\xi_p \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} -d\xi_p = -(\xi_p(M_2) - \xi_p(M_1)) \quad (4)$$

En prenant $\varphi = -\xi_p$, on obtient la définition 2.

2 \Rightarrow 1 : En partant de la définitions 2 et en prenant 2 points très proches M_1 et M_2 tels que $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + d\vec{l}$, on obtient :

$$\delta W_{M_1 \rightarrow M_2} = \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = d\varphi$$

et donc par la définition du gradient, on a $\vec{F}_c = \vec{\nabla}\varphi$, soit en posant $\xi_p = -\varphi$, on retrouve $\vec{F}_c = -\vec{\nabla}\xi_p$.

Exemples de forces conservatives :

- La force de pesanteur $\vec{F}_p = m\vec{g} = -\vec{\nabla}(mgz)$ si \vec{g} est orientée suivant $-\vec{z}$. On a donc $\xi_{pp} = mgz$.
- La force de rappel élastique $\vec{F}_e = -kx\vec{x} = -\vec{\nabla}(\frac{1}{2}kx^2)$. On a donc $\xi_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$.

Exemples de forces non conservatives :

- Les forces de frottement sont généralement orientées dans une direction opposée au vecteur vitesse et avec une l'intensité α qui dépend du phénomène considéré (frottement solide, frottement visqueux, frottement aérodynamique, ...) :

$$\vec{F}_f = -\alpha \frac{\vec{V}(M/R_G)}{\|\vec{V}(M/R_G)\|}$$

Dans le cas du frottement solide, α dépend du coefficient de frottement f_f et de la force normale exercée entre les deux solides en contact. Dans le cas d'un frottement visqueux, il dépend de la vitesse relative du solide et du fluide et dans le cas d'un frottement aérodynamique de la vitesse relative au carré.

Si on considère α constant (ce qui correspond au frottement solide), alors

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -\alpha \frac{\vec{V}(M/R_G)}{\|\vec{V}(M/R_G)\|} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} -\alpha \frac{d\vec{l}}{dl/dt} \cdot d\vec{l} \quad (6)$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} -\alpha dl = -\alpha(s(M_2) - s(M_1)) \quad (7)$$

où s désigne l'abscisse curviligne et donc $(s(M_2) - s(M_1))$ désigne la longueur du chemin parcouru qui dépend bien sûr du chemin suivi.

4.2 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Le théorème d'énergie cinétique est une conséquence du PFD. Il est obtenu à partir d'une projection du PFD sur le vecteur vitesse. Par conséquent un problème qui ne peut être résolu avec le PFD ne peut être résolu avec le TEC. En revanche, comme nous le verrons dans la suite, le TEC est obtenu par projection du PFD sur le mouvement. Il permet donc d'obtenir dans de nombreux cas, directement la relation la plus intéressante pour calculer la dynamique d'un point.

Définitions :

- On appelle énergie cinétique, l'énergie $\xi_c(M) = \frac{1}{2}m\vec{V}(M/R_G)^2$ liée à la vitesse du point considéré.
- On appelle énergie mécanique, la somme de l'énergies cinétique et de l'énergie potentielle totale associée au système :

$$\xi_m = \xi_c + \xi_p \text{ où } \xi_p = \sum_{k=1}^N \xi_p^{(k)}$$

où les $\xi_p^{(k)}$ désignent les énergies potentielles associées au système.

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\xi_m}{dt} = P_{nc}$$

où $P_{nc} = \sum \vec{F}_{nc} \cdot \vec{V}(M/R_G)$ désigne la puissance associée aux forces non conservatives.

Démonstration : Le théorème de la puissance cinétique s'obtient en faisant le produit scalaire du principe fondamental de la dynamique par la vitesse de déplacement du point considéré :

$$m \frac{d\vec{V}(M/R_G)}{dt} \cdot \vec{V}(M/R_G) = \sum \vec{F}_c \cdot \vec{V}(M/R_G) + \sum \vec{F}_{Nc} \cdot \vec{V}(M/R_G) = -\vec{\nabla} \xi_p \cdot \vec{V}(M/R_G) + \sum \vec{F}_{Nc} \cdot \vec{V}(M/R_G)$$

En tenant compte du fait que :

$$m \frac{d\vec{V}(M/R_G)}{dt} \cdot \vec{V}(M/R_G) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{V}(M/R_G)^2 \right) = \frac{d\xi_c}{dt}, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla}_{\xi_p} \cdot \vec{V}(M/R_G) = \vec{\nabla}_{\xi_p} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\xi_p}{dt}, \quad (9)$$

on obtient :

$$\frac{d\xi_c + \xi_p}{dt} = \frac{d\xi_m}{dt} = \vec{F}_{nc} \cdot \vec{V}(M/R_G)$$

Théorème de l'énergie cinétique :

Si l'on intègre l'expression précédente entre deux points M_1 et M_2 , on obtient :

$$\xi_m(M_2) - \xi_m(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} \sum \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{l}$$

Forme particulière :

En l'absence de forces non conservatives l'énergie mécanique se conserve :

$$\Delta\xi_m = \xi_m(M_2) - \xi_m(M_1) = 0$$