Université de Lille

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département Mathématiques

Master mathématiques
Deuxième année - Parcours recherche

Mémoire de master de recherche

Présenté et soutenu par
VERSTRAETE Marvin

Éléments de Maurer-Cartan et algèbres pré-Lie

Sous la direction de
FRESSE Benoit

Remerciements

Je souhaiterais dans un premier temps remercier chaudement Monsieur FRESSE Benoit de m'avoir proposé ce mémoire et accompagné dans son élaboration. Ses conseils et ses pistes de recherche m'ont permis de rendre ce mémoire complet et riche.

Je remercie ensuite toute la direction du Master 2 Recherche en mathématiques à l'Université de Lille, et plus particulièrement Madame MAÏDA Mylène, pour la gestion exemplaire de ce master m'ayant permis d'acquérir une part non négligeable de connaissances avant de prétendre à l'élaboration d'une thèse, ainsi que de réaliser ce mémoire.

Je remercie par ailleurs Monsieur TUYNMAN Gijs, m'ayant apporté des informations supplémentaires sur certaines structures incluant des algèbres de Lie, et par extension pour son cours du premier semestre qui me donne une base de connaissances solides en géométrie différentiel, intervenant brièvement dans les premières pages dans ce mémoire.

Pour leur présence, leur travail et le plaisir que j'ai eu à discuter avec eux du déroulement de mon année de master 2, je remercie toute l'équipe de la bibliothèque régionale de recherche en mathématiques de l'Université de Lille.

Enfin, je remercie de tout cœur ma famille ainsi que mes plus proches amis qui m'ont encouragés, voir même supportés, pendant l'élaboration de ce mémoire. Je pense plus particulièrement à Monsieur BERNIER Nicolas, mon conseiller personnel en mise en page LaTeX, à Monsieur BELLOT Guillaume, avec qui j'ai pu parler un peu du contenu de ce mémoire avec plaisir, et à Messieurs LEROY Timothée et HOCHMANN Thomas, mes deux plus proches amis extérieurs au monde des mathématiques, pour leur immense soutien dans mes moments de doutes.

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est de comprendre les applications des algèbres pré-Lie dans l'étude des équations de Maurer-Cartan. Les équations de Maurer-Cartan apparaissent dans le contexte de la déformation de structures algébriques. Pour caractériser des déformations à isomorphisme près, on construit les espaces de modules, des espaces topologiques dont les composantes connexes donnent les classes d'isomorphismes des déformations. Une façon de construire de tels espaces est de caractériser les déformations par des équations algébriques appelées les équations de Maurer-Cartan :

$$d(\alpha) + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0,$$

dans une algèbre de Lie différentielle graduée ($L = \bigoplus_{n \geqslant 0} L^n, [.,.], d$). On note $\mathcal{MC}(L)$ la variété de Maurer-Cartan, l'ensemble des éléments de degré 1 satisfaisant l'équation de Maurer-Cartan. Sous des hypothèses de nilpotence, ou dans un cadre formel, on peut définir le groupe de jauge Γ comme étant L^0, muni de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff BCH. Ce groupe agit sur $\mathcal{MC}(L)$ par :

$$\lambda.\alpha = e^{ad(\lambda)}(\alpha) + \frac{Id - e^{ad(\lambda)}}{ad(\lambda)}(d\lambda).$$

Si on tensorise L par une algèbre locale artinienne A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, cette action permet de définir le groupoïde $\mathcal{C}(L, A)$ comme étant la catégorie formée par les éléments de Maurer-Cartan dans $L^1 \otimes \mathfrak{m}$, et où les morphismes de α vers β sont donnés par les éléments $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ qui satisfont $\beta = \lambda.\alpha$. Dans la littérature, ce groupoïde est parfois appelé groupoïde de Deligne.

On dispose d'un résultat, dû à W.Goldman et J.Millson (voir [GM88]), qui donne le comportement de ce groupoïde si on change L par une autre algèbre de Lie différentielle graduée qui lui est, par exemple, faiblement isomorphe :

Théorème (Goldman-Millson)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soit $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées induisant deux isomorphismes $H^0(L) \longrightarrow H^0(\overline{L})$, $H^1(L) \longrightarrow H^1(\overline{L})$ et un monomorphisme $H^2(L) \longrightarrow H^2(\overline{L})$ en cohomologie.*
Alors pour toute $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A, le foncteur induit $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$ est une équivalence de groupoïdes.

Ce théorème se place dans un contexte où il est nécessaire de travailler sur un corps de caractéristique nulle. Afin d'espérer une généralisation en caractéristique positive, nous introduisons un nouveau type d'algèbres : les algèbres pré-Lie. Une algèbre pré-Lie (graduée) est un module (gradué) muni d'une loi $\star$ tel que l'associateur est (gradué) symétrique en ses deux dernières variables :

$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (-1)^{|y||z|}((x \star z) \star y - x \star (z \star y)).$$

En particulier, une algèbre pré-Lie (différentielle graduée) induit une algèbre de Lie (différentielle graduée) via le commutateur. Le premier intérêt que nous avons à travailler avec de telles algèbres est que nous pouvons exprimer de façon interne les formules donnant l'action d'un élément λ du groupe de jauge sur un élément de Maurer-Cartan α. Par exemple, si on suppose la loi $\star$ associative, nous avons directement la formule :

$$\lambda.\alpha = e^{\lambda} \star \alpha \star e^{-\lambda}.$$

Cependant, dans le cas général où l'algèbre n'est plus supposée associative, une telle formule n'est plus valable. Pour répondre à ce problème, V.Dotsenko, S.Shadrin et B.Vallette utilisent les résultats de F.Chapoton et M.Livernet dans [CL01] qui permettent de voir les algèbres pré-Lie comme des algèbres sur une opérade. Une opérade est une suite de modules visant à encoder des collections d'opérations. A l'aide des opérades, on peut retrouver certaines structures algébriques, qui sont alors reconstruites uniquement à partir de leurs opérations internes (algèbres associatives, algèbres de Lie ...). Dans [CL01], F.Chapoton et M.Livernet construisent une opérade concrète et simple à manipuler, l'opérade des arbres enracinés $\mathcal{RT}$, nous permettant de caractériser les algèbres pré-Lie. Ceci nous permet de définir les opérations braces symétriques $-\{-,...,-\} : A \times S(A) \longrightarrow A$, où $S(A) = \bigoplus_{n\geqslant 0}(A^{\otimes n})_{\Sigma_n}$, définies par l'action d'une corolle (un arbre dont tous les sommets sont reliés à la racine) sur cette algèbre, qui, en fait, caractérisent les algèbres pré-Lie (J-M.Oudom et D.Guin, voir [OG]). Sous des hypothèses de convergence, nous pouvons alors définir le produit circulaire :

$$a \circledcirc (1+b) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} a\{\underbrace{b,...,b}_{n}\}.$$

Cette loi a l'avantage de bien se comporter avec l'application exponentielle $exp : L^0 \longrightarrow 1 + L^0$, où la puissance est définie en itérant le produit $\star$ à droite, ainsi que de permettre d'exprimer l'action d'un élément du groupe de jauge sur un élément de Maurer-Cartan aisément en terme de $\star$ et $\circledcirc$:

Théorème (Dotsenko-Shadrin-Vallette)**.** *Pour tout $x, y \in L^0$, nous avons l'égalité :*

$$e^{BCH(x,y)} = e^x \circledcirc e^y.$$

En particulier, l'application exponentielle induit un isomorphisme de groupes entre $(L^0, BCH, 0)$ et $(1 + L^0, \circledcirc, 1)$. De plus, l'action du groupe de jauge Γ sur la variété de Maurer-Cartan est donnée par :

$$\lambda.\alpha = (e^\lambda \star \alpha - d(e^\lambda - 1)) \circledcirc e^{-\lambda}.$$

Ce théorème est central dans notre volonté de généraliser les résultats précédents en caractéristique positive : l'isomorphisme entre le groupe de jauge et le groupe des éléments group-like $G = (1 + L^0, \circledcirc, 1)$, ainsi que l'expression de l'action de Γ sur $\mathcal{MC}(L)$ donnée par ce théorème, nous ramènent à vouloir voir la loi $\circledcirc$, a priori définie sur un $\mathbb{Q}$-module, comme une expression sur un $\mathbb{Z}$-module. Les termes composant la loi $\circledcirc$ peuvent faire penser à des algèbres particulières appelées algèbres à puissances divisées. Ce sont des algèbres associatives et commutatives munies d'opérations γ_n qui visent à mimer les quantités $\frac{1}{n!}x^n$. On peut montrer que se donner une telle structure sur une algèbre revient à se donner une structure de Γ-algèbre, c'est-à-dire une algèbre sur la monade $\Gamma(Com, -)$ où Com est l'opérade qui encode les opérations d'une algèbre associative et commutative.

Nous inspirant de cette situation, on peut conjecturer que se donner une structure de $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$-algèbre (on parle aussi d'algèbre pré-Lie à puissances divisées) nous permet de répondre à notre problème. Dans sa thèse, A.Césaro étudie en particulier la monade $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$ (voir [Ces], ainsi que la thèse de Sacha Ikonicoff [Iko] pour une généralisation de cette étude), où il démontre que les $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$-algèbres sont en particulier des Cor-algèbres, des algèbres munies d'opérations braces $-\{-,...,-\}_{r_1,...,r_n}$ satisfaisant, entre autres, des formules de symétrie et de distributivité, visant à mimer les opérations suivantes en caractéristique nulle :

$$x\{y_1,...,y_n\}_{r_1,...,r_n} = \frac{1}{\prod_i r_i!} x\{\underbrace{y_1,...,y_1}_{r_1},...,\underbrace{y_n,...,y_n}_{r_n}\}.$$

Sur une Cor-algèbre différentielle graduée, nous pouvons alors redéfinir la variété de Maurer-Cartan ainsi que le groupe de jauge et son action sur $\mathcal{MC}(L)$ en terme de la loi $\circledcirc$ exprimée à l'aide des opérations braces $-\{-,...,-\}_{r_1,...,r_n}$, en nous inspirant des études précédentes. On prouve alors dans ce mémoire le théorème suivant, analogue à celui énoncé précédemment :

Théorème. *Considérons L^0 qu'on identifie formellement à $1+L^0$. Alors $\Gamma = (1+L^0, \circledcirc, 1)$ est un groupe, muni de la loi $\circledcirc$ définie par $(1+\mu)\circledcirc(1+\nu) = 1+\nu+\sum_{n\geqslant 0}\mu\{\nu\}_n$.*
De plus, Γ agit sur la variété de Maurer-Cartan par :

$$(1+\mu).\alpha = (\alpha+\mu\{\alpha\}_1 - d(\mu))\circledcirc(1+\mu)^{\circledcirc -1}.$$

Ceci permet alors de retrouver tout le contexte présenté par W.Goldman et J.Millson dans [GM88] sur un corps de caractéristique quelconque ou même un anneau. En particulier, on obtient une version du théorème de Goldman-Millson en caractéristique positive :

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque. Soit $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ un morphisme de Cor-algèbres différentielles graduées induisant deux isomorphismes $H^0(L)\longrightarrow H^0(\overline{L})$, $H^1(L)\longrightarrow H^1(\overline{L})$ et un monomorphisme $H^2(L)\longrightarrow H^2(\overline{L})$ en cohomologie.*
Alors pour toute $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A, le foncteur induit $\varphi_* : \mathcal{C}(L,A)\longrightarrow\mathcal{C}(\overline{L},A)$ est une équivalence de groupoïdes.

Ce résultat, prouvé sur un corps de caractéristique quelconque, se généralise aisément sur $\mathbb{Z}$, pourvu que les modules L et $\overline{L}$ soient libres.

Un exemple de Cor-algèbre différentielle graduée est fournie par le Hom-objet $Hom(\overline{C},\overline{Q})$, où $\overline{C}$ désigne le co-idéal d'augmentation d'une coopérade coaugmentée C et $\overline{Q}$ désigne l'idéal d'augmentation d'une opérade augmentée Q. On verra que pour cette Cor-algèbre différentielle graduée un élément de Maurer-Cartan correspond à un morphisme d'opérades $\phi : \Omega(C)\longrightarrow Q$, où Ω désigne le foncteur cobar, tandis que l'action de jauge sur les éléments de Maurer-Cartan représente la relation d'homotopie sur les morphismes.
Plus précisément, on expliquera ce résultat dans la section 2.6, dans le cas particulier où Q est une opérade d'endomorphismes $Q = End_V$ et C est la coopérade duale $C = \mathcal{P}^{¡}$ d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$, de sorte que la donnée d'un morphisme d'opérades $\phi : \Omega(\mathcal{P}^{¡})\longrightarrow End_V$ code une structure de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopies cohérentes près sur V.

Cette étude constitue le début d'un programme de recherche pour savoir si $Hom(\overline{C},\overline{Q})$ détermine le type d'homotopie de $Map_{dgOp}(\Omega(C),Q)$, l'espace simplicial des applications opéradiques de $\Omega(C)$ dans Q. Ce résultat est connu en caractéristique nulle, et il s'agit de comprendre ses généralisations possibles en caractéristique positive.

Plan du mémoire

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres et de deux annexes.

Dans le premier chapitre, on rappelle le contexte de la déformation dans une algèbre de Lie différentielle graduée en caractéristique nulle. Nous donnons en particulier la définition de la variété de Maurer-Cartan, et le groupe de jauge ainsi que son action sur la variété. Ceci amène à la définition du groupoïde de Deligne associé à une algèbre de Lie différentielle graduée et à une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne. On énonce enfin le théorème de Goldman-Millson donnant un résultat d'équivalence de groupoïdes.

Le deuxième chapitre consiste à écrire le précédent contexte dans le cas où on remplace l'algèbre de Lie par une algèbre pré-Lie. On définit alors de tels objets, introduit les opérations braces symétriques et construit une opérade, l'opérade des arbres enracinés $\mathcal{RT}$, qui caractérise les algèbres pré-Lie. À l'aide de cette opérade, on démontre certaines formules nous permettant de voir la définition du groupe de jauge et de son action sur la variété de Maurer-Cartan en terme d'une loi notée $\circledcirc$ définie via les braces symétriques.

Dans le troisième chapitre, on étudie avec un peu plus de profondeur le lien entre algèbres pré-Lie et algèbres à braces symétriques. On commence pour cela à donner une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre symétrique $S(L)$ d'une algèbre pré-Lie L, distincte de sa structure d'algèbre de Hopf canonique. Cette construction se fait notamment en étendant la loi $\star$ de L sur $S(L)$. À l'aide de cette structure, on prouve l'équivalence entre la catégorie des algèbres pré-Lie et la catégorie des algèbres à braces symétriques.

Le quatrième chapitre vise à étudier la monade $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$ qui contiendra les opérations nous permettant de retrouver tout le contexte du premier chapitre dans le cas des algèbres pré-Lie graduées munies d'une différentielle en caractéristique positive. Se restreignant d'abord au cas d'un module libre, on donne une formule pour la composition dans la monade $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$, puis on définit les Cor-algèbres, des modules contenant des opérations braces mimant les termes apparaissant dans la définition de $\circledcirc$. On conclut le chapitre en réécrivant les formules rencontrées dans le chapitre 2 en voyant notre algèbre pré-Lie en caractéristique nulle comme une Cor-algèbre.

Dans le cinquième et dernier chapitre, après avoir donné la définition d'une Cor-algèbre différentielle graduée, on définit à nouveau la variété de Maurer-Cartan et le groupe de jauge, en mimant les formules du chapitre 4. On prouve que le groupe de jauge est bien un groupe muni du produit $\circledcirc$, qui agit sur la variété de Maurer-Cartan. On conclut enfin en donnant un théorème de Goldman-Millson dans ce contexte, valable sur un corps de caractéristique quelconque, voir sur $\mathbb{Z}$ si on se restreint à des modules libres.

Le premier chapitre de l'annexe vise à donner les définitions essentielles pour la compréhension de ce mémoire en ce qui concerne les opérades. Ceci inclut en particulier les définitions de base pour la théorie des opérades, ainsi que la définition des monades $S(P, -)$ et $\Gamma(P, -)$ pour une opérade connexe.

Dans le deuxième chapitre de l'annexe, on définit les structures relatives aux algèbres de Hopf, rencontrées dans le chapitre 3 du mémoire. Ce chapitre ne contient, essentiellement, que des définitions utiles pour comprendre ce qu'est une algèbre de Hopf.

Chapitre 1

Équivalence de groupoïdes de Deligne dans une algèbre de Lie

Dans cette partie, nous allons rappeler brièvement la théorie de la déformation usuelle dans une algèbre de Lie différentielle graduée, avant de nous intéresser au groupoïde associé à une algèbre de Lie et à un anneau local artinien. Nous donnerons en particulier une condition suffisante pour que deux tels groupoïdes soient équivalents.

Nous notons, dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle.

1.1 Algèbres de Lie graduées munies d'une différentielle

1.1.1 Conventions et notations

Nous donnons dans cette sous-section toutes les conventions sur les algèbres de Lie graduées munies d'une différentielle.

Définition 1.1.1. *Une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie L est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire* $[.,.]$ *appelé le crochet satisfaisant, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in L$:*

(i) $[\alpha, \alpha] = 0$ *(alternance) ;*

(ii) $[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0$ *(relation de Jacobi).*

Remarquons que la condition (i) implique en particulier que le crochet est *anti-commutatif* :

$$\forall \alpha, \beta \in L, [\alpha, \beta] + [\beta, \alpha] = 0.$$

Cette égalité équivaut à la propriété (i) dans notre cas, cependant, dans le cas d'un corps quelconque, l'équivalence n'est a priori vérifiée que si $car(\mathbb{K}) \neq 2$.

Un exemple courant d'algèbre de Lie nous vient des algèbres sur $\mathbb{K}$: toute algèbre $(A, \star)$ sur $\mathbb{K}$ induit en effet un crochet de Lie, et donc une structure d'algèbre de Lie sur A, donné par le commutateur de $\star$.

En pratique, on préfère avoir une anti-commutativité dans la définition d'une algèbre de Lie. On adapte donc la définition dans le cas gradué :

Définition 1.1.2. *Une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie graduée est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel L de la forme $L = \bigoplus_{i \geqslant 0} L^i$ où les L^i sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, muni d'une famille d'applications bilinéaires :*

$$\forall i, j \geqslant 0, [.,.] : L^i \times L^j \longrightarrow L^{i+j}$$

appelé le crochet de Lie vérifiant les deux relations suivantes pour $\alpha \in L^i, \beta \in L^j$ *et* $\gamma \in L^k$ *:*

(i) $[\alpha, \beta] + (-1)^{ij}[\beta, \alpha] = 0$ *(anti-commutativité graduée) ;*

(ii) $(-1)^{ki}[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{ij}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{jk}[\gamma, [\alpha, \beta]] = 0$ *(relation de Jacobi graduée).*

Ainsi, chaque élément $\alpha \in L^i$ induit une application linéaire de degré j, c'est-à-dire : $ad\ \alpha : L^j \longrightarrow L^{i+j}$ envoyant $\beta \in L^j$ sur $[\alpha, \beta]$. Cette application est appelée la *transformation adjointe* de α.

En particulier, L^0 est une algèbre de Lie muni du crochet L restreint à L^0, et la représentation adjointe $ad : L^0 \longrightarrow End(L^i)$ donne une représentation de L^0 pour tout $i \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha, \beta \in L^0, ad\ [\alpha, \beta] = [ad\ \alpha, ad\ \beta],$$

où $End(L^i)$ est muni du crochet de Lie standard induit par la composition.

Définition 1.1.3. *Une dérivation de degré* l *est la donnée d'une famille de morphismes* $d : L^i \longrightarrow L^{i+l}$ *satisfaisant la relation :*

$$\forall \alpha \in L^i, \forall \beta \in L, d[\alpha, \beta] = [d\alpha, \beta] + (-1)^{il}[\alpha, d\beta]$$

appelée formule de Leibniz.

En particulier, la relation de Jacobi équivaut au fait que si $\alpha \in L^i$, alors $ad\ \alpha$ est une dérivation de degré i sur L.

Nous noterons par la suite $Der(L)^l$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des dérivations de degré l sur L, ainsi que $D(L) = \bigoplus_{i \geqslant 0} Der(L)^i$. C'est une algèbre de Lie graduée, munie du crochet $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - (-1)^{l_1 l_2} d_2 \circ d_1$ où $d_1 \in Der(L)^{l_1}, d_2 \in Der(L)^{l_2}$.

Définition 1.1.4. *Une différentielle sur une algèbre de Lie graduée* L *est une dérivation* $d \in Der(L)^1$ *de degré* 1 *telle que* $d^2 = 0$*.*
Le couple (L, d) *est appelé algèbre de Lie différentielle graduée.*

Nous avons ici pris une convention cohomologique, en décrétant que le degré d'une différentielle est 1. Mais nous avons aussi la même définition dans un contexte homologique, où on demande que le degré de la différentielle soit -1. Nous resterons en convention cohomologique par la suite.

Ceci induit alors $Z^i(L) = Ker\ (d : L^i \longrightarrow L^{i+1})$ le sous-espace des *cocycles*, qui contient les éléments *cobords* $B^i(L) = Im\ (d : L^{i-1} \longrightarrow L^i)$.

La *cohomologie de degré* i de l'algèbre de Lie graduée différentielle (L, d) est alors $H^i(L) = Z^i(L)/B^i(L)$.

1.1.2 Variété de Maurer-Cartan

Dans cette sous-section, nous allons définir la variété de Maurer-Cartan, et diverses actions préservant cette variété. Nous nous munissons à ce titre de $(L, [., .], d)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie différentielle graduée. Comme nous l'avons vu précédemment, $ad\ L^0$ agit naturellement sur $Der(L)^0$.

Intéressons-nous à l'espace affine suivant :

$$A = \{d + ad(\alpha) \mid \alpha \in L^1\} \subset Der(L)^1.$$

On commence par remarquer que $ad(L^0)$ laisse invariant cet espace, dans le sens où si $\lambda \in L^0$, le champ de vecteurs sur L^1 donné par $[ad(\lambda), .]$ est tangent à A.

En effet, si $\alpha \in L^1$, on a :

$$\begin{array}{rcl} [ad\ \lambda, d + ad\ \alpha](\beta) & = & [ad\ \lambda, ad\ \alpha](\beta) + [ad\ \lambda, d](\beta) \\ & = & ad[\lambda, \alpha](\beta) + [\lambda, d\beta] - d[\lambda, \beta] \\ & = & ad[\lambda, \alpha](\beta) - ad(d\lambda)(\beta) \\ & = & ad([\lambda, \alpha] - d\lambda)(\beta), \end{array}$$

d'après la définition d'une différentielle d. Sachant que l'espace tangent de A est exactement $ad(L^1)$, le résultat est prouvé.

Intéressons à l'élément qui apparaît dans le ad de la formule précédente : on définit, pour $\lambda \in L^0$ et $\alpha \in L^1$:

$$\rho(\lambda)(\alpha) = [\lambda, \alpha] - d\lambda.$$

$\rho(\lambda)$ définit ainsi un champ de vecteurs sur L^1, et donc ρ est un morphisme de L^0 dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs affines sur L^1.

On souhaite à présent chercher les éléments $\alpha \in L^1$ définissant une différentielle tordue, c'est-à-dire tels que $d + ad\ \alpha$ définisse une différentielle sur L. Regardons $(d + ad\ \alpha) \circ (d + ad\ \alpha) = \dfrac{1}{2}[d + ad\ \alpha, d + ad\ \alpha]$. Un calcul direct montre que cet élément est en fait égal à $ad\ \mathcal{Q}(\alpha)$ où $\mathcal{Q} : L^1 \longrightarrow L^2$ est :

$$\mathcal{Q}(\alpha) = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha].$$

On définit alors la *variété de Maurer-Cartan* comme étant :

$$\mathcal{MC}(L) = \left\{ \alpha \in L^1 \mid d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0 \right\} = \mathcal{Q}^{-1}(0).$$

Remarquons que le champ de vecteurs $\rho(\lambda)$, pour $\lambda \in L^0$, se comporte bien avec $\mathcal{Q}$ dans le sens où la dérivation $\rho(\lambda)$ appliquée à $\mathcal{Q}$ vaut : $(\rho(\lambda)\ Q)(\alpha) = (ad\ \lambda)(\mathcal{Q}(\alpha))$. En effet :

$$\begin{array}{rcl} d\mathcal{Q}_\alpha(\rho(\lambda)(\alpha)) & = & (d + ad\ \alpha)([\lambda, \alpha] - d\lambda) \\ & = & d[\lambda, \alpha] + [\alpha, [\lambda, \alpha]] - [\alpha, d\lambda] \\ & = & [\lambda, \mathcal{Q}(\alpha)]. \end{array}$$

En particulier, $\rho(\lambda)$ restreint à $\mathcal{MC}(L)$ induit un champ de vecteurs de $\Gamma(T\ \mathcal{MC}(L))$.

Définition 1.1.5. *Deux éléments $\alpha, \beta \in \mathcal{MC}(L)$ seront dits équivalents s'il existe un élément $\lambda \in L^0$ dont le flot induit par $\rho(\lambda) = ad(\lambda) - d\lambda$ lie α et β en temps fini.*

Caractérisons autrement cette relation d'équivalence. On commence par rendre interne la différentielle d : on définit L_+ l'algèbre de Lie différentielle graduée qui diffère de L juste au degré 1 : $L^1_+ = L^1 \oplus \mathbb{K}\delta$ où la nouvelle différentielle d et le crochet $[.,.]$ satisfont les relations $d(\delta) = 0$, $[\delta, \delta] = 0$ et $\forall x \in L, [\delta, x] = d(x)$, et étendent la différentielle et le crochet de L.
De cette façon, on peut oublier la différentielle d, qui a été rendue interne via $d = ad\ \delta$.

Donc, si $\overline{\alpha} \in L^1$, $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}) = 0$ si et seulement si $[\delta, \overline{\alpha}] + \dfrac{1}{2}[\overline{\alpha}, \overline{\alpha}] = 0$, ce qui équivaut à $[\alpha, \alpha] = 0$ où $\alpha = \delta + \overline{\alpha} \in L^1 \oplus \mathbb{K}\delta = L^1_+$. On est alors ramené à étudier :

$$Sq(L_+) = \{\alpha = \overline{\alpha} + \delta \in L^1 \oplus \mathbb{K}\delta \mid [\alpha, \alpha] = 0\}.$$

A présent, le champ de vecteurs induit par $\lambda \in L^0$ via $\rho(\lambda)$ est donné par la nouvelle représentation adjointe $ad\ \lambda \in \Gamma(T\ Sq(L_+))$. Sous des hypothèses de convergences ou de nilpotence, le flot de ce champ de vecteurs est donné, en écriture en sommes formelles, par $\gamma(t) = e^{t\ ad(\lambda)}\alpha$ si on pose $\alpha = \gamma(0)$. Si $\gamma(1) = \beta$, ceci donne $\beta = e^{ad(\lambda)}\alpha$.

On retourne maintenant dans l'algèbre de Lie L, en écrivant $\beta = \delta + \overline{\beta}$ et $\alpha = \delta + \overline{\alpha}$. Nous obtenons alors :

$$\delta + \overline{\beta} = e^{ad(\lambda)}(\delta + \overline{\alpha}) = e^{ad(\lambda)}(\delta) + e^{ad(\lambda)}(\overline{\alpha}) = \delta + (e^{ad(\lambda)} - id)(\delta) + e^{ad(\lambda)}(\overline{\alpha}).$$

Au final :

$$\overline{\beta} = e^{ad(\lambda)}(\overline{\alpha}) + \frac{id - e^{ad(\lambda)}}{ad(\lambda)}(d\lambda).$$

Pour le caractère bien défini de ces formules, nous allons être amenés à supposer des hypothèses que nous appellerons hypothèses de convergence. Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur les hypothèses précises que nous adopterons par la suite. Pour l'heure, et pour l'étude que nous faisons dans le chapitre 1, il sera suffisant de supposer l'algèbre L *nilpotente*, c'est-à-dire que la suite centrale descendante $(\underbrace{[L, [L, ...[L, L}_{n}]...]])_n$ est nulle au bout d'un certain rang.

1.1.3 Groupe de jauge

En fait, ces dernières égalités obtenues via la relation d'équivalence introduite précédemment proviennent de l'action d'un certain groupe : le *groupe de jauge*. Pour définir ce groupe, rappelons que si nous travaillons dans un anneau de séries formelles en X et Y deux variables non commutatives, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne un $Z = BCH(X, Y)$ tel que $exp(X)exp(Y) = exp(Z)$ en terme de crochets. Ceci peut donc s'exprimer dans une algèbre de Lie, avec des hypothèses de convergence.

On a alors :

Théorème 1.1.1. $\Gamma = (L^0, BCH, 0)$ *est un groupe appelé groupe de jauge de* L.

La structure associative de BCH se trouve directement en remarquant que, dans l'algèbre des polynômes formels en deux variables X et Y, $BCH(X, Y) = log(exp(X)exp(Y))$.

On se place, dans un premier temps, dans l'algèbre graduée L_+ où la variété de Maurer-Cartan corresponds à $Sq(L_+)$. On obtient dans ce cas :

Proposition 1.1.1. *Sous l'hypothèse de nilpotence précédente, le groupe de jauge* Γ *agit sur la variété de Maurer-Cartan via :*

$$\lambda.x = e^{ad(\lambda)}(x).$$

Démonstration. Voir par exemple [Man].

