UNIVERSITE DE LILLE
Département de Mécanique

Chapitre 4 : Principe fondamental de la statique

En statique, on s'intéresse aux actions mécaniques s'exerçant sur un système en équilibre par rapport à un référentiel supposé Galiléen. Dans le précédent chapitre nous avons modélisé les actions mécaniques s'exerçant sur un solide par un torseur des actions mécaniques. Dans ce chapitre, nous allons déterminer les relations entre les différents torseurs des actions mécaniques d'un système en utilisant le principe fondamental de la statique.

1 Principe fondamental de la statique

1.1 Système en équilibre

Un système matériel $\mathcal{S}$ est dit en équilibre par rapport à un repère $\mathcal{R}$ si au cours du temps, chaque point de $\mathcal{S}$ conserve une position fixe par rapport à $\mathcal{R}$.

1.2 Principe fondamental de la statique (PFS)

Soit un système en équilibre par rapport à un repère Galiléen, le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à S est nul. Si on note $\bar{S}$ l'extérieur de S, on a alors :

$$\boxed{\left\{F(\bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S})\right\} = \{0\}} \tag{1}$$

Par conséquent, la résultante $\overrightarrow{R}(\bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S})$ et le moment associés à ce torseur en un point P quelconque $\overrightarrow{M}_P(\bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S})$ sont nuls :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{R}(\bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}) = \overrightarrow{0} \\ &\overrightarrow{M}_P(\bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}) = \overrightarrow{0} \quad \forall P \end{aligned}$$

<u>Exemple :</u>

Soit un système mécanique composé de 5 solides numérotés de 1 à 5, avec (i) une action du champ de gravité g sur chacun des solides, (ii) le solide 2 est en liaison uniquement avec le solide 1 et 3, et (iii) le solide 3 en liaison uniquement avec les solides 2 et 4. Considérons (Isolons) le système $\mathcal{S}$ constitué des solides 2 et 3 ($\mathcal{S} = 2 \cup 3$) à l'équilibre. L'extérieur du système $\mathcal{S}$ correspond donc au champ de gravité agissant sur les solides 2 et 3, et les solides 1, 4, 5. Comme le solide 5, n'agit pas directement sur les solides 1 et 2, le PFS appliqué au système $\mathcal{S}$ s'écrira :

$$\{F(1 \to 2)\} + \{F(4 \to 3)\} + \{F(g \to 2)\} + \{F(g \to 3\} = \{0\}$$

soit :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{R}(1 \to 2) + \overrightarrow{R}(4 \to 3) + \overrightarrow{R}(g \to 2) + \overrightarrow{R}(g \to 3) = \overrightarrow{0} \\ &\overrightarrow{M}_P(1 \to 2) + \overrightarrow{M}_P(4 \to 3) + \overrightarrow{M}_P(g \to 2) + \overrightarrow{M}_P(g \to 3) = \overrightarrow{0} \end{aligned} \tag{2}$$

<u>Attention :</u> Tous les moments doivent être exprimés au même point.

1.3 Théorème des actions mutuelles

Soit (1) et (2) deux solides en interactions, le torseur des actions mécaniques exercées par le solide (1) sur le solide (2) est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par le solide (2) sur le solide (1) :

$$\{F(1 \to 2)\} = -\{F(2 \to 1)\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}(1 \to 2) &= -\overrightarrow{R}(2 \to 1) \\ \overrightarrow{M}_P(1 \to 2) &= -\overrightarrow{M}_P(2 \to 1) \end{aligned}$$

Remarque : Attention, les torseurs doivent être exprimés au même point.

Méthodologie

La résolution d'un problème de statique consiste donc essentiellement dans la plupart des cas à (i) isoler les bons solides pour appliquer le PFS, (ii) calculer les torseurs des actions mécaniques dont a besoin dans un premier temps au point où il est le plus simple de le calculer puis (iii) de les transporter au même point pour pouvoir écrire le PFS.

