Opérades et espaces de lacets

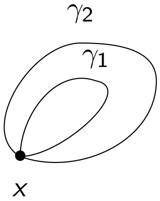
Marvin VERSTRAETE

Séminaire des doctorants
8 Novembre 2023

Laboratoire Paul Painlevé
Université de Lille
CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS

Introduction

Un des principaux objectifs de la topologie est de classifier, à homéomorphisme près, les espaces topologiques.
Un des premiers outils considérés fut le *groupe fondamental* $\pi_1(X, x)$ associé à un espace topologique pointé (X, x):



Théorème

Une liste complète et réduite des surfaces compactes, connexes et orientables est donnée par:

$$\{\mathbb{S}^2\} \cup \{\mathbb{T}^n, n \geqslant 1\}.$$

Introduction

Plus généralement, on peut définir $\pi_n(X,x)$ pour $n \geqslant 2$, mais les calculs sont plus compliqués.
Cependant, si $\Omega(X,x)$ désigne l'espace des lacets de (X,x), alors:

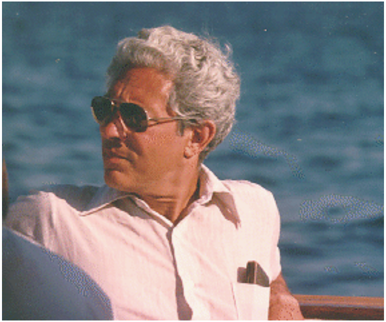
$$\pi_{n+1}(X,x) \simeq \pi_n(\Omega(X,x),x).$$

Question

A quelle condition sur Y a-t-on l'existence d'un X tel que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\pi_n(Y) \simeq \pi_n(\Omega X) \ ?$$

Introduction



En 1972, Jon Peter May étudie ces espaces de lacets, et remarque que ceux-ci sont munis d'opérations généralisant la concaténation.

Cela le mena à introduire un nouvel objet en topologie algébrique: les opérades.

Plan

1. Théorie des opérades
   - Idées et définition
   - Représentation en arbres
   - Algèbre sur une opérade
2. Opérade des petits cubes et espaces de lacets
   - Espaces de lacets et groupes d'homotopie
   - Opérade des petits cubes

Théorie des opérades

Opérades: une définition intuitive

"Définition"

Une opérade est une suite d'espaces vectoriels $(\mathcal{P}(n))_n$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ mime un espace de fonctions à n variables, et une sortie.

Remarque

Plutôt que des espaces vectoriels, on peut prendre

- des espaces topologiques
- des $\mathbb{K}$-modules
- des complexes de chaine
- plus généralement, des objets de n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique

Exemple fondamental: l'opérade des endomorphismes

$$\mathrm{End}_V = (\mathcal{L}(V^n, V))_{n\geqslant 0}$$

- Une composition: $\forall f \in \mathcal{L}(V^2, V)$, $g \in \mathcal{L}(V^3, V), h \in \mathcal{L}(V^2, V)$,

$$f(g,h)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(g(x_1, x_2, x_3), h(x_4, x_5))$$
$$(f \circ_2 h)(x_1, x_2, x_3) = f(id, h)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, h(x_2, x_3))$$

- Un morphisme identité $id_V \in \mathcal{L}(V, V)$:

$$id_V \circ_1 f = f = f \circ_1 id_V$$

- Une action de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{L}(V^n, V)$ pour tout $n \geqslant 0$:

$$(\sigma.g)(x_1, x_2, x_3) = g(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

Opérades: une vraie définition !

Définition

Une *opérade* est une suite d'espaces vectoriels $(\mathcal{P}(n))_{n\geqslant 0}$ munie:

- d'opérations de compositions partielles

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \longrightarrow \mathcal{P}(n+m-1)$$

- d'un morphisme $id \in \mathcal{P}(1)$
- d'une action de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 0$

satisfaisant des relations d'associativité, de symétrie et d'unité.

Opérades: une vraie définition !