□

Cette proposition permet de traduire en terme d'actions de groupes la relation d'équivalence introduite dans la section précédente lorsque nous avons changé l'algèbre de Lie différentielle graduée L en L_+. Si nous voulons exprimer l'action dans L, nous avons :

$$\lambda.x = e^{ad(\lambda)}(x) + \frac{Id - e^{ad(\lambda)}}{ad(\lambda)}(d\lambda).$$

Par la suite, nous allons distinguer l'action d'un élément $\lambda \in L^0$ du morphisme sous-jacent. Pour cela, nous allons noter $exp(L^0)$ le groupe L^0 muni de BCH, et on notera les éléments e^λ au lieu de λ, mettant en avant une construction pour l'instant formelle du groupe exponentielle qui sera introduit dans le chapitre 2. Nous noterons donc plutôt $e^\lambda.x$ au lieu de $\lambda.x$.

1.2 Groupoïde de Deligne associé à une algèbre de Lie différentielle graduée

Le but de cette section sera d'introduire le *groupoïde* associé à une algèbre de Lie différentielle graduée et à une algèbre locale artinienne. Nous prouverons ensuite le théorème d'équivalence de groupoïdes présenté dans [GM88].

1.2.1 Algèbre locale artinienne et groupoïde

On commence par rappeler ce qu'est un groupoïde :

Définition 1.2.1. *Un groupoïde est une catégorie localement petite où les morphismes sont tous des isomorphismes.*

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Nous allons nous intéresser au produit tensoriel $L \otimes_{\mathbb{K}} A$, qui admet une structure d'algèbre de Lie différentielle graduée avec les définitions suivantes, pour tout $\alpha, \beta \in L$ et pour tout $u, v \in A$:

$$\forall i \geqslant 0, (L \otimes_{\mathbb{K}} A)^i = L^i \otimes_{\mathbb{K}} A;$$

$$[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] = [\alpha, \beta] \otimes uv;$$

$$d(\alpha \otimes u) = d(\alpha) \otimes u.$$

Nous allons faire une hypothèse supplémentaire sur l'algèbre A, qui est la suivante :

Définition 1.2.2.

— *Un anneau A est dit artinien si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire.*

— *Une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A est une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini qui est un anneau commutatif artinien ayant un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ de corps résiduel $A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{K}$.*

Lemme 1.2.1. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.*
Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, \mathfrak{m}^n = 0$.

Démonstration. La suite d'idéaux $(\mathfrak{m}^n)_n$ étant décroissante, elle est stationnaire. Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$. A étant un anneau noethérien, le lemme de Nakayama donne alors $\exists a \in \mathfrak{m}, (1+a)\mathfrak{m}^n = 0$. Or, $(1+a) \notin \mathfrak{m}$, et donc, l'anneau A étant local, $1 + a$ est inversible ce qui donne $\mathfrak{m}^n = 0$.

□

De cette façon, l'algèbre de Lie graduée $L \otimes \mathfrak{m}$ et donc en particulier l'algèbre de Lie $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ sont nilpotentes, nous plaçant ainsi dans les hypothèses de convergence précédentes.

Définissons $\mathcal{Q}_A : L^1 \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow L^2 \otimes \mathfrak{m}$ par la même formule que l'application $\mathcal{Q}$ définie dans la section précédente. Comme précédemment, l'action de $exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ préserve $\mathcal{Q}_A^{-1}(0)$.

On en déduit la définition suivante :

Définition 1.2.3. *Le groupoïde associé à l'algèbre de Lie différentielle graduée L associé à la $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A est le groupoïde $\mathcal{C}(L, A)$ ayant pour objets $Obj\ \mathcal{C}(L, A) = \mathcal{Q}_A^{-1}(0)$ et pour morphismes entre $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}_A^{-1}(0)$ tout élément $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ tel que $exp(\lambda)(\alpha) = \beta$.*

Puisque $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$, on trouve par relation d'anti-commutativité $[\lambda, \lambda] = 0$. Donc la formule de Baker-Campbell-Hausdorff permet de voir que si λ est un morphisme entre α et β, son inverse est donné par $-\lambda$. Nous avons donc bien défini un groupoïde.
Dans la littérature, ce groupoïde est aussi appelé groupoïde de Deligne associé à l'algèbre de Lie différentielle graduée L, noté $Deligne(L)$.

Enfin, remarquons que tout morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ induit un un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées $\varphi_* : L \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow \overline{L} \otimes \mathfrak{m}$ définie via φ et $id : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$. Un tel morphisme induit alors un foncteur $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$, envoyant chaque objet $\alpha \in \mathcal{Q}_A^{-1}(0)$ sur $\varphi(\alpha) \in \overline{\mathcal{Q}_A}^{-1}(0)$ (ce qui est bien défini puisque φ est un morphisme), et envoyant chaque morphisme $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ sur $\varphi(\lambda)$. Le caractère fonctorielle provient directement de l'expression de BCH en terme de crochets, et du fait que φ soit un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées.

De la même façon que φ, tout morphisme d'algèbres artiniennes locales $\psi : A \longrightarrow \overline{A}$ induit un foncteur $\psi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L, \overline{A})$. La définition même des deux foncteurs précédents impliquent que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(L, A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\psi_*"'] & \mathcal{C}(\overline{L}, A) \arrow[d, "\psi_*"] \\ \mathcal{C}(L, \overline{A}) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \mathcal{C}(\overline{L}, \overline{A}) \end{tikzcd}.$$

1.2.2 Théorème d'équivalence de groupoïdes

Le but de cette sous-section sera de prouver le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées induisant deux isomorphismes $H^0(L) \longrightarrow H^0(\overline{L})$, $H^1(L) \longrightarrow H^1(\overline{L})$ et un monomorphisme $H^2(L) \longrightarrow H^2(\overline{L})$ en cohomologie.*
Alors pour toute $\mathbb{K}$-algèbre locale Artinien A, le foncteur induit $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$ est une équivalence de groupoïdes.

Pour prouver ce théorème, commençons tout d'abord par la remarque suivante :

Lemme 1.2.2. *Il existe une suite finie $A_0 = A \subset A_1 \subset ... \subset A_r = \mathbb{K}$ de $\mathbb{K}$-algèbres locales artiniennes, ainsi que des épimorphismes $\eta_i : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ satisfaisant $Ker(\eta_i).\mathfrak{m}_i = 0$ où $\mathfrak{m}_i \subset A_i$ est l'idéal maximal de A_i.*

Démonstration. Si on suppose A_i construit, on prends un idéal minimal K_i de A_i, et on pose $A_{i+1} = A_i/K_i$. Posons $\eta_i : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ la projection canonique. On remarque alors que, si $A_{i+1} \neq 0$, et si on note $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal de A_i, alors $\mathfrak{m}_{i+1} = \eta_i(\mathfrak{m}_i)$ est l'unique idéal maximal de A_{i+1}. En effet, $\eta_i(\mathfrak{m}_i)$ est un idéal propre, puisque si $\eta_i(\mathfrak{m}_i) = A_{i+1}$, alors $A_i = \mathfrak{m}_i$ ce qui serait absurde. De plus, si J est un idéal de A_{i+1}, $\eta_i^{-1}(J) \subset \mathfrak{m}_i$ donc $J \subset \eta_i(\mathfrak{m}_i)$, ce qui prouve que $\eta_i(\mathfrak{m}_i)$ est bien un idéal maximal, et que c'est le seul. En ce qui concerne le corps résiduel, on regarde l'application $A_i \longrightarrow A_{i+1}/\mathfrak{m}_{i+1}$ en composant η_i avec la projection canonique de A_{i+1} sur $A_{i+1}/\mathfrak{m}_{i+1}$, ce qui donne une surjection. Le noyau corresponds à $\eta_i^{-1}(\mathfrak{m}_{i+1})$ qui est un idéal propre de A_i contenant $\mathfrak{m}_i$, donc égal à $\mathfrak{m}_i$. On a alors que le corps résiduel de l'anneau local $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ est isomorphe à celui de $(A_{i+1}, \mathfrak{m}_{i+1})$.

Montrons à présent que cette construction se termine, et qu'elle se termine par $A_{r+1} = 0$ soit $A_r = \mathbb{K}$. Pour cela, supposons par l'absurde que nous pouvons construire de cette façon de tels anneaux A_i non nuls en quantité infinie. Les idéaux K_i induisent, en prenant un certain nombre de fois l'image réciproque par les η_i, une suite croissante, donc stationnaire, d'idéaux de A. En recomposant par les η_i, qui sont surjectifs, ceci donne l'existence d'un rang i tel que $\eta_i(K_i) = K_{i+1}$ soit $K_{i+1} = 0$ ce qui est absurde.
Donc cette construction se termine par l'idéal nul. Notons r le plus petit rang tel que $A_{r+1} = 0$. Ceci signifie que l'idéal minimal de A_r n'est autre que lui-même. Par minimalité, son idéal maximal $\mathfrak{m}_r$ est donc réduit à 0.
A_r est donc un corps, et puisque $\mathfrak{m}_r = 0$, il coïncide avec son corps résiduel qui est $\mathbb{K}$ puisque d'après le paragraphe précédent, les corps résiduels sont préservés.

Enfin, quel que soit i, $Ker(\eta_i) = K_i$ et $K_i.\mathfrak{m}_i$ est un idéal contenu dans K_i. Par minimalité, il est ou bien nul, ou bien égal à K_i, et ce dernier cas est exclu par le lemme de Nakayama.

□

Nous allons prouver le théorème par récurrence sur la longueur r de cette chaîne d'idéaux. Si $r = 0$, nous avons $A = \mathbb{K}$. En effet, dans ce cas-ci, l'idéal maximal de A est nul (les seuls idéaux sont A et 0). L'algèbre de Lie $L \otimes \mathfrak{m}$ est donc réduit à 0. Donc $\mathcal{C}(L, A)$ ne possède que 0 pour objet, et 0 comme morphisme, donc tous les groupoïdes $\mathcal{C}(L, A)$ où L parcourt les algèbres de Lie différentielles graduées sont équivalentes via φ_*, sans plus d'hypothèses nécessaires.

Pour prouver l'hérédité, il suffit de prouver la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Si A est une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et si $\mathfrak{I}$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$, alors le théorème* 1.2.1 *tient pour A si il tient pour $A/\mathfrak{I}$.*

Soit $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{I}$. Ce morphisme induit le foncteur $\pi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$.

Afin de prouver cette proposition, le but de la section suivante sera d'analyser ce foncteur.

1.2.3 Analyse du foncteur π_*

On commence par une définition avant d'énoncer la principale proposition de cette partie :

Définition 1.2.4. *Soit X un ensemble et soit G un groupe agissant sur X de façon simplement transitive. L'application différence est l'application qui à un couple $(x, y) \in X^2$ associe l'unique $g \in G$ tel que $y = g.x$.*

Le but de cette sous-section sera de prouver :

Proposition 1.2.2. *Sous les hypothèses et notations de la sous-section précédente, nous avons les trois propositions :*

1. *Il existe une application $o_2 : Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}) \longrightarrow H^2(L \otimes \mathfrak{I})$ telle que :*

$$\forall \alpha \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}), \alpha \in Im(\pi_*) \Leftrightarrow o_2(\alpha) = 0.$$

2. *Soit $\zeta \in \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$. On considère $\pi_*^{-1}(\zeta)$ la catégorie ayant pour classe d'objets l'image réciproque par $\pi_* : Obj\ \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ de ζ, et pour morphismes tous les morphismes $\gamma \in \mathcal{C}(L, A)$ tels que $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$, le morphisme identité.*

Alors il existe une action simplement transitive du groupe $Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ sur les objets $Obj(\pi_*^{-1}(\zeta))$. De plus, l'application suivante :

$$o_1 : Obj(\pi_*^{-1}(\zeta)) \times Obj(\pi_*^{-1}(\zeta)) \longrightarrow Z^1(L \otimes \mathfrak{I}) \longrightarrow H^1(L \otimes \mathfrak{I})$$

donnée par l'application différence puis la projection est telle que : pour tout $\alpha, \beta \in Obj(\pi_*^{-1}(\zeta))$, il existe un morphisme $\gamma : \alpha \longrightarrow \beta$ tel que $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$ si et seulement si $o_1(\alpha, \beta) = 0$.

3. *Soient $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ deux objets isomorphes et $f : \alpha \longrightarrow \beta$ un morphisme dans $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ de $\alpha = \pi_*(\widetilde{\alpha})$ vers $\beta = \pi_*(\widetilde{\beta})$. Alors il existe une action simplement transitive du groupe $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ sur l'ensemble $\pi_*^{-1}(f)$ des morphismes $\widetilde{f} : \widetilde{\alpha} \longrightarrow \widetilde{\beta}$ tels que $\pi_*(\widetilde{f}) = f$. L'application différence $o_0 : \pi_*^{-1}(f) \times \pi_*^{-1}(f) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ vérifie en particulier : si $\widetilde{f}, \widetilde{f}' \in \pi_*^{-1}(f)$, alors $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$ si et seulement si $o_0(\widetilde{f}, \widetilde{f}') = 0$.*

Les applications o_i sont appelés *obstructions*.

1.2.3.1 Construction de o_2

Soit $\omega \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}) \subset L^1 \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{I}$. Il existe alors $\widetilde{\omega} \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ tel que $\pi_*(\widetilde{\omega}) = \omega$. Puisque $\omega \in \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$, on a $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in L^2 \otimes \mathfrak{I}$.
De plus, $d\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) = [d\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}]$ par la relation de Jacobi, soit $d\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) = [\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}), \widetilde{\omega}] - \dfrac{1}{2}[[\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}], \widetilde{\omega}]$.

Or, $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in L^2 \otimes \mathfrak{I}$ et $\widetilde{\omega} \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$, et $[L^2 \otimes \mathfrak{I}, L^1 \otimes \mathfrak{m}] \subset L^3 \otimes \mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$, ce qui garantit que le premier terme est nul. Quant au deuxième, puisque le degré de $\widetilde{\omega}$ est 1, la relation de Jacobi implique directement qu'il est nul.

Nous avons donc montré que $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in Z^2(L \otimes \mathfrak{I})$. Il peut alors être intéressant d'associer à ω la classe de cet élément dans $H^2(L \otimes \mathfrak{I})$. Montrons que cette classe ne dépends pas de $\widetilde{\omega}$: soit $\widetilde{\omega}' \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ un autre élément relevant ω, c'est-à-dire $\widetilde{\omega}' = \widetilde{\omega}$ $(mod\ L^1 \otimes \mathfrak{I})$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}') - \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) &= d(\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}) + \frac{1}{2}[\widetilde{\omega}', \widetilde{\omega}'] - \frac{1}{2}[\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] \\ &= d(\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}) + \frac{1}{2}[\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}] + [\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}], \end{aligned}$$

A nouveau, puisque $\mathcal{I}.\mathfrak{m} = 0$ et $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$, les deux derniers termes sont nuls. On obtient donc que $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}') = \mathcal{Q}(\widetilde{\omega})$ mod $(B^2(L \otimes \mathfrak{I}))$.

Nous pouvons donc définir $o_2(\omega)$ comme étant la classe de $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega})$ dans $H^2(L \otimes \mathfrak{I})$. Vérifions que cette application o_2 vérifie les propriétés demandées.

Tout d'abord, on voit directement que si $\widetilde{\omega} \in \mathcal{C}(L, A)$, alors $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) = 0$ et donc a fortiori $o_2(\omega) = 0$. Inversement, supposons que $o_2(\omega) = 0$. Alors $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in B^2(L \otimes \mathfrak{I}) : \exists \psi \in L^1 \otimes \mathfrak{I}, \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) = d\psi$. Posons $\widetilde{\omega}' = \widetilde{\omega} - \psi$. Alors :

$$\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}') = \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) - d\psi - [\widetilde{\omega}, \psi] + \frac{1}{2}[\psi, \psi] = \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) - d\psi = 0,$$

toujours par le fait que $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$. On a donc trouvé un relèvement de ω dans $\mathcal{C}(L, A)$, ce qui prouve le premier point.

1.2.3.2 Construction de o_1

La preuve des deux points suivants nécessite le lemme suivant :

Lemme 1.2.3. *Soit $\alpha \in L^1 \otimes \mathfrak{m}, \eta \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ et $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$. Alors :*

$$exp(u+\eta)(\alpha) = exp(\eta)(\alpha) - du.$$

Démonstration. Soit $n > 0$. Alors $(ad\ u)^n(L \otimes \mathfrak{m}) \subset L \otimes \mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$. On en déduit alors les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} (ad(u)+ad(\eta))^n(\alpha) & = & ad(\eta)^n(\alpha), \\ (ad(u)+ad(\eta))^n(d\eta) & = & ad(\eta)^n(d\eta), \\ (ad(u)+ad(\eta))^n(du) & = & 0. \end{array}$$

On peut maintenant calculer :

$$\begin{array}{rcl} exp(u+\eta)(\alpha) & = & exp(ad(u+\eta))(\alpha) + \dfrac{I - exp(ad(u+\eta))}{ad(u+\eta)}(d(u+\eta)) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(ad(u)+ad(\eta))^n(\alpha) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!}(ad(u)+ad(\eta))^n(du+d\eta) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}ad(u)^n(\alpha) - du - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!}ad(\eta)^n(d\eta) \\ & = & exp(\eta)(\alpha) - du, \end{array}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

On passe maintenant au deuxième point. Soit $\zeta \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$. Soit $\alpha \in Obj\ \pi_*^{-1}(\zeta) \subset L^1 \otimes \mathfrak{m}$ et soit $\eta \in Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$. On souhaite définir l'action de η sur α.

Nous avons :

$$\mathcal{Q}(\alpha+\eta) = \mathcal{Q}(\alpha) + d\eta + [\alpha,\eta] + \frac{1}{2}[\eta,\eta] = 0$$

car $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$.

Donc $\alpha + \eta \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$, et puisque $\eta \in L^1 \otimes \mathfrak{I}$, on a alors $\pi_*(\alpha+\eta) = \zeta$. Nous venons donc de définir une action de $Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $Obj\ \pi_*^{-1}(\zeta)$.

Soient maintenant $\alpha, \beta \in \pi_*^{-1}(\zeta)$. Alors $\alpha, \beta \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ et $\alpha - \beta \in L^1 \otimes \mathfrak{I}$. Nous avons alors l'égalité $[\beta, \alpha-\beta] = [\alpha-\beta, \alpha-\beta] = 0$. On trouve ainsi :

$$d(\alpha-\beta) = d(\alpha-\beta) + [\beta,\alpha-\beta] + \frac{1}{2}[\alpha-\beta,\alpha-\beta] = \mathcal{Q}(\alpha) - \mathcal{Q}(\beta) = 0.$$

Nous avons donc $\alpha - \beta \in Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$. Puisque cette quantité est nulle si et seulement si $\alpha = \beta$, on a donc bien que l'action de $Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $Obj\ \pi_*^{-1}(\zeta)$ est simplement transitive comme voulue.

Pour $\alpha, \beta \in Obj\ \pi_*^{-1}(\zeta)$, on pose alors $o_1(\alpha,\beta)$ comme étant la classe de $\alpha - \beta$ dans $H^1(L \otimes \mathfrak{I})$.

Si $\gamma : \alpha \longrightarrow \beta$ est un morphisme dans $\mathcal{C}(L, A)$ tel que $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$, prenons $u \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ de morphisme associé $\gamma = exp(u) \in exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ envoie α sur β. Puisque $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$, nous avons $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$. Donc, d'après le lemme 5.2.1 appliqué avec $\eta = 0$:

$$\beta = exp(u)(\alpha) = \alpha - du.$$

Donc $o_1(\alpha,\beta) = 0$. Réciproquement, si $o_1(\alpha,\beta) = 0$, il existe $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$ tel que $\alpha - \beta = du$. Par la même formule que précédemment, on trouve alors $\beta = exp(u)(\alpha)$ et donc un morphisme de α vers β qui s'envoie sur I_ζ via π_*, ce qui prouve le deuxième point.

1.2.3.3 Construction de o_0

Prenons $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ et $\alpha = \pi_*(\widetilde{\alpha}), \beta = \pi_*(\widetilde{\beta})$. Soit $\gamma : \alpha \longrightarrow \beta$ un morphisme dans $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$. Nous allons définir une action simplement transitive de $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ sur l'ensemble $\pi_*^{-1}(\gamma)$ des morphismes $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\alpha} \longrightarrow \widetilde{\beta}$ tels que $\pi_*(\widetilde{\gamma}) = \gamma$. Prenons $v \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ définissant $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\beta} = exp(v)(\widetilde{\alpha})$. Si $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$, nous avons d'après le lemme 5.2.1 :

$$exp(v + u)(\widetilde{\alpha}) = exp(v)(\widetilde{\alpha}) - du = \widetilde{\beta} - du.$$

Donc, en identifiant $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ avec $Z^0(L \otimes \mathfrak{I})$ (puisque $B^0(L \otimes \mathfrak{I}) = 0$), si $u \in H^0(L \otimes \mathfrak{I})$, on a $\widetilde{\gamma} + u = exp(v + u)$ qui est un morphisme $\widetilde{\alpha} \longrightarrow \widetilde{\beta}$ tel que $\pi_*(\widetilde{\gamma} + u) = \gamma$. On a ainsi défini une action de $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $\pi_*^{-1}(\gamma)$.

Soit maintenant $\widetilde{\gamma}' : \widetilde{\alpha} \longrightarrow \widetilde{\beta}$ un autre morphisme de $\pi_*^{-1}(\gamma)$. Notons v et v' les éléments de $L_0 \otimes \mathfrak{m}$ induisant respectivement $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}'$. Alors $v - v' \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$. On pose alors $o_0(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}') = v - v' \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$. Si $u = v - v'$, on a d'après le lemme 5.2.1 $exp(u + v')(\widetilde{\alpha}) = exp(v')(\widetilde{\alpha}) - du$, soit $d(v - v') = exp(v)(\widetilde{\alpha}) - exp(v')(\widetilde{\alpha}) = \widetilde{\beta} - \widetilde{\beta} = 0$. Donc $o_0(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}') \in H^0(L \otimes \mathfrak{I})$, et cet élément est l'unique élément de $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ envoyant $\widetilde{\gamma}'$ sur $\widetilde{\gamma}$. L'action est donc bien simplement transitive.

1.2.3.4 Preuve du théorème

Nous allons à présent prouver le théorème 1.2.1, par le biais de la proposition 1.2.1

On suppose alors que A est une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne, qu'il existe un idéal $\mathfrak{I} \subset A$ tel que $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$ et que le morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ induit une équivalence de groupoïdes $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A/\mathfrak{I})$. Nous allons prouver que φ_* induit une équivalence entre $\mathcal{C}(L, A)$ et $\mathcal{C}(\overline{L}, A)$:

Essentiellement surjectif :

Soit $\overline{\omega} \in Obj\ \mathcal{C}(\overline{L}, A)$. Alors $\pi_*(\overline{\omega}) \in Obj\ \mathcal{C}(\overline{L}, A/\mathfrak{I})$. Par hypothèse, il existe un objet $\omega' \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ et un isomorphisme $g : \varphi_*(\omega') \longrightarrow \pi_*(\overline{\omega})$.

Nous allons montrer que ω' est en fait dans l'image de π_*. Pour cela, nous allons utiliser la propriété 1.2.1 et l'injectivité de $H^2(\varphi)$ en montrant que $H^2(\varphi)o_2(\omega') = 0$. Définissons d'abord $H^2(\varphi)$ sur $H^2(L \otimes \mathfrak{I})$.

Pour tout $k \geqslant 0$, nous avons un isomorphisme naturel $H^k(L \otimes \mathfrak{I}) \longrightarrow H^k(L) \otimes \mathfrak{I}$ qui découle directement de la définition de la différentielle. Ce faisant, par le biais de cet isomorphisme, nous pouvons définir $H^k(L \otimes \mathfrak{I}) \longrightarrow H^k(\overline{L} \otimes \mathfrak{I})$ via $H^k(\varphi) : H^k(L) \longrightarrow H^k(\overline{L})$, qui envoie la classe d'un élément de la forme $x \otimes y \in L \otimes \mathfrak{I}$ sur la classe de l'élément $\varphi(x) \otimes y$.
En particulier, par cette construction, le caractère injectif/surjectif/bijectif est conservé.

Nous avons alors par cette définition $H^2(\varphi)o_2(\omega') = o_2(\varphi_*\omega')$. En effet, si $\widetilde{\omega} \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ est un relèvement de ω' au-dessus de π_*, $o_2(\omega')$ est la classe de $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega})$ dans $H^2(L \otimes \mathfrak{I})$, et $H^2(\varphi)$ envoie cet élément sur la classe de $\mathcal{Q}(\varphi_*\widetilde{\omega})$. Or, $\pi_*\varphi_*(\widetilde{\omega}) = \varphi_*\pi_*(\widetilde{\omega}) = \varphi_*(\omega)$, d'où $H^2(\varphi)o_2(\omega') = o_2(\varphi_*\omega')$.

Poursuivons le calcul : $H^2(\varphi)o_2(\omega') = o_2(g^{-1}\pi_*\overline{\omega}) = o_2(\pi_* g^{-1}\overline{\omega}) = 0$.

Par injectivité, nous avons alors $o_2(\omega') = 0$, et donc d'après 1.2.1, $\exists \widetilde{\omega} \in Obj\ \mathcal{C}(L, A), \pi_*\widetilde{\omega} = \omega'$. Montrons qu'il existe un (iso)morphisme de $\varphi_*\widetilde{\omega}$ vers $\overline{\omega}$. On utilise pour cela à nouveau 1.2.1, cependant, les images de $\varphi_*\widetilde{\omega}$ et de $\overline{\omega}$ par π_* ne sont pas nécessairement les mêmes. En fait, d'après ce que nous avons montré précédemment, leur image par π_* sont isomorphes : donc il existe $\overline{\lambda} \in L^0 \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{I}$ tel que $exp(\overline{\lambda})$ soit un morphisme de $\pi_*(\overline{\omega})$ vers $\pi_*\varphi_*(\widetilde{\omega})$. Si on prends $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ tel que $\pi_*(\lambda) = \overline{\lambda}$, cela nous donne $\pi_*(\varphi_*(\widetilde{\omega})) = \pi_*(exp(\lambda).\overline{\omega})$.

Puisque $H^1(\varphi)$ est surjective, soit $u \in Z^1(L\otimes\mathfrak{I})$ tel que $H^1(\varphi)[u] = o_1(\varphi_*(\widetilde{\omega}), exp(\lambda).\overline{\omega})$, que nous voulons nul. Posons $\omega = \widetilde{\omega} - u$. Alors $\omega \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ et :

$$\begin{aligned} o_1(\varphi_*(\omega), exp(\lambda).\overline{\omega}) &= o_1(\varphi_*(\omega), \varphi_*(\tilde{\omega})) + o_1(\varphi_*(\tilde{\omega}), exp(\lambda).\overline{\omega}) \\ &= -H^1(\varphi)[u] + H^1(\varphi)[u] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc que $exp(\lambda).\overline{\omega}$, et donc $\overline{\omega}$, est isomorphe à $\varphi_*\omega$, ce qui prouve que φ_* est essentiellement surjectif de $\mathcal{C}(L, A)$ vers $\mathcal{C}(\overline{L}, A)$.

Plein :

Soit $\overline{\gamma} : \varphi_*\omega_1 \longrightarrow \varphi_*\omega_2$ un morphisme dans $\mathcal{C}(\overline{L}, A)$. Alors $\pi_*(\overline{\gamma}) : \varphi_*\pi_*\omega_1 \longrightarrow \varphi_*\pi_*\omega_2$ est un morphisme de $\mathcal{C}(\overline{L}, A/\mathfrak{I})$. En appliquant l'hypothèse donnant que φ_* est plein de $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ vers $\mathcal{C}(\overline{L}, A/\mathfrak{I})$, il existe un morphisme $\gamma_1 : \pi_*\omega_1 \longrightarrow \pi_*\omega_2$ de $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ tel que $\varphi_*\gamma_1 = \pi_*(\overline{\gamma})$. Notons $\gamma_1 = exp(\overline{\lambda})$ ce morphisme. Soit $\lambda \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ tel que $\pi_*(\lambda) = \overline{\lambda}$. Alors :

$$H^1(\varphi)o_1(exp(\lambda).\omega_1, \omega_2) = o_1(exp(\varphi(\lambda))\varphi_*\omega_1, \varphi_*\omega_2) = 0.$$

En effet, par construction de γ_1, $\overline{\gamma} \circ exp(-\varphi(\lambda))$ est un morphisme de $exp(\varphi(\lambda)).\varphi_*\omega_1$ vers $\varphi_*\omega_2$ dont l'image par π_* est $\pi_*(\overline{\gamma}) \circ (\varphi_*\gamma_1)^{-1} = id$.

Il existe alors un morphisme $g : exp(\lambda).\omega_1 \longrightarrow \omega_2$ tel que $\pi_*g = id$ d'après la construction de l'obstruction o_1 et par injectivité de $H^1(\varphi)$. Soit $\gamma' = g^{-1} \circ exp(\lambda) : \omega_1 \longrightarrow \omega_2$. Alors $\pi_*\gamma' = \gamma_1$.