Pour calculer le torseur des actions mécaniques, il y a 3 possibilités :

1. L'expression de la *force surfacique ou volumique locale* agissant sur un solide est spécifiée dans le problème. Dans ce cas, il faudra intégrer cette force locale pour parvenir au torseur des actions mécanique global comme décrit en détail dans le chapitre précédent.
2. La force globale $\overrightarrow{F_A}$ appliquée sur un solide $\mathcal{S}$ au point A est spécifiée. Alors, on sait qu'une force $\vec{F_A}$ correspond en réalité aux torseur glisseur des actions mécaniques :

$$\left\{F(\overrightarrow{F}_A \to \mathcal{S})\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

3. Deux solides 1 et 2 sont liées par une liaison parfaite sans frottement. Dans ce cas, il faut utiliser l'expression du torseur des actions mécaniques fournie dans le tableau des liaisons normalisées du chapitre précédent. Par convention, on appellera les composantes non nulles de la résultante X_{12}, Y_{12} et Z_{12} et les composantes non nulles du moment en un point donné L_{12}, M_{12} et N_{12}.

---

2 Solide en équilibre sous l'action de forces

2.1 Solide en équilibre sous l'action de 2 forces

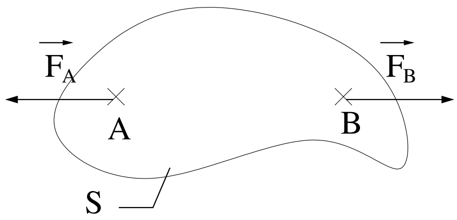


Figure 1 – Solide soumis à 2 forces

Soit un solide $\mathcal{S}$ en équilibre sous l'action de 2 forces $\vec{F_A}$ et $\vec{F_B}$ appliquées aux points A et B respectivement. Chaque force correspond à un torseur glisseur dont le moment est nul au point d'application :

$$\left\{F(\overrightarrow{F}_A \rightarrow S)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \left\{F(\overrightarrow{F}_B \rightarrow S)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Si l'on transporte le second torseur au point A, on obtient :

$$\left\{F(\overrightarrow{F}_B \rightarrow S)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_B \\ \overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA} \end{array} \right\}_A$$

Par conséquent, le torseur des actions mécaniques extérieur s'exerçant sur S exprimé en A est donc :

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\} = \left\{F(\overrightarrow{F}_A \rightarrow S)\right\} + \left\{F(\overrightarrow{F}_B \rightarrow S)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_B \\ \overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA} \end{array} \right\}_A$$

D'après le PFS, on a donc :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_B = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \end{array}$$

Par conséquent, si un solide est en équilibre sous l'action de 2 forces, ces 2 forces sont *directement opposées* (alignées et de sens contraires) et *colinéaires au vecteur qui relie leurs points d'application.*

2.2 Solide en équilibre sous l'action de 3 forces

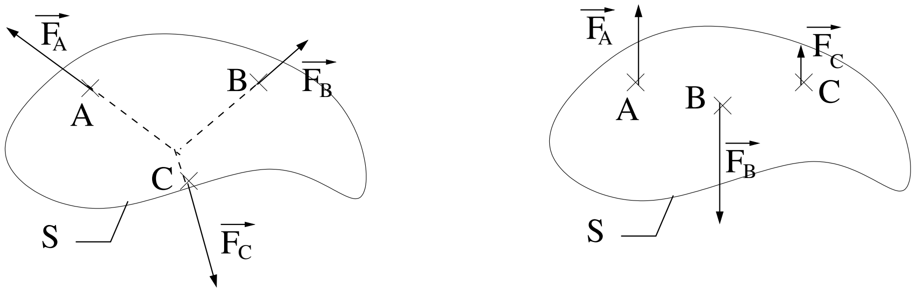


Figure 2 – Solide soumis à 3 forces. Gauche : forces concourantes en un point. Droite : forces parallèles.

