Déformation contrôlée par une algèbre pré-Lie à puissances divisées

Marvin VERSTRAETE

Séminaire des doctorants de Calais
15 février 2024

Laboratoire Paul Painlevé
Université de Lille
CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS

Plan

1. Théorie des opérades
   - Idées et définition
   - Algèbre sur une opérade
   - Exemple: algèbres pré-Lie
2. Algèbres pré-Lie à puissances divisées
   - Opérations brace à poids
   - Notion de groupe de jauge et d'éléments de Maurer-Cartan
3. Classification de structures à homotopie près
   - Structure de $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ algèbre d'une opérade
   - Morphismes de $\mathcal{A}s_\infty$ vers $\mathcal{P}$

Théorie des opérades

Opérades: définition

Définition

Une *opérade* est une suite d'espaces vectoriels $(\mathcal{P}(n))_{n \geqslant 0}$ munie:

- d'opérations de compositions partielles

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \longrightarrow \mathcal{P}(n+m-1)$$

- d'un élément $id \in \mathcal{P}(1)$
- d'une action de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 0$

satisfaisant des relations d'associativité, de symétrie et d'unité.

Exemple: opérade des endomorphismes

Soit V un espace vectoriel. On définit

$$End_V(n) = \mathcal{L}(V^n, V).$$

Alors End_V admet une structure d'opérade où:

- $\forall f \in End_V(n), g \in End_V(m)$,

$$(f \circ_i g)(v_1, ..., v_{n+m-1}) = f(v_1, ..., v_{i-1}, g(v_i, ..., v_{i+m-1}), v_{i+m}, ..., v_{n+m-1}).$$

- $id = id_V$.
- $(\sigma.f)(v_1, ..., v_n) = f(v_{\sigma^{-1}(1)}, ..., v_{\sigma^{-1}(n)})$.

On appelle cette opérade *opérade des endomorphismes* associé à V.

Algèbre sur une opérade

Définition

Une *algèbre* sur une opérade $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'opérations:

$$\lambda_n : \mathcal{P}(n) \times A^n \longrightarrow A$$

satisfaisant des relations de symétrie, d'unité et de compatibilité avec la composition dans $\mathcal{P}$.

On note en général $\lambda_n(f, a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n)$.

Remarque

Se donner une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A est équivalent à se donner un morphisme

$$\mathcal{P} \longrightarrow End_A$$

préservant l'action du groupe symétrique et la composition opéradique.

Exemple: Il existe une opérade $\mathcal{A}s$ telle que ses algèbres soient précisément les algèbres associatives.

Algèbre pré-Lie

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition

Une algèbre pré-Lie est un espace vectoriel L muni d'une opération $\star$ bilinéaire telle que:

$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (x \star z) \star y - x \star (z \star y).$$

Remarque

Toute algèbre pré-Lie est une algèbre de Lie avec:

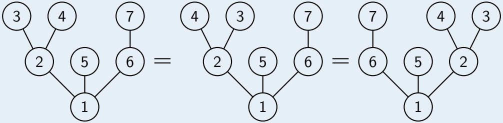
$$[x, y] = x \star y - y \star x.$$

Arbres étiquetés enracinés non planaires

On cherche une opérade dont les algèbres définissent les algèbres pré-Lie.

Définition

Un arbre non planaire à $n \geqslant 0$ sommets est la donnée d'un graphe simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$ muni de n sommets étiquetés de 1 à n, et d'un choix d'un sommet particulier appelé la racine (qu'on met en bas par convention):



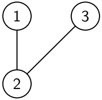
On note $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie(n)$ l'espace vectoriel engendré par les arbres à n sommets.

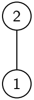
Structure d'opérade de $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$

Proposition

$\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ est munie d'une structure d'opérade, appelée l'opérade des arbres enracinés.

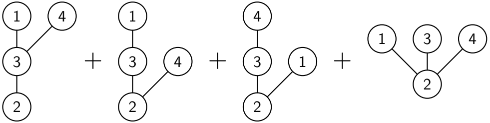
Preuve: (idée) Si T et S sont deux arbres, on définit $T \circ_i S$ comme étant la somme de tous les arbres obtenus en remplaçant le sommet i de T par l'arbre S. Par exemple, si on prends les arbres suivants:

$T =$ 

; $S =$ 

,

on obtient:

$T \circ_2 S =$ 

.

Les $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ algèbres

Définition

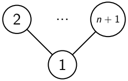
Soit L une algèbre pré-Lie. On définit les opérations *braces symétriques* $-\{-,\ldots,-\} : L^{n+1} \longrightarrow L$ par $x\{y\} = x \star y$ et

$$x\{y_1,\ldots,y_{n+1}\} = x\{y_1,\ldots,y_n\}\{y_{n+1}\} - \sum_{k=1}^{n} x\{y_1,\ldots,y_k \star y_{n+1},\ldots,y_n\}.$$

Théorème (Chapoton-Livernet, 2000)

Se donner une structure d'algèbre pré-Lie équivaut à se donner une structure de $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$-algèbre.

L'action d'une corolle est donnée par:



$$(x, y_1,\ldots,y_n) = x\{y_1,\ldots,y_n\}$$

Les relations recherchées proviennent directement de la structure opéradique de $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$.

Algèbres pré-Lie à puissances divisées

Algèbres pré-Lie à puissances divisées

Définition

Une *algèbre pré-Lie à puissances divisées* (ou $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ algèbre) est un espace vectoriel L munie d'opérations $-\{-,\dots,-\}_{r_1,\dots,r_n} : L^{n+1} \longrightarrow L$ pour tout entiers naturels $r_1,\dots,r_n \geqslant 0$ qui miment les quantités

$$x\{y_1,\dots,y_n\}_{r_1,\dots,r_n} = \frac{1}{\prod_i r_i!} x\{\underbrace{y_1,\dots,y_1}_{r_1},\dots,\underbrace{y_n,\dots,y_n}_{r_n}\}.$$

Entre autre, ces opérations satisfont la formule de distributivité
$x\{y_1,\dots,y_n\}_{r_1,\dots,r_n}\{z_1,\dots,z_m\}_{s_1,\dots,s_m} =$

$$\sum x\{y_1\{z_1,\dots,z_m\}_{\alpha_1^{1,1},\dots,\alpha_m^{1,1}},\dots,y_1\{z_1,\dots,z_m\}_{\alpha_1^{1,k_1},\dots,\alpha_m^{1,k_1}},\dots,y_n\{z_1,\dots,z_m\}_{\alpha_1^{n,1},\dots,\alpha_m^{n,1}},$$

$$\dots,y_n\{z_1,\dots,z_m\}_{\alpha_1^{n,k_n},\dots,\alpha_m^{n,k_n}},z_1,\dots,z_m\}_{t_1^1,\dots,t_1^{k_1},\dots,t_n^1,\dots,t_n^{k_n},\beta_1,\dots,\beta_m}.$$

Le groupe de jauge dans une $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$-algèbre

Soit L une $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ algèbre graduée $L \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$.

Définition

On définit le produit circulaire de $x \in L$ par $1 + y \in 1 + L_0$ par:

$$x \circledcirc (1+y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\{y\}_n.$$

Théorème (V., 2022)

$(1 + L_0, \circledcirc, 1)$ est un groupe muni de la loi $\circledcirc$ définie par:

$$(1+\mu) \circledcirc (1+\nu) = 1 + \nu + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\{\nu\}_n.$$

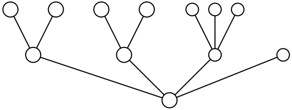
Ce groupe est appelé *groupe de jauge associé à L*.

Le produit circulaire dans une $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$-algèbre

Preuve: Le neutre est 1, et on vérifie aisément l'associativité de la loi $\circledcirc$. La réelle difficulté est de trouver l'inverse.
L'inverse est explicitement donné par

$$(1-\mu)^{\circledcirc -1} = 1 + \sum_{t \in nl\mathcal{T}} \mathcal{O}t(\mu)$$

où, pour un arbre non étiqueté t, l'élément $\mathcal{O}t(\mu)$ est donné par les braces à poids appliquées à μ selon t. Par exemple, si

$t =$ .

alors $\mathcal{O}t(\mu) = \mu\{\mu\{\mu\}_2, \mu\{\mu\}_3, \mu\}_{2,1,1}$.

Différentielle et éléments de Maurer-Cartan

Soit $L \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ une $\Gamma\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ algèbre.

Définition

Une différentielle sur L est un endomorphisme d de L tel que $d(L_n) \subset L_{n-1}$, $d \circ d = 0$ et

$$d(x\{y_1, \dots, y_n\}_{r_1,\dots,r_n}) = d(x)\{y_1, \dots, y_n\}_{r_1,\dots,r_n}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \pm x\{y_1, \dots, y_k, d(y_k), \dots, y_n\}_{r_1,\dots,r_k-1,1,\dots r_n}.$$

Définition

Un élément de Maurer-Cartan est un object $x \in L_{-1}$ tel que

$$d(x) + x\{x\}_1 = 0.$$

On note $\mathcal{MC}(L)$ l'ensemble de tels éléments.

Action du groupe de jauge sur $\mathcal{MC}(L)$

Théorème (V., 2022)

Le groupe $(1 + L_0, \circledcirc, 1)$ agit sur $\mathcal{MC}(L)$ via:

$$(1+\mu).\alpha = (\alpha + \mu\{\alpha\}_1 - d(\mu)) \circledcirc (1+\mu)^{\circledcirc -1}.$$

Remarque

La théorie de la déformation précédemment définie généralise celle dans les algèbres pré-Lie en caractéristique nulle, où le groupe de jauge $(L_0, BCH, 0)$ est donné par

$$BCH(x,y) = log(exp(x).exp(y))$$

et l'action du groupe de jauge $(L_0, BCH, 0)$ est donné par

$$\lambda.x = e^{ad(\lambda)}(x) + \frac{id - e^{ad(\lambda)}}{ad(\lambda)}(d(\lambda)).$$

Classification de structures à homotopie près

Structure d'algèbre pré-Lie à puissances divisées d'une opérade

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ une dg opérade telle que $\mathcal{P}(0) = 0$. Alors $\prod_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ est une algèbre pré-Lie à puissances divisées via

$$f\{g_1, \dots, g_n\}_{r_1, \dots, r_n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_{r_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{r_n}} f(id, \dots, id, h_{\sigma(1)}, id, \dots, id, h_{\sigma(\sum_i r_i)}, id, \dots, id)$$

où $(h_1, \dots, h_{\sum_i r_i}) = (\underbrace{g_1, \dots, g_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{g_n, \dots, g_n}_{r_n})$.

On notera Γ son groupe de jauge.

Algèbres associatives à homotopie près

Définition

Une algèbre associative à homotopie près est un espace vectoriel gradué muni d'opérations de degré -1

$$m_n : A^n \longrightarrow A$$

pour $n \geqslant 1$, satisfaisant les relations de compatibilité suivantes:

$$\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant q\leqslant p-n}} \pm m_{q-p+1}(a_1, ..., a_q, m_p(a_{q+1}, ..., a_{p+q}), a_{p+q+1}, ..., a_n) = 0.$$

Interprétation des formules:

- $n = 1$, $d = m_1$ est une différentielle: $m_1 \circ m_1 = 0$.
- $n = 2$, $d(m_2(a, b)) = m_2(d(a), b) \pm m_2(a, d(b))$.
- $n = 3$, $m_2(m_2(a, b), c) - m_2(a, m_2(b, c)) =$ $\pm m_3(d(a), b, c) \pm m_3(a, d(b), c) \pm m_3(a, b, d(c)) \pm d(m_3(a, b, c))$ ou encore

$$m_2(m_2(a, b), c) - m_2(a, m_2(b, c)) = \partial(m_3)(a, b, c).$$

L'opérade $\mathcal{A}s_\infty$

On peut définir $\mathcal{A}s$ par $\mathcal{A}s(n) = \mathbb{K}[\mathcal{S}_n] = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$.

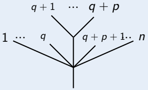
Définition

On définit l'opérade $\mathcal{A}s_\infty$ par

$$\mathcal{A}s_\infty = \left(\mathcal{F}\left(s^{-1} \overset{1 \quad 2}{\curlyvee}, s^{-1} \overset{1\ 2\ 3}{\Psi}, \dots \right), d \right)$$

où d est la différentielle définie par:

$$d\left(s^{-1} \overset{1\ \cdots\ n}{\curlyvee} \right) = \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant p-n}} \pm s^{-2}$$



Proposition

Les algèbres sous l'opérade $\mathcal{A}s_\infty$ sont précisément les algèbres associatives à homotopie près.

Morphismes de $\mathcal{A}s_\infty$ vers $\mathcal{P}$

Proposition

On a une bijection
$$Mor_{\mathcal{O}p}(\mathcal{A}s_\infty, \mathcal{P}) \simeq \mathcal{MC}(\mathcal{P}).$$

Théorème (V., 2023)

On a une bijection
$$Mor_{\mathcal{O}p}(\mathcal{A}s_\infty, \mathcal{P})/\sim_h \simeq \mathcal{MC}(P)/\Gamma.$$
où $\sim_h$ est la relation d'homotopie.

Remarque

Ce résultat peut se généraliser à n'importe quelle Q-algèbre à homotopie près en posant $Q_\infty = B^c(\mathcal{C})$ pour une certaine coopérade $\mathcal{C}$.