On a donc que $\varphi_*\gamma'$ et $\overline{\gamma}$ sont des objets de $\pi_*^{-1}(\pi_*\overline{\gamma})$. On peut donc parler de leur obstruction $o_0(\varphi_*\gamma', \overline{\gamma})$. Puisque $H^0(\varphi)$ est surjective, considérons $v \in H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ tel que $\varphi_*(v) = o_0(\varphi_*\gamma', \overline{\gamma})$ et posons $\gamma = \gamma' - v$ qui est tel que $\gamma : \omega_1 \longrightarrow \omega_2$. On obtient alors $\varphi_*\gamma = \varphi_*\gamma' - o_0(\varphi_*\gamma', \overline{\gamma}) = \overline{\gamma}$ ce qui prouve le caractère plein du foncteur φ_*.

Fidèle :

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : \omega_1 \longrightarrow \omega_2$ des morphismes dans $\mathcal{C}(L, A)$ tels que $\varphi_*(\gamma_1) = \varphi_*(\gamma_2)$. Dans $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$, on a :

$$\varphi_*\pi_*\gamma_1 = \pi_*\varphi_*\gamma_1 = \pi_*\varphi_*\gamma_2 = \varphi_*\pi_*\gamma_2.$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons alors $\pi_*\gamma_1 = \pi_*\gamma_2$. Nous pouvons donc regarder l'obstruction $o_0(\gamma_1, \gamma_2) \in H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ que nous souhaitons nul. Nous avons que $H^0(\varphi)o_0(\gamma_1, \gamma_2) = o_0(\varphi_*\gamma_1, \varphi_*\gamma_2) = 0$. Puisque $H^0(\varphi)$ est injective, on a $o_0(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ et donc $\gamma_1 = \gamma_2$.
φ_* est donc fidèle.

Ceci achève la preuve du théorème 1.2.1.

1.2.4 Quasi-isomorphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées

Définition 1.2.5. *Soit (L, d) et $(\overline{L}, \overline{d})$ deux algèbres de Lie différentielles graduées. Elles sont dites quasi-isomorphes s'il existe une suite finie de morphismes d'algèbres de Lie différentielles graduées :*

$$L = L_0 \longrightarrow L_1 \longleftarrow L_2 \longrightarrow ... \longleftarrow L_{m-1} \longrightarrow L_m = \overline{L}$$

tels que chacun de ces morphismes induisent des isomorphismes en cohomologie.

(L, d) est dite formelle si elle est quasi-isomorphe à une algèbre de Lie différentielle graduée muni de la différentielle nulle.

Remarque 1.2.1. *(L, d) est formelle si et seulement si elle est quasi-isomorphe à son algèbre de Lie cohomologique $(H(L), 0)$. En effet, si (L, d) est isomorphe à $(\overline{L}, 0)$, on remarque alors que $\overline{L} = H(\overline{L})$, et, d'après la définition, $H(\overline{L})$ est isomorphe à $H(L)$.*

On donne enfin le corollaire suivant qui est une conséquence directe du théorème 1.2.1 :

Corollaire 1.2.1. *Supposons que* (L, d) *et* $(\overline{L}, \overline{d})$ *soient quasi-isomorphes. Alors pour toute* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie locale artinienne* A*, les groupoïdes* $\mathcal{C}(L, A)$ *et* $\mathcal{C}(\overline{L}, A)$ *sont équivalents.*
De plus, la séquence d'équivalence suivante :

$$\mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L_1, A) \longleftarrow \mathcal{C}(L_2, A) \longrightarrow ... \longleftarrow \mathcal{C}(L_{m-1}, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$$

dépends de façon naturelle de A*.*

Chapitre 2

Groupe de jauge dans une algèbre pré-Lie

Dans le premier chapitre, sous des hypothèses de convergence, nous avons vu que la relation d'équivalence introduite entre les éléments de la variété de Maurer-Cartan était liée à une action du groupe de jauge Γ sur la variété.

A partir de ce chapitre, nous nous placerons dans un cadre plus restrictif, mais courant, où l'algèbre de Lie différentielle graduée L provient d'une algèbre différentielle graduée A, avec une unité à gauche $1 \in A$, munie de la loi $\star$, dont le crochet $[x, y] = x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$ induit le crochet de L. Le but de ce chapitre est de rendre la formule définissant l'action du groupe de jauge sur la variété de Maurer-Cartan interne, c'est-à-dire l'exprimer simplement en terme de $\star$.

Ce problème se résout très facilement dans le cas idéal où la loi $\star$ de l'algèbre A est associative. Cependant, dans la pratique, les lois rencontrées ne jouissent pas, en général, de cette propriété. Cela va donc nous amener à nous intéresser au cas plus restrictif où l'associateur de la loi $\star$ est symétrique en les deux dernières variables : on parle alors d'*algèbre pré-Lie*. Pour simplifier l'étude de telles algèbres, nous utiliserons la théorie des opérades, avec laquelle le lecteur sera supposé familier. Dans le cas contraire, toutes les notions utiles pour ce mémoire faisant intervenir les opérades sont résumées dans l'annexe A.

Avant de poursuivre, explicitons les hypothèses de convergence avec lesquelles nous allons travailler. Rappelons pour cela que si $(A_{(n)})_n$ est une suite de modules différentiels gradués, alors le produit catégorique $A = \prod_{n\geqslant 0} A_{(n)}$ dans la catégorie des modules différentielles gradués est défini par $A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A^n$ où $A^n = \prod_{k\geqslant 0} A^n_{(k)}$, où la différentielle est induite par les différentielles sur $A_{(n)}$.

Ce rappel étant fait, nous allons supposer qu'il existe un isomorphisme $A \simeq \prod_{n\geqslant 0} A_{(n)}$ de modules différentielles gradués tel que $1 \in A_{(0)}$, $A_{(n)} \star A_{(m)} \subset A_{(n+m)}$ et $L \simeq \prod_{n\geqslant 1} A_{(n)}$.

Dans de telles conditions, tout élément $\lambda \in A$ peut être vu comme une série $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{(n)}$ où $\lambda_{(n)} \in A_{(n)}$ est le poids homogène d'ordre n de λ. En particulier, la proposition 1.1.1 reste encore valable sous ces hypothèses de convergence.

2.1 Cas d'une algèbre graduée associative

On suppose que la loi $\star$ de l'algèbre A est associative, et qu'elle possède une unité 1 à gauche. Couplé à nos hypothèses de convergence, on peut donc élever à l'exponentielle tout élément $\lambda \in L^0$.

Nous pouvons alors définir le groupe suivant :

Définition 2.1.1. *On définit le groupe des éléments group-like par :*

$$\mathcal{G} = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in L^0\} = \{1\} \times L^0.$$

La dernière égalité se trouve en appliquant le logarithme.

Nous pouvons alors écrire autrement $e^{ad(\lambda)}(\alpha)$, pour $\lambda \in L^0$ et $\alpha \in L^1$. On voit pour cela que $ad(\lambda) = l_\lambda - r_\lambda$ où l_λ est le produit à gauche par λ via la loi $\star$, et r_λ la même chose à droite. On observe immédiatement que ces deux opérations commutent. On trouve alors :

$$e^{ad(\lambda)}(\alpha) = e^{\lambda} \star \alpha \star e^{-\lambda}.$$

Nous venons alors de montrer que l'action du groupe de jauge se traduit par une formule très simple à l'aide de la loi $\star$.

2.2 Structure opéradique des algèbres pré-Lie

Le but de cette section sera d'introduire les algèbres pré-Lie, et de montrer que toute algèbre pré-Lie est contrôlée par une opérade, qui se révèlera être l'opérade des arbres enracinés $\mathcal{RT}$ (*rooted tree*).

Les notations et définitions sur les opérades seront ici supposées connues, et sont rappelées en annexe A.

Nous désignerons à nouveau par $\mathbb{K}$ un anneau quelconque unitaire.

2.2.1 Algèbres pré-Lie et opérade $\mathcal{PL}$

Définition 2.2.1. *Une $\mathbb{K}$-algèbre pré-Lie est un $\mathbb{K}$-module L muni d'une application bilinéaire $\star : L \times L \longrightarrow L$ satisfaisant la relation suivante, pour $x, y, z \in L$:*

$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (x \star z) \star y - x \star (z \star y).$$

Lorsque le module $L = \bigoplus_{n \geqslant 0} L^n$ est gradué, on dit que c'est une $\mathbb{K}$-algèbre pré-Lie graduée s'il existe un morphisme de modules gradués $L \times L \longrightarrow L$ satisfaisant la relation, pour $x, y, z \in L$:

$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (-1)^{|y||z|}((x \star z) \star y - x \star (z \star y)).$$

Nous supposerons par ailleurs l'algèbre pré-Lie unitaire, dans le sens où il existe un élément unité $1 \in L^0$ à gauche : $\forall x \in L, 1 \star x = x$.

La terminologie "pré-Lie" est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Soit $(L, \star)$ une algèbre pré-Lie (graduée). Alors le commutateur (gradué) $[.,.]$ pour la loi $\star$ confère à L une structure d'algèbre de Lie (graduée), que nous noterons $L_{\mathcal{L}ie}$.*

Exemple : Si pour $n \geqslant 1, L^n = Hom(A^{\otimes n}, A)$, alors la loi suivante :

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n-1)(i-1)} f \circ_i g$$

confère à $L = \bigoplus_{n \geqslant 1} L^n$ une structure d'algèbre pré-Lie graduée.

Analysons la structure opéradique des algèbres pré-Lie. Nous allons définir la séquence symétrique de $\mathbb{K}$-modules M comme étant nulle pour toute les degrés, sauf au degré 2 où on pose $M(2) = \mathbb{K}X_1X_2 \bigoplus \mathbb{K}X_2X_1$ avec l'action donnée par permutation des variables. On définit alors *l'opérade pré-Lie*, notée $\mathcal{PL}$, en terme de générateurs et relations par :

$$\mathcal{PL} = \Theta(M \ : \ x_1(x_2x_3) - (x_1x_2)x_3 = x_1(x_3x_2) - (x_1x_3)x_2),$$

où $\Theta : Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}} \longrightarrow Op_{\mathbb{K}}$ est le foncteur associant à toute séquence symétrique M l'opérade libre $\Theta(M)$ engendrée par M (voir l'annexe A).

Plus explicitement, posons $\mathcal{F} = \Theta(M)$. En arité 2, le module est engendré par X_1X_2 et X_2X_1. En arité 3, le module est engendré par $(X_1X_2)X_3$ et $X_1(X_2X_3)$ ainsi que toutes les permutations (on travaille avec un espace de polynômes en n variables non commutatives à produit non associatif). Si on note $\mathcal{R}$ l'idéal de $\mathcal{F}$ engendré par $X_1(X_2X_3) - (X_1X_2)X_3 - X_1(X_3X_2) + (X_1X_3)X_2) \in \mathcal{F}$, nous obtenons alors que $\mathcal{PL} = \mathcal{F}/\mathcal{R}$.

La composition γ sur $\mathcal{PL}$ est induite par celle de $\mathcal{F}$, et envoie un élément $(\mu, \nu_1, ..., \nu_r)$ sur polynôme obtenu en substituant ν_i aux X_i composants μ.
En particulier, on a une opération particulière $\gamma((X_1X_2), \rho, \rho')$ qui corresponds à la concaténation de ρ et ρ'.

Nous obtenons alors :

Théorème 2.2.1. *La catégorie des $\mathbb{K}$-algèbres pré-Lie est isomorphe à la catégorie des $\mathcal{PL}$-algèbres sur $\mathbb{K}$.*

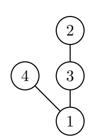
2.2.2 Opérade des arbres enracinés

Le théorème précédent est très utile pour caractériser de telles algèbres, mais le fait que l'opérade soit définie à l'aide d'un quotient rend très peu concret la description d'une telle structure.

Nous allons donc trouver une opérade plus simple à manipuler, l'opérade des arbres enracinés $\mathcal{RT}$, qui sera isomorphe à $\mathcal{PL}$, nous permettant alors de voir plus simplement la structure des algèbres pré-Lie.

Définissons cette opérade. Pour $n > 0$, un *arbre (enraciné) à n feuilles* est la donné d'un graphe simplement connexe à n sommets numérotés de 1 à n, avec un sommet privilégié appelé la *racine*. Les arêtes de ce graphe sont orientées vers la racine.

Voici un exemple d'arbre, où nous choisissons, par défaut, de placer la racine en bas :



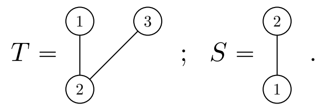
On notera $RT(n)$ l'ensemble des arbres à n feuilles, et $\mathcal{RT}(n)$ le $\mathbb{K}$-module libre engendré par $RT(n)$. On munit cet espace d'une action naturelle du groupe symétrique Σ_n, par permutation des sommets (y compris de la racine). Il nous reste à définir la composition de deux arbres : nous allons pour cela définir la composée partielle $\circ_i$ de deux arbres.

Pour cela, introduisons $In(T, i)$ l'ensemble des sommets reliés au sommet i qui vont vers i. Soit $S \in RT(m)$ et soit $f : In(T, i) \longrightarrow [\![1; m]\!]$. Nous allons définir $T \circ_i^f S$ comme étant l'arbre obtenu en rattachant l'arbre S à l'arbre T au sommet i le long de l'application f. En d'autres termes, la racine de S prends la place du sommet i de T, les sommets sortant de i sont inchangés, et chaque sommet de $In(T, i)$ est relié à un des sommets de S via l'application f. La numérotation des sommets suit celle induite par T pour les premiers sommets, puis une fois arrivé au sommet i, on suit la numérotation de S avant de numéroter le restant.

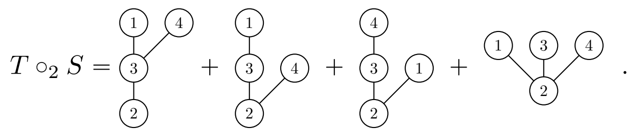
Définition 2.2.2. *Soit $T \in RT(n)$ et $S \in RT(m)$. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On définit :*

$$T \circ_i S = \sum_{f: In(T,i) \longrightarrow [\![1;m]\!]} T \circ_i^f S.$$

Donnons l'exemple suivant :



On a alors, pour les valeurs de $(1,3)$ associés respectivement à $(2,2),(2,1),(1,2)$ et $(1,1)$:

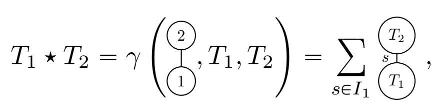


On vérifie aisément que la loi de composition partielle définie permet de conférer à $\mathcal{RT}$ une structure d'opérade.

2.2.3 Isomorphisme entre $\mathcal{RT}$ et $\mathcal{PL}$

Nous allons montrer dans cette sous-section que ces deux opérades définies précédemment sont en réalité isomorphes. Pour cela, on commence par trouver un analogue à la concaténation des mots sur $\mathcal{PL}$ dans $\mathcal{RT}$, en définissant la loi suivante sur les arbres :

Définition 2.2.3. *Soient T_1 et T_2 deux arbres. On définit :*

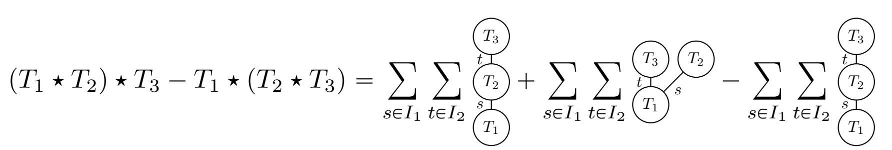


où I_1 désigne l'ensemble des sommets de T_1, et où dans la somme on attache T_2 à chaque sommets s de T_1.

Lemme 2.2.1. *La relation définie précédemment satisfait :*

$$(T_1 \star T_2) \star T_3 - T_1 \star (T_2 \star T_3) = (T_1 \star T_3) \star T_2 - T_1 \star (T_3 \star T_2).$$

Démonstration. On calcule :

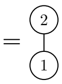
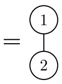


Après simplification, on remarque que l'expression est inchangée en permutant T_2 et T_3.

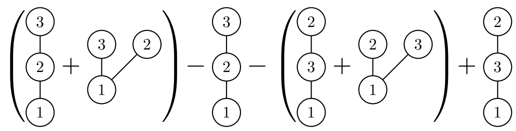
□

Théorème 2.2.2. *L'opérade des algèbres pré-Lie $\mathcal{PL}$ est isomorphe à l'opérade des arbres enracinés $\mathcal{RT}$.*

Démonstration. Pour définir un morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{PL} \longrightarrow \mathcal{RT}$, il suffit de donner un morphisme $\Phi : \mathcal{F}(2) \longrightarrow \mathcal{RT}(2)$, ce qui permettra d'étendre $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{RT}$ par propriété universelle, vérifiant $\Phi(r) = 0$ où $r = X_1(X_2X_3) - (X_1X_2)X_3 - X_1(X_3X_2) + (X_1X_3)X_2$.
On pose naturellement :

$\phi(X_1X_2) =$  et $\phi(X_2X_1) =$  .

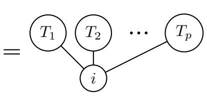
Ceci permet de définir $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{RT}$. Ainsi, Φ transforme la concaténation de deux mots sur $\mathcal{F}$ en la loi $\star$ sur $\mathcal{RT}$. Nous avons ainsi :

$\phi(r) =$  $= 0.$

Nous avons alors un morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{PL} \longrightarrow \mathcal{RT}$.

Définissons maintenant un inverse $\Psi : \mathcal{RT} \longrightarrow \mathcal{PL}$. Pour cela, si I est un ensemble fini, on note $\mathcal{RT}(I)$ l'ensemble des arbres ayant I pour ensemble de sommets, avec un des points i de I comme étant la racine. On note aussi $\mathcal{PL}(I) = \mathcal{PL}(Card(I))$. On note $\Phi_I : \mathcal{PL}(I) \longrightarrow \mathcal{RT}(I)$ l'application induite par Φ.

Commençons par trouver $\Psi_I : \mathcal{RT}(I) \longrightarrow \mathcal{PL}(I)$ telle que $\Psi_I \circ \Phi_I = id$ et $\Phi_I \circ \Psi_I = id$. On prouve cette existence par récurrence sur le cardinal de I. Si $Card(I) = 1$, c'est trivial. Si on suppose la proposition vraie dès que $Card(I) \leqslant n$, supposons I de cardinal $n + 1$.
Soit $T \in \mathcal{RT}(I)$, de racine $i \in I$. Son degré corresponds alors au cardinal de I. Nous pouvons écrire, de façon unique à une permutation près, T comme :

$T = B(i, T_1, ..., T_p) =$  ,

où $T_1, ..., T_p$ sont des arbres de degré strictement inférieurs à $n+1$. Nous allons définir Ψ_I par récurrence sur p. Si $p = 1$, on a :

$$T = \textcircled{\scriptsize i} \star T_1.$$

On pose alors $\Psi_I(T) = (X_i\Psi_I(T_1))$, et nous avons bien $\Phi_I\Psi_I(T) = T$ par hypothèse de récurrence.

A présent, si on est parvenu à définir Ψ_I dans une telle décomposition à $p - 1$ arbres, nous avons la formule :

$$T = B(i, T_2, ..., T_p) \star T_1 - \sum_{j=2}^{p} B(i, T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p)$$

qui nous permet alors de poser, toujours par hypothèse de récurrence :

$$\Psi_I(T) = (\Psi_I(B(i, T_2, ..., T_p))\Psi_I(T_1)) - \sum_{j=2}^{p} \Psi_I(B(i, T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p))$$

qui, à nouveau, vérifie $\Phi_I\Psi_I = id$.

La décomposition que nous avons utilisée pour T est unique, mais uniquement à permutation près. Il nous faut donc nous assurer que si, dans la formule précédente, nous extrayons un arbre autre que T_1, nous obtenons le même résultat. On prouve cela, à nouveau, par récurrence sur p. Pour $p = 0, 1$, le choix est imposé. Pour $p > 1$, nous allons montrer que si, à la place, nous avions sortis T_2 au lieu de T_1, nous aurions eu la même expression. Partons à nouveau de la formule :

$$T = B(i, T_2, ..., T_p) \star T_1 - \sum_{j=2}^{p} B(i, T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p).$$

Dans chaque termes B, on détache T_2 comme nous l'avons fait dans la formule $T = B(i, T_1, ..., T_p)$. La décomposition dans le premier terme est évidente. Dans la somme, il y a une distinction à faire suivant si $j = 2$ ou non. Si $j \neq 2$, on fait le détachement de T_2 comme au premier terme. Sinon, on détache $T_2 \star T_1$. Ceci donne :

$$T = (B(i, T_3, ..., T_p) \star T_2) \star T_1 - \sum_{k=3}^{p} B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_p) \star T_1$$

$$-B(i, T_3, ..., T_p) \star (T_2 \star T_1) + \sum_{j=3}^{p} B(i, T_3, ..., T_j \star (T_2 \star T_1), ..., T_p)$$

$$-\sum_{j=3}^{p} B(i, T_3, ..., T_j \star T_1, ..., T_p) \star T_2 + \sum_{j=3}^{p} B(i, T_3, ..., (T_j \star T_1) \star T_2, ..., T_p)$$

$$+\sum_{j=3}^{p} \sum_{\substack{k=3 \\ k\neq j}}^{p} B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p).$$

Maintenant, regardons l'expression qui est censée définir $\Psi_I(T)$ via cette formule. On réordonne pour cela les 7 termes apparaissant dans la formule précédente, de la façon suivante :

$$T = (B(i, T_3, ..., T_p) \star T_2) \star T_1 - B(i, T_3, ..., T_p) \star (T_2 \star T_1)$$

$$-\sum_{k=3}^{p} (B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_p) \star T_1 + B(i, T_3, ..., T_k \star T_1, ..., T_p) \star T_2)$$

$$+\sum_{j=3}^{p} \sum_{\substack{k=3 \\ k\neq j}}^{p} B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p)$$

$$+\sum_{j=3}^{p} (B(i, T_3, ..., T_j \star (T_2 \star T_1), ..., T_p) + B(i, T_3, ..., (T_j \star T_1) \star T_2, ..., T_p)).$$

La première ligne donne $A_{12} = (\Psi_I(B(i, T_3, ..., T_p))\Psi_I(T_2))\Psi_I(T_1) - \Psi_I(B(i, T_3, ..., T_p))(\Psi_I(T_2)\Psi_I(T_1))$. Si A_{21} est le même terme avec T_1 et T_2 inversés, on observe que $A_{12} - A_{21} \in (r)$, donc $A_{12} = A_{21}$ dans $\mathcal{PL}$.

La deuxième ligne donne $B_{12}^k = \Psi_I(B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_p)\Psi_I(T_1) + \Psi_I(B(i, T_3, ..., T_k \star T_1, ..., T_p)\Psi_I(T_2)$, pour tout indice k, qui est évidemment le même que B_{21}^k.

On a exactement la même chose pour les termes $C_{12}^{kj} = \Psi_I(B(i, T_3, ..., T_k \star T_2, ..., T_j \star T_1, ..., T_p))$ qui coïncident avec C_{21}^{jk}.

Enfin, les termes $D_{12}^j = \Psi_I(B(i, T_3, ..., T_j \star (T_2 \star T_1), ..., T_p)) + \Psi_I(B(i, T_3, ..., (T_j \star T_1) \star T_2, ..., T_p))$ donnés par la dernière ligne coïncident avec D_{21}^j en vertu du lemme 2.2.1.

$\Psi : \mathcal{RT} \longrightarrow \mathcal{PL}$ est donc un morphisme d'opérades bien défini.

De plus, nous avons que $\Psi(T \star T') = (\Psi(T)\Psi(T'))$. En effet, lorsque T est de degré 1, ceci vient directement de la définition de Ψ. Si $p > 1$, posons $T = B(i, T_1, ..., T_p)$. Nous pouvons alors écrire que $T \star T' = B(i, T', T_1, ..., T_p) + \sum_{k=1}^{p} B(i, T_1, ..., T_k \star T', ..., T_p)$. Or, en détachant T', on trouve d'après la définition de Ψ : $\Psi(B(i,T',T_1,...,T_p)) = (\Psi(T)\Psi(T')) - \sum_{j=2}^{p} \Psi(B(i,T_1,...,T_j \star T',...,T_p))$. En ajoutant l'image par Ψ de l'autre somme, on trouve bien $\Psi(T \star T') = (\Psi(T)\Psi(T'))$.

Soit $\mu \in \mathcal{PL}$ un monôme. Alors on peut écrire μ sous la forme d'une concaténation $\mu = (\rho\rho')$ de façon unique. Puisque $\Phi(\mu) = \Phi(\rho) \star \Phi(\rho')$, on en déduit $\Psi\Phi(\mu) = (\Psi\Phi(\rho)\Psi\Phi(\rho'))$ d'après ce qui précède. On en déduit par une récurrence directe que $\Psi\Phi = id$, ce qui achève la preuve du théorème.

$\square$

Définition 2.2.4. *Soit V un $\mathbb{K}$-module. Une algèbre pré-Lie libre engendrée par V, est une algèbre pré-Lie L munit d'un morphisme $i : V \longrightarrow L$ de modules tels que tout morphisme $f : V \longrightarrow M$ de V dans une algèbre pré-Lie M se factorise de façon unique à travers i en un morphisme d'algèbres pré-Lie $\overline{f} : L \longrightarrow M$.*
En clair, on a le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & M \\ & L \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}.$$

Le théorème précédent permet de donner une description complète d'une algèbre pré-Lie libre engendrée par un module libre :

Corollaire 2.2.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-module libre de base $\mathcal{B}$. Alors l'algèbre pré-Lie libre engendrée par V est le $\mathbb{K}$-module engendré par les arbres dont les sommets sont labélisés par $\mathcal{B}$, muni du produit $\star$ de la définition* 2.2.3.

Démonstration. Soit L ce module. On observe immédiatement que $\star$ lui confère une structure d'algèbre pré-Lie d'après le lemme 2.2.1. Il possède aussi une structure naturelle d'algèbre sur $\mathcal{RT}$ induit par $\star$.

Si M est une autre algèbre pré-Lie, d'après le théorème précédent, M est une algèbre sur $\mathcal{RT}$. On peut donc définir un morphisme d'algèbres pré-Lie $f : L \longrightarrow M$ si on se donne $f : V \longrightarrow M$ morphisme de modules, en envoyant la structure d'algèbre sur $\mathcal{RT}$ de L sur celle de M.

$\square$

2.3 Exponentielle et braces symétriques

2.3.1 Application exponentielle pré-Lie

Rappelons les hypothèses dans le cadre de notre étude. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Nous allons supposer que notre algèbre de Lie différentielle graduée L provient d'une algèbre différentielle graduée pré-Lie A muni de la loi $\star$ dont le commutateur gradué induit le crochet $[.,.]$.
Les hypothèses de convergences sont décrites par : $A \simeq \prod_{n\geqslant 0} A_{(n)}$, $A_{(n)} \star A_{(m)} \subset A_{(n+m)}$, $1 \in A_{(0)}$ et $L \simeq \prod_{n\geqslant 1} A_{(n)}$.

On définit la puissance de la façon suivante :

$$\lambda^{\star n} = (...((\underbrace{\lambda \star \lambda) \star \lambda)...) \star \lambda}_{n},$$

où on choisit d'itérer la loi $\star$ à droite. On peut de cette façon, d'après nos hypothèses, définir l'exponentielle d'un élément de degré 0 dont le poids d'ordre 0 est trivial :

$$e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\lambda^{\star n}.$$

On appelle *élément group-like* tout élément de A de degré 0 dont le poids 0 est égal à 1. On note l'ensemble de ces éléments G. On a donc $G = \{1\} \times L^0$.

Comme dans le cas associatif, l'exponentielle donne une bijection entre L^0 et G :

Lemme 2.3.1. *L'application exponentielle réalise une bijection de L^0 vers $G = \{1\} \times L^0 \subset A$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in L^0 \subset \{0\} \times \prod_{n \geqslant 1} A_{(n)}$. On écrit $\lambda = \lambda_{(1)} + ... + \lambda_{(n)} + ...$ avec $\lambda_{(n)} \in A_{(n)}$.
On a alors :

$$\lambda^{\star n} = \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{k_1+...+k_n=r} (...(\lambda_{(k_1)} \star \lambda_{(k_2)}) \star ...) \star \lambda_{(k_n)},$$

ce qui donne :

$$e^{\lambda} = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{r} \frac{1}{p!} \sum_{k_1+...+k_p=r} (...(\lambda_{(k_1)} \star \lambda_{(k_2)}) \star ...) \star \lambda_{(k_p)}.$$

Ceci implique alors que, puisque $L^0 \simeq \prod_{n \geqslant 1} A^0_{(n)}$, que $exp(L^0) \subset \{1\} \times \prod_{n \geqslant 1} A^0_{(n)} = G$. De plus, nous pouvons expliciter l'inverse $\lambda \in L^0$ d'un élément $1 + a \in G$ en regardant les poids. On écrit pour cela $e^{\lambda} = 1 + a$. On obtient donc $\lambda_{(1)} = a_{(1)}$ et :

$$\forall i \geqslant 2, a_{(i)} = \lambda_{(i)} + \sum_{p=2}^{i} \frac{1}{p!} \sum_{k_1+...+k_p=i} (...(\lambda_{(k_1)} \star \lambda_{(k_2)}) \star ...) \star \lambda_{(k_p)},$$

qui permet alors d'exprimer par récurrence l'inverse λ d'un élément $1 + a$.