Ces données doivent satisfaire les relations suivantes:

- d'associativité: $\forall f \in \mathcal{P}(n), g \in \mathcal{P}(m), h \in \mathcal{P}(l)$,

$$\forall 1 \leqslant i < k \leqslant n, (f \circ_k h) \circ_i g = (f \circ_i g) \circ_{k+m-1} h$$

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m, f \circ_i (g \circ_j h) = (f \circ_i g) \circ_{i+j-1} h$$

- d'unité:

$$\forall i, f \circ_i id = f = id \circ_1 f$$

- de symétrie:

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_m, f \circ_i (\sigma.g) = (id_{1,i-1} \oplus \sigma \oplus id_{i+m,n+m-1}).(f \circ_i g)$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, (\sigma.f) \circ_i g = \sigma(\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, m, \underbrace{1, ..., 1}_{l-i})^{-1}.(f \circ_{\sigma(i)} g)$$

Représentation en arbres

Dans la pratique, on identifie les éléments $f \in \mathcal{P}(n)$ d'une opérade avec des arbres à n entrées et 1 sortie:

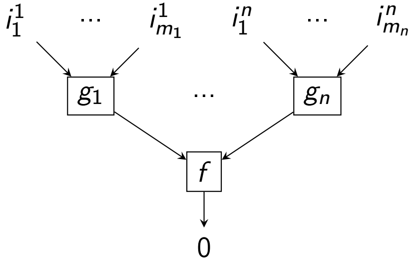
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \cdots & n \arrow[dl] \\ & \boxed{f} \arrow[d] & \\ & 0 & \end{tikzcd} \qquad .$$

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, l'élément $\sigma.f \in \mathcal{P}(n)$ est représenté par l'arbre:

$$\begin{tikzcd} \sigma^{-1}(1) \arrow[dr] & \cdots & \sigma^{-1}(n) \arrow[dl] \\ & \boxed{f} \arrow[d] & \\ & 0 & \end{tikzcd} \qquad .$$

Représentation en arbres

On peut de même représenter une composée de la forme:

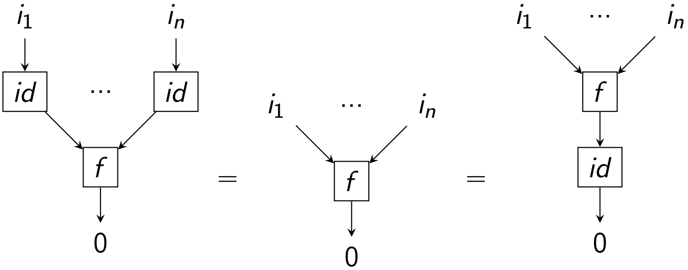


.

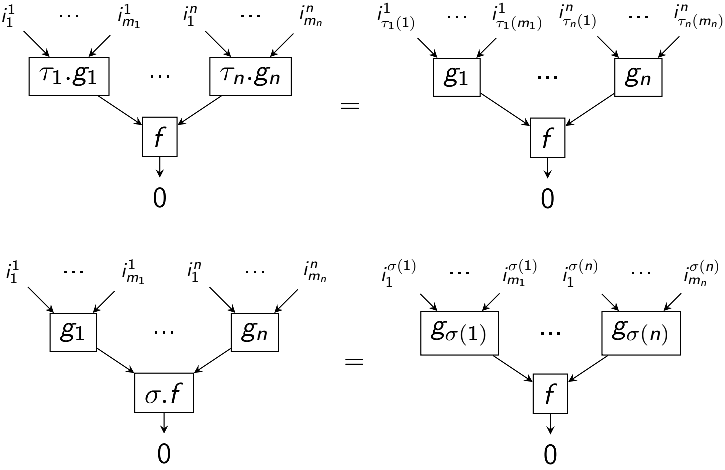
où $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_k \in \mathcal{P}(m_k)$ et $1 \leqslant i_l^k \leqslant \sum_{k=1}^n m_k$.

On peut utiliser la représentation en arbres pour écrire les axiomes d'une opérade.