Soit un solide S en équilibre sous l'action de 3 forces $\vec{F_A}$, $\vec{F_B}$ et $\vec{F_C}$ appliquées aux points A, B et C respectivement. Le principe fondamental de la statique s'écrit au point A :

$$\{F(\bar{S} \to S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_B + \vec{F_C} \\ \overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{F}_C \wedge \overrightarrow{CA} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

Si l'on fait le produit scalaire de l'équation du moment avec $\overrightarrow{BA}$, on trouve :

$$\left(\overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{F}_C \wedge \overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{BA} = 0$$

avec bien sûr $\left(\overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BA} = 0$ car $\overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BA}$. Par conséquent le produit mixte entre $\overrightarrow{F}_C$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA}$ est nul ce qui veut dire que ces 3 vecteurs sont coplanaires.

De même si l'on fait le produit scalaire de l'équation du moment avec $\overrightarrow{CA}$, on trouve que les 3 vecteurs $\overrightarrow{F}_B$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont coplanaires.

Par conséquent, les *3 forces* $\overrightarrow{F}_A$, $\overrightarrow{F}_B$ et $\overrightarrow{F}_C$ *sont coplanaires entre elles et coplanaires au plan formé par leurs points d'application* A, B et C.

De plus,

- si les droites $(B, \vec{F_B})$ et $(C, \vec{F_C})$ ont un point d'intersection que l'on appellera I, alors l'équation du moment écrite au point I montre que la droite $(A, \vec{F_A})$ passe aussi par le point I.

  Démonstration :

  L'équation du moment au point I s'écrit :

  $$\overrightarrow{F}_A \wedge \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{F}_C \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0}$$

  Or puisque $(B, \vec{F_B})$ et $(C, \vec{F_C})$ sont concourantes au point I, on a :

  $$\overrightarrow{F}_B \wedge \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{F}_C \wedge \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$$

- si les droites $(B, \vec{F_B})$ et $(C, \vec{F_C})$ n'ont pas de point d'intersection, c'est que celles-ci sont parallèles (car elles sont contenues dans le même plan). L'équation de la résultante, nous dit dans ce cas que $(A, \vec{F_A})$ est parallèle aux deux autres droites.

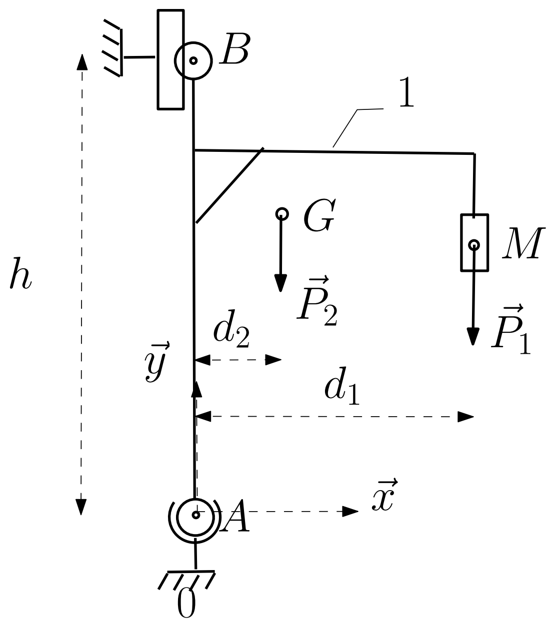
Conclusion : Si un solide S est en équilibre dans un référentiel Galiléen sous l'action de 3 forces, alors ces forces sont :

1. coplanaires
2. concourantes ou parallèles
3. de somme vectorielle nulle

Exercices d'application du cours

Exercice 1 : Potence

On considère dans cet exercice une potence d'atelier destinée à soulever des charges de poids $\vec{P}_2$ appliquée en un point M et le poids de la potence elle-même peut être modélisée par une force $\vec{P}_1$ appliquée au centre d'inertie de la potence G. Les valeurs de P_1 et P_2 sont supposées connues. La potence notée 1 est en liaison rotule au point A avec le bâti 0 et en liaison annulaire au point B. Les distances utiles à la résolution du problème sont indiquées sur la figure.