□

Il est possible de donner une formule explicite pour l'inverse. L'inverse joue en fait le rôle du logarithme dans les algèbres pré-Lie, et est appelé *expension de Magnus pré-Lie* :

$$\log(1 + a) = a - \frac{1}{2} a \star a + \frac{1}{4} a \star (a \star a) + \frac{1}{12} (a \star a) \star a + ... \,.$$

2.3.2 Braces symétriques et produit circulaire

Définition 2.3.1. *Soit A une algèbre pré-Lie munie de la loi $\star$. On définit les opérations braces symétriques par les formules suivantes :*

1. $a\{\} = a$;
2. $a\{b_1\} = a \star b_1$;
3. $\forall n \geqslant 1, a\{b_1, ..., b_n\} = a\{b_1, ..., b_{n-1}\}\{b_n\} - \sum_{i=1}^{n-1} a\{b_1, ..., b_{i-1}, b_i\{b_n\}, b_{i+1} ..., b_{n-1}\}$.

En particulier, nous avons pour $n = 2$:

$$a\{b_1, b_2\} = a\{b_1\}\{b_2\} - a\{b_1\{b_2\}\} = (a \star b_1) \star b_2 - a \star (b_1 \star b_2).$$

Comme leur nom l'indique, les braces symétriques sont symétriques en les variables b_i et préservent la graduation en poids d'une algèbre pré-Lie munie de poids.

Par la suite, nous utiliserons les braces symétriques dans le cadre d'une algèbre pré-Lie graduée. La définition s'adapte, en mettant un signe qui décrit la permutation des b_i sous-jacente. Mais pour notre étude, les braces seront utilisées uniquement dans le cas où un seul des b_i est éventuellement de degré non nul. On peut donc permuter cet élément avec un autre élément de degré 0 sans apparition de signe.

Remarque 2.3.1. *Dans le cadre de l'algèbre pré-Lie des arbres $\mathcal{RT}$, on remarque que les braces correspondent à ce que nous avons noté B dans la preuve du théorème* 2.2.2.

Définition 2.3.2. *Dans une algèbre pré-Lie A graduée munie de la loi $\star$, on définit le produit circulaire par :*

$$a \circledcirc (1+b) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} a\{\underbrace{b, ..., b}_{n}\},$$

où $a \in A$, et $b \in \{0\} \times \prod_{n \geqslant 1} A^0_{(n)}$.

En particulier, on remarque que $\circledcirc$ est linéaire uniquement à gauche, et que 1 est une unité aussi bien à gauche que à droite.

2.4 Lien avec le groupe de jauge

On suppose que A est une algèbre pré-Lie graduée munie des hypothèses de convergence précédemment décrites. On commence par prouver la proposition fondamentale suivante :

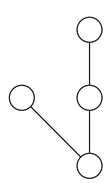
Proposition 2.4.1. *Soient $a \in A$ et $\lambda \in L^0$. Alors :*

$$e^{r_\lambda}(a) = a \circledcirc e^{\lambda}.$$

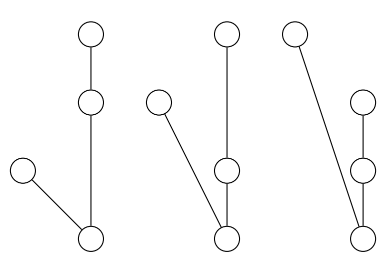
Démonstration. Par symétrie, et parce que λ est de degré 0, il suffit de prouver l'égalité sur l'algèbre pré-Lie libre engendrée par a et λ. D'après le chapitre précédent, explicitement, cet espace est donné par les arbres enracinés dont les sommets sont labélisés par a et λ, muni du produit $T_1 \star T_2$ consistant à sommer tous les arbres obtenus en attachant la racine de T_2 à un sommet de T_1.
Nous noterons par la suite $\mathcal{RT}^*$ l'opérade (non symétrique) des arbres enracinés sans étiquetage des sommets, et donc RT^* l'ensemble des arbres enracinés sans étiquetages.

Dans cette algèbre, nous allons décrire explicitement e^{λ}. Nous allons pour cela avoir besoin de quelques définitions. Si t est un arbre, on note ν_t le nombre de sommets qu'il possède, et n_t le nombre de *niveaux* de cet arbre. On appelle *niveau* de t une représentation possible de cet arbre où on place, sur chacun des ν_t étages, un seul sommet.

Donnons l'exemple de l'arbre suivant :


.

Cet arbre t possède $n_t = 3$ niveaux. En effet, nous avons les trois niveaux suivants pour cet arbre :



et ce sont les seuls. En fait, les niveaux correspondent à toutes les façons d'obtenir l'arbre en fonction de l'ordre à laquelle on ajoute un sommet, en commençant par la racine, en montant d'un étage à chaque étape. Ceci est équivalent à se donner une relation d'ordre totale sur les sommets de l'arbre qui raffine la relation d'ordre partielle induite par la gravité.

Alors, nous avons l'égalité :

$$e^{\lambda} = \sum_{t \in RT^*} \frac{n_t}{\nu_t!} t(\lambda),$$

où $t(\lambda)$ indique que nous avons attribué λ à tous les sommets de $t \in RT^*$.

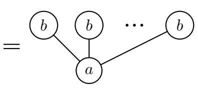
De la même manière, nous avons la formule suivante :

$$e^{r_\lambda}(a) = \sum_{t \in rRT^*} \frac{n_t}{(\nu_t - 1)!} t(a, \lambda),$$

où rRT^* corresponds aux arbres possédant au moins un sommet, et où $t(a, \lambda)$ corresponds à l'arbre t auquel on a nommé a la racine, et λ les autres sommets.

De plus, d'après la remarque 2.3.1, nous avons :

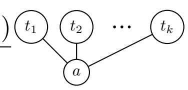
$$a\{b, ..., b\} =$$



.

Nous avons alors l'égalité :

$$a \circledcirc e^{\lambda} = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{\{t_1, ..., t_k\} \subset rRT^*} \frac{n_{t_1}...n_{t_k}}{\nu_{t_1}!...\nu_{t_k}!} \frac{n(t_1, ..., t_k)}{k!}$$



,

où $n(t_1, ..., t_k)$ correspond au nombre de fois que la configuration $t_1, ..., t_k$ apparaît, et où la somme se fait sur tous les sous-ensembles finis de rRT^*. Si on note $i_1, ..., i_l$ le nombre des différents types d'arbres qui apparaissent là-dedans, nous avons $n(t_1, ..., t_k) = \dfrac{k!}{i_1!...i_l!}$.

A présent, considérons $t \in rRT^*$ et l'arbre $t(a, \lambda)$. Appelons $t_1, ..., t_k$ les arbres reliés à la racine a. Chacun de ces arbres possède un nombre de niveaux $n_{t_1}, ..., n_{t_k}$ respectivement. Supposons dans un premier temps que ces arbres soient 2 à 2 distincts. On remarque alors que se donner un niveau sur t est équivalent à se donner un niveau pour chaque arbres $t_1, ..., t_k$, ainsi qu'un $(\nu_{t_1}, ..., \nu_{t_k})$-shuffle. Le nombre de niveaux que cette décomposition induit est alors :

$$n_{t_1}...n_{t_k} \frac{(\nu_{t_1} + ... + \nu_{t_k})!}{\nu_{t_1}!...\nu_{t_k}!} = n_{t_1}...n_{t_k} \frac{(\nu_t - 1)!}{\nu_{t_1}!...\nu_{t_k}!}.$$

Cependant, il faut prendre en compte le cas potentiel où plusieurs arbres parmi $t_1, ..., t_k$ sont de même type. Il faut donc diviser par $i_1!...i_k!$, ce qui donne :

$$n_t = (\nu_t - 1)! \frac{n_{t_1}...n_{t_k}}{\nu_{t_1}!...\nu_{t_k}!} \frac{n(t_1, ..., t_k)}{k!}$$

d'où l'égalité recherchée.

$\square$

Théorème 2.4.1. *L'ensemble G des éléments group-like est un groupe muni de la loi $\circledcirc$. De plus, exp donne un isomorphisme entre le groupe de jauge Γ et G.*

Démonstration. D'après l'égalité satisfaite dans les algèbres pré-Lie, nous avons, pour tout $\lambda, \mu \in L^0$, l'égalité $r_{[\mu,\lambda]} = [r_\lambda, r_\mu]$. Nous avons alors, en développant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, les égalités $e^{BCH(\lambda,\mu)} = e^{r_{BCH(\lambda,\mu)}}(1) = e^{r_\mu}e^{r_\lambda}(1) = e^{r_\mu}(e^\lambda)$. On trouve donc $e^{BCH(\lambda,\mu)} = e^\lambda \circledcirc e^\mu$ d'après la proposition 2.4.1. Puisque *exp* est bijective, ceci permet de conférer en particulier G d'une structure de groupe muni de la loi $\circledcirc$.

□

Remarquons en particulier que la loi $\circledcirc$ est associative, et que l'inverse d'un élément $e^\lambda \in G$ est $e^{-\lambda}$.

Dans le cas où nous avons un élément group-like $1 - \mu$ avec $\mu \in L^0$, il est possible de déterminer son inverse pour $\circledcirc$ sans avoir sa forme exponentielle. Donnons pour cela une définition :

Définition 2.4.1. *Un morphisme entre deux arbres est une application envoyant les sommets sur des sommets, et préservant l'adjacence des sommets. En d'autres termes, si A et B sont deux sommets adjacents dans un arbre, alors leur image par le morphisme sont aussi deux sommets adjacents.*
Un automorphisme est un morphisme bijectif d'un arbre dans lui-même. Si $t \in RT^*$, on note $Aut(t)$ le groupe fini des automorphismes de t.

Enfin, si $\mu \in L^0$, considérons $PreLie(\mu)$ l'algèbre pré-Lie à 1 générateur engendré par μ. D'après la propriété universelle satisfaite par cette algèbre pré-Lie, il existe un morphisme d'algèbres pré-Lie de $PreLie(\mu)$ vers L^0. Pour tout arbre t dont les sommets sont étiquetés par μ, on note $t(\mu)$ l'image de t par ce morphisme.

On peut alors donner la proposition suivante :

Proposition 2.4.2. *On a l'égalité :*

$$(1-\mu)^{\circledcirc -1} = \sum_{t \in RT^*} \frac{1}{|Aut\ t|} t(\mu).$$

Démonstration. Il suffit de prouver cette proposition dans l'algèbre $PreLie(\mu)$. Nous devons alors prouver l'égalité :

$$(1-\mu) \circledcirc \sum_{t \in RT^*} \frac{1}{|Aut\ t|} t(\mu) = 1.$$

Dans cette composition, le terme 1 apparaît une et seule fois, donné par le terme 1 de $1-\mu$. Si maintenant on prends $s \in rRT^*$, il y a deux façons de voir apparaître $s(\mu)$ dans cette composition.

Tout d'abord, il apparaît à l'aide du terme 1 de $1-\mu$, avec pour coefficient $\dfrac{1}{|Aut\ s|}$.

Ensuite, il apparaît avec le terme μ. Puisque s est un arbre non trivial, on peut le voir comme sa racine, μ, sur lequel on greffe les arbres $t_1, ..., t_k$. Le coefficient devant $s(\mu)$ est alors :

$$-\frac{n(t_1,...,t_k)}{k!}\frac{1}{|Aut\ t_1|}...\frac{1}{|Aut\ t_k|} = -\frac{1}{i_1!}...\frac{1}{i_l!}\frac{1}{|Aut\ t_1|}...\frac{1}{|Aut\ t_k|}.$$

Soit maintenant $\sigma \in Aut(s)$. Notons $a_1^i, ..., a_{j_i}^i$ les racines de tous les arbres de type i apparaissant dans $t_1, ..., t_k$. Alors, puisque σ préserve l'adjacence des sommets, σ induit une permutation des $a_1^i, ..., a_{j_i}^i$. Ceci induit en particulier une permutation des racines de $t_1, ..., t_k$. On note $\sigma_1 \in Aut(s)$ l'automorphisme permutant les arbres $t_1, ..., t_k$ suivant cette permutation.

Considérons alors $\sigma_2 = \sigma\sigma_1^{-1}$. Alors $\sigma_2 \in Aut(s)$ et σ_2 fixe les racines de $t_1, ..., t_k$ par définition. Ainsi, puisque l'adjacence des sommets est préservée, σ_2 induit un élément de $Aut(t_i)$ pour tout i.

En clair, nous venons de prouver que $|Aut(s)| = i_1! \ ...\ i_l!\ |Aut(t_1)|\ ...\ |Aut(t_k)|$, et donc l'égalité.

□

2.5 Action sur la variété de Maurer-Cartan

Donnons enfin le théorème central de cette section :

Théorème 2.5.1. *Sous les hypothèses de convergence précédemment citées, l'action du groupe de jauge Γ sur la variété de Maurer-Cartan est donnée par :*

$$\lambda.\alpha = e^{ad_\lambda}(\alpha) = (e^\lambda \star \alpha) \circledcirc e^{-\lambda}.$$

Remarque 2.5.1. *Dans le cas où on suppose que l'algèbre A d'où provient L est en fait associative, la loi $\circledcirc$ coïncide avec $\star$, et donc on retrouve les formules de la première section.*

Démonstration. Les hypothèses de convergence assurent que $\gamma(t) = e^{tad_\lambda}(\alpha)$ a bien un sens et converge en $t = 1$ en $e^{ad_\lambda}(\alpha)$. De plus, en regardant chaque poids, on trouve aisément que la courbe γ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$\gamma'(t) = ad_\lambda(\gamma(t)) = \lambda \star \gamma(t) - \gamma(t) \star \lambda$$

qui vaut α en $t = 0$.

Nous allons poser $\varphi(t) = (e^{t\lambda} \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda}$ et montrer que φ satisfait aussi le système de Cauchy précédent.

On a d'abord directement $\varphi(0) = \alpha$. Ensuite, par l'égalité

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (e^{t\lambda} \star \alpha)\{\underbrace{e^{-t\lambda} - 1, ..., e^{-t\lambda} - 1}_{n}\},$$

on obtient :

$$\varphi'(t) = ((e^{t\lambda} \star \lambda) \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} (e^{t\lambda} \star \alpha)\{\underbrace{e^{-t\lambda} - 1, ..., e^{-t\lambda} - 1}_{n-1}, e^{-t\lambda} \star \lambda\}.$$

En changeant de variable, on obtient ainsi :

$$\varphi'(t) = ((e^{t\lambda} \star \lambda) \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda} - (e^{t\lambda} \star \alpha) \circledcirc (e^{-t\lambda}; e^{-t\lambda} \star \lambda),$$

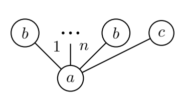
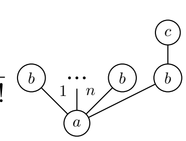
où nous adoptons la notation suivante :

$$a \circledcirc (1 + b; c) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a\{\underbrace{b, ..., b}_{n}, c\}.$$

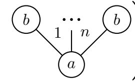
Avant de poursuivre, démontrons la formule suivante :

$$a \circledcirc (1 + b; (1 + b) \star c) = (a \circledcirc (1 + b)) \star c.$$

Il suffit pour cela de travailler dans l'algèbre pré-Lie libre en trois variables a, b et c. On a tout d'abord $a \circledcirc (1 + b; (1 + b) \star c) = a \circledcirc (1 + b; c) + a \circledcirc (1 + b; b \star c)$ par linéarité par rapport à la dernière variable dans la brace.
On a alors :

$$a \circledcirc (1 + b; (1 + b) \star c) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$  $$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$  .

Et nous avons, de plus :

$$(a \circledcirc (1+b)) \star c = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right.$$  $$\left. \vphantom{\sum_{n=0}^{+\infty}} \right) \star c.$$

qui coïncide effectivement avec la précédente formule.

On applique cette formule avec $a = e^{t\lambda} \star \alpha$, $1 + b = e^{-t\lambda}$ et $c = \lambda$:

$$(e^{t\lambda} \star \alpha) \circledcirc (e^{-t\lambda}; e^{-t\lambda} \star \lambda) = ((e^{t\lambda} \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda}) \star \lambda = \varphi(t) \star \lambda.$$

Nous obtenons ainsi le deuxième terme. Pour avoir le premier, on applique la proposition 2.4.1 avec $a = \lambda$ pour avoir $e^{t\lambda} \star \lambda = \lambda \circledcirc e^{t\lambda}$. On obtient ainsi $((e^{t\lambda} \star \lambda) \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda} = ((\lambda \circledcirc e^{t\lambda}) \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda}$. Pour poursuivre, on prouve maintenant la formule suivante :

$$((a \circledcirc e^{\lambda}) \star b) \circledcirc e^{-\lambda} = a \star ((e^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}).$$

En appliquant la formule générale précédemment démontrée, on trouve :

$$\begin{aligned} ((a \circledcirc e^{\lambda}) \star b) \circledcirc e^{-\lambda} &= (a \circledcirc (e^{\lambda}; e^{\lambda} \star b)) \circledcirc e^{-\lambda} \\ &= ((1+a) \circledcirc (e^{\lambda}; e^{\lambda} \star b)) \circledcirc e^{-\lambda} - (e^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Par associativité de $\circledcirc$, nous avons :

$$((1+a) \circledcirc (e^{\lambda} + te^{\lambda} \star b)) \circledcirc e^{-\lambda} = (1+a) \circledcirc ((e^{\lambda} + te^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}).$$

Si on dérive cette identité et qu'on regarde à $t = 0$, ceci donne :

$$((1+a) \circledcirc (e^{\lambda}; e^{\lambda} \star b)) \circledcirc e^{-\lambda} = (1+a) \circledcirc (e^{\lambda} \circledcirc e^{-\lambda}; (e^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}),$$

soit alors :

$$((1+a) \circledcirc (e^{\lambda}; e^{\lambda} \star b)) \circledcirc e^{-\lambda} = (1+a) \star ((e^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}),$$

et donc :

$$((a \circledcirc e^{\lambda}) \star b) \circledcirc e^{-\lambda} = a \star ((e^{\lambda} \star b) \circledcirc e^{-\lambda}).$$

On applique à présent cette formule avec $a = \lambda, b = \alpha$ et $\lambda = t\lambda$. On obtient :

$$((\lambda \circledcirc e^{t\lambda}) \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda} = \lambda \star ((e^{t\lambda} \star \alpha) \circledcirc e^{-t\lambda}) = \lambda \star \varphi(t).$$

Ainsi, φ satisfait le même système de Cauchy que γ, ce qui prouve que ces deux courbes sont les mêmes. On trouve la formule recherchée pour $t = 1$.

□

2.6 Exemple d'application

Dans cette section, on donne un exemple développé dans [DSV16]. Nous supposerons la plupart des outils utilisés dans cette section connus de la part du lecteur, qui pourra, en cas de besoin, se référer à [DSV16], [LV12] et [Freb].

Considérons $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules gradués munis d'une différentielle. On note $\mathcal{P}^{\text{i}}$ sa coopérade duale de Koszul associée. On sait (voir [LV12] et [Freb]) que se donner une structure d'algèbre V sur $\mathcal{P}_\infty = \Omega\mathcal{P}^{\text{i}}$ où Ω est le foncteur cobar est équivalent à se donner $\alpha \in Hom_{\mathbb{S}}(\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}, End_V)$ satisfaisant l'équation de Maurer-Cartan :

$$\partial(\alpha) + \alpha \star \alpha = 0,$$

où $\partial = ad(\delta)$ est la différentielle sur $Hom_{\mathbb{S}}(\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}, End_V)$ et $\star$ la loi pré-Lie définie par :

$$f \star g : \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \otimes \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \xrightarrow{f \otimes g} End_V \otimes End_V \xrightarrow{\gamma} End_V,$$

où $\Delta_{(1)}$ est la décomposition infinitésimal associée au coproduit Δ.

Ceci se voit sur l'algèbre pré-Lie non unitaire $\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V} = (Hom_{\mathbb{S}}(\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}, End_V), \partial, \star)$. On peut voir ceci dans une algèbre pré-Lie unitaire, en commençant d'abord par ajouter un élément δ de degré 1 comme dans le début du chapitre 1, qu'on envoie ensuite dans $Hom_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}^{\text{i}}, End_V)$ en l'envoyant sur l'application qui à I associe ∂_V. On a ainsi :

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V} \subset \mathfrak{a}_{\mathcal{P},V} = (Hom_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}^{\text{i}}, End_V), \partial, \star, 1),$$

où 1 est défini en envoyant I sur id_V.

$\mathcal{P}^{\text{i}}$ possède une graduation $\mathcal{P}^{\text{i}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{P}^{\text{i}(n)}$. En effet, soit M une séquence symétrique dans la catégorie des modules gradués munis d'une différentielle, et notons $\Theta^c(M)$ la coopérade engendrée par M. Alors $\Theta^c(M)$ possède une graduation en poids, en posant $w(id) = 0$, $w(\mu) = 1$ pour tout $\mu \in M$, et par récurrence $w(\nu; \mu_1, ..., \mu_n) = w(\nu) + w(\mu_1) + ... + w(\mu_n)$. Ceci permet de définir une graduation $\Theta^c(M) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Theta^c(M)^{(n)}$, et on en fait de même pour $\mathcal{P}^{\text{i}}$.

On a alors une décomposition en poids :

$$Hom_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}^{\text{i}}, End_V) = End_V \times \prod_{n=1}^{\infty} Hom_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}^{\text{i}(n)}, End_V).$$

Lemme 2.6.1. *Dans $\mathfrak{a}_{\mathcal{P},V}$, le produit circulaire entre deux éléments f, g tels que $f(I) = g(I) = id_V$ est donné par :*

$$f \circledcirc g : \mathcal{P}^i \xrightarrow{\Delta} \mathcal{P}^i \circ \mathcal{P}^i \xrightarrow{f \circ g} End_V \circ End_V \xrightarrow{\gamma} End_V.$$

Démonstration. On utilise la décomposition $\mathcal{P}^{\text{i}} = I \oplus \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}$. On décrit alors Δ sur la seconde composante :

$$\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \xrightarrow{\Delta} \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \circ I \oplus I \otimes \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \oplus \bigoplus_{k \geqslant 1} \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \otimes \underbrace{(\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \otimes ... \otimes \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}})}_{k},$$

Notons $\Delta_{(0)} : \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \xrightarrow{\Delta} \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \circ I \oplus I \otimes \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}$ et $\Delta_{(k)} : \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \xrightarrow{\Delta} \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \otimes \underbrace{(\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}} \otimes ... \otimes \overline{\mathcal{P}}^{\text{i}})}_{k}$.

Si on écrit $f = 1 + \overline{f}$ et $g = 1 + \overline{g}$, alors :

$$f \circledcirc g = 1 + \overline{f} + \overline{g} + \overline{f} \star \overline{g} + \frac{1}{2}\overline{f}\{\overline{g}, \overline{g}\} + \frac{1}{6}\overline{f}\{\overline{g}, \overline{g}, \overline{g}\} + ...$$

On a, de façon triviale, que les deux formules donnent la même chose sur I et valent id_V. $\Delta_{(0)}$ donne, sur $\overline{\mathcal{P}}^{\text{i}}$, le terme $\overline{f} + \overline{g}$. Plus généralement, on prouve par récurrence sur k que $\Delta_{(k)}$ nous donne $\frac{1}{k!}\overline{f}\{\underbrace{\overline{g}, ..., \overline{g}}_{k}\}$.

Ceci est évident pour $k = 1$. Si on suppose cela vrai jusque k, alors, en utilisant les relations vérifiées par les braces symétriques, le résultat tombe.

□

Remarque 2.6.1. *A priori, le produit circulaire n'est défini que pour des morphismes f et g qui valent id_V sur I. Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, on notera $f \circledcirc g = \gamma(f \circ g)\Delta$ en mimant la formule précédente.*

Soient α, β deux éléments de Maurer-Cartan. On appelle ∞-morphisme tout élément $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P},V}$ tel que :

$$f \star \alpha = \beta \circledcirc f.$$

La raison de cette écriture particulière est qu'ici nous ne demandons pas que $f(I) = id_V$, et donc f n'appartient pas au groupe des éléments group-like. L'inverse de f pour $\circledcirc$ n'a donc a priori pas de sens.

Les ∞-isomorphismes correspondent aux ∞-morphismes f tels que le premier élément $f_{(0)}(I)$ soit inversible. On parle de ∞-isotopie si $f_{(0)}(I) = id_V$.

On a ainsi directement :

Théorème 2.6.1. *Le groupe des ∞-isotopies est isomorphe au groupe de jauge, via l'application exponentielle :*

$$\Gamma \simeq (\infty\text{-}iso, \circledcirc, id_V).$$

De plus, le groupoïde de Deligne est équivalent au groupoïde formé des algèbres sur $\mathcal{P}_\infty$ ayant pour morphismes les ∞-isotopies :

$$Deligne(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}) = (\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}), \Gamma) \simeq (\mathcal{P}_\infty\text{-}alg, \infty\text{-}iso).$$

À l'aide de l'objet cylindre fourni par Benoit Fresse dans [Freb], et sachant que $\mathcal{P}_\infty$ est cofibrant, et End_V fibrant, on a ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.1. *Le groupoïde de Deligne est équivalent au groupoïde formé des morphismes d'opérades différentielles graduées ayant pour morphismes les équivalentes d'homotopies :*

$$Deligne(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}) \simeq (Hom_{dg\ Op}(\Omega\mathcal{P}^{i}, End_V), \sim_h).$$

Chapitre 3

Algèbres à braces symétriques et algèbres pré-Lie

Dans les chapitres précédents, nous avons été amené à définir la notion de braces symétriques dans le cadre des algèbres pré-Lie. Réciproquement, dans la preuve du théorème 2.2.2, nous avons vu des liens assez profonds entre la loi $\star$ de l'algèbre pré-Lie et les braces symétriques.

Le but de ce chapitre est de regarder plus en profondeur ce lien, dans le but de pouvoir généraliser la preuve précédente en caractéristique positive, en cherchant à mimer les braces symétriques qui apparaissent dans la définition de l'exponentielle pré-Lie. Nous allons en fait voir qu'il existe une correspondance forte intéressante entre algèbres pré-Lie et algèbres à braces symétriques.

Nous utiliserons pour cela la notion d'algèbres de Hopf, avec laquelle le lecteur sera supposé familier. Les définitions utiles à ce sujet sont résumés dans l'annexe B de ce mémoire.

3.1 Structure d'algèbre de Hopf de $S(L)$

Dans cette partie, nous désignerons par L une algèbre pré-Lie sur un anneau $\mathbb{K}$, munie de son produit $\star$.

Nous allons définir une structure particulière d'algèbre de Hopf sur l'algèbre symétrique $S(L)$ de L, définie comme $S(L) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0}(L^{\otimes n})_{\Sigma_n}$, où $(L^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ est $L^{\otimes n}$ quotienté par le sous-module engendré par les éléments de la forme $\sigma.x - x$, $x \in L^{\otimes n}$, $\sigma \in \Sigma_n$.

3.1.1 L'algèbre de Hopf canonique $S(L)$

Donnons tout d'abord une première structure naturelle d'algèbre de Hopf sur $S(L)$. Essentiellement, dans les sous-sections suivantes, nous allons conserver toute la structure et changer uniquement le produit, de sorte à pouvoir retrouver l'algèbre de Lie enveloppante de L.

Nous désignerons par $x_1\ \dots\ x_n$ l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ dans $S(L)$. Par définition de $S(L)$, on a ainsi $\forall \sigma \in \Sigma_n, x_{\sigma(1)}\ \dots\ x_{\sigma(n)} = x_1\ \dots\ x_n$. En particulier, on définit un produit, noté . , comme étant la concaténation des mots sur L, avec pour élément neutre $1 \in \mathbb{K} = L^{\otimes 0}$.

Nous avons un coproduit, appelé *coproduit shuffle*, défini par :

$$\Delta(x_1\ \dots\ x_n) = \sum_{\{i_1<\dots<i_r\}\bigsqcup\{j_1<\dots<j_s\}=[\![1;n]\!]} (x_{i_1}\ \dots\ x_{i_r}) \otimes (x_{j_1}\ \dots\ x_{j_s}).$$

Ce coproduit cocommutatif est associé à l'augmentation $\varepsilon : S(L) \longrightarrow \mathbb{K}$ qui est le morphisme nul sur chaque $(L^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ pour $n \geqslant 1$, et l'identité sur $\mathbb{K}$.

On définit enfin une antipode σ comme : $\forall x \in L^{\otimes n}, \sigma(x) = (-1)^n x$.

Avec les données précédentes, il est facile de voir que nous avons conféré une structure d'algèbre de Hopf à $S(L)$.
En particulier, Δ et σ sont uniquement déterminées par leur donnée sur L : $\forall x \in L, \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ et $\sigma(x) = -x$.

Remarque 3.1.1. *Soit* $T(L) = \bigoplus_{n \geqslant 0} L^{\otimes n}$ *l'algèbre tensorielle de* L. *On peut adapter les définitions précédentes à* $T(L)$, *et ainsi montrer que ceci confère à* $T(L)$ *une structure d'algèbre de Hopf, de la même façon. Plus particulièrement, le produit . précédent doit être pris comme étant le produit dans* $T(L)$ *(le produit tensoriel), et l'antipode est définie par* $\sigma(x_1 \dots x_n) = (-1)^n (x_n \dots x_1)$

3.1.2 Extension de $\star$ sur $S(L)$

Notre but, dans cette partie, sera d'étendre le produit $\star$ définie sur L sur tout $S(L)$, avant d'en déduire un produit associatif $*$ sur $S(L)$ lui conférant une autre structure particulière d'algèbre de Hopf.