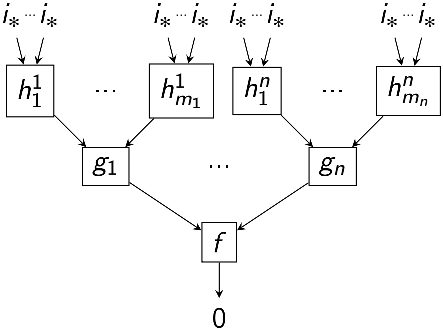
- Axiomes d'unité:



- Axiomes de symétrie: $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall \tau_i \in \mathcal{S}_{m_i}$,



- L'axiome d'associativité donne, entre autre, sens à l'arbre suivant:



.

Définition

Une *algèbre* sur une opérade $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'opérations:

$$\lambda : \mathcal{P}(n) \times A^n \longrightarrow A$$

satisfaisant des relations de symétrie, d'unité et de compatibilité avec la composition dans $\mathcal{P}$.

On note $\lambda(f, a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n)$. On peut représenter cet élément b par l'arbre:

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[dr] & \cdots & a_n \arrow[dl] \\ & \boxed{f} \arrow[d] & \\ & b & \end{tikzcd} .$$

Algèbre sur une opérade

La structure d'algèbre doit satisfaire les relations suivantes:

- d'associativité: $\forall f \in \mathcal{P}(n), \forall g \in \mathcal{P}(m)$,

$$f(a_1, ..., a_{i-1}, g(a_i, ..., a_{i+m-1}), a_{i+m}, ..., a_n) = (f \circ_i g)(a_1, ..., a_n)$$

- d'unité:

$$id(a) = a$$

- de symétrie:

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, (\sigma.f)(a_1, ..., a_n) = f(a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)})$$

Exemple: l'opérade $\mathcal{C}om$

On définit $\mathcal{C}om(n) = (X_1 \ldots X_n)\ \mathbb{K}$ pour tout $n \geqslant 0$, munie de l'action triviale de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{K}$, et de la composition obtenue par substitution des variables.

Théorème

Se donner une structure de $\mathcal{C}om$-algèbre équivaut à se donner une structure d'algèbre commutative et associative.

Preuve:
Si E est une $\mathcal{C}om$-algèbre, on pose $x.y = (X_1X_2)(x, y)$.
Réciproquement, si E est une algèbre commutative de loi ., on pose $(X_1 \ldots X_n)(x_1, \ldots, x_n) = x_1.x_2. \ldots .x_n$.

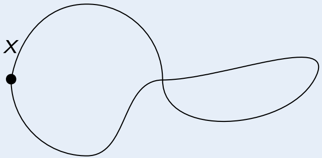
Opérade des petits cubes et espaces de lacets

Espaces de lacets et concaténations

Soit $I = [0;1]$.

Définition

Soit (X, x) un espace topologique pointé ($x \in X$). Un k-lacet dans (X, x) est une application continue $\varphi : I^k \longrightarrow X$ qui est constante sur ∂I^k égale à x.



On note $\Omega^k(X, x)$ l'ensemble des k-lacets de X basés en x.

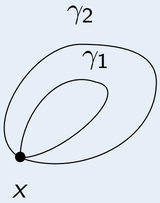
Si X est connexe par arcs, on note plutôt $\Omega^k X$.

La concaténation de lacets

Définition

Soit γ_1, γ_2 deux k-lacets de X. On définit la *concaténation* de γ_1 et γ_2 par:

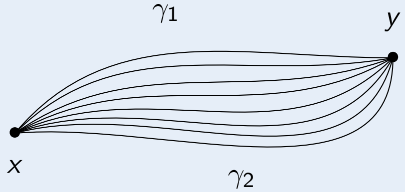
$$\gamma_1 \star \gamma_2(t_1, ..., t_k) = \begin{cases} \gamma_1(2t_1, t_2, ..., t_k) & \text{si} \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t_1 - 1, t_2, ..., t_k) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$



Relation d'homotopie

Définition

Deux k-lacets $\gamma_1, \gamma_2 : I^k \longrightarrow X$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : I^k \times I \longrightarrow X$ tel que $H(-,0) = \gamma_1$, $H(-,1) = \gamma_2$ et $\forall t \in I, H(\partial I^k, t) \subset \{x\}$:

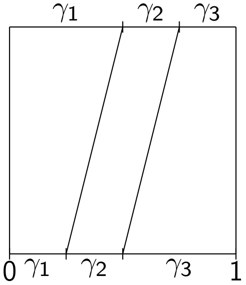


Ceci définit une relation d'équivalence sur $\Omega^k X$.

La concaténation de lacets

Le produit $\star$ est associatif à homotopie près:

$$\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3)$$



$$(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$$

Groupes d'homotopies supérieurs

Théorème

Pour tout $n \geqslant 1$, l'espace de n-lacets basés en x quotienté par la relation d'homotopie est un groupe muni du produit $\star$.
Ce groupe est appelé n-ème groupe d'homotopie, noté $\pi_n(X, x)$.

Si X est connexe par arcs, ce groupe ne dépend pas de x à isomorphisme près: on le note dans ce cas $\pi_n(X)$.

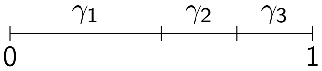
Remarque

$$\pi_n(\Omega^k X) \simeq \pi_{n+k}(X).$$

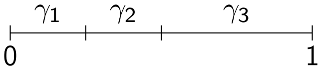
Sur la structure de $\Omega^k X$

On a plusieurs opérations particulières:

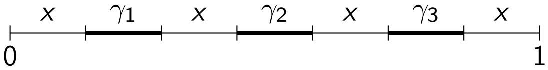
$$\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3) :$$



$$(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3 :$$



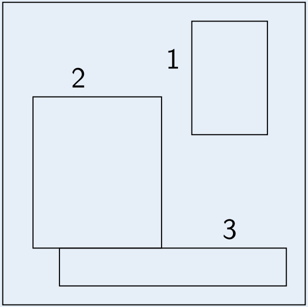
Plus généralement:



L'opérade des petits cubes $\mathcal{C}_k$

Définition

Soit $k \geqslant 1$. Un *k petit cube d'ordre N* est une application continue $\coprod_{n=1}^{N} I^k \longrightarrow I^k$ injective en l'intérieur et qui préserve le parallélisme.
On note $\mathcal{C}_k(N)$ l'espace topologique formé par ces applications.

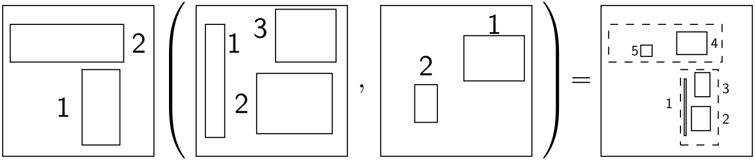


L'opérade des petits cubes $\mathcal{C}_k$

Proposition

Pour tout $k \geqslant 1$, $\mathcal{C}_k$ admet une structure d'opérade.

Preuve: (idée)

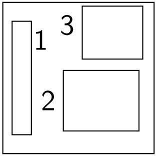


Espaces de lacets et $\mathcal{C}_k$-algèbres

Proposition

Les espaces de k-lacets $\Omega^k X$ sont des $\mathcal{C}_k$-algèbres.

Preuve: (idée)
Visuellement, pour $k = 2$, on pose:



$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(s,t) = \begin{cases} \gamma_1(s,t) & \text{si} \quad (s,t) \in \boxed{1} \\ \gamma_2(s,t) & \text{si} \quad (s,t) \in \boxed{2} \\ \gamma_3(s,t) & \text{si} \quad (s,t) \in \boxed{3} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème (de reconnaissance de May, 1972)

Soit Y un espace topologique connexe ayant une structure de $\mathcal{C}_k$-algèbre. Alors il existe un espace topologique X tel que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\pi_n(Y) \simeq \pi_n(\Omega^k X).$$

Références

- Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic Operads*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 2012. isbn: 978-3-642-30362-3.
- Benoit Fresse. *Homotopy of operads & Grothendieck-Teichmüller groups*. American Mathematical Society. 2017. isbn: 9781470434816.
- Maru Sarazola. *Loop spaces and operads.* PDF.
- Jon Peter May. *The geometry of iterated loop spaces*. 1972.