1. Déterminer les torseurs des actions mécaniques $\{F(\vec{P}_1 \to 1)\}$ et $\{F(\vec{P}_2 \to 1)\}$ appliquées par les deux forces sur le solide 1, ainsi que les torseur des actions mécaniques associées aux liaisons rotule et annulaire $\{F(0^A \to 1)\}$ et $\{F(0^B \to 1)\}$.
2. Combien y a t'il d'inconnu dans le problème, et combien aura-t'on d'équations pour le résoudre. Le problème est-il bien posée ?
3. En appliquant le Principe Fondamental de la Statique, déterminer toutes les inconnues de liaison.

Corrigé :

1. Les deux forces correspondents aux torseurs glisseurs :

$$\left\{F(\vec{P}_1 \to 1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_M \quad \text{et} \quad \left\{F(\vec{P}_2 \to 1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

et les torseurs associés aux liaisons sont (cf tableau des liaisons normalisées) :

$$\{F(0^A \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^A & 0 \\ Y_{01}^A & 0 \\ Z_{01}^A & 0 \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{F(0^B \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^B & 0 \end{array} \right\}_B$$

Remarque : Ici il n'y a qu'un seul repère, donc il n'y a pas d'ambiguité sur le repère dans lequel est exprimé le torseur. S'il y avait plusieurs repère, il faudrait préciser dans quel repère le torseur est exprimé.

2. En première analyse, on voit que l'on a 5 inconnues et 6 équations (3 équation sur la résultante, et 3 équations sur le moment pour le PFS), donc il semblerait que l'on aie une équation de trop. En réalité, on voit que le problème est entièrement 2D, donc les deux inconnues Z_{01}^A et Z_{01}^B vont s'annuler. Au final, on aura 3 inconnues et seulement deux équations pour la résultante (suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$) et une équation pour le moment moment (suivant $\vec{z}$) seront utiles. On aura donc 3 équations et 3 inconnues, le problème est bien posé.
3. Ici il n'y a pas trop de question à se poser sur le solide à isoler puisqu'il n'y en a qu'un (hors bâti), le solide 1. La seule question à se poser est en quel point écrire l'équation du moment. Il faut toujours choisir le point où le transport des moments sera le plus simple. Le torseur possédant le plus grand nombre de composantes pour la résultante est le torseur associé à la liaison rotule. Ce sera le plus dur à transporter, il faut donc préférentiellement choisir ce point pour écrire le PFS. On aura donc pour la résultante, le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{01}^A + X_{01}^B = 0 \\ -P_1 - P_2 + Y_{01}^A = 0 \\ Z_{01}^A + Z_{01}^B = 0 \end{cases}$$

Pour les moments la première étape est de les transporter :

$$\begin{cases} M_A(\vec{P}_1 \to 1)) = M_M(\vec{P}_1 \to 1)) - P_1\vec{y} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0} - P_1\vec{y} \wedge (-d_1\vec{x} + ??\vec{y}) = -P_1 d_1 \vec{z} \\ M_A(\vec{P}_1 \to 1)) = M_G(\vec{P}_1 \to 1)) - P_2\vec{y} \wedge \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0} - P_2\vec{y} \wedge (-d_2\vec{x} + ??\vec{y}) = -P_2 d_2 \vec{z} \\ M_A(0^B \to 1)) = \left[X_{01}^B\vec{x} + Z_{01}^B\vec{z}\right] \wedge (-h\vec{y}) = -hX_{01}^B\vec{z} + hZ_{01}^B\vec{x} \end{cases}$$

Au final les 3 équations su moments sont donc :

$$\begin{cases} hZ_{01}^B = 0 \\ 0 = 0 \\ hX_{01}^B + P_1 d_1 + P_2 d_2 = 0. \end{cases}$$

Au final on obtient en résolvant ce système :

$$\begin{cases} X_{01}^A = -X_{01}^B = (P_1 d_1 + P_2 d_2)/h \\ Y_{01}^A = P_1 + P_2 \\ Z_{01}^A = Z_{01}^B = 0. \end{cases}$$