On commence à étendre la loi à gauche, en posant, pour tout $T, X_1, ..., X_n$ dans L :

$$1 \star T = 0;$$
$$(X_1 \dots X_n) \star T = \sum_{i=1}^{n} (X_1 \dots (X_i \star T) \dots X_n).$$

Remarque 3.1.2. *La loi* $\star$ *définie de* $S(L) \otimes L$ *a un associateur symétrique en ses deux dernières variables, c'est-à-dire :*

$$X \star (Y \star Z) - (X \star Y) \star Z = X \star (Z \star Y) - (X \star Z) \star Y,$$

pour tout $X \in S(L), Y, Z \in L$.

Définition 3.1.1. *On définit des applications multilinéaires* $\star_{(n)} : L \otimes L^{\otimes n} \longrightarrow L$ *associant à* $T \otimes A$ *l'élément* $T \star A$ *défini par* $T \star 1 = T$ *et, si* $X \in L$ *et* $A = B \otimes X$ *avec* $B \in L^{\otimes (n-1)}$:

$$T \star_{(n)} A = (T \star_{(n-1)} B) \star X - T \star_{(n-1)} (B \star X).$$

Lemme 3.1.1. *Pour tout* $n \geqslant 0$, *l'application* $\star_{(n)}$ *est symétrique en les* n *dernières variables, ce qui définit alors* $\star_{(n)} : L \otimes S^n(L) \longrightarrow L$ *où* $S^n(L)$ *est le module engendré par les monômes de taille* n *de* $S(L)$.

Démonstration. On prouve la proposition par récurrence sur n. Pour $A \in L^{\otimes n}$, $X, Y, T \in L$, on a :

$$\begin{aligned} T \star_{(n+2)} AXY \quad = \quad & ((T \star_{(n)} A) \star X) \star Y - (T \star_{(n)} (A \star X)) \star Y - (T \star_{(n)} (A \star Y)) \star X \\ & + T \star_{(n)} ((A \star Y) \star X) - (T \star_{(n)} A) \star (X \star Y) + T \star_{(n)} (A \star (X \star Y)). \end{aligned}$$

On constate alors, d'après la remarque précédente, que cette expression est symétrique en X et Y, et donc le lemme est prouvé par récurrence si on suppose la proposition vraie pour n, puisque la donnée d'une transposition et d'un n-cycle dans Σ_n engendre le groupe.

□

On arrive alors à la proposition qui nous intéresse :

Proposition 3.1.1. *Il existe une unique extension* $\star : S(L) \otimes S(L) \longrightarrow S(L)$ *de* $\star : L \otimes L \longrightarrow L$ *satisfaisant les égalités suivantes :*

(i) $A \star 1 = A$ *;*

(ii) $T \star BX = (T \star B) \star X - T \star (B \star X)$ *;*

(iii) $AB \star C = (A \star C_{(1)}).(B \star C_{(2)})$*,*

où $A, B, C \in S(L)$ *et* $X, T \in L$*.*

Démonstration. D'après la formule (iii), on a pour tout $T \in L$, $1 \star T = (1 \star T).(1 \star 1) + (1 \star 1).(1 \star T) = 2 \times 1 \star T$ soit $1 \star T = 0$. Une récurrence immédiate associée à (ii) donne ainsi $1 \star A = \varepsilon(A)$ pour tout $A \in S(L)$.

De plus, par les relations (i) et (iii) :

$$\begin{aligned}(X_1 \dots X_{n+1}) \star T &= ((X_1 \dots X_n) \star T).(X_{n+1} \star 1) + ((X_1 \dots X_n) \star 1).(X_{n+1} \star T) \\ &= ((X_1 \dots X_n) \star T).X_{n+1} + (X_1 \dots X_n).(X_{n+1} \star T).\end{aligned}$$

Donc par une récurrence immédiate, on obtient :

$$(X_1 \dots X_n) \star T = \sum_{i=1}^{n} (X_1 \dots (X_i \star T) \dots X_n).$$

De plus, (ii) implique directement que si A est un monôme de longueur n, alors $T \star A = T \star_{(n)} A$. (iii) permet alors ainsi de définir entièrement et de façon unique $A \star B$ pour $A, B \in S(L)$, ce qui a bien un sens par coassociativité et cocommutativité de Δ.

□

Donnons enfin quelques égalités qui seront utiles pour la structure d'algèbre de Hopf de $S(L)$:

Proposition 3.1.2. *Soit* $A, B, C \in S(L)$ *et* $X \in L$*. Alors :*

(i) $1 \star A = \varepsilon(A)$ *;*

(ii) $\varepsilon(A \star B) = \varepsilon(A)\varepsilon(B)$ *;*

(iii) $\Delta(A \star B) = (A_{(1)} \star B_{(1)}) \otimes (A_{(2)} \star B_{(2)})$ *;*

(iv) $A \star BX = (A \star B) \star X - A \star (B \star X)$ *;*

(v) $(A \star B) \star C = A \star ((B \star C_{(1)}).C_{(2)})$*.*

Démonstration. (i) a déjà été vu, et (ii) est évident, en remarquant que $1 \star 1 = 1$ et que si A est un monôme de longueur n, Alors $A \star B$ est une somme de monômes de même longueur que A.

On prouve (iii) par récurrence sur la longueur du monôme A. Si A est de longueur 0, on a d'après (i) que $\Delta(A \star B) = \varepsilon(A)\varepsilon(B) 1 \otimes 1$. D'autre part, $(A_{(1)} \star B_{(1)}) \otimes (A_{(2)} \star B_{(2)}) = \varepsilon(A)\varepsilon(B_{(1)})\varepsilon(B_{(2)}) 1 \otimes 1$ et $\varepsilon(B) = \varepsilon(B_{(1)})\varepsilon(B_{(2)})$ puisque si B est un monôme de longueur au moins 1, tout est nul, et sinon l'égalité est triviale. De plus, $\Delta(AB \star C) = \Delta((A \star C_{(1)}).(B \star C_{(2)})) = \Delta(A \star C_{(1)}).\Delta(B \star C_{(2)})$ d'après la structure canonique d'algèbre de Hopf de $S(L)$. Donc, par hypothèse de récurrence :

$$\Delta(AB \star C) = ((A_{(1)} \star C_{(1)}) \otimes (A_{(2)} \star C_{(2)})).((B_{(1)} \star C_{(3)}) \otimes (B_{(2)} \star C_{(4)})),$$

d'où par cocommutativité :

$$\begin{aligned}\Delta(AB \star C) &= ((A_{(1)} \star C_{(1)})(B_{(1)} \star C_{(2)})) \otimes ((A_{(2)} \star C_{(3)}).(B_{(2)} \star C_{(4)})) \\ &= (A_{(1)}B_{(1)} \star C_{(1)}) \otimes (A_{(2)}B_{(2)} \star C_{(2)}).\end{aligned}$$

La relation (iv) se montre aussi par récurrence sur la longueur de A. Si A est de longueur 0, tout est nul. On a de plus $AB \star CX = (A \star C_{(1)}X)(B \star C_{(2)}) + (A \star C_{(1)})(B \star C_{(2)}X)$. En utilisant la deuxième relation vérifiée par $\star$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} AB \star CX & = & ((A \star C_{(1)}) \star X)(B \star C_{(2)}) - (A \star (C_{(1)} \star X))(B \star C_{(2)}) \\ & & +(A \star C_{(1)})((B \star C_{(2)}) \star X) - (A \star C_{(1)})(B \star (C_{(2)} \star X)). \end{array}$$

On a alors, par la troisième formule vérifiée par $\star$,

$$\begin{array}{rcl} AB \star CX & = & ((A \star C_{(1)})(B \star C_{(2)})) \star X - (A \star C_{(1)})(B \star (C_{(2)} \star X)) - (A \star (C_{(1)} \star X))(B \star C_{(2)}) \\ & = & (AB \star C) \star X - AB \star (C \star X). \end{array}$$

La dernière formule se prouve, enfin, elle aussi par récurrence sur la longueur de A. D'après (i), on a l'égalité si A et de longueur 0. On a de plus, d'après la troisième formule vérifiée par $\star$:

$$(AB \star C) \star D = ((A \star C_{(1)}) \star D_{(1)})((B \star C_{(2)}) \star D_{(2)}),$$

d'où par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} (AB \star C) \star D & = & (A \star (C_{(1)} \star D_{(1)})D_{(2)})(B \star (C_{(2)} \star D_{(3)})D_{(4)}) \\ & = & AB \star ((C \star D_{(1)})D_{(2)}), \end{array}$$

cette dernière égalité provenant de (iii), de la cocommutativité de Δ et des égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \Delta((C \star D_{(1)})D_{(2)}) & = & \Delta(C \star D_{(1)}).\Delta(D_{(2)}) \\ & = & ((C_{(1)} \star D_{(1)}) \otimes (C_{(2)} \star D_{(2)})).(D_{(3)} \otimes D_{(4)}) \\ & = & ((C_{(1)} \star D_{(1)}).D_{(2)}) \otimes ((C_{(2)} \star D_{(3)}).D_{(4)}). \end{array}$$

□

3.1.3 Produit $*$ de $S(L)$

Les dernières formules que nous avons prouvées nous encouragent à donner la définition suivante :

Définition 3.1.2. *Pour tout $A, B \in S(L)$, on définit :*

$$A * B = (A \star B_{(1)}).B_{(2)}.$$

Lemme 3.1.2. *Le produit $*$ est associatif, et confère à $S(L)$ une structure d'algèbre de Hopf de coproduit Δ.*

Démonstration. Les relations de bialgèbres sont vérifiées d'après les relations (ii) et (iii) de 3.1.2. Il ne reste qu'à montrer que $*$ est bien associatif. Par définition, on a :

$$(A * B) * C = (((A \star B_{(1)}).B_{(2)}) \star C_{(1)}).C_{(2)}\ .$$

D'après 3.1.1, formule (iii), on obtient :

$$(A * B) * C = ((A \star B_{(1)}) \star C_{(1)}).(B_{(2)} \star C_{(2)}).C_{(3)}\ .$$

Donc d'après la formule (v) de 3.1.2,

$$(A * B) * C = (A \star ((B_{(1)} \star C_{(1)}).C_{(2)})).(B_{(2)} \star C_{(3)}).C_{(4)}\ .$$

Par cocommutativité de Δ, $(A * B) * C = (A \star ((B_{(1)} \star C_{(1)}).C_{(3)})).(B_{(2)} \star C_{(2)}).C_{(4)}$ ce qui donne alors $(A * B) * C = A * (B * C)$.

□

Avant de poursuivre, on rappelle :

Définition 3.1.3. *Soit L un $\mathbb{K}$-module. Une filtration de L est la donnée de sous $\mathbb{K}$-modules $(L_m)_{m\geqslant 0}$ de L tels que $L = \bigcup_{m\geqslant 0} L_m$ et $L_m \subset L_{m+1}$ pour tout $m \geqslant 0$.*

Etant donnée une telle filtration, on définit le gradué de L par $gr(L) = \bigoplus_{m\geqslant 0} L_m/L_{m-1}$.

En particulier, la longueur des mots induit une filtration naturelle sur $T(L)$ et $S(L)$, et les gradués de ces structures sont naturellement isomorphes à $T(L)$ et $S(L)$ respectivement.

Lemme 3.1.3. *Pour $k \geqslant 0$, soit $S(L)^k = \bigoplus_{n=0}^{k} (L^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ la filtration naturelle de $S(L)$ par la longueur des mots. Alors le produit $*$ préserve cette filtration. De plus, il coïncide avec le produit naturel de $S(L)$ sur le gradué.*

Démonstration. La première partie du lemme provient du fait que si $A \in S(L)^k$ et que B est un monôme, alors $A \star B \in S(L)^k$. Quant à la deuxième, il suffit de voir que si A et B sont deux monômes, le monôme le plus long apparaissant dans la somme de $A * B$ est AB.

□

3.1.4 Lien avec l'algèbre de Lie enveloppante $\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie})$

Définition 3.1.4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On définit l'algèbre de Lie enveloppante de $\mathfrak{g}$ comme étant :*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/ < x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} >,$$

où on a quotienté par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x\otimes y - y\otimes x - [x, y]$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$ dans $T(\mathfrak{g})$.

Nous avons un morphisme naturel $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En particulier, l'algèbre de Lie enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est la plus petite algèbre associative contenant $\mathfrak{g}$ dont le crochet induit par le produit restreint sur $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ est celui de $\mathfrak{g}$.

Par cette définition, on voit par ailleurs directement, d'après la remarque 3.1.1 que c'est une algèbre de Hopf.

Théorème 3.1.1. *L'algèbre de Hopf $(S(L), *, \Delta)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie enveloppante de L_{Lie}, $(\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie}), \otimes, \Delta)$.*

Démonstration. Pour tout $X, Y \in L$, $X * Y - Y * X = X.Y + X \star Y - Y.X - Y \star X = [X, Y]$ où le crochet $[.,.]$ est celui de $L_{\mathcal{L}ie}$. Nous avons alors un morphisme naturel $\varphi : \mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie}) \longrightarrow S(L)$ induit par $f : T(L) \longrightarrow S(L)$ envoyant un tenseur $x \otimes y$ avec $x, y \in L$ sur $x * y$. Notons $\pi : T(L) \longrightarrow \mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie})$ la projection naturelle. Alors tous ces morphismes intervenant sont des morphismes d'algèbres de Hopf.

$$\begin{tikzcd}
(T(L), \otimes, \Delta) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (S(L), *, \Delta) \\
& (\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie}), \otimes, \Delta) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}.$$

En prenant les applications induites sur les gradués, nous avons alors le diagramme d'algèbres de Hopf suivant qui est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T(L) \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[dr, "\overline{\pi}"'] & & S(L) \\
& gr(\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie})) \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Puisque nous avons pris les gradués, sur ce diagramme, $\overline{f}$ corresponds à la projection de $T(L)$ dans $S(L)$ d'après le lemme 3.1.3. Ce morphisme se factorise en $id : S(L) \longrightarrow S(L)$, et de même, $\overline{\pi}$ se factorise à travers $\overline{\pi} : S(L) \longrightarrow gr(\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie}))$ par définition du gradué. Ceci nous donne le diagramme :

$$\begin{tikzcd} S(L) \arrow[rr, "="] \arrow[dr, "\overline{\pi}"'] & & S(L) \\ & gr(\mathcal{U}(L_{\mathcal{L}ie})) \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}.$$

On a alors d'après ce diagramme que $\overline{\pi}$ est injectif, et donc que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme. En remarquant que si φ est un isomorphisme au niveau des gradués alors φ est un isomorphisme, on a le résultat recherché. □

3.2 Algèbres à braces symétriques

Dans cette partie, nous allons appliquer ce que nous avons montré à la section 2 à l'étude des algèbres à braces symétriques.

Définition 3.2.1. *Une algèbre à braces symétriques est un $\mathbb{K}$-module V muni d'une application appelée la brace :*

$$\begin{array}{lcl} V \otimes S(V) & \longrightarrow & V \\ X \otimes A & \longmapsto & X\{A\} \end{array}$$

satisfaisant les égalités suivantes :

(i) $X\{1\} = X$;

(ii) $X\{(Y_1 \ ... \ Y_n)\}\{A\} = X\{Y_1\{A_{(1)}\}, \ ... \ Y_n\{A_{(n)}\}, \ A_{(n+1)}\}$.

En raison de la cocommutativité de Δ, on a directement :

Proposition 3.2.1. *Toute algèbre à brace symétrique V est munie d'une structure d'algèbre pré-Lie définie par :*

$$\forall X, Y \in V, X \star Y = X\{Y\}.$$

Démonstration. Pour tout $X, Y, Z \in V$, on a $(X \star Y) \star Z - X \star (Y \star Z) = X\{Y\}\{Z\} - X\{Y\{Z\}\}$ soit d'après (ii) :

$$(X \star Y) \star Z - X \star (Y \star Z) = X\{Y\{Z\}, 1\} + X\{Y, Z\} - X\{Y\{Z\}\} = X\{Y, Z\},$$

qui est bien une expression symétrique en Y et Z. □

L'égalité est pour l'instant définie sur $V \otimes V \subset V \otimes S(V)$, mais on a aussi l'égalité sur tout $V \otimes S(V)$, avec la loi $\star$ étendue sur $S(V)$:

Proposition 3.2.2. *Soit V une algèbre à brace symétrique. On munit $S(V)$ d'un produit $\star$ qui étends celui défini à la proposition précédente, via la proposition* 3.1.1. *Alors :*

$$\forall X \in L, \forall Y \in S(V), X\{Y\} = X \star Y.$$

Démonstration. Ceci se fait par récurrence sur la longueur de A. On a $X\{A\}\{Y\} = X\{A\{Y\}.1\} + X\{A\{1\}.Y\}$ soit par hypothèse de récurrence $(X \star A) \star Y = X \star (A \star Y) + X\{A.Y\}$ d'où le résultat par récurrence. □

On a une forme de réciproque :

Proposition 3.2.3. *Soit* $(L, \star)$ *une algèbre pré-Lie. A nouveau,* $S(L)$ *est munit de la loi* $\star$ *de la proposition 3.1.1. Alors on peut munir* L *d'une structure d'algèbre à braces symétriques via l'égalité :*

$$X\{(Y_1 \ ... \ Y_n)\} = X \star (Y_1 \ ... \ Y_n).$$

Démonstration. On utilise les égalités qui définissent $\star$. On a alors directement $X\{1\} = X$ d'une part et d'autre part $X\{(Y_1 \ ... \ Y_n)\}\{A\} = (X \star (Y_1 \ ... \ Y_n)) \star A = X \star ((Y_1 \ ... \ Y_n) \star A_{(1)}).A_{(2)})$. On trouve alors, en utilisant la formule (iii) de la proposition 3.1.1 et la cocommutativité de Δ :

$$\begin{array}{rcl} X\{(Y_1 \ ... \ Y_n)\}\{A\} & = & X \star ((Y_1 \star A_{(1)}) \ ... \ (Y_n \star A_{(n)}).A_{(n+1)}) \\ & = & X\{Y_1\{A_{(1)}\}, ..., Y_n\{A_{(n)}\}, A_{(n+1)}\}, \end{array}$$

ce qui prouve le résultat.

□

On a alors le corollaire remarquable :

Corollaire 3.2.1. *La catégorie des algèbres à braces symétriques est isomorphe à la catégorie des algèbres pré-Lie.*

Remarque 3.2.1. *Ce résultat s'adapte de la même façon dans le cas où on travaille sur la catégorie des modules gradués, en remplaçant la symétrie* $\tau : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ *par* $\tau : x \otimes y \longmapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$*.*

Chapitre 4

Algèbres pré-Lie à puissances divisées en caractéristique positive

Dans les chapitres précédent, nous avons principalement travaillé sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Certaines des constructions que nous avons fait ne sont plus possibles en caractéristique positive. Le but de cette partie est alors d'étudier des constructions similaires dans ce cas particulier.

Pour cela, rappelons le théorème 2.4.1, qui affirme que $exp : (L^0, BCH, 0) \longrightarrow (G, \circledcirc, 1)$ est un isomorphisme de groupes entre le groupe de jauge, et le groupe des éléments group-like. En caractéristique positive, pour contourner la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on peut alors définir le groupe de jauge par $(\{1\} \times L^0, \circledcirc, 1)$, où la loi $\circledcirc$ sera définie sur $\{1\} \times L^0$ de façon analogue aux formules démontrées au chapitre 2. Le seul problème est que la définition de $\circledcirc$ fait intervenir des coefficients de la forme $\dfrac{1}{n!}$.

Pour espérer exprimer différemment cette opération sans l'apparition de tels coefficients, nous allons nous inspirer de la situation visible dans le cas des algèbres associatives et commutatives, codées par l'opérade Com. On rappelle pour cela la définition des foncteurs T, S et Γ qui interviendront par la suite :

$$T(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} M(n) \otimes V^{\otimes n},$$

$$S(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (M(n) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n},$$

$$\Gamma(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (M(n) \otimes V^{\otimes n})^{\Sigma_n}.$$

Pour toute opérade P, $S(P, -)$ est munie d'une structure de monade, directement donnée par la composition μ de l'opérade P. Si P est en plus connexe (c'est-à-dire $P(0) = 0$), alors on peut munir $\Gamma(P, -)$ d'une structure de monade telle que le morphisme Trace $Tr : S(P, V) \longrightarrow \Gamma(P, V)$ définisse un morphisme de monades $Tr : S(P, -) \longrightarrow \Gamma(P, -)$.

Ces définitions nous proviennent de Benoit Fresse dans [Frea] qui a introduit la monade $\Gamma(Com, -)$ (et plus généralement $\Gamma(P, -)$ où P est une opérade connexe), et montre qu'une algèbre commutative et associative est munie de fonctions γ_n mimant les opérations $x \longmapsto \dfrac{1}{n!} x^n$ si et seulement si c'est une $\Gamma(Com)$-algèbre. On parle alors d'*algèbre commutative à puissances divisées.*

Dans notre cas, nous avons une algèbre pré-Lie L^0, soit en particulier une algèbre sur $S(\mathcal{PL}, -)$. Il peut donc être intéressant d'étudier la monade $\Gamma(\mathcal{PL}, -)$, dans laquelle nous espérons pouvoir exprimer la loi $\circledcirc$ sans coefficients rationnels.

Le but de cette partie est donc d'étudier la monade $\Gamma(\mathcal{PL}, -)$ et voir que cette monade contient en effet la solution à notre problème.

Nous suivrons essentiellement le premier chapitre de la thèse d'Andrea Cesaro [Ces].

4.1 Etude de la monade $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$

Considérons l'opérade $P = \mathcal{PL}$ que nous avons introduit dans les chapitres précédents, associée aux algèbres pré-Lie. Remarquons que cette opérade est bien connexe, ce qui garantie que $\Gamma(\mathcal{PL}, -)$ est une monade.

Dans cette section, nous allons regarder en détail la composition dans $\Gamma(\mathcal{PL}, -)$ et en déduire des opérations particulières génératrices.

Rappelons que l'opérade $\mathcal{PL}$, d'après le chapitre 2, est isomorphe à l'opérade des arbres $\mathcal{RT}$. Nous confondrons alors ces deux opérades par la suite.

4.1.1 Construction d'une base pour $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$

Soit $V \in Mod_{\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-module libre engendré par une base $\mathcal{V}$. Dans cette sous-section, nous allons donner explicitement une base du module $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$ en fonction de $\mathcal{V}$.

Définition 4.1.1. *Soient $x_1, ..., x_n \in V$ et $\tau \in RT(n)$ un arbre à n sommets. Nous noterons par la suite $\tau\langle x_1, ..., x_n\rangle = \tau \otimes x_1 \otimes ... \otimes x_n \in T(\mathcal{RT}, V)$ et $\tau(x_1, ..., x_n)$ sa classe dans $S(\mathcal{RT}, V)$.*

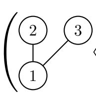
Une base $\mathcal{V}$ de V étant fixée, on définit deux ensembles qui formeront respectivement la base canonique de $T(\mathcal{RT}, V)$ et de $S(\mathcal{RT}, V)$:

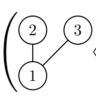
— $\mathcal{T}(RT, \mathcal{V}) = \{\tau\langle x_1, ..., x_n\rangle \mid x_i \in \mathcal{V}, \tau \in RT(n)\}$,
— $\mathcal{S}(RT, \mathcal{V}) = \{\tau(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathcal{V}, \tau \in RT(n)\}$.

La projection $pr : T(\mathcal{RT}, V) \longrightarrow S(\mathcal{RT}, V)$ donne ainsi une surjection $pr : \mathcal{T}(RT, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$.

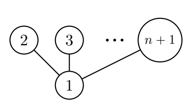
Soit $\mathfrak{t} = \tau\langle x_1, ..., x_n\rangle \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$. On considère l'action de Σ_n sur le tenseur $\tau \otimes x_1 \otimes ... \otimes x_n$, et on désigne alors par $\mathrm{Stab}(\mathfrak{t})$ le stabilisateur de ce tenseur représentant t sous cette action.

A titre d'exemple, nous avons les deux égalités suivantes :

Stab ( $\langle x, y, z\rangle$) $= \{id\}$,

Stab ( $\langle x, y, y\rangle$) $= \{id; (23)\}$.

Nous noterons aussi l'arbre :

$F_n =$ 

appelé *corolle d'ordre n.*

On a la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soit $x_0, x_1, ..., x_r \in \mathcal{V}$ avec $x_1, ..., x_r$ deux à deux distincts. Considérons l'élément suivant :* $\mathfrak{t} = F_n\langle x_0, \underbrace{x_1, ..., x_1}_{i_1}, ..., \underbrace{x_r, ..., x_r}_{i_r}\rangle \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$. *Alors :*

$$\mathrm{Stab}(\mathfrak{t}) \simeq \Sigma_{i_1} \times ... \times \Sigma_{i_r}.$$

Démonstration. Un élément $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ fixe F_n si et seulement si il fixe 1. Donc, σ doit fixer x_0 pour son action sur le tenseur associé à t, et pour fixer le tenseur $\underbrace{x_1 \otimes ... \otimes x_1}_{i_1} \otimes ... \otimes \underbrace{x_r \otimes ... \otimes x_r}_{i_r}$, il faut et il suffit que σ soit un élément de $\Sigma_{i_1} \times ... \times \Sigma_{i_r}$.

□

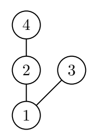
Avant de poursuivre, on définit une notion supplémentaire sur les arbres :

Définition 4.1.2. *Soit T un arbre sans étiquetage. Un sous-arbre T' est un sous-graphe connexe de T dont la racine est le plus petit élément de T' pour la relation d'ordre induit par la gravité sur T.*

Une branche de T est un sous-arbre de T dont la racine est distincte de la racine de T, et maximal pour l'inclusion parmi ces sous-arbres.

Si T est un arbre étiqueté, une branche de T est une branche en tant qu'arbre non étiqueté, que nous munissons d'un étiquetage induite par celle de T par ordre croissant.

Par exemple, l'arbre suivant :



admet deux branches qui sont :

$$\begin{matrix}\textcircled{2}\\ | \\ \textcircled{1}\end{matrix} \quad \text{et} \quad \textcircled{1}\ .$$

Définition 4.1.3. *Soit $t = \tau(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$. On définit $\mathrm{Dec}(t) \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{S}(RT, \mathcal{V}))$ par :*

$$\mathrm{Dec}(t) = F_r(x_0, B_1, ..., B_r),$$

où les B_i sont des éléments de $\mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$ correspondant aux branches de t qui est vu comme un arbre via τ et étiqueté via $x_0, x_1, ..., x_n$.

Exemple : Considérons l'arbre τ donné dans l'exemple précédent. Alors :

$$\mathrm{Dec}(\tau(x_0, x_1, x_2, x_3)) = F_2\left(x_0, \left(\begin{matrix}\textcircled{2}\\ | \\ \textcircled{1}\end{matrix}, x_1, x_3\right), \left(\textcircled{1}, x_2\right)\right).$$

Remarque 4.1.1. *On observe immédiatement que si $\mu : S(\mathcal{RT}, S(\mathcal{RT}, V)) \longrightarrow S(\mathcal{RT}, V)$ est le morphisme de composition de la monade $S(\mathcal{RT}, -)$ induit par la composition de l'opérade $\mathcal{RT}$, alors :*

$$\forall t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V}),\ \ \mu(\mathrm{Dec}(t)) = t.$$

Ainsi, en réitérant le procédé, on obtient une décomposition de t en composée de corolles. On appelle cette décomposition la *forme normale de t*. Elle est unique à permutation près des sommets des corolles.

On étends la définition de Stab à $\mathcal{S}(\mathcal{RT}, \mathcal{V})$:

Définition 4.1.4. *Soit* $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$ *à n sommets. Puisque pour tout* $\sigma \in \Sigma_n, \mathrm{Stab}(\mathfrak{t}) \simeq \mathrm{Stab}(\sigma.\mathfrak{t})$, *on peut définir le groupe* $\mathrm{Stab}(t) = \mathrm{Stab}(\mathfrak{t})$ *où t est l'image de* $\mathfrak{t}$ *par* $pr : \mathcal{T}(RT, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$.

Il suffit alors de calculer $\mathrm{Stab}(\mathfrak{t})$ pour $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$. Ceci peut se faire par récurrence :

Proposition 4.1.2. *Soit* $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$. *Alors :*

$$\mathrm{Stab}(\mathfrak{t}) \simeq \mathrm{Stab}(\mathrm{Dec}(\mathfrak{t})) \ltimes (\mathrm{Stab}(B_1) \times \ldots \times \mathrm{Stab}(B_r)),$$

où le produit semi-direct est définit via l'action de $\mathrm{Stab}(\mathrm{Dec}(\mathfrak{t}))$ *qui permute les branches isomorphes.*

Démonstration. L'inclusion réciproque étant directe, il reste à remarquer que tout élément de $\mathrm{Stab}(\mathfrak{t})$ s'écrit de façon unique comme produit d'un élément de $\mathrm{Stab}(\mathrm{Dec}(\mathfrak{t}))$ et d'un élément de $\mathrm{Stab}(B_1) \times \ldots \times \mathrm{Stab}(B_r)$. □

Définition 4.1.5. *Soit* $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$. *On définit :*

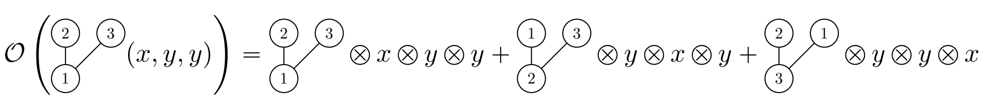
$$\mathcal{O}\mathfrak{t} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n / \mathrm{Stab}(\mathfrak{t})} \sigma.\mathfrak{t}.$$

On remarque que cette application ainsi définie passe au quotient sur les éléments coinvariants et, par linéarité, ceci nous définit $\mathcal{O} : S(\mathcal{RT}, V) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}, V)$.

Exemples : Nous avons directement

$$\mathcal{O}(\textcircled{1}(x)) = \textcircled{1}(x).$$

Donnons un autre exemple moins trivial :



L'application $\mathcal{O}$ est importante, puisqu'elle va en fait nous donner un isomorphisme entre $S(\mathcal{RT}, V)$ et $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$.

Avant cela, donnons le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Soit G un groupe fini et soit X un ensemble muni d'une action de G. Alors le morphisme* $\mathcal{O} : \mathbb{K}[X]_G \longrightarrow \mathbb{K}[X]^G$ *définie par* $\forall x \in X, \mathcal{O}x = \sum_{\sigma \in G/\mathrm{Stab}(x)} \sigma.x$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. $\mathcal{O}$ est surjectif, puisque si $y \in \mathbb{K}[X]^G$, la classe de y dans $\mathbb{K}[X]_G$ définit un antécédent de y par $\mathcal{O}$. L'injectivité provient directement de la définition de $\mathbb{K}[X]$, dont une base en tant que $\mathbb{K}$-module est donné par les éléments de X, et par la définition de $\mathcal{O}$. □

On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition 4.1.3. *L'ensemble* $\mathcal{OS}(RT, \mathcal{V}) = \{\mathcal{O}t \mid t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})\}$ *est une base de* $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$ *en tant que* $\mathbb{K}$*-module.*

Démonstration. On pose $\mathcal{T}(RT, \mathcal{V})^n$ comme étant les éléments de $\mathcal{T}(RT, \mathcal{V})$ de la forme $\tau\langle x_1, ..., x_n\rangle$. On écrit $S(\mathcal{RT}, V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{K}[\mathcal{T}(RT, \mathcal{V})^n]_{\Sigma_n}$ et $\Gamma(\mathcal{RT}, V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{K}[\mathcal{T}(RT, \mathcal{V})^n]^{\Sigma_n}$. Le lemme précédent permet alors de conclure.

□

4.1.2 La composition dans $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$

Dans cette sous-section, nous allons donner explicitement une formule pour le produit de la monade $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$. Nous travaillons pour cela, à nouveau, sur un $\mathbb{K}$-module V libre de base $\mathcal{V}$.

On considère alors $\mu : S(\mathcal{RT}, S(\mathcal{RT}, V)) \longrightarrow S(\mathcal{RT}, V)$ et $\widetilde{\mu} : \Gamma(\mathcal{RT}, \Gamma(\mathcal{RT}, V))$ les deux compositions pour les monades $S(\mathcal{RT}, -)$ et $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$. On note aussi $Tr : S(\mathcal{RT}, -) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}, -)$ le morphisme de monades Trace.

Lemme 4.1.2. *Soit* $t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$*. Alors* $Tr(t) = |\mathrm{Stab}(t)|\mathcal{O}t$.

Démonstration. La formule provient directemetn de l'écriture $\Sigma_n = \bigcup_{\overline{\sigma}\in\Sigma_n/\mathrm{Stab}(t)} \sigma.\mathrm{Stab}(t)$ où l'union se fait sur une classe de représentants.

□

Avant d'énoncer le théorème, on introduit une nouvelle notation. Nous noterons $\mathcal{RT}_{\mathbb{K}}$ pour désigner l'opérade $\mathcal{RT}$ dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules.

Théorème 4.1.1. *Soit* $v \in RT(n)$ *un arbre à* n *feuilles, et soit* $t_1, ..., t_n$ *des éléments de* $\mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$*. On suppose que la composée de ces éléments dans* $S(\mathcal{RT}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}[\mathcal{V}])$ *est de la forme* $\mu(v(t_1, ..., t_n)) = \sum_{t\in\mathcal{S}(RT,\mathcal{V})} \chi(t)t$*. Alors :*

$$\widetilde{\mu}(\mathcal{O}v(\mathcal{O}t_1, ..., \mathcal{O}t_n)) = \sum_{t\in\mathcal{S}(RT,\mathcal{V})} \frac{\chi(t)|\mathrm{Stab}(t)|}{|\mathrm{Stab}(v(t_1, ..., t_n))| \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Stab}(t_i)|}\mathcal{O}t.$$

Démonstration. On considère le morphisme $\Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}[\mathcal{V}]) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{K}}, \mathbb{K}[\mathcal{V}])$ induit par $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Si la formule est vérifiée sur $\mathbb{Q}$, elle sera aussi vérifiée sur $\mathbb{Z}$ puisque $\Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}[\mathcal{V}]) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}[\mathcal{V}])$ est injectif et préserve la composition par $\widetilde{\mu}$.
Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on peut ainsi écrire, d'après le lemme précédent, $\mathcal{O}t = \dfrac{Tr(t)}{|\mathrm{Stab}(t)|}$. Puisque la trace $Tr : S(\mathcal{RT}, -) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}, -)$ est un morphisme de monades, on obtient :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(Tr(v(Tr(t_1), ..., Tr(t_n)))) &= Tr(\mu(v(t_1, ..., t_n))) \\ &= \sum_{t\in\mathcal{S}(RT,\mathcal{V})} \chi(t)Tr(t) \\ &= \sum_{t\in\mathcal{S}(RT,\mathcal{V})} \chi(t)|\mathrm{Stab}(t)|\mathcal{O}t. \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi :

$$\widetilde{\mu}(Tr(v(Tr(t_1), ..., Tr(t_n)))) = |\mathrm{Stab}(v(t_1, ..., t_n))| \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Stab}(t_i)|\widetilde{\mu}(\mathcal{O}v(\mathcal{O}t_1, ..., \mathcal{O}t_n)),$$

ce qui donne l'égalité recherchée sur $\mathbb{Q}$ et donc sur $\mathbb{Z}$.

Dans le cas général, on utilise le fait que la relation est satisfaite sur $\mathbb{Z}$ par ce qui précède, et on compose par $\Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{Z}}, V) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}_{\mathbb{K}}, V)$ qui préserve la composition pour avoir le résultat sur $\mathbb{K}$.

□

4.1.3 Décomposition en corolles et forme normale

Nous avons vu précédemment comment obtenir tout élément de $\mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$ comme composées de corolles. Le but de cette sous-section est alors de pouvoir retrouver tous les éléments de $\Gamma(RT, V)$ à partir de corolles.

Lemme 4.1.3. *Soit $x \in \mathcal{V}$ et soit $t_1, ..., t_r \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$. Alors :*

$$\widetilde{\mu}(\mathcal{O}F_r(x, \mathcal{O}t_1, ..., \mathcal{O}t_r)) = \mathcal{O}(\mu(F_r(x, t_1, ..., t_r))).$$

Démonstration. On remarque qu'il existe un élément $t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$ tel que $F_r(x, t_1, ..., t_n) = \mathrm{Dec}(t)$. Donc, dans la décomposition du lemme 4.1.1 qui donne le calcul de $\widetilde{\mu}$, il n'y a qu'un seul terme dans la somme, et il vaut 1. On conclut ensuite par la formule obtenue dans la proposition 4.1.2.

□

On a une retraduction de ce lemme dans la forme suivante :

Lemme 4.1.4. *Soit $t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$. On écrit $\mathrm{Dec}(t) = F_r(x, B_1, ..., B_r)$. Alors :*

$$\mathcal{O}t = \widetilde{\mu}(\mathcal{O}F_r(x, \mathcal{O}B_1, ..., \mathcal{O}B_r)).$$

En itérant ce procédé, on obtient la définition suivante, analogue à la décomposition en corolles de $S(RT, \mathcal{V})$:

Définition 4.1.6. *Soit $t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$. On appelle forme normale de $\mathcal{O}t$ son expression en composées d'éléments de la forme $\mathcal{O}(F_r(x, -, ..., -))$ avec $x \in \mathcal{V}$ déduit de la forme normale de t.*

Proposition 4.1.4. *Soit $t \in \mathcal{S}(RT, \mathcal{V})$. Alors $\mathcal{O}t$ admet une unique forme normale.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent récursivement pour avoir une bijection avec la forme normale dans $S(RT, V)$.

□

4.2 Structure des $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbres

Le but de cette partie sera de décrire la structure des $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbres. Dans un premier temps, nous allons voir comment construire des opérations abstraites à partir d'un arbre. Ceci va nous amener à étudier un nouveau type d'algèbres, les algèbres sur les corolles, avant d'en déduire que ces deux structures d'algèbres coïncident dans le cas où on travaille sur un module libre.

4.2.1 Cor-algèbres

Considérons (V, γ) une $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbre. On introduit E_n le $\mathbb{K}$-module libre engendré par n éléments abstraits que nous noterons $\mathcal{E}_n = \{e_1, ..., e_n\}$. D'après les précédentes sections, tout élément de $\Gamma(\mathcal{RT}, E_n)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'élements de la forme $\mathcal{O}(\rho(e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}))$ pour un certain $\rho \in \mathcal{RT}$.
Considérons $v_1, ..., v_n \in V$. On définit un morphisme $\psi_{v_1,...,v_n} : E_n \longrightarrow V$ définie en envoyant e_i sur v_i. Ceci s'étends alors en un morphisme $\psi_{v_1,...,v_n} : \Gamma(\mathcal{RT}, E_n) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{RT}, V)$ par fonctorialité.

Définition 4.2.1. *Soit $\alpha \in \Gamma(\mathcal{RT}, \mathcal{E}_n)$, que nous écrivons $\alpha = \mathcal{O}(\rho(e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}))$. Alors α induit $\varphi_{e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}} : V^{\times n} \longrightarrow V$ définie par :*

$$\varphi_{e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}}(v_1, ..., v_n) = \gamma(\psi_{v_1,...,v_n}(\alpha)).$$

Nous noterons par la suite $\varphi_{r_1,...,r_n}$ (ou φ s'il n'y a pas d'ambiguïté) plutôt que $\varphi_{e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}}$.

On note l'ensemble de tels fonctions $AbsOp_n$ et $AbsOp = \bigcup_{n \geqslant 0} AbsOp_n$.

Définition 4.2.2. *On définit une action de Σ_n sur $AbsOp_n$ de la façon suivante. Soit $\varphi \in AbsOp_n$ associée à l'élément $\alpha = \mathcal{O}(\rho(e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}))$. Soit $\sigma \in \Sigma_n$. On définit $(\sigma.\varphi)_{r_1,...,r_n} \in AbsOp_n$ comme étant l'élément de $AbsOp_n$ associé à $\mathcal{O}(\rho(e_{\sigma(1)}^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_{\sigma(n)}^{\otimes r_n}))$.*

Pour voir que nous avons bien défini une action, on utilise le fait que $\mathcal{O}(\rho(e_{\sigma(1)}^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_{\sigma(n)}^{\otimes r_n})) = \mathcal{O}((\sigma_*(r_1, ..., r_n)^{-1}.\rho)(e_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes e_n^{\otimes r_n}))$.

Ces définitions étant faites, nous avons les formules suivantes qui sont satisfaites :

Proposition 4.2.1. *On a les égalités :*

(i) $(\sigma.\varphi)(v_1, ..., v_n) = \varphi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)})$,

(ii) $\varphi_{r_1,...,r_{i-1},0,r_{i+1},...,r_n}(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n) = \varphi_{r_1,...,r_{i-1},r_{i+1},...,r_n}(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$,

(iii) $\varphi_{r_1,...,r_i,...,r_n}(v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_n) = \lambda^{r_i} \varphi_{r_1,...,r_i,...,r_n}(v_1, ..., v_i, ..., v_n)$.

Sous réserve que φ commute en les variables i et $i+1$, et que $v_i = v_{i+1}$, on a aussi :

(iv) $\varphi_{r_1,...,r_i,r_{i+1},...,r_n}(v_1, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_n) = \binom{r_i + r_{i+1}}{r_i} \varphi_{r_1,...,r_{i-1},r_i+r_{i+1},r_{i+2},...,r_n}(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+2}, ..., v_n)$.

On a enfin la formule :

(v) $\varphi_{r_1,...,r_i,...,r_n}(v_1, ..., v_{i-1}, a+b, v_{i+1}, ..., v_n) = \sum_{s=0}^{r_i} \varphi_{r_1,...,s,r_i-s,...,r_n}(v_1, ..., a, b, ..., v_n)$.

Démonstration. Voir [Ces]. □

D'après l'étude de la section précédente, les opérations données par les corolles jouent un rôle particulier. Nous avons la proposition centrale suivante :

Proposition 4.2.2. *Soit $-\{-, ..., -\}_{r_1,...,r_n}$ la fonction définie par la corolle $\mathcal{O}F_{\sum r_i}(e_1, \underbrace{e_2, ..., e_2}_{r_1}, ..., \underbrace{e_{n+1}, ..., e_{n+1}}_{r_n})$. On a alors la relation d'unité $\{-;\} = id$ ainsi que la formule :*

$$x\{y_1, ..., y_n\}_{r_1,...,r_n}\{z_1, ..., z_m\}_{s_1,...,s_m} =$$

$$\sum_{s_i = \beta_i + \sum \alpha_i^{\cdot,\cdot}} \frac{1}{\prod_j (r_j)!} x\{y_1\{z_1, ..., z_m\}_{\alpha_1^{1,1},...,\alpha_m^{1,1}}, ..., y_1\{z_1, ..., z_m\}_{\alpha_1^{1,r_1},...,\alpha_m^{1,r_1}},$$

$$..., y_n\{z_1, ..., z_m\}_{\alpha_1^{n,1},...,\alpha_m^{n,1}}, ..., y_n\{z_1, ..., z_m\}_{\alpha_1^{n,r_n},...,\alpha_m^{n,r_n}}, z_1, ..., z_m\}_{1,...,1,\beta_1,...,\beta_m},$$

où les division par les $r_j!$ disparaissent en utilisant les formules de 4.2.1.

Remarque 4.2.1. *L'abus de la division par les $r_j!$ permet d'écrire facilement la formule. En caractéristique positive, en pratique, ces coefficients, écrits formellement, disparaissent en réindexant la somme puis en réunissant les éléments d'un même type de partition de $s_i - \beta_i$. En utilisant la symétrie des braces, une partie des coefficients disparaissent, et on se débarrasse des derniers en utilisant la formule (iv) de la proposition* 4.2.1*.*

On peut néanmoins, après avoir introduis les bonnes définitions, écrire cette formule sans ces coefficients (voir pour cela la thèse de Sacha Ikonicoff [Iko]*).*

Démonstration. Découle de la formule prouvée dans la proposition 4.1.1. Voir [Ces] pour plus de détails. □

La décomposition en forme normale dans $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$ nous motive la définition suivante :

Définition 4.2.3. *Une Cor-algèbre est un $\mathbb{K}$-module V muni d'une famille de fonctions :*

$$-\{-, ..., -\}_{r_1,...,r_n} : V^{n+1} \longrightarrow V$$

satisfaisant toutes les formules données dans les propositions 4.2.1 *et* 4.2.2*.*

Un morphisme de Cor-algèbres est un morphisme de modules satisfaisant :

$$f(-\{-, ..., -\}_{r_1,...,r_n}) = f(-)\{f(-), ..., f(-)\}_{r_1,...,r_n}.$$

Essentiellement, une Cor-algèbre peut se voir comme un module munie d'opérations mimant les quantités :

$$x\{y_1, ..., y_n\}_{r_1,...,r_n} = \frac{1}{\prod_i r_i!} x\{\underbrace{y_1, ..., y_1}_{r_1}, ..., \underbrace{y_n, ..., y_n}_{r_n}\},$$

dans le contexte des algèbres pré-Lie, où on a utilisé ci-dessus les braces symétriques. En particulier, en caractéristique nulle, toute algèbre pré-Lie est une Cor-algèbre.

On a alors directement :

Proposition 4.2.3. *Soit (V, γ) une $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbre. Alors V est une Cor-algèbre.*

Démonstration. On pose $v\{w_1, ..., w_n\}_{r_1,...,r_n}$ comme étant $\varphi(v, w_1, ..., w_n)$ où φ est la fonction définie par le terme $\alpha = \mathcal{O}F_{r_1+...+r_n}(e_1, \underbrace{e_2, ..., e_2}_{r_1}, ..., \underbrace{e_{n+1}, ..., e_{n+1}}_{r_n})$. D'après les propositions précédentes, ceci définit une structure de Cor-algèbre sur V. □

4.2.2 Lien entre Cor-algèbres et $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbres sur un module libre

Réciproquement, nous allons montrer que si V est un $\mathbb{K}$-module libre, alors se donner une structure de Cor-algèbre sur V est équivalent à se donner une structure de $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbre sur V.

Soit alors V un $\mathbb{K}$-module libre de base $\mathcal{V}$ admettant une structure de Cor-algèbre. Nous cherchons une structure de $\Gamma\mathcal{RT}$-algèbre sur V, c'est-à-dire un morphisme $\gamma : \Gamma(\mathcal{RT}, V) \longrightarrow V$ compatible avec la composition de $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$.

Avec nos définitions précédentes, on pose pour cela :

$$\gamma(\mathcal{O}(F_{\sum r_i}(x \otimes y_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes y_n^{\otimes r_n}))) = x\{y_1, ..., y_n\}_{r_1,...,r_n},$$

où $x, y_1, ...y_n \in \mathcal{V}$ avec les y_i deux à deux distincts.

Puisque tout élément de $\Gamma(RT, \mathcal{V})$ se décompose en forme normale, c'est-à-dire en composée de corolles, γ est bien définie sur tout $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$:

Lemme 4.2.1. *La construction précédente est bien définie, et ne dépends pas du choix de la base $\mathcal{V}$ de V.*

Démonstration. Voir [Ces]. □

Définition 4.2.4. *Un élément de $\Gamma(RT, \Gamma(RT, \mathcal{V}))$ est dit simple si il est de la forme :*

$$\mathcal{O}t\left(①(w_1), ..., ①(w_n)\right),$$

où t est un arbre et $w_1, ..., w_m \in \mathcal{V}$.

Lemme 4.2.2. *Soit $\mathcal{O}t\left(①(w_1), ..., ①(w_n)\right)$ un élément simple. On a alors :*

$$\tilde{\mu}\left(\mathcal{O}t\left(①(w_1), ..., ①(w_n)\right)\right) = \mathcal{O}t(w_1, ..., w_n).$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du théorème 4.1.1. □

Lemme 4.2.3. *La construction précédente de γ est compatible avec l'unité et la composition dans $\Gamma(\mathcal{RT}, V)$.*

Démonstration. Voir [Ces]. □

Toutes les remarques précédentes nous permettent d'avoir alors le théorème :

Théorème 4.2.1. *La catégorie des $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$ algèbres sur des $\mathbb{K}$-modules libres est isomorphe à la catégorie des Cor-algèbres sur des $\mathbb{K}$-modules libres.*

4.3 La loi ⊚ dans $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$ et conséquences

Nous venons de voir précédemment que, en caractéristique positive, sous nos hypothèses de convergence, nous pouvons exprimer nos formules à l'aide des braces décrites dans [Ces].

Dans cette section, nous allons donner quelques égalités qui vont nous permettre d'exprimer la plupart des opérations rencontrées dans les chapitres précédents sans coefficients rationnels dans une algèbre pré-Lie graduée L, nous permettant ainsi d'y voir une piste de généralisation en caractéristique positive.

Premièrement, nous avons défini la loi ⊚ sur des éléments de degré 0 par : $a \circledcirc (1 + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a\{\underbrace{b, ..., b}_{n}\}$. En voyant cette égalité dans $S(\mathcal{RT}, -)$, et en notant γ l'application d'algèbre sur cette monade, on obtient :

$$a \circledcirc (1 + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \gamma(F_n \otimes a \otimes b^{\otimes n})$$

d'après les formules démontrées dans les chapitres précédents, où F_n est la corolle d'ordre n.

Pour avoir une relation dans $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$, nous devons appliquer le morphisme de monades Tr, et utiliser l'identité $Tr(t) = |Stab(t)|\mathcal{O}t$. Si on note $\widetilde{\gamma}$ la structure d'algèbre sur $\Gamma(\mathcal{RT}, -)$, ceci donne alors :

$$a \circledcirc (1 + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{\gamma}(\mathcal{O}F_n \otimes a \otimes b^{\otimes n})$$

ou encore :

$$a \circledcirc (1 + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a\{b\}_n.$$

Cette formule très intéressante nous permet alors de visualiser, sur un corps quelconque, la loi du groupe de jauge, sous des hypothèses de convergence. Plus précisément, nous avons vu que l'application exponentielle donnait un isomorphisme de groupes : $exp : (L^0, BCH, 0) \longrightarrow (\{1\} \times L^0, \circledcirc, 1)$. Le groupe initial ne pouvant plus être défini en caractéristique positive, à cause de la définition de BCH, la piste serait alors de définir $\Gamma = \{1\} \times L^0$ le groupe avec la loi :

$$\forall \mu, \nu \in L^0, (1 + \mu) \circledcirc (1 + \nu) = 1 + \nu + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\{\nu\}_n,$$

où nous avons posé de façon symbolique, conformément à nos précédentes études, $1 + \mu := (1; \mu) \in \Gamma$, jouant le rôle d'un élément group-like e^λ.

Nous pouvons aussi, étant donné un élément $1 - \mu \in \Gamma$, donner explicitement son inverse, en prenant la formule prouvée dans la proposition 2.4.2 et en appliquant la trace :

$$(1 - \mu)^{\circledcirc -1} = 1 + \sum_{t \in rRT*} \widetilde{\gamma}(\mathcal{O}t \otimes \mu^{\otimes \nu_t}).$$

Cette formule peut, à l'aide de la décomposition en forme normale, s'exprimer en terme de Cor-algèbres, par récurrence. Cette formule d'inverse a cependant le désavantage d'être difficile à manipuler. Ceci a pour conséquence notamment qu'on peut difficilement exprimer l'action d'un élément du groupe de jauge sur un élément α de la variété de Maurer-Cartan, qui fait intervenir un inverse.

C'est pour cela que nous allons caractériser autrement cette action. Notons $\beta = (1 + \mu).\alpha$ l'action de $e^\lambda = 1 + \mu \in L^0$ sur α. Alors :

$$\begin{aligned} & \beta = (1 + \mu).\alpha \\ \Leftrightarrow\ & \beta = ((1 + \mu) \star \alpha) \circledcirc (1 + \mu)^{\circledcirc -1} \\ \Leftrightarrow\ & \beta \circledcirc (1 + \mu) = \alpha + \mu \star \alpha \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \beta\{\mu\}_n = \alpha + \mu\{\alpha\}_1. \end{aligned}$$

Ceci caractérise alors le fait que $\mu \in L^0$ soit un morphisme de α vers β dans $\mathcal{MC}(L)$. Cependant, nous avons ici rendu interne la différentielle, faisant que l'équation de Maurer-Cartan est $\alpha\{\alpha\}_1 = 0$. Si on veut intégrer la différentielle, on revient en arrière via la transformation donnée dans le chapitre 2 dans [DSV16]. On pose pour cela $\alpha = \delta + \overline{\alpha}$ et $\beta = \delta + \overline{\beta}$, où $\delta \in L^1$ est un élément nous permettant de trouver la différentielle via $d(x) = [\delta, x] = \delta\{x\}_1 - (-1)^{|x|} x\{\delta\}_1$.

Lemme 4.3.1. *Soient $n \geqslant 2$ et $a_1, ..., a_n \in L$. Alors $\delta\{a_1, ..., a_n\} = 0$.*

Démonstration. En utilisant les formules définissant $-\{-, ..., -\}$ par récurrence, il suffit de prouver le lemme pour $n = 2$.

Pour cela, nous avons :

$$\begin{aligned}\delta\{a_1, a_2\} &= (\delta \star a_1) \star a_2 - \delta \star (a_1 \star a_2) \\ &= d(a_1) \star a_2 + (-1)^{|a_1|}(a_1 \star \delta) \star a_2 - \delta \star (a_1 \star a_2).\end{aligned}$$

Or, nous avons aussi :

$$\begin{aligned}(a_1 \star \delta) \star a_2 &= a_1 \star (\delta \star a_2) + (-1)^{|a_2|}(a_1 \star a_2) \star \delta - (-1)^{|a_2|} a_1 \star (a_2 \star \delta) \\ &= a_1 \star d(a_2) + (-1)^{|a_2|}(a_1 \star a_2) \star \delta.\end{aligned}$$

Au final, $\delta\{a_1, a_2\} = d(a_1) \star a_2 + (-1)^{|a_1|} a_1 \star d(a_2) - d(a_1 \star a_2) = 0$ car d est une différentielle.

$\square$

Ainsi, en faisant notre transformation, on obtient la formule :

$$d(\mu) = \overline{\alpha} + \mu\{\overline{\alpha}\}_1 - \overline{\beta} \circledcirc (1 + \mu).$$

Chapitre 5

Équivalence de groupoïdes de Deligne dans une Cor-algèbre

Dans ce dernier chapitre, nous allons, à l'aide des formules prouvées dans [DSV16] et [Ces], redéfinir la plupart des structures rencontrées dans le chapitre 1, dans un corps quelconque, y compris à caractéristique positive. Après ces définitions préliminaires, nous pourrons alors voir que la preuve donnée par W.Goldman et J.Millson dans [GM88] s'adapte et reste valide dans ce contexte particulier.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif quelconque.

5.1 Contexte et redéfinitions des structures

Dans cette partie, on donne une version graduée des définitions précédentes, et ainsi un contexte analogue à celui croisé dans le premier chapitre. Une attention plus particulière sera portée sur la variété de Maurer-Cartan ainsi que le groupe de jauge, et son action sur les éléments de Maurer-Cartan.

5.1.1 Cor-algèbre différentielle graduée

Afin de définir la variété de Maurer-Cartan ainsi que la loi $\circledcirc$, qui nous permettra d'avoir une structure de groupe sur les éléments group-like, nous allons devoir travailler avec les Cor-algèbres rencontrées dans le chapitre 4, qui nous permettront de tout exprimer sans fractions. Pour adapter la définition dans le cas gradué, nous devons cependant prendre certaines précautions : les signes exprimant la permutation des éléments peuvent en effet empêcher la formule de la proposition 4.2.2 de se réduire sur $\mathbb{Z}$.

On donne alors deux définitions, l'une dans le cas de la caractéristique 2 qui ne donne pas d'apparition de signes, et l'autre dans le cas où la caractéristique est distincte de 2 :

Définition 5.1.1. *Si $car(\mathbb{K}) = 2$, une Cor-algèbre graduée est un $\mathbb{K}$-module gradué $L = \bigoplus_{n\geqslant 0} L^n$ munie d'opérations, appelées les opérations braces :*

$$-\{-,...,-\}_{r_1,...,r_n} : L^{\times(n+1)} \longrightarrow L$$

pour tout $r_1,...,r_n \in \mathbb{N}$, telles que :

$$L^k\{L^{k_1},...,L^{k_n}\}_{r_1,...,r_n} \subset L^{k+k_1r_1+...+k_nr_n}$$

et satisfaisant les formules suivantes des propositions 4.2.1 *et* 4.2.2.

Définition 5.1.2. *Si* $car(\mathbb{K}) \neq 2$, *une Cor-algèbre graduée est un* $\mathbb{K}$*-module gradué* $L = \bigoplus_{n\geqslant 0} L^n$ *munie d'opérations, appelées les opérations braces :*

$$-\{\underbrace{-,...,-}_{p},\underbrace{-,...-}_{q}\}_{r_1,...,r_p,1,...,1} : L \times (L_{ev})^{\times p} \times (L_{odd})^{\times q} \longrightarrow L,$$

où $L_{ev} = \bigoplus_{n\geqslant 0} L^{2n}$ *et* $L_{odd} = \bigoplus_{n\geqslant 0} L^{2n+1}$ *pour tout* $r_1,...,r_p \in \mathbb{N}$*, telles que :*

$$L^k\{L^{k_1},...,L^{k_n}\}_{r_1,...,r_n} \subset L^{k+k_1r_1+...+k_nr_n}$$

satisfaisant les formules de la proposition 4.2.1*, la formule de symétrie* (i) *devant être prise avec un signe : si* $\tau = (ij)$*, on demande*

$$x\{y_1,...,y_j,...,y_i,...,y_n\}_{r_1,...,r_j,...,r_i,...,r_n} = (-1)^{r_ir_j|y_i||y_j|}x\{y_1,...,y_i,...,y_j,...,y_n\}_{r_1,...,r_i,...,r_j,...,r_n}.$$

En particulier, on s'autorisera à mélanger, dans la brace, des termes de degrés pairs avec des termes de degrés impairs via cette formule, en veillant toujours à ce qu'un élément de degré impair ait un poids 1.

Enfin, on demande que la formule de 4.2.2 *soit satisfaite, dans le sens :*

$$x\{y_1,...,y_p,y_{p+1},...,y_n\}_{r_1,...,r_n}\{z_1,...,z_q,z_{q+1},...,z_m\}_{s_1,...,s_m} =$$

$$\sum_{s_i=\beta_i+\sum\alpha_i^{\cdot,\cdot}} \frac{\pm 1}{\prod_j (r_j)!} x\{y_1\{z_1,...,z_m\}_{\alpha_1^{1,1},...,\alpha_m^{1,1}},...,y_1\{z_1,...,z_m\}_{\alpha_1^{1,r_1},...,\alpha_m^{1,r_1}},$$

$$...,y_n\{z_1,...,z_m\}_{\alpha_1^{n,1},...,\alpha_m^{n,1}},...,y_n\{z_1,...,z_m\}_{\alpha_1^{n,r_n},...,\alpha_m^{n,r_n}},z_1,...,z_m\}_{1,...,1,\beta_1,...,\beta_m},$$

où les termes $y_1,...,y_p,z_1,...,z_q$ *sont de degrés pairs, et les termes* $y_{p+1},...,y_n,z_{q+1},...,z_m$ *sont de degrés impairs avec* $r_{p+1} = ... = r_m = s_{q+1} = ... = s_m = 1$*. Le signe dans la somme provient de la permutation appliquée dans les braces, en prenant en compte les degrés et les poids.*

La raison de cette restriction provient du fait que la permutation de deux termes de degré impair peut, éventuellement, mener à empêcher les simplifications nous permettant d'éliminer la fraction présente dans la formule. En affectant aux termes de degré impairs que des poids 1, on peut vérifier que le signe d'un terme apparaissant dans la somme ne dépends essentiellement que du déplacement qu'on fait entre les termes de degrés impairs, puisque permuter un terme avec un terme de degré pair ne change rien. On peut alors regrouper les termes correspondant à une même partition et ainsi faire disparaître la fraction.

Néanmoins, par la suite, on pourra remarquer que nous utiliserons essentiellement cette formule que dans le cas où un seul des y_i est de degré impair.

Définition 5.1.3. *Une différentielle sur une Cor-algèbre graduée* L *est une application linéaire* $d : L \longrightarrow L$ *telle que* $d \circ d = 0$, $d(L^k) \subset L^{k+1}$ *pour tout* k*, et satisfaisant la formule de Leibniz :*

$$d(x\{y_1,...,y_n\}_{r_1,...,r_n}) = d(x)\{y_1,...,y_n\}_{r_1,...,r_n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_i}x\{y_1,...,y_k,d(y_k),...,y_n\}_{r_1,...,r_k-1,1,...,r_n},$$

où $\varepsilon_i = |x| + |y_1| + ... + |y_{i-1}|$.

Une Cor-algèbre graduée munie d'une différentielle est appelée Cor-algèbre différentielle graduée.

Pour motiver l'apparition du coefficient ε_i, on peut utiliser formellement l'égalité (iv) de la proposition 4.2.1 pour se ramener à des poids de 1, afin de se ramener à la formule de Leibniz usuelle.

Remarque 5.1.1. *Toute Cor-algèbre différentielle graduée unitaire est en particulier une algèbre pré-Lie (non unitaire) différentielle graduée, avec la loi :*

$$x \star y = x\{y\}_1.$$

Définition 5.1.4. *Un morphisme de Cor-algèbres différentielles graduées est un morphisme de modules qui commute avec la différentielle et les opérations braces.*

Par la suite, nous adopterons des hypothèses similaires à celles faites dans [DSV16], afin de permettre l'utilisation de séries, ou des hypothèses de nilpotence comme dans [GM88].
Plus précisément, nous allons supposer que notre Cor-algèbre différentielle graduée L est telle qu'il existe un isomorphisme $L \simeq \prod_{n\geqslant 1} L_{(n)}$ de $\mathbb{K}$-modules différentiels gradués compatibles avec les braces dans le sens où :

$$L_{(n)}\{L_{(k_1)}, ..., L_{(k_p)}\}_{r_1,...,r_p} \subset L_{(n+k_1r_1+...+k_pr_p)}.$$

Ainsi, tout élément $x \in L$ peut être vu sous la forme d'une série $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{(n)}$ où $x_{(n)} \in L_{(n)}$.

5.1.2 Groupe de jauge

On commence par définir le groupe de jauge associé à une Cor-algèbre différentielle graduée L.

Soit pour cela $\Gamma = \{1\} \times L^0$. Nous adopterons la notation $1 + \mu = (1; \mu)$ pour un élément de Γ. Réciproquement, si $\lambda = 1 + \mu \in \Gamma$, on note $\mu = \lambda - 1$ l'unique élément de L^0 définissant λ.

Définition 5.1.5. *On définit le produit circulaire de deux éléments $1 + \mu, 1 + \nu \in \Gamma$ par :*

$$(1 + \mu) \circledcirc (1 + \nu) = 1 + \nu + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\{\nu\}_n.$$

La première chose à faire est de constater que cette loi donne une structure de groupe sur Γ. Contrairement à la situation dans le chapitre 2, il n'est plus aussi trivial que nous obtenons une structure de groupe. La preuve en effet de ce théorème dans le cas de la caractéristique 0 était particulièrement simple puisque l'exponentielle transportait une structure de groupe donnée par BCH sur la loi $\circledcirc$. Ici, nous ne disposons plus de l'exponentielle, et nous devons alors montrer ce théorème à la main.

Lemme 5.1.1. $\circledcirc$ *est associative.*

Démonstration. On a d'une part :

$$\begin{aligned}((1 + \mu) \circledcirc (1 + \nu)) \circledcirc (1 + \lambda) &= \left(1 + \nu + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\{\nu\}_n\right) \circledcirc (1 + \lambda) \\ &= 1 + \lambda + \sum_{p=0}^{+\infty} \nu\{\lambda\}_p + \sum_{n,p=0}^{+\infty} \mu\{\nu\}_n\{\lambda\}_p.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(1+\mu)\circledcirc((1+\nu)\circledcirc(1+\lambda)) &= (1+\mu)\circledcirc\left(1+\lambda+\sum_{n=0}^{+\infty}\nu\{\lambda\}_n\right)\\ &= 1+\lambda+\sum_{n=0}^{+\infty}\nu\{\lambda\}_n+\sum_{p=0}^{+\infty}\mu\left\{\lambda+\sum_{n=0}^{+\infty}\nu\{\lambda\}_n\right\}_p,\end{aligned}$$

Nous sommes amenés à montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n,p=0}^{+\infty}\mu\{\nu\}_n\{\lambda\}_p=\sum_{p=0}^{+\infty}\mu\left\{\lambda+\sum_{n=0}^{+\infty}\nu\{\lambda\}_n\right\}_p.$$

Pour voir cette égalité, il nous faut utiliser la proposition 4.2.2. D'après cette proposition, nous avons que :

$$\mu\{\nu\}_n\{\lambda\}_p=\sum_{p=\beta+\sum_{i=1}^n\alpha^i}\frac{1}{n!}\mu\{\nu\{\lambda\}_{\alpha^1},...,\nu\{\lambda\}_{\alpha^n},\lambda\}_{1,...,1,\beta},$$

soit :

$$\sum_{n,p=0}^{+\infty}\mu\{\nu\}_n\{\lambda\}_p=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{\beta=0}^{p}\sum_{p-\beta=\sum_{i=1}^n\alpha^i}\frac{1}{n!}\mu\{\nu\{\lambda\}_{\alpha^1},...,\nu\{\lambda\}_{\alpha^n},\lambda\}_{1,...,1,\beta}.$$

Dans cette somme, certains termes apparaissent plusieurs fois à cause de la symétrie des opérations braces, et au sein d'une opération brace, on a plusieurs mêmes termes qui apparaissent. Dénombrons un peu ces quantités.

Pour un p et un β fixés, comptons le nombre de partitions $p-\beta=\alpha^1+...+\alpha^n$ de la forme $r_1\widetilde{\alpha}^1+...+r_q\widetilde{\alpha}^q$, avec les $\widetilde{\alpha}^k$ deux à deux distincts. En d'autres termes, les α^k ne prennent pour valeurs que les $\widetilde{\alpha}^k$, et, dans la partition, on trouve r_k nombres $\widetilde{\alpha}^k$. Ce nombre a déjà été rencontré dans la situation des arbres, dans la preuve de la proposition 2.4.1, il s'agit de $n(\widetilde{\alpha}_1,...,\widetilde{\alpha}_q)=\dfrac{n!}{r_1!...r_q!}$. En assemblant les termes, nous avons alors les facteurs :

$$\frac{1}{r_1!...r_q!}\mu\{\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^1},...,\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^1},......,\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^q},...,\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^q},\lambda\}_{1,...,1,\beta}=\mu\{\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^1},...,\nu\{\lambda\}_{\widetilde{\alpha}^q},\lambda\}_{r_1,...,r_q,\beta}.$$

On conclut en utilisant la formule (v) de la proposition 4.2.1.

□

Remarque 5.1.2. *Par la suite, on étends la définition de $\circledcirc$ sur $L\times\Gamma$ en posant :*

$$\forall\alpha\in L,\forall\mu\in L^0,\alpha\circledcirc(1+\mu)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha\{\mu\}_n.$$

En reprenant exactement la même preuve que précédemment, on a aussi associativité de cette opération $\circledcirc$ ainsi définie, dans le sens où :

$$(\alpha\circledcirc(1+\mu))\circledcirc(1+\nu)=\alpha\circledcirc((1+\mu)\circledcirc(1+\nu)).$$

Nous venons alors de voir que Γ est au moins un monoïde. Reste à prouver l'existence de l'inverse. A la fin de la section précédente, nous avons conjecturé l'expression de l'inverse dans $\Gamma(\mathcal{RT},-)$. On peut l'exprimer avec la structure de Cor-algèbre, mais nous aurons pour cela besoin de la définition analogue de $t(\mu)$, où $t\in RT^*$, dans le cas pré-Lie :

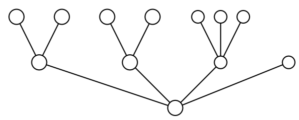
Définition 5.1.6. *Soit $t\in RT^*$ et $\mu\in L^0$. On définit par récurrence sur ν_t l'élément $\mathcal{O}t(\mu)\in L^0$ par les formules :*

$$\mathcal{O}①(\mu)=\mu,$$

$$\mathcal{O}\gamma(F_k(\textcircled{1} \otimes B_1^{\otimes n_1} \otimes ... \otimes B_p^{\otimes n_p}))(\mu) \quad = \quad \mu\{\mathcal{O}B_1(\mu), ..., \mathcal{O}B_p(\mu)\}_{n_1,...,n_p},$$

où $k = \sum n_i$, $B_1, ..., B_p$ sont des arbres deux à deux distincts et γ est la composition dans $S(\mathcal{RT}, -)$ (remarquer qu'il faut choisir a priori un étiquetage de $B_1, ...B_p$ pour faire la composition : le résultat obtenu, si on oublie l'étiquetage, ne dépends pas de ces choix de l'étiquetage de $B_1, ..., B_p$).

Exemple : Prenons l'arbre suivant :

$t =$  .

Nous avons alors :

$$\mathcal{O}t(\mu) = \{\mu\{\mu\}_2, \mu\{\mu\}_3, \mu\}_{2,1,1}.$$

Lemme 5.1.2. *Soit $1 - \mu \in \Gamma$. Alors l'inverse de $1 - \mu$ existe et est donné par :*

$$(1-\mu)^{\circledcirc -1} = 1 + \sum_{t \in rRT*} \mathcal{O}t(\mu).$$

Démonstration. On commence par prouver que cette expression est un inverse à droite, en suivant essentiellement le schéma de preuve du lemme 2.4.2.

$$(1-\mu) \circledcirc \left(1 + \sum_{t \in rRT*} \mathcal{O}t(\mu)\right) = 1 + \sum_{t \in rRT*} \mathcal{O}t(\mu) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mu \left\{ \sum_{t \in rRT*} \mathcal{O}t(\mu) \right\}_k .$$

Soit $t \in rRT*$. On note $B_1, ..., B_p$ ses branches, apparaissant respectivement $n_1, ..., n_p$ fois. Alors $\mathcal{O}t(\mu) = \mu\{\mathcal{O}B_1(\mu), ..., \mathcal{O}B_p(\mu)\}_{n_1,...,n_p}$ par définition, et ce terme apparaît exactement une fois dans le troisième terme de l'égalité précédente.

Ceci montre que nous avons un inverse à droite. Il est cependant moins évident de prouver que c'est un inverse à gauche. Il suffit en revanche, étant donné que l'associativité est prouvée, de montrer qu'il existe un inverse à gauche.

Pour cela, écrivons les décompositions en poids $\nu = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu_{(i)}$ et $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_{(i)}$. Écrivons $(1+\nu) \circledcirc (1-\mu) = 1$, et déduisons-en les $\nu_{(i)}$.

La relation précédente implique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \nu\{-\mu\}_k = \mu.$$

On regarde les poids correspondants de chaque côté. Le poids de composante 1 donne $\nu_{(1)} = \mu_{(1)}$. En ce qui concerne le poids i :

$$\nu_{(i)} = \mu_{(i)} - \sum \nu_{(j)}\{-\mu_{(k_1)}, ..., -\mu_{(k_n)}\}_{\alpha_1,...,\alpha_n},$$

où la somme se fait sur les $j, k_1, ..., k_n, \alpha_1, ..., \alpha_n$, les α_q non tous nuls, et tels que $j + k_1\alpha_1 + ... + k_n\alpha_n = i$ et $k_1 < ... < k_n$. En particulier, $j < i$ ce qui permet de définir un inverse à gauche $1 + \nu$ par récurrence.

On a alors montré l'existence à gauche et à droite dans un monoïde, donc l'inverse existe, et est donné par l'expression du lemme.

□

Nous avons donc directement par ce qui précède :

Théorème 5.1.1. $(\Gamma, \circledcirc, 1)$ *est un groupe, appelé le groupe de jauge de L.*

5.1.3 Variété de Maurer-Cartan et action du groupe de jauge

Définition 5.1.7. *Un élément $\alpha \in L^1$ est dit de Maurer-Cartan s'il satisfait l'équation de Maurer-Cartan :*

$$d(\alpha) + \alpha\{\alpha\}_1 = 0.$$

On note $\mathcal{MC}(L)$ l'ensemble de tels éléments. Cet ensemble est appelé la variété de Maurer-Cartan.

Nous aimerions à présent voir que le groupe de jauge agit sur $\mathcal{MC}(L)$. Nous aurons pour cela besoin de la définition suivante :

Définition 5.1.8. *Soit $\alpha, \beta \in L$ et $\mu \in L^0$. On pose :*

$$\alpha \circledcirc (1+\mu;\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\{\mu,\beta\}_{n,1}.$$

Lemme 5.1.3. *Nous avons les relations :*

$$\begin{array}{rcl} (\alpha \circledcirc (1+\mu))\{\beta\}_1 & = & \alpha \circledcirc (1+\mu;\beta+\mu\{\beta\}_1), \\ \alpha\{\beta\}_1 \circledcirc (1+\mu) & = & \alpha \circledcirc (1+\mu;\beta \circledcirc (1+\mu)), \\ d(\alpha \circledcirc (1+\mu)) & = & d(\alpha) \circledcirc (1+\mu) + (-1)^{|\alpha|}\alpha \circledcirc (1+\mu;d(\mu)). \end{array}$$

Démonstration. Pour la première égalité :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha \circledcirc (1+\mu))\{\beta\}_1 & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\{\mu\}_n\{\beta\}_1 \\ & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\{\mu,\beta\}_{n,1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\{\mu,\mu\{\beta\}_1\}_{n-1,1} \\ & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\{\mu,\beta+\mu\{\beta\}_1\}_{n,1} \\ & = & \alpha \circledcirc (1+\mu;\beta+\mu\{\beta\}_1). \end{array}$$

En ce qui concerne la deuxième :

$$\begin{array}{rcl} \alpha\{\beta\}_1 \circledcirc (1+\mu) & = & \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha\{\beta\}_1\{\mu\}_m \\ & = & \sum_{p,q=0}^{+\infty} \alpha\{\beta\{\mu\}_p,\mu\}_{1,q} \\ & = & \alpha \circledcirc (1+\mu;\beta \circledcirc (1+\mu)). \end{array}$$

Enfin, pour la troisième :

$$\begin{array}{rcl} d(\alpha \circledcirc (1+\mu)) & = & \sum_{n=0}^{+\infty} d(\alpha)\{\mu\}_n + (-1)^{|\alpha|} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\{\mu,d(\mu)\}_{n-1,1} \\ & = & d(\alpha) \circledcirc (1+\mu) + (-1)^{|\alpha|}\alpha \circledcirc (1+\mu;d(\mu)), \end{array}$$

ce qui achève le lemme.

□

On a alors, comme dans les chapitres précédent, le théorème :

Théorème 5.1.2. *Le groupe de jauge Γ agit sur la variété de Maurer-Cartan $\mathcal{MC}(L)$ par :*

$$\forall \mu \in L^0, \forall \alpha \in \mathcal{MC}(L), (1+\mu).\alpha = (\alpha + \mu\{\alpha\}_1 - d(\mu)) \circledcirc (1+\mu)^{\circledcirc -1}.$$

Remarque 5.1.3. *Si on veut retrouver les équations donnée dans [DSV16], il faut remarquer que si on pose* $\overline{\alpha} = \delta + \alpha$*, avec* $\delta \in L^1$ *tel que* $\delta\{\delta\}_1 = 0$ *et* $d(x) = \delta\{x\}_1 - (-1)^{|x|}x\{\delta\}_1$*, alors l'équation de Maurer-Cartan* $d(\alpha) + \alpha\{\alpha\}_1 = 0$ *équivaut à* $\overline{\alpha}\{\overline{\alpha}\}_1 = 0$*. Dans la formule précédente, le terme* $d(\mu)$ *est donc absent, et avec l'abus* $(1 + \mu) \star \overline{\alpha} = \overline{\alpha} + \mu\{\overline{\alpha}\}_1$*, on retrouve exactement la formule prouvée dans le chapitre 2.*

Remarque 5.1.4. *La formule précédente peut être difficile à manipuler en raison de la présence de l'inverse. Par ailleurs, si on veut généraliser certaines égalités, comme pour la section 2.6, il peut être plus commode de voir l'égalité de ce théorème de la façon équivalente suivante :*

$$d(\mu) = \alpha + \mu\{\alpha\}_1 - \beta \circledcirc (1 + \mu),$$

en posant $\beta = (1 + \mu).\alpha$*.*

Démonstration. On commence tout d'abord par prouver que l'opération est bien définie. Soit $\alpha \in \mathcal{MC}(L)$ et soit $\mu \in L^0$. Il s'agit de montrer que $\beta = (1 + \mu).\alpha \in \mathcal{MC}(L)$, c'est-à-dire que $d(\beta) + \beta\{\beta\}_1 = 0$.

On remarque que, en appliquant d de chaque côté de l'égalité $d(\mu) = \alpha + \mu\{\alpha\}_1 - \beta \circledcirc (1+\mu)$ et en utilisant que $d(\alpha) = -\alpha\{\alpha\}_1$ ainsi que la formule 2 du lemme 5.1.3, nous avons l'égalité :

$$d(\beta) \circledcirc (1 + \mu) = -\alpha\{\alpha\}_1 - \mu\{\alpha\{\alpha\}_1\}_1 + d(\mu)\{\alpha\}_1 + \beta \circledcirc (1 + \mu; d(\mu)).$$

On a de plus, par la première formule de 5.1.3 :

$$\begin{aligned} d(\mu)\{\alpha\}_1 &= \alpha\{\alpha\}_1 + \mu\{\alpha\}_1\{\alpha\}_1 - \beta \circledcirc (1 + \mu)\{\alpha\}_1 \\ &= \alpha\{\alpha\}_1 + \mu\{\alpha\{\alpha\}_1\}_1 + \mu\{\alpha, \alpha\}_{1,1} - \beta \circledcirc (1 + \mu; \alpha) - \beta \circledcirc (1 + \mu; \mu\{\alpha\}_1). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$d(\beta) \circledcirc (1 + \mu) = \beta \circledcirc (1 + \mu; d(\mu)) - \beta \circledcirc (1 + \mu; \alpha) - \beta \circledcirc (1 + \mu; \mu\{\alpha\}_1),$$

en remarquant qu'avec nos hypothèses de symétrie, ou avec l'égalité $\mu\{\alpha, \alpha\}_{1,1} = 2\mu\{\alpha\}_2$ en caractéristique 2, on a $\mu\{\alpha, \alpha\}_{1,1} = 0$.

Au final :

$$d(\beta) \circledcirc (1 + \mu) = -\beta \circledcirc (1 + \mu; \beta \circledcirc (1 + \mu)).$$

Soit d'après la troisième formule du lemme 5.1.3 :

$$d(\beta) \circledcirc (1 + \mu) \quad = \quad -\beta\{\beta\}_1 \circledcirc (1 + \mu),$$

d'où l'égalité $(d(\beta) + \beta\{\beta\}_1) \circledcirc (1 + \mu) = 0$ soit $d(\beta) + \beta\{\beta\}_1 = 0$ en composant par $(1 + \mu)^{\circledcirc -1}$ à droite, ce qui permet de voir que $(1 + \mu).\alpha \in \mathcal{MC}(L)$.

Puisque $1 + 0 \in \Gamma$ agit trivialement sur tout $\alpha \in \mathcal{MC}(L)$, il nous reste à voir que la définition de notre potentielle action se comporte bien avec $\circledcirc$: $((1 + \nu) \circledcirc (1 + \mu)).\alpha = (1 + \nu).(1 + \mu).\alpha$.
Posons $\beta = (1 + \mu).\alpha$ et $\gamma = (1 + \nu).\beta$.

D'après les hypothèses, nous avons les deux équations :

$$d(\mu) = \alpha + \mu\{\alpha\}_1 - \beta \circledcirc (1 + \mu),$$

$$d(\nu) = \beta + \nu\{\beta\}_1 - \gamma \circledcirc (1 + \nu).$$

On pose $\lambda = (1 + \nu) \circledcirc (1 + \mu) - 1 = \mu + \nu \circledcirc (1 + \mu)$. On doit alors calculer :

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\{\alpha\}_1 - \gamma \circledcirc (1 + \nu) \circledcirc (1 + \mu) &= \alpha + \mu\{\alpha\}_1 + \nu \circledcirc (1 + \mu)\{\alpha\}_1 + d(\nu) \circledcirc (1 + \mu) \\ &\quad -\beta \circledcirc (1 + \mu) - \nu\{\beta\}_1 \circledcirc (1 + \mu) \\ &= d(\mu) + d(\nu) \circledcirc (1 + \mu) + \nu \circledcirc (1 + \mu; \alpha) \\ &\quad +\nu \circledcirc (1 + \mu; \mu\{\alpha\}_1) - \nu \circledcirc (1 + \mu; \beta \circledcirc (1 + \mu)), \end{aligned}$$

d'après les formules du lemme 5.1.3. On a donc au final :

$$\begin{aligned}\alpha + \lambda\{\alpha\}_1 - \gamma \circledcirc (1+\nu) \circledcirc (1+\mu) &= d(\mu) + d(\nu) \circledcirc (1+\mu) + \nu \circledcirc (1+\mu; d(\mu)) \\ &= d(\lambda),\end{aligned}$$

d'où l'égalité recherchée.

□

Remarque 5.1.5. *Pour plus de simplicité, nous avons supposé que $\mathbb{K}$ était un corps, cependant cette précédente étude reste valide sur un anneau quelconque, pourvu que nous nous restreignons à des modules libres. En effet, la seule difficulté sur un anneau quelconque provient de la preuve du théorème précédent, où la quantité $\mu\{\alpha,\alpha\}_{1,1}$ apparaît. En caractéristique 2, elle est nulle, par le même argument donné dans la preuve. Mais en caractéristique distincte de 2, nous obtenons, par les hypothèses de symétrie, $2\mu\{\alpha,\alpha\}_{1,1} = 0$. Si le $\mathbb{K}$-module sur lequel on travaille possède de la torsion, on peut ne pas pouvoir se débarrasser du 2 dans cette égalité.*
L'étude reste cependant vraie dans le cas raisonnable où le module L est libre.

5.2 Retour sur la preuve du théorème de Goldman-Millson

Dans cette section, nous allons retourner sur la preuve présentée dans la chapitre 1 (voir aussi [GM88]) et la démontrer dans notre contexte plus général.

5.2.1 Groupoïde $\mathcal{C}(L, A)$

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On commence tout d'abord par donner une structure de Cor-algèbre différentielle graduée à $L \otimes_{\mathbb{K}} A$ en posant :

$$(L \otimes_{\mathbb{K}} A)^k = L^k \otimes_{\mathbb{K}} A,$$

$$(x \otimes a)\{y_1 \otimes b_1, ..., y_n \otimes b_n\}_{r_1,...,r_n} = (x\{y_1, ..., y_n\}_{r_1,...,r_n}) \otimes a b_1^{r_1} ... b_n^{r_n},$$

$$d(x \otimes a) = dx \otimes a.$$

On souhaite alors définir le groupoïde $\mathcal{C}(L, A)$ associé à L et A.

Définition 5.2.1. *On dit que $\mu \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ (ou de façon équivalente $1 + \mu \in \Gamma$) est un morphisme de $\alpha \in \mathcal{MC}(L \otimes_{\mathbb{K}} A)$ vers $\beta \in \mathcal{MC}(L \otimes_{\mathbb{K}} A)$, et on note $\mu : \alpha \longrightarrow \beta$ (ou $1 + \mu : \alpha \longrightarrow \beta$) si :*

$$\beta = (\alpha + \mu\{\alpha\}_1 - d(\mu)) \circledcirc (1+\mu)^{\circledcirc -1},$$

ou encore de façon équivalente :

$$d(\mu) = \alpha + \mu\{\alpha\}_1 - \beta \circledcirc (1+\mu).$$

En vertu des propositions précédentes, nous avons prouvé :

Proposition 5.2.1. *Posons Obj $\mathcal{C}(L, A)$ l'ensemble des éléments de $L^1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}$ satisfaisant l'équation de Maurer-Cartan, et posons $Mor_{\mathcal{C}(L,A)}(\alpha, \beta)$ l'ensemble des éléments $(1 + \mu) \in \Gamma$ avec $\mu \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ tels que $\mu : \alpha \longrightarrow \beta$. Alors $\mathcal{C}(L, A)$ est un groupoïde dont la composition est donnée par $\circledcirc$.*

Démonstration. La classe de morphisme est bien définie, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotente. Le reste découle de ce qui a été vu précédemment.

□

5.2.2 Preuve du théorème

Soit $\overline{L}$ une autre Cor-algèbre différentielle graduée. Soit $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ un morphisme de Cor-algèbre différentielle graduée. Alors φ induit un foncteur $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$ défini en envoyant un objet $\alpha \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ sur $\varphi(\alpha) \in Obj\ \mathcal{C}(\overline{L}, A)$ et un morphisme $\mu \in L^0$ sur $\varphi(\mu) \in L^0$. Puisque φ préserve les braces, et donc en particulier $\circledcirc$, ceci nous donne bien un foncteur.

De la même façon, si $\overline{A}$ est une autre $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne, et si $\psi : A \longrightarrow \overline{A}$ est un morphisme, ceci donne un foncteur $\psi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L, \overline{A})$.

Comme dans le chapitre 1, on a alors le diagramme suivant qui est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(L, A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\psi_*"'] & \mathcal{C}(\overline{L}, A) \arrow[d, "\psi_*"] \\
\mathcal{C}(L, \overline{A}) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \mathcal{C}(\overline{L}, \overline{A})
\end{tikzcd}.$$

Le but de cette dernière section est de démontrer le théorème suivant, analogue à celui du chapitre 1 rencontré dans le cadre des algèbres de Lie :

Théorème 5.2.1. *Soit $\varphi : L \longrightarrow \overline{L}$ un morphisme de Cor-algèbres différentielles graduées induisant deux isomorphismes $H^0(L) \longrightarrow H^0(\overline{L})$, $H^1(L) \longrightarrow H^1(\overline{L})$ et un monomorphisme $H^2(L) \longrightarrow H^2(\overline{L})$ en cohomologie.*
Alors pour toute $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A, le foncteur induit $\varphi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$ est une équivalence de groupoïdes.

Remarque 5.2.1. *Ce théorème reste valide sur un anneau $\mathbb{K}$ intègre et noethérien quelconque (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$), pourvu qu'on suppose les modules L et $\overline{L}$ libres sur $\mathbb{K}$.*

La preuve de ce théorème sera une copie quasi-conforme de la preuve rencontrée dans le chapitre 1, avec des notations différentes. Nous allons donc essentiellement suivre la preuve présentée dans [GM88], en adaptant les notations si nécessaire.

Le début ne faisant pas intervenir plus de choses sur la structure de L, nous sommes donc ramené à prouver que si le théorème tient pour l'algèbre locale artinienne $A/\mathfrak{I}$ où $\mathfrak{I}$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$, alors il tient aussi pour A. Soit $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{I}$ la projection canonique, et $\pi_* : \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ le foncteur induit.

A nouveau, le théorème repose sur l'analyse de ce foncteur. On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 5.2.2. *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons les trois propositions :*

1. *Il existe une application $o_2 : Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}) \longrightarrow H^2(L \otimes \mathfrak{I})$ telle que :*

$$\forall \alpha \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}), \alpha \in Im(\pi_*) \Leftrightarrow o_2(\alpha) = 0.$$

2. *Soit* $\zeta \in \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$. *On considère* $\pi_*^{-1}(\zeta)$ *la catégorie ayant pour classe d'objets l'image réciproque par* $\pi_* : Obj\ \mathcal{C}(L, A) \longrightarrow Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ *de* ζ, *et pour morphismes tous les morphismes* $\gamma \in \mathcal{C}(L, A)$ *tels que* $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$, *le morphisme identité.*
   Alors il existe une action simplement transitive du groupe $Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ *sur les objets* $Obj(\pi_*^{-1}(\zeta))$. *De plus, l'application suivante :*

$$o_1 : Obj(\pi_*^{-1}(\zeta)) \times Obj(\pi_*^{-1}(\zeta)) \longrightarrow Z^1(L \otimes \mathfrak{I}) \longrightarrow H^1(L \otimes \mathfrak{I})$$

   donnée par l'application différence puis la projection est telle que : pour tout $\alpha, \beta \in Obj(\pi_*^{-1}(\zeta))$, *il existe un morphisme* $\gamma : \alpha \longrightarrow \beta$ *tel que* $\pi_*(\gamma) = I_\zeta$ *si et seulement si* $o_1(\alpha, \beta) = 0$.

3. *Soient* $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ *deux objets isomorphes et* $f : \alpha \longrightarrow \beta$ *un morphisme dans* $\mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$ *de* $\alpha = \pi_*(\widetilde{\alpha})$ *vers* $\beta = \pi_*(\widetilde{\beta})$. *Alors il existe une action simplement transitive du groupe* $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ *sur l'ensemble* $\pi_*^{-1}(f)$ *des morphismes* $\widetilde{f} : \widetilde{\alpha} \longrightarrow \widetilde{\beta}$ *tels que* $\pi_*(\widetilde{f}) = f$. *L'application différence* $o_0 : \pi_*^{-1}(f) \times \pi_*^{-1}(f) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ *vérifie en particulier : si* $\widetilde{f}, \widetilde{f}' \in \pi_*^{-1}(f)$, *alors* $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$ *si et seulement si* $o_0(\widetilde{f}, \widetilde{f}') = 0$.

Par la suite, nous noterons, pour tout $x \in L \otimes A$, $\mathcal{Q}(x) = d(x) + x\{x\}_1$.

5.2.2.1 Construction de o_2

Soit $\omega \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I}) \subset L^1 \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{I}$. Il existe $\widetilde{\omega} \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ tel que $\pi_*(\widetilde{\omega}) = \omega$. En particulier, $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in L^2 \otimes \mathfrak{I}$. On a alors :

$$\begin{aligned} d(\mathcal{Q}(\widetilde{\omega})) &= d(\widetilde{\omega})\{\widetilde{\omega}\}_1 - \widetilde{\omega}\{d(\widetilde{\omega})\}_1 \\ &= -\widetilde{\omega}\{\widetilde{\omega}\}_1\{\widetilde{\omega}\}_1 + \widetilde{\omega}\{\widetilde{\omega}\{\widetilde{\omega}\}_1\}_1 \\ &= \widetilde{\omega}\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}\}_{1,1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$.

Donc $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) \in Z^2(L \otimes \mathfrak{I})$. Si $\widetilde{\omega}' \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$ est un autre relèvement de ω, alors, puisque $\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega} \in L^1 \otimes \mathfrak{I}$, et à nouveau parce que $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}') - \mathcal{Q}(\widetilde{\omega}) &= d(\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}) + (\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega})\{\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}\}_1 \\ &\quad + \widetilde{\omega}\{\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}\}_1 + (\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega})\{\widetilde{\omega}\}_1 \\ &= d(\widetilde{\omega}' - \widetilde{\omega}). \end{aligned}$$

On peut donc définir $o_2(\omega)$ comme étant la classe de $\mathcal{Q}(\widetilde{\omega})$ dans $H^2(L \otimes \mathfrak{I})$ qui satisfait la propriété recherchée.

5.2.2.2 Construction de o_1

Avant de poursuivre, on démontre le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. *Soit* $\alpha \in L^1 \otimes \mathfrak{m}$, $\eta \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ *et* $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$. *Alors :*

$$(1 + u + \eta).\alpha = (1 + \eta).\alpha - d(u).$$

Démonstration. On pose $\beta = (1 + \eta).\alpha$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\beta - d(u)) \circledcirc (1 + u + \eta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\beta - d(u))\{u + \eta\}_n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (\beta - d(u))\{u, \eta\}_{k,n-k} \\
&= \beta - d(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta\{\eta\}_n \\
&= \beta \circledcirc (1 + \eta) - d(u) \\
&= \alpha + \eta\{\alpha\}_1 - d(\eta) - d(u) \\
&= \alpha + (u + \eta)\{\alpha\}_1 - d(u + \eta)
\end{aligned}$$

car $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$.

□

Soit $\xi \in Obj\ \mathcal{C}(L, A/\mathfrak{I})$. Nous avons, pour tout $\eta \in Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ et pour tout $\alpha \in Obj\ \pi_*^{-1}(\xi)$ d'après les calculs déjà menés dans la sous-section précédente, que $\mathcal{Q}(\alpha + \eta) = \mathcal{Q}(\alpha) + d(\eta) + \alpha\{\eta\}_1 + \eta\{\eta\}_1 = 0$, puisque $\mathcal{Q}(\alpha) = d(\eta) = 0$ et $\mathfrak{I}.\mathfrak{m} = 0$.
Donc $\alpha + \eta \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ et $\pi_*(\alpha + \eta) = \xi$. Ceci définit alors une action de $Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $Obj\ \pi_*^{-1}(\xi)$.

Montrons qu'elle est simplement transitive. Si $\alpha, \beta \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ sont tels que $\pi_*(\alpha) = \pi_*(\beta) = \xi$. Alors $\alpha - \beta \in L^1 \otimes \mathfrak{I}$ et $d(\alpha - \beta) = \mathcal{Q}(\alpha) - \mathcal{Q}(\beta) = 0$. L'élément $\eta = \alpha - \beta$ vérifie donc $\eta \in Z^1(L \otimes \mathfrak{I})$, et permet de voir que l'action est bien simplement transitive.
On définit alors $o_1(\alpha, \beta)$ comme étant la classe de $\alpha - \beta$ dans $H^1(L \otimes \mathfrak{I})$.

S'il existe un morphisme $(1 + u) : \alpha \longrightarrow \beta$ tel que $\pi_*(u) = 1 \in \Gamma$ (c'est-à-dire $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$), on a alors d'après le lemme 5.2.1 avec $\eta = 0$ que $\beta = (1 + u).\alpha = \alpha - du$ et donc $o_1(\alpha, \beta) = 0$.
Réciproquement, si $o_1(\alpha, \beta) = 0$, il existe $u \in L^0 \otimes \mathfrak{I}$ tel que $\alpha - \beta = du$. En appliquant à nouveau la formule précédente, on a $\beta = (1 + u).\alpha$.

5.2.2.3 Construction de o_0

Soient $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in Obj\ \mathcal{C}(L, A)$ et $\alpha = \pi_*(\tilde{\alpha}), \beta = \pi_*(\tilde{\beta})$. Considérons $(1 + u) : \alpha \longrightarrow \beta$. On définit une action simplement transitive de $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $\pi_*^{-1}(1 + u)$. Soit $1 + v \in \pi_*^{-1}(1 + u)$, avec $v \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ et soit $w \in L \otimes \mathfrak{I}$. D'après le lemme 5.2.1 :

$$(1 + v + w).\tilde{\alpha} = (1 + v).\tilde{\alpha} - d(w) = \tilde{\beta} - d(w).$$

Donc si $w \in H^0(L \otimes \mathfrak{I}) = Z^0(L \otimes \mathfrak{I})$, on a que $(1 + v + w) : \tilde{\alpha} \longrightarrow \tilde{\beta}$. Ceci définit alors une action de $H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ sur $\pi_*^{-1}(1 + u)$.

Considérons un autre morphisme $(1 + v') : \tilde{\alpha} \longrightarrow \tilde{\beta}$. On pose $u = o_0(v, v') = v - v' \in L \otimes \mathfrak{I}$. Alors :

$$d(u) = d(o_0(v, v')) = (1 + v).\tilde{\alpha} - (1 + v + u).\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} - \tilde{\beta} = 0.$$

Donc $u \in H^0(L \otimes \mathfrak{I})$ et c'est l'unique élément envoyant $1 + v$ sur $1 + v'$.

5.2.2.4 Conclusion

Le reste de la preuve ne fait intervenir aucun calcul utilisant un crochet de Lie, mais uniquement l'existence d'une action des éléments de $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ sur les éléments de Maurer-Cartan.

La preuve du théorème dans le cas des *Cor*-algèbres est ainsi complète.

La preuve se généralise dans le cas où $\mathbb{K}$ est un anneau, en prenant cependant certaines précautions. Tout d'abord, afin d'avoir des propriétés analogues à celles vérifiées par les algèbres locales artiniennes, il convient de supposer $\mathbb{K}$ intègre et noethérien.

De plus, dans la preuve, nous utilisons le fait que si $\alpha \in L \otimes \mathfrak{m}$ et $\widetilde{\omega} \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$, alors $\alpha\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}\}_{1,1} = 0$. Ceci est automatiquement vérifié si $car(\mathbb{K}) = 2$. Dans le cas contraire, si L possède des éléments de torsions, on est pas garantie d'avoir l'égalité malgré nos hypothèses de symétrie.

Si on suppose L et $\overline{L}$ libres cependant (et donc en particulier sans torsion), cette égalité est vraie sur L et sur $\overline{L}$, et par la définition des braces sur $L \otimes A$, on a aussi l'égalité pour des éléments dans $L \otimes \mathfrak{m}$.

5.2.3 Quasi-isomorphisme de Cor-algèbres différentielles graduées

On reprend la suite de la dernière sous-section du chapitre 1.

Définition 5.2.2. *Deux Cor-algèbres différentielles graduées (L, d) et $(\overline{L}, \overline{d})$ sont dits quasi-isomorphes s'il existe des morphismes de Cor-algèbres différentielles graduées :*

$$L = L_0 \longrightarrow L_1 \longleftarrow L_2 \longrightarrow ... \longleftarrow L_{m-1} \longrightarrow L_m = \overline{L}$$

tels que chacun de ces morphismes induit un isomorphisme en cohomologie.

(L, d) est dit quasi-formel s'il est isomorphe à une Cor-algèbre avec une différentielle nulle.

Corollaire 5.2.1. *Si (L, d) et $(\overline{L}, \overline{d})$ sont quasi-isomorphes, alors pour toute $\mathbb{K}$-algèbre locale artinienne A, les groupoïdes $\mathcal{C}(L, A)$ et $\mathcal{C}(\overline{L}, A)$ sont équivalents. De plus, la séquence d'équivalence donnée par le théorème précédent :*

$$\mathcal{C}(L, A) \longrightarrow \mathcal{C}(L_1, A) \longleftarrow \mathcal{C}(L_2, A) \longrightarrow ... \longleftarrow \mathcal{C}(L_{m-1}, A) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{L}, A)$$

dépends de façon naturelle de A.

Remarque 5.2.2. *Les deux résultats que nous venons de prouver permettent de retrouver tous les résultats du chapitre 1 si $car(\mathbb{K}) = 0$, en remarquant que dans ce cas une Cor-algèbre différentielle graduée est en particulier une algèbre pré-Lie différentielle graduée, et donc une algèbre de Lie différentielle graduée. En particulier, les morphismes intervenant dans ce dernier cas se révèlent être les mêmes morphismes que pour les Cor-algèbres.*

Annexe A

Séquences symétriques et opérades

Dans cette annexe, nous allons introduire les outils les plus utilisés dans ce mémoire, à savoir les séquences symétriques et les opérades.

Nous désignerons par $\mathbb{K}$ un anneau quelconque, et nous travaillerons essentiellement dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules.

A.1 Préliminaires sur le groupe symétrique

On commence par donner quelques définitions et propositions préliminaires liées aux permutations, qui nous seront utiles par la suite, et par ailleurs utilisées dans le mémoire :

Définition A.1.1. *Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \Sigma_p, \tau \in \Sigma_q$. En posant $n = p+q$, on définit une nouvelle permutation $\sigma \oplus \tau \in \Sigma_n$ en posant :*

$$\forall i \in [\![1; p]\!], (\sigma \oplus \tau)(i) = i,$$
$$\forall i \in [\![p+1; n]\!], (\sigma \oplus \tau)(i) = p + \tau(i).$$

En d'autres termes, σ permute les p premières valeurs, et τ permute les q dernières valeurs.

On vérifie aisément que l'opération ainsi définie est associative, ce qui nous permet de généraliser la définition en la somme direct de r éléments $\sigma_1 \oplus ... \oplus \sigma_r$.

Nous obtenons alors un lemme qui se prouve facilement :

Lemme A.1.1. *Soient $\sigma_1, \tau_1 \in \Sigma_{n_1}, \sigma_2, \tau_2 \in \Sigma_{n_2}, ..., \sigma_r, \tau_r \in \Sigma_{n_r}$.*
Alors $(\sigma_1 \oplus ... \oplus \sigma_r).(\tau_1 \oplus ... \oplus \tau_r) = \sigma_1\tau_1 \oplus ... \oplus \sigma_r\tau_r$.

De ce lemme, on déduit en particulier que si $n_1 + ... + n_r = n$, alors on a une injection $\Sigma_{n_1} \times ... \times \Sigma_{n_r} \hookrightarrow \Sigma_n$. On parle alors de *groupe d'Young*.

Nous allons maintenant, étant donné $n = n_1 + ... + n_r$ définir la permutation des blocs de tailles $n_1, ..., n_r$ dans cette décomposition :

Définition A.1.2. *Soient $n_1, ..., n_r$ des entiers non nuls et $n = n_1 + ... + n_r$. Soit $\sigma \in \Sigma_r$.*
On définit la permutation $\sigma_*(n_1, ..., n_r) \in \Sigma_n$ par la formule suivante :

$$\forall j \in [\![1; n_{\sigma(i)}]\!], \sigma_*(n_1, ..., n_r)(n_{\sigma^{-1}(1)} + ... + n_{\sigma^{-1}(i-1)} + j) = n_1 + ... + n_{\sigma^{-1}(i)-1} + j.$$

Pour calculer explicitement, en pratique, cette permutation, on procède de la façon suivante. On pose, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $I_i = [\![n_1 + ... + n_{i-1} + 1 \; ; \; n_1 + ... + n_i]\!]$ de sorte que $[\![1;n]\!] = \bigsqcup_{i=1}^{n} I_i$.
On remarque alors que $\sigma_*(n_1, ..., n_r)$ transforme le bloc $\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & ... & I_n \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} I_{\sigma^{-1}(1)} & I_{\sigma^{-1}(2)} & ... & I_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$.
Ainsi, nous avons par exemple pour $\sigma = (123)$:

$$\sigma_*(2,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lemme A.1.2. *Soient $\sigma, \tau \in \Sigma_r$ et $n_1, ..., n_r \geqslant 1$.*
Alors on a la relation :

$$\sigma_*(n_1, ..., n_r).\tau_*(n_{\sigma(1)}, ..., n_{\sigma(r)}) = (\sigma\tau)_*(n_1, ..., n_r).$$

De plus, si $\tau_1 \in \Sigma_{n_1}, ..., \tau_r \in \Sigma_{n_r}$, on a la relation de commutation :

$$\tau_1 \oplus ... \oplus \tau_r.\sigma_*(n_1, ..., n_r) = \sigma_*(n_1, ..., n_r).\tau_{\sigma(1)} \oplus ... \oplus \tau_{\sigma(r)}.$$

Si $\sigma \in \Sigma_r$ et $\tau_1 \in \Sigma_{n_1}, ..., \tau_r \in \Sigma_{n_r}$, on définit la permutation $\sigma(\tau_1, ..., \tau_r) \in \Sigma_{n_1 + ... + n_r}$ par :

$$\sigma(\tau_1, ..., \tau_r) = (\tau_1 \oplus ... \oplus \tau_r).\sigma_*(n_1, ..., n_r).$$

Voici, enfin, une dernière définition qui nous sera utile :

Définition A.1.3. *Soit $n = n_1 + ... + n_r$. Une $(n_1, ..., n_r)$-permutation Shuffle est une permutation de Σ_n qui préserve l'ordre des n_1 premiers éléments de $[\![1;n]\!]$, l'ordre des n_2 éléments suivants, ..., l'ordre des n_r derniers éléments.*

Nous noterons $Sh(n_1, ..., n_r)$ l'ensemble des $(n_1, ..., n_r)$-permutations shuffles. Si $[\![1;n]\!] = \bigsqcup_{i=1}^{n} I_i$, on définit la permutation shuffle $sh(I_1, ..., I_n)$ par :

$$sh(I_1, ..., I_r) = \begin{pmatrix} [\![1;n_1]\!] & ... & [\![n_1 + ... + n_{r-1}; n]\!] \\ I_1 & ... & I_r, \end{pmatrix}$$

A.2 Séquences symétriques

A.2.1 Définitions

Définition A.2.1. *On appelle séquence symétrique (on parle aussi de Σ-module) la donnée d'une suite de $\mathbb{K}$-modules $(M(n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que chaque $M(n)$ soit muni d'une action du groupe symétrique Σ_n.*

Un morphisme de séquences symétriques $f : M \longrightarrow N$ est la donnée d'une suite de morphismes de modules $f : M(n) \longrightarrow N(n)$ préservant l'action de Σ_n sur $M(n)$ et $N(n)$.

Ceci définit en particulier une catégorie, notée $Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}$.

Nous pouvons voir graphiquement ce qu'est une séquence symétrique, en remarquant que si $\mathcal{B}ij$ est la catégorie des ensembles finis muni des bijections entre eux, alors se donner une séquence symétrique M est équivalent à se donner un foncteur $M : \mathcal{B}ij \longrightarrow Mod_{\mathbb{K}}$.

En effet, si $M : \mathcal{B}ij \longrightarrow Mod_{\mathbb{K}}$ est un foncteur, on peut poser $M(n) = M(\llbracket 1;n \rrbracket)$ disposant d'une action naturelle de Σ_n. Un élément $\sigma \in \Sigma_n$, σ équivaut à une bijection de $\llbracket 1;n \rrbracket$ sur lui-même.

Inversement, si M est une séquence symétrique, pour tout ensemble fini I, on définit :

$$M(I) = \mathcal{B}ij(\llbracket 1;n \rrbracket, I) \otimes_{\Sigma_n} M(n),$$

où $n = Card(I)$ et où on prends comme action de Σ_n sur $\mathcal{B}ij(\llbracket 1;n \rrbracket, I)$ l'action définie par la translation à droite. Plus précisément, $M(I)$ corresponds à $\mathcal{B}ij(\llbracket 1;n \rrbracket, I) \otimes M(n)$ quotienté par les relations $\forall \sigma \in \Sigma_n, (\sigma.f) \otimes m = f \otimes (\sigma.m)$.

Ainsi, tout élément $x \in M(I)$ peut être vu sous la forme d'un arbre :

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[dr] & \cdots & i_n \arrow[dl] \\
& \boxed{a} \arrow[d] & \\
& 0 &
\end{tikzcd} \quad ,$$

où $I = \{i_1, ..., i_n\}$.

A.2.2 Structure monoïdale des séquences symétriques

Nous allons donner différentes structures de catégorie monoïdale sur la catégorie des séquences symétriques.

Définition A.2.2. *Soient M et N deux séquences symétriques. On définit une nouvelle séquence symétrique $M \otimes N$ par :*

$$M \otimes N(n) = \bigoplus_{k+l=n} \mathbb{K}[\Sigma_n] \otimes_{\Sigma_k \times \Sigma_l} M(k) \otimes N(l),$$

où le terme d'indice (k,l) dans la somme, aussi noté $Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_l}^{\Sigma_n} M(k) \otimes N(l)$, corresponds au produit tensoriel $\mathbb{K}[\Sigma_n] \otimes M(k) \otimes N(l)$ muni de l'action de Σ_n sur le premier terme, et quotienté par les relations :

$$\sigma(s \oplus t) \otimes m \otimes n = \sigma \otimes (s.m) \otimes (t.n),$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_n, s \in \Sigma_k, t \in \Sigma_l$.

On a alors le résultat :

Proposition A.2.1. *L'application $(M,N) \longmapsto M \otimes N$ est un bifoncteur sur la catégorie des séquences symétriques conférant une structure de catégorie monoïdale symétrique à cette catégorie.*

L'unité est donnée par la séquence symétrique $\mathbb{K}$ qui est nulle sauf pour $n = 0$ où elle vaut $\mathbb{K}$, et munie de l'action triviale de Σ_n.

A l'aide des invariants et des coinvariants, on en déduit deux autres structures de catégorie monoïdale sur les séquences symétriques :

Définition A.2.3. *On définit le produit coinvariant et le produit invariant de deux séquences symétriques M et N par :*

$$M \underset{\sim}{\circ} N = \bigoplus_{r \geqslant 0} (M(r) \otimes N^{\otimes r})_{\Sigma_r},$$

$$M \mathbin{\tilde{\circ}} N = \bigoplus_{r \geqslant 0} (M(r) \otimes N^{\otimes r})^{\Sigma_r}.$$

On dispose aussi d'une application trace $Tr_{M,N} : M \underset{\sim}{\circ} N \longrightarrow M \widetilde{\circ} N$ définie par :

$$Tr_{M,N}(m \otimes n_1 \otimes ... \otimes n_p) = \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \sigma.(m \otimes n_1 \otimes ... \otimes n_p).$$

Proposition A.2.2. *Les opérations $\underset{\sim}{\circ}$ et $\widetilde{\circ}$ donnent chacune une structure de catégorie monoïdale avec l'unité I :*

$$\begin{cases} I(1) & = & \mathbb{K} & si\ n = 1 \\ I(n) & = & 0 & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

Cependant, la symétrie est perdue dans ces dernières structures monoïdales.

A.2.3 Foncteurs S et Γ

Nous allons définir deux foncteurs, S et Γ, se comportant bien avec les structures monoïdales précédemment définies.

Définition A.2.4. *Soit M une séquence symétrique et soit V un $\mathbb{K}$-module. On définit :*

$$S(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (M(n) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n},$$

$$\Gamma(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (M(n) \otimes V^{\otimes n})^{\Sigma_n}.$$

On a ainsi définit deux foncteurs $S, \Gamma : Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathrm{End}(Mod_{\mathbb{K}})$.

Remarque A.2.1. *Nous pouvons aussi définir, de façon similaire :*

$$T(M, V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} M(n) \otimes V^{\otimes n}$$

qui définit aussi un foncteur $T : Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}} \longrightarrow End(Mod_{\mathbb{K}})$, mais nous nous intéresserons essentiellement par la suite aux foncteurs S, et surtout Γ.

Nous avons une application naturelle qui donne un lien entre ces deux foncteurs :

Définition A.2.5. *L'application trace Tr est la transformation naturelle $Tr : S(M, -) \longrightarrow \Gamma(M, -)$ telle que :*

$$Tr(m \otimes v_1 \otimes ... \otimes v_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma.(m \otimes v_1 \otimes ... \otimes v_n).$$

Remarque A.2.2. *Lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, Tr est en fait un isomorphisme. Mais cela n'est plus le cas, en général, lorsque la caractéristique est quelconque.*

Proposition A.2.3.

- *S et Γ sont des morphismes de catégories monoïdales de $(Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}, \otimes, \mathbb{K})$ vers $(End(Mod_{\mathbb{K}}), \otimes, \mathbb{K})$.*
- *$S : (Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}, \underset{\sim}{\circ}, I) \longrightarrow (Mod_{\mathbb{K}}, \circ, Id)$ et $\Gamma : (Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}, \widetilde{\circ}, I) \longrightarrow (Mod_{\mathbb{K}}, \circ, Id)$ sont des morphismes de catégories monoïdales.*

A.3 Théorie des opérades

Dans cette partie, nous allons passer en revue toutes les notions nécessaires pour ce mémoire qui concernent les opérades.

A.3.1 Définitions

Intuitivement, une opérade P désignera une collection d'objets $P(r)$ qui vont être assimilés à des opérations, visant à mimer les fonctions à r variables. En particulier, nous aurons la notion de composition de ces opérations.

Définition A.3.1. *Une opérade (symétrique) est une séquence symétrique P munie de :*

- *Un élément $1 \in P(1)$ appelé unité de l'opérade*
- *Et des morphismes dits de composition : $\mu : P(r) \otimes P(n_1) \otimes ... \otimes P(n_r) \longrightarrow P(n_1 + ... + n_r)$ pour tout $r, n_1, ..., n_r \geqslant 0$. On note $p(q_1, ..., q_r) = \mu(p \otimes q_1 \otimes ... \otimes q_r)$.*

qui satisfont les relations suivantes :

- *Associativité : pour $p \in P(n)$, $q_i \in P(l_i)$, $a_j \in P$,*
  $p(q_1, ..., q_r)(a_1, ..., a_l) = p(q_1(a_1, ..., a_{l_1}), ..., q_r(a_{l_1+...+l_{r-1}+1}, ..., a_{l_1+...+l_r}))$.
- *Unité : pour $p \in P(n)$, $p(1, ..., 1) = p = 1(p)$.*
- *Équivariance : pour $p \in P(n)$, $q_i \in P(l_i)$, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$,*
  $(\sigma.p)(q_1, ..., q_r) = \sigma_*(l_1, ..., l_r).p(q_{\sigma(1)}, ..., q_{\sigma(r)})$;
  $p(\tau_1.q_1, ..., \tau_r.q_r) = (\tau_1 \oplus ... \oplus \tau_r).p(q_1, ..., q_r)$.

Un morphisme d'opérades $\phi : P \longrightarrow Q$ est la donnée de morphismes de modules $\phi : P(r) \longrightarrow Q(r)$ pour tout r préservant l'unité de P ainsi que la composition.

Ceci forme alors une catégorie, que nous noterons $\mathcal{O}p$. Il s'agit d'une sous-catégorie dans la catégorie $Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}$ des séquences symétriques.

La définition d'une opérade se généralise dans le cas d'une catégorie monoïdale symétrique, en recopiant les diagrammes commutatifs donnés par les égalités précédentes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes P(n) \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & P(1) \otimes P(n) \arrow[d, "\mu"] & P(r) \otimes \mathbb{1}^{\otimes r} \arrow[r, "id\otimes\eta^{\otimes r}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & P(r) \otimes P(1)^{\otimes r} \arrow[d, "\mu"] \\
 & P(n) & & P(r)
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.1 – Relations d'unités

$$\begin{tikzcd}
(P(r) \otimes P(s_1) \otimes ... \otimes P(s_r)) \otimes (P(n_1^1) \otimes ... \otimes P(n_1^{s_1})) \otimes ... \otimes (P(n_r^1) \otimes ... \otimes P(n_r^{s_1})) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "\mu\otimes id\otimes...\otimes id"'] & & P(r) \otimes (P(s_1) \otimes P(n_1^1) \otimes ... \otimes P(n_1^{s_1})) \otimes ... \otimes (P(s_r) \otimes P(n_r^1) \otimes ... \otimes P(n_r^{s_r})) \arrow[d, "id\otimes\mu\otimes...\otimes\mu"] \\
P(s_1 + ... + s_r) \otimes P(n_1^1) \otimes ... \otimes P(n_1^{s_1}) \otimes ... \otimes P(n_r^1) \otimes ... \otimes P(n_r^{s_r}) \arrow[dr, "\mu"'] & & P(r) \otimes P(n_1^1 + ... + n_1^{s_1}) \otimes ... \otimes P(n_r^1 + ... + n_r^{s_r}) \arrow[dl, "\mu"] \\
 & P(n_1^1 + ... + n_1^{s_1} + ... + n_r^1 + ... n_r^{s_r}) &
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.2 – Relations d'associativité

$$\begin{tikzcd}
P(r)\otimes P(n_1)\otimes ... \otimes P(n_r) \arrow[rr, "s\otimes(t_1\otimes ...\otimes t_r)"] \arrow[d, "id\otimes s^*"'] & & P(r)\otimes P(n_1)\otimes ... \otimes P(n_r) \arrow[d, "\mu"] \\
P(r)\otimes P(n_{s(1)})\otimes ... \otimes P(n_{s(r)}) \arrow[r, "\mu"'] & P(n_{s(1)} + ... + n_{s(r)}) \arrow[r, "s(t_1,...,t_r)"'] & P(n_1 + ... + n_r)
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.3 – Relations d'équivariance

Remarque A.3.1. *Soit $P \in Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}$. Alors on observe que se donner une structure d'opérade sur P équivaut à se donner une structure de monoïde sur P dans la catégorie monoïdale $(Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}, \underset{\sim}{\circ}, I)$.*

Nous pouvons aussi définir des opérations de compositions partielles :

$$\forall p \in P(n), \forall q \in P(m), p \circ_i q = p(1, ..., 1, q, 1, ..., 1).$$

L'intérêt des compositions partielles est de pouvoir retrouver très facilement la composition totale μ de l'opérade, grâce à l'axiome d'unité et d'associativité. En fait, la définition d'une opérade équivaut même à la donnée des opérations de composition partielle, pourvu que les axiomes d'unités, d'associativité et d'équivariance soient vérifiées.

Les groupes symétriