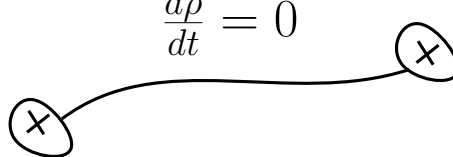


Chapitre 1 : Introduction à la dynamique des fluides Newtoniens compressibles

1 Définition d'un écoulement incompressible / compressible

1.1 Formulation mathématique

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$


Un écoulement est dit incompressible si la densité d'une particule fluide $\rho(\vec{x}, t)$ est constante dans son mouvement, c'est à dire sous forme mathématique que :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

où $\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\cdot)$ désigne la dérivée particulaire, c'est à dire la dérivée temporelle qui suit l'évolution d'une particule dans son mouvement. C'est l'équivalent de la dérivée temporelle lagrangienne en coordonnées eulériennes.

Remarque 1 : Attention, cette condition diffère de la condition $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ dans le cas où le fluide n'est pas un fluide homogène ($\vec{\nabla} \rho \neq 0$), par exemple pour un fluide stratifié.



FIGURE 1 – Fluide stratifié.

Remarque 2 : Dans le cas où l'équation de conservation de la masse est valable, celle-ci s'écrit sous forme non-conservative : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$. Par conséquent la condition d'incompressibilité $\frac{d}{dt} \rho = 0$ peut aussi s'écrire $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

1.2 Quels fluides sont incompressibles ?

Il n'existe pas de fluides intrinsèquement incompressible. Tous les fluides (gaz ou liquides) peuvent sous certaines sollicitations présenter des variations de densités. C'est **l'écoulement** qui peut dans certains cas être supposé comme incompressible, lorsque les modifications de l'écoulement induites par les variations de densité jouent un rôle négligeable sur l'écoulement étudié. En anglais, on parle d'ailleurs toujours d'"incompressible flow" et jamais d'"incompressible fluid".

La compressibilité d'un fluide vis à vis de sollicitations en pression est caractérisée par les coefficients de *compressibilité adiabatique et isotherme* :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s, \quad \chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T.$$

La compressibilité d'un fluide vis à vis de sollicitations en température est caractérisée par le coefficient de *dilatatabilité thermique isobare* :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

1.3 Dans quel cas la compressibilité d'un écoulement doit être prise en compte ?

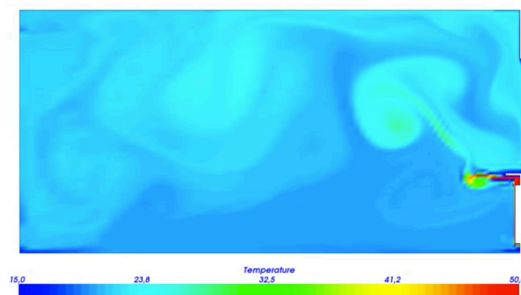


FIGURE 2 – Convection naturelle produite par un radiateur (situé en bas à droite de la zone de simulation).

1. Lorsque l'écoulement créé par la force d'Archimède due à des variations de densité, elles-même induites par des variations de température, n'est pas négligeable devant l'écoulement étudié. C'est ce que l'on appelle le régime de **convection naturelle** (quand il n'y a pas d'autre écoulement que celui induit par la force d'Archimède) ou de **convection mixte** (lorsque celui-ci coexiste avec un écoulement forcé).



FIGURE 3 – Onde de choc se formant sur un Mig-29 rendue visible par la condensation de vapeur d'eau présente dans l'atmosphère.

2. Lorsque le nombre de Mach $M = U/c_o$ où U désigne la vitesse caractéristique de l'écoulement et c_o la vitesse du son est de l'ordre ou supérieur à 1. En effet dans ce cas des variations brutales de densité, de pression, de vitesse et de température peuvent se produire, c'est ce que l'on appelle les ondes de choc. On appelle un écoulement *subsonique*, un écoulement tel que $M < 1$, **transsonique** tel que $M \sim 1$, **supersonique** tel que $5 > M > 1$ et **hypersonique** tel que $M > 5$. Pour donner une idée, un avion de ligne se déplace à un nombre de Mach légèrement inférieur à 1 ($M \approx 0.8$), un rafale peut se déplacer à un nombre de Mach 1.8 et un lanceur ariane 5 atteint un nombre de Mach d'environ 5 après une minute de vol et 24 après 10 min de lancement. Bien sûr il faut tenir compte non seulement de l'évolution de la vitesse du lanceur, mais aussi de la vitesse du son dans les différentes couches de l'atmosphère (celle-ci diminue dans les hautes couches de l'atmosphère).

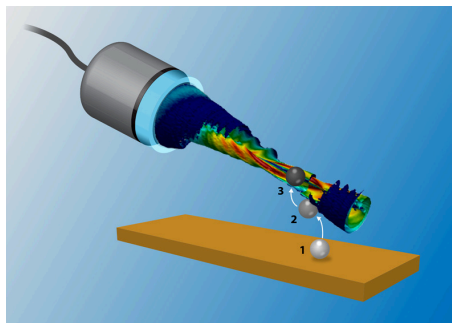


FIGURE 4 – Onde acoustique helicoidale appelée vortex acoustique permettant la manipulation sélective et sans contact de particules micrométriques via la pression de radiation acoustique.

3. Lorsque l'on étudie la **propagation des ondes sonores** qui par définition sont des ondes de compressibilité.

2 Thermodynamique des milieux continus

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous ne considérerons pas de réactions chimiques dans les processus thermodynamiques étudiés et nous n'introduirons donc pas les potentiels chimiques. En cas de réactions chimiques au cours de l'évolution, il faut bien sûr les introduire dans les équations.

La mécanique des milieux continus

En mécanique des milieux continus, on étudie l'évolution d'un système mécanique (solide ou fluide) à une échelle grande devant l'échelle atomique (c'est à dire supérieure à l'Angström soit 10^{-10} m) et les distances inter-moléculaires (qui dépendent de la phase étudiée). Ceci permet de considérer la matière comme un milieu continu et d'introduire des grandeurs mésoscopiques telles que la densité, la vitesse, la température qui subissent néanmoins des variations à une échelle plus grande appelée échelle macroscopique (correspondant à l'échelle caractéristique de l'écoulement dans le cas de la mécanique des fluides).

Ainsi la valeur d'un champ en un point \vec{x} à l'instant t correspond à la valeur moyenne des grandeurs moléculaires sur un grand nombre de molécule formant un volume appelé "volume élémentaire". Le grain élémentaire de la matière en mécanique des fluides est appelée par abus de langage "particule fluide".

Thermostatique et thermodynamique



FIGURE 5 – Passage d'une situation d'équilibre thermostatique à une autre situation d'équilibre thermostatique.

Ce que vous avez étudié dans les années précédentes (et appelé thermodynamique) était en réalité de la thermostatique car vous n'étudiez pas les transitions d'un système mais uniquement le passage d'un état d'équilibre thermodynamique initial à un état d'équilibre final. Par exemple si l'on considère la situation décrite Fig. 5, le passage de l'état initial à l'état final se fait via (i) l'émission d'une onde de choc, et (ii) une fois l'écoulement dissipé, une évolution progressive par conduction thermique mais aussi convection (si la gravité est considérée) pour atteindre progressivement la température T_0 .

Cela signifie que vous vous placez à des échelles de temps d'observation longues devant le temps nécessaire pour parvenir à l' **équilibre thermodynamique** (équilibre thermique, mécanique et chimique).

Variables locales

Dans ce cours, nous allons étudier la thermodynamique des milieux continus, c'est à dire les équations qui régissent l'évolution de système continu en écoulement. Pour étudier les systèmes continus, les **grandeurs extensives** (c'est à dire celles qui dépendent de la quantité de matière considérée) seront remplacées par des **grandeurs intensives locales** par unité de masse qui dépendent du temps et de l'espace :

- Le volume V sera remplacé par $1/\rho(\vec{x}, t)$ où $\rho(\vec{x}, t)$ désigne la masse volumique locale dépendant du temps et de l'espace.
- L'entropie S d'un système sera remplacé par $s(\vec{x}, t)$ l'entropie massique.
- L'énergie interne U d'un système sera remplacé par son équivalent local $e(\vec{x}, t)$, l'énergie interne massique.
- L'enthalpie H d'un système sera remplacé par son équivalent local $h(\vec{x}, t)$, l'énergie interne massique.
- La chaleur échangée Q sera remplacé par son équivalent local $q(\vec{x}, t)$ l'énergie interne massique.

- Le travail exercé sur un système W sera remplacé par son équivalent local $w(\vec{x}, t)$ le travail local exercé sur une particule fluide située en \vec{x} à l'instant t .

Bien sûr les **grandeurs intensives** telles que la pression p ou la température restent inchangées mais deviennent des champs dépendant du temps et de l'espace :

$$p \rightarrow p(\vec{x}, t) \quad (1)$$

$$T \rightarrow T(\vec{x}, t) \quad (2)$$

L'hypothèse de l'état local associé

Une hypothèse classique dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus est l'**hypothèse de l'état local associé**. Celle-ci consiste à considérer qu'à chaque instant t **chaque particule fluide peut être considéré à l'équilibre d'un point de vue thermodynamique**, et ce, bien que le système soit en évolution au sens de la mécanique des milieux continus. Cela veut dire que l'on moyenne le comportement de la matière sur des échelles de temps longues devant celles qui permettent à un assemblée de molécules contenues dans un volume élémentaire de parvenir à l'équilibre local "thermostatique". Cette hypothèse reste valide tant que **l'équilibre thermodynamique local s'établit plus vite que la cinématique du système**.

Définitions, variables, fonctions d'états et paramètres thermodynamiques

Avant d'introduire les principes de la thermodynamique, rappelons quelques définitions importantes :

- Un système est dit **fermé** s'il peut échanger de la chaleur et du travail mais pas de la matière avec le milieu environnant.
- Un système est dit **isolé** s'il n'échange pas de masse, de chaleur ou de travail avec l'extérieur
- Une évolution est dite **adiabatique** si elle se fait sans échange de chaleur $\delta Q = 0$.
- Une évolution est dite **isentropique** si son entropie est constante $ds = 0$.

Les **variables d'état** permettent de décrire l'état thermodynamique d'un système. Ce sont :

- la pression $p(\vec{x}, t)$
- la température $T(\vec{x}, t)$
- l'entropie $s(\vec{x}, t)$
- la masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$.

Les **fonctions d'états** sont des fonctions des variables d'état, citons les plus courantes :

- l'énergie interne massique : e
- l'enthalpie massique $h = e + \frac{p}{\rho}$
- l'énergie libre massique $f = e - Ts$
- l'énergie libre de Gibbs massique : $g = h - Ts$.

Les **lois d'état** sont des relations entre les variables d'état.

Enfin les **paramètres thermodynamiques** définissent les propriétés d'un fluide. Les principaux sont :

- la compressibilité isentropique $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$ en $\text{kg}^{-1} \text{ m s}^2$
- la compressibilité isotherme $\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$ en K^{-1}
- la dilatabilité thermique $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ en K^{-1}

- la chaleur massique isochore $C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho$ en $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
- la chaleur massique isobare $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ en $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
- le rapport des chaleurs massiques $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
- la vitesse du son $c_o = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_s}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$

2.2 Premier et second principe de la thermodynamique

Il est donc maintenant possible de réécrire les principes de la thermodynamique sous forme locale :

Le premier principe

Celui-ci stipule que lors de la transformation d'un système fermé et en absence de réaction chimiques, la variation de son énergie interne est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail). Sous **forme globale**, il s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q \text{ avec } \delta W = -pdV$$

Sous **forme locale**, il s'écrira donc :

$$de = \delta w + \delta q \text{ avec } \delta w = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Le second principe

On peut donner différentes formulations équivalentes du second principe :

- Le second principe établit *l'irréversibilité des phénomènes physiques*.
- Toute évolution d'un système physique isolé s'accompagne d'une *augmentation d'entropie*, variable thermodynamique usuellement associée à la notion de désordre ou du point de vue plus rigoureux de la physique statistique au nombre de configurations microscopiques (appelés micro-états) accessibles.
- Une troisième formulation équivalente est le *principe d'extensité* : l'énergie s'écoule de la haute intensité vers la basse intensité. Ainsi le travail s'exerce des hautes pressions sur les basses pressions par un transfert de volume (V est la variable extensive liée à la variable intensive p par la relation $\delta W = -pdV$). De même la chaleur s'écoule des hautes températures vers les basses températures par un transfert d'entropie (S est la variable extensive reliée à la variable intensive T par la relation : $\delta Q_{rev} = Tds$).

Au **niveau global**, le second principe s'écrit pour un système donné :

$$\Delta S_{\text{système}} = S_{\text{échange}} + S_{\text{création}} \text{ avec } S_{\text{création}} > 0$$

où $\Delta S_{\text{système}}$ désigne la variation d'entropie du système, $S_{\text{échange}}$ l'entropie échangée avec le milieu extérieur lors de la transformation et $S_{\text{création}}$ indique l'entropie créée qui impose le sens de l'évolution de la transformation.

Transformation réversible : Une transformation réversible est une transformation quasistatique (c'est à dire une succession d'états d'équilibre) susceptible s'être inversée à la suite d'une modification progressive des contraintes extérieures, permettant au système de retrouver ses états antérieurs successifs. Dans ce cas $S_{\text{création}} = 0$ et

$$dS = dS_{\text{échange}} = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

En réalité aucune transformation n'est réellement réversible.

Hypothèse de l'état local associé : Dans l'hypothèse de l'état local associé, on suppose que chaque particule fluide subit une transformation réversible. Cela signifie qu'en pratique si l'on contrôlait l'état de chaque "particule fluide" on pourrait renverser l'évolution d'un milieu continu (ce qui est bien sûr en pratique impossible). Attention cela ne veut pas dire que la transformation globale est irréversible mais uniquement que l'irréversibilité provient des interactions entre les particules fluides et sera modélisée dans les équations macroscopiques. On peut donc écrire localement l'égalité :

$$\delta Q = T ds$$

qui correspond normalement au cas d'une transformation réversible.

2.3 Relations et variance de Gibbs

Relation de Gibbs-Duhem

Au final d'après le premier principe, on obtient la relation :

$$de = \delta w + \delta Q = \frac{p}{\rho^2} d\rho + T ds$$

qui traduit l'évolution d'un système localement à l'équilibre.

Variance de Gibbs

Une variable thermodynamique peut s'exprimer en fonction d'autres variables thermodynamiques via des lois d'états. La formule de la variance de Gibbs v permet de savoir en fonction de combien d'autres variables thermodynamiques l'une des variable peut s'exprimer :

$$v = c + 2 - \phi$$

où c désigne le nombre de constituants, ϕ le nombre de phases.

Par exemple pour un liquide seul, $c = 1$, $\phi = 1$, soit $v = 2$ et nous avons donc : $p = p(\rho, T)$ ou $= p(\rho, s)$ ou encore $= p(s, T)$. Pour un liquide en contact avec sa vapeur, on a $c = 1$, $\phi = 2$ soit $v = 1$. Par conséquent la pression ne dépend que de la température : $p = p_{vs}(T)$, ce que l'on appelle la pression de vapeur saturante.

2.4 Modèle du gaz parfait

Forme locale et forme globale

La loi des gaz parfaits est une équation d'état introduite originellement par Emile Clapeyron en 1834 comme une combinaison de la loi de Boyle-Mariott, de Charles et d'Avogadro. Celle-ci peut être démontrée à partir de la théorie cinétique des gaz.

La **forme globale** de cette équation s'écrit :

$$pV = n\mathcal{R}T$$

où p désigne la pression, V le volume, n le nombre de moles, \mathcal{R} la constante de gaz parfaits et T la température.

La **forme locale** de cette équation s'écrit donc :

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

avec ρ la densité du gaz, et $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$ la constante du gaz considéré et \mathcal{M} la masse molaire du gaz considéré.

Loi de Mayer

Pour un gaz parfait, les chaleurs massique isochore et isobare sont reliés par la relation de Mayer :

$$C_p - C_v = R$$

Cette relation est démontrée dans le TD n^o2 .

Conséquences

Remarque 1 : Pour un gaz parfait, on peut démontrer que l'énergie interne e et l'enthalpie h dépendent uniquement de la température T (cf TD TD n^o2 . pour la démonstration). On a donc :

$$de = C_v(T)dT \quad (3)$$

$$dh = C_p(T)dT \quad (4)$$

Remarque 2 : Pour un gaz parfait en évolution isentropique :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cste$$

Démonstration :

Pour une évolution isentropique

$$de = C_v dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$dh = C_p dT = \frac{dp}{\rho}$$

Donc :

$$\frac{dh}{de} = \gamma = \frac{dp}{p} \times \frac{\rho}{d\rho}$$

Soit :

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Il suffit d'intégrer cette dernière relation pour obtenir l'équation recherchée.

3 Equations bilans

3.1 Forme générale (locale et intégrale) des équations bilans

Expression de la forme générale intégrale

Toutes les équations bilans ont la même forme générale. Soit $\Psi(\vec{x}, t)$ un champ matériel convecté par un champs de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Alors la variation temporelle de ce champ moyenné sur un volume $V(t)$ convecté par le champs de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \psi(\vec{x}, t) dV = \iint_{\partial V(t)} \vec{\phi}_S \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V(t)} S_v \cdot dV} \quad (5)$$

où $\vec{\phi}_S$ et S_v désignent respectivement les terme de flux surfacique et de source volumique à l'origine des variations du champ Ψ .

Dérivée temporelle d'une intégrale sur un volume convecté par un champ de vitesse

La dérivée temporelle d'un champs $\Psi(\vec{x}, t)$ intégré sur un volume $V(t)$ convecté dans le temps peut se calculer suivant la formule :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \psi(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) \right] dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} \psi \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (6)$$

Théorème de Green-Ostrograski

Enfin le théorème de Green-Ostrograscki permet de relier les intégrales surfaciques et volumiques d'un champ vectoriel $\vec{w}(\vec{x}, t)$:

$$\iint_{\partial V} \vec{w}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div}(\vec{w}) dV \quad (7)$$

où ∂V désigne une surface fermée entourant un volume V .

Forme locale des équations bilans

En utilisant les équations (6) et (7), on peut réécrire l'équation (5) sous la forme :

$$\iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) \right] dV = \iiint_{\partial V(t)} \left[\text{div}(\vec{\phi}_S) + S_v \right] \cdot dV \quad (8)$$

soit

$$\iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) - \text{div}(\vec{\phi}_S) - S_v \right] dV = 0$$

Si cette égalité est vérifiée quelque soit V le volume considéré dans un domaine Ω , alors elle est vraie en tout point de Ω , et donc on obtient la forme locale des équations bilans :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) = \text{div}(\vec{\phi}_S) + S_v}$$

Il reste donc maintenant à déterminer les termes sources surfaciques et volumiques pour chaque bilan (masse, quantité de mouvement, énergie).

3.2 Bilan de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie

Bilan de masse

Dans la plupart des cas, la masse se conserve, ce qui veut dire qu'il n'y a ni source surfacique ni source volumique de masse. La masse contenue dans un volume étant tout simplement l'intégrale sur ce volume de la masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$, on obtient aisément :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) dV = 0$$

Soit en utilisant les équations précédentes, les formes locales et intégrales de l'équation de conservation de la masse s'écrivent respectivement :

$$\boxed{\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (9)$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (10)$$

Attention, il existe des cas où la masse ne se conserve pas. Un premier cas est bien sûr celui des réactions nucléaires (mettant en jeu la fameuse loi d'Einstein $E = mc^2$). Dans ce cas, la masse n'est pas conservée lors de la réaction induisant l'émission d'une énergie considérable. Lorsque l'on décrit la magnétohydrodynamique du soleil, il faut donc être prudent sur l'écriture des bilans de masse. Mais il y a d'autres cas plus courants où l'on peut avoir une masse qui ne se conserve pas. Par exemple, dans le cas d'écoulement diphasiques ou plus généralement multiphasiques, c'est à dire comportant plusieurs phases (écoulements de bulles de gaz dans un liquide, émulsions, mousses, ...), on écrit très souvent une équation pour chacune des phases. Les interactions entre les deux phases sont alors décrites par des termes d'échanges surfaciques. Les échanges de masses correspondent à des changements de phase (évaporation/condensation, migrations chimiques, ...).

Bilan de quantité de mouvement

La quantité de mouvement locale "massique" correspond bien sûr au champ $\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)$. La quantité de mouvement dans un volume de contrôle $V(t)$ peut varier sous l'effet des contraintes $\vec{\sigma}$ (correspondant aux sources surfaciques de quantité de mouvement) appliquées à ce volume ou de de champ de force de volume \vec{f}_v pouvant être induits par des champs de gravité, des champs électromagnétiques ou encore des champs acoustiques (champ de streaming acoustique).

Par conséquent les bilans locaux et globaux de quantité de mouvement prennent respectivement la forme :

$$\boxed{\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\partial V(t)} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V(t)} \vec{f}_v dV} \quad (11)$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div}(\vec{\sigma}) + \vec{f}_v} \quad (12)$$

où $\rho \vec{v} \otimes \vec{v}$ désigne un tenseur d'ordre deux dont la composante i, j est $\rho v_i v_j$.

Bilan d'énergie totale

L'énergie totale massique e_T est la somme de l'énergie cinétique massique $e_c = \frac{1}{2}v^2$ et de l'énergie interne e . La variation de cette énergie totale peut être liée soit à la puissance développée par les efforts extérieurs sur le volume de contrôle $V(t)$ soit à des échanges de chaleur (" $\frac{d}{dt}\xi_T = \mathcal{P}_{ext} + \frac{d}{dt}Q$ "). Ainsi, le bilan global de variation d'énergie totale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho e_T}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} (\rho e_T) \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{\partial V(t)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \vec{n} dS + \iiint_{V(t)} \vec{f}_v \cdot \vec{v} dV \\ &- \iint_{\partial V(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V(t)} \vec{r} \cdot \vec{v} dV \end{aligned} \quad (13)$$

où \vec{q} désigne le flux de chaleur et r des termes sources de chaleur (pouvant être du rayonnement, des réactions chimiques exothermiques, une réaction nucléaire, ...). S'ensuit la forme locale de l'équation de conservation de l'énergie totale :

$$\boxed{\frac{\partial \rho e_T}{\partial t} + \text{div}(\rho e_T \vec{v}) = \text{div}(\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) + \vec{f}_v \cdot \vec{v} - \text{div}(\vec{q}) + r} \quad (14)$$

3.3 Forme conservative et non conservative des équations bilans

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Par conséquent pour un champ matériel quelconque massique $\varphi(\vec{x}, t)$ convecté par un écoulement $\vec{v}(\vec{x}, t)$, on a :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varphi\vec{v}) = \varphi \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) \right] + \rho \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\varphi) \right]$$

Le premier terme du membre de droite est nul si l'équation de conservation de la masse est vérifiée et le second correspond à la dérivée convective $\rho \frac{d\varphi}{dt}$. On obtient donc :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varphi\vec{v}) = \rho \frac{d\varphi}{dt}$$

Par conséquent tous les bilans locaux sur des champs massiques $\varphi(\vec{x}, t)$ convectés par un écoulement $\vec{v}(\vec{x}, t)$ peuvent se mettre soit sous la forme :

$$\frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \text{div}(\rho\varphi\vec{v}) = \text{div}(\vec{\phi}_S) + S_v$$

appelée forme conservative des équations (car elle conserve la quantité $\rho\varphi$ sans que l'équation de la masse ait besoin d'être vérifiée) ou non conservative :

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = \text{div}(\vec{\phi}_S) + S_v$$

Lorsque l'on fait du numérique, on préférera toujours la forme conservative des équations. En effet, si l'on choisissait d'implémenter la forme non conservative, les erreurs numériques faites sur la conservation de la masse se propageraient aux autres équations. Il est à noter que la forme historique des équations de Navier Stokes (bilan de quantité de mouvement) a été obtenu sous forme non conservative.

3.4 Bilan d'énergie cinétique, d'énergie interne et d'entropie

Bilan d'énergie cinétique

En mécanique du point, le bilan d'énergie cinétique est obtenu simplement en projetant le bilan de quantité de mouvement (le PFD) sur le vecteur vitesse. Il en est de même en mécanique des fluides :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{v} + \vec{f}_v \cdot \vec{v}$$

soit en utilisant le fait que $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{v}^2 = \frac{de_c}{dt}$. On retrouve le bilan d'énergie cinétique sous forme locale non conservative :

$$\boxed{\rho \frac{de_c}{dt} = \text{div}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{v} + \vec{f}_v \cdot \vec{v}} \quad (15)$$

Remarque : La variation d'énergie cinétique est due à la puissance des efforts extérieurs et la puissances des efforts intérieurs : " $\frac{d}{dt} \xi_c = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$ ". Par conséquent le terme de droite de cette équation correspond à la somme des puissances des efforts extérieurs et des efforts intérieurs.

Bilan d'énergie interne et "premier principe" d'un fluide en écoulement

Le bilan d'énergie interne s'obtient alors simplement en soustrayant le bilan d'énergie cinétique au bilan d'énergie totale :

$$\boxed{\rho \frac{de}{dt} = \vec{\sigma} : \vec{D} - \text{div}(\vec{q}) + r} \quad (16)$$

où $\vec{D} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla}^T \vec{v} \right)$ désigne le tenseur des taux de déformation (qui correspond à la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse $\vec{\nabla} \vec{v}$).

Cette forme est obtenue en utilisant (i) la formule : $\text{div}(\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) = \text{div}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{v} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v}$ et (ii) le fait que le tenseur des contraintes est symétrique (ce qui est une conséquence de la conservation du moment) et donc que $\vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{\sigma} : \vec{D}$.

Il est à noter que nous avons obtenu ces équations à partir des formes non conservatives des équations. Cela veut dire qu'il faut être très prudent dans le cas où la masse n'est pas conservée... D'un point de vue pratique, le bilan d'énergie interne n'étant pas sous forme conservative, il n'est pas utilisé pour les simulations numériques. En revanche, dans les recherches de solution analytique, il est préféré au bilan d'énergie totale, car il possède bien évidemment une forme plus simple.

Si l'on écrit le tenseur des contraintes sous la forme $\vec{\sigma} = -p \vec{1} + \vec{\tau}_v$ où $\vec{\tau}_v$ désigne le tenseur des contraintes visqueuses, alors l'équation précédente peut être écrite sous la forme :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underbrace{-p \text{div}(\vec{v}) + \vec{\tau}_v : \vec{D}}_{\text{Travail des efforts intérieurs}} \quad \underbrace{-\text{div}(\vec{q}) + r}_{\text{Echanges de chaleur}} \quad (17)$$

On retrouve le premier principe mais dans sa forme en écoulement. Dans ce cas le travail exercé sur une particule fluide n'est plus seulement le travail lié au forces de pression, mais aussi celui dû au contraintes visqueuses. Au niveau des échanges de chaleurs, il peuvent être induits par des flux surfaciques de chaleur ou à des sources volumiques de chaleur.

Bilan d'entropie d'un fluide en écoulement et second principe

En utilisant la loi de Gibbs $de = Tds - pd(1/\rho)$, on peut alors dériver une équation pour l'entropie :

$$\rho T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -p \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{\tau}_v : \vec{D} - \operatorname{div}(\vec{q}) + r$$

soit en réarrangeant les termes :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\frac{p}{\rho} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) \right] + \vec{\tau}_v : \vec{D} - \operatorname{div}(\vec{q}) + r$$

Si l'équation de conservation de la masse est vérifiée, on a $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ et on trouve donc :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}_v : \vec{D} - \operatorname{div}(\vec{q}) + r \quad (18)$$

Nous avons vu en thermostatique que l'entropie créée $S_{\text{création}}$ correspond à

$$dS_{\text{création}} = dS - \delta Q_{\text{échange}}/T$$

et que le second principe peut s'énoncer sous la forme : $dS_{\text{création}} > 0$. On peut donc essayer mettre le bilan local dynamique d'entropie sous une forme similaire en utilisant le fait que $\frac{1}{T} \operatorname{div}(\vec{q}) = \operatorname{div}(\frac{\vec{q}}{T}) - \vec{q} \cdot \vec{\nabla}(\frac{1}{T}) = \operatorname{div}(\frac{\vec{q}}{T}) + \frac{1}{T^2} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}(T)$ pour pouvoir énoncer le second principe :

$$\rho \frac{ds}{dt} - \left[-\operatorname{div}(\frac{\vec{q}}{T}) + \frac{r}{T} \right] = \underbrace{\frac{1}{T} \vec{\tau}_v : \vec{D}}_{\text{Dissipation visqueuse}} - \underbrace{\frac{1}{T^2} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}(T)}_{\text{Dissipation thermique}} \quad (19)$$

On retrouve les deux sources principales de création d'entropie (et donc d'irréversibilité) : la dissipation visqueuse et la dissipation thermique. Le second principe s'énonce alors sous la forme :

$$\rho \frac{ds}{dt} - \left[-\operatorname{div}(\frac{\vec{q}}{T}) + \frac{r}{T} \right] = \underbrace{\frac{1}{T} \vec{\tau}_v : \vec{D}}_{\text{Dissipation visqueuse}} - \underbrace{\frac{1}{T^2} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}(T)}_{\text{Dissipation thermique}} > 0 \quad (20)$$

Par conséquent les deux termes de dissipation (visqueuse et thermique) doivent être positifs. Ceci nous guide dans le choix des relations de fermeture (lois de comportement). Par exemple, le second principe impose le sens d'écoulement de la chaleur (des basses hautes températures vers les basses températures) car \vec{q} doit être proportionnel à $-\vec{\nabla}T$ pour que le terme de dissipation thermique soit positif.

En pratique, pour un fluide Newtonien compressible, on a : $\vec{\tau}_v = 2\mu \vec{D} + \lambda \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{1}$, et la loi de Fourier pour une fluide homogène s'écrit : $\vec{q} = -k \vec{\nabla}T$ où μ et λ désignent respectivement le premier et second coefficient de viscosité (équivalent des coefficients de Lamé pour un solide) et k le coefficient de diffusion (ou conductivité) thermique. On a donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_v : \vec{D} &= 2\mu \vec{D} : \vec{D} + \lambda (\operatorname{div}(\vec{v}))^2 \\ -\vec{q} \cdot \vec{\nabla}(T) &= k \left(\vec{\nabla}(T) \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Ces deux termes de production d'entropie sont donc bien positifs (ouf) pour les fermeture usuels.

3.5 Fermeture des équations

Récapitulatif des équations

Au final, on dispose de 3 équations bilans : conservation de la masse, bilan de quantité de mouvement, bilan d'énergie interne (ou totale selon que l'on cherche des solutions analytiques ou numériques), ainsi que de la relation de Gibbs, soit :

$$\text{Bilan de masse : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (22)$$

$$\text{Bilan de quantité de mouvement : } \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) \right] = \text{div}(\vec{\sigma}) + \vec{f}_v \quad (23)$$

$$\text{Bilan d'énergie interne : } \rho \frac{de}{dt} = \vec{\sigma} : \vec{D} - \text{div}(\vec{q}) + r \quad (24)$$

$$\text{Loi de Gibbs : } de = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (25)$$

Lois de comportement et termes sources

Bien sûr pour compléter ces équations bilans, il faut disposer (i) de lois de comportements qui permettent de modéliser la réponse dynamique (tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$) et thermique (\vec{q}) du fluide et (ii) de l'expression des termes sources volumiques de force \vec{f}_v et de chaleur r . Ces lois de comportement dépendent bien sûr des fluides considérés. Pour un fluide Newtonien compressible l'expression du tenseur des contraintes est :

$$\vec{\sigma} = -p \vec{1} + 2\mu \vec{D} + \lambda \text{div}(\vec{v}) \vec{1}$$

où μ et λ désignent respectivement la viscosité de cisaillement et le deuxième coefficient de viscosité. Ce dernier coefficient est situé devant un terme proportionnel à $\text{div}(\vec{v})$. Il joue donc un rôle uniquement dans les écoulements compressibles et est dû aux pertes visqueuses lorsqu'une particule fluide est comprimée. Bien que des références à ce deuxième coefficient de viscosité apparaissent dans le livre de Sir Horace Lamb "Hydrodynamics" par analogie avec les deux coefficients de Lamé, il est formellement introduit bien plus tard en 1942 par L. Tisza, un chercheur du MIT. L'introduction de ce deuxième coefficient fait suite à des expériences de mesure de l'atténuation des ondes acoustiques qui diffèrent avec les prédictions théoriques (à l'époque les équations introduites par Stokes) et les expériences. En effet, le deuxième coefficient de viscosité joue un rôle fondamental sur l'atténuation des ondes acoustiques qui provient essentiellement de la dissipation visqueuse et thermique. Se basant sur une analogie avec la mécanique des solides, L. Tisza introduit ce deuxième coefficient de viscosité pour tenir compte de ces différences.

Ensuite, la loi de Fourier pour un fluide homogène isotrope s'écrit sous la forme :

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$$

Il est important de noter que cette loi n'est valide que pour des fluides homogènes isotropes. Dans le cas général, \vec{k} est un tenseur d'ordre 2 et la loi s'écrit : $\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$.

Sur la nécessité de lois d'état

Au final, si l'on remplace les lois de comportement dans les équations bilans, et que l'on suppose les expressions des termes sources connues, il reste 7 inconnus : la masse volumique ρ , les 3 composantes de la vitesse \vec{v} , la pression p , la température T et l'énergie interne e . On dispose de 5 équations (Bilan de

masse, 3 projections du bilan de quantité de mouvement, bilan d'énergie interne). La loi de Gibbs permet uniquement de substituer comme inconnue l'entropie à l'énergie interne. Il manque donc 2 lois d'état pour fermer totalement le système d'équations dans le cas général.

4 Signification physique des équations bilans d'un fluide Newtonien homogène

4.1 Signification physique des termes

Si l'on remplace les lois de comportements dans les équations précédentes, celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \text{CM : } & \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Instationnaire}} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\
 \text{BQM : } & \underbrace{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) \right]}_{\text{Instationnaire Convectif}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{Gradient de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}_{\text{Diffusif visqueux}} + \underbrace{(\lambda + \mu) \vec{\nabla} \text{div}(\vec{v})}_{\text{Compressible visqueux}} + \underbrace{\vec{f}_v}_{\text{Force volumique}} \\
 \text{BEi : } & \underbrace{\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(e) \right]}_{\text{Instationnaire Convection therm.}} = \underbrace{-p \text{div}(\vec{v})}_{\text{Puiss. dév. par les forces de pression}} + \underbrace{2\mu \vec{D} : \vec{D} + \lambda (\text{div}(\vec{v}))^2}_{\text{Echauffement visqueux}} + \underbrace{k \Delta T}_{\text{Conduction thermique}} + \underbrace{r}_{\text{Source de chaleur}}
 \end{aligned}$$

4.2 Sur les nonlinéarités

Attention, il faut être très prudent lorsque l'on simplifie des termes dans ces équations (notamment en présence de non-linéarités). En effet, pour des équations linéaires, les symétries (spatiales et temporelles) imposées par les conditions limites sont vérifiées dans le volume. Ce n'est pas le cas pour les équations non linéaires. Ci-dessous sont soulignés tous les termes non linéaires des équations dans le cas compressible :

$$\text{Bilan de masse : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\text{div}(\rho \vec{v})}_{NL} = 0 \quad (26)$$

$$\text{Bilan de quantité de mouvement : } \rho \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) \right]}_{NL} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \text{div}(\vec{v}) + \vec{f}_v \quad (27)$$

$$\text{Bilan d'énergie interne : } \rho \underbrace{\left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(e) \right]}_{NL} = \underbrace{-p \text{div}(\vec{v}) + 2\mu \vec{D} : \vec{D} + \lambda (\text{div}(\vec{v}))^2}_{NL} + k \Delta T + r \quad (28)$$

plus bien sûr les nonlinéarités des équations d'état.

Dans le cas incompressible les équations se réduisent à :

$$\text{Bilan de masse : } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (29)$$

$$\text{Bilan de quantité de mouvement : } \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v})}_{NL} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}_v \quad (30)$$

$$\text{Bilan d'énergie interne : } \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(e)}_{NL} \right] = \underbrace{2\mu \vec{D} : \vec{D}}_{NL} + k \Delta T + r \quad (31)$$

et les non linéarités sont donc bien sûr moins nombreuses puisque la densité ρ devient un paramètre et non une variable.

La bonne procédure est donc celle décrite dans le chapitre suivant : (i) regarder si les effets de compressibilité jouent un rôle ou non, (ii) calculer les nombres sans dimension intervenant dans les équations et simplifier les termes correspondant, (iii) regarder s'il reste des termes non linéaires et le cas échéant simplifier les équations en tenant compte des symétries (spatiales et temporelles) imposées par les conditions limites.

4.3 Bilan de quantité de mouvement et d'énergie : couplage dans les cas compressible et incompressible

Dans le *cas compressible*, les équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie sont fortement couplées via les variations de la densité ρ .

Dans le *cas incompressible*, le bilan de quantité de mouvement peut être résolu indépendamment de l'équation de conservation de l'énergie. En revanche, la connaissance du champ de vitesse (et donc la résolution de la dynamique de l'écoulement) est nécessaire pour résoudre l'équation de bilan d'énergie. C'est ce que l'on appelle un couplage faible. Les deux équations peuvent être résolues séquentiellement.

5 Les conditions limite

5.1 Condition limite à l'interface entre deux fluides

5.2 Condition limite approchée entre un fluide et un solide

Nous considérons ici qu'il n'y a pas de changement de phase entre le solide et le fluide.

5.2.1 La condition d'adhérence

5.2.2 La condition de glissement de Navier

5.2.3 Les conditions thermiques

5.3 Condition réelle entre un fluide et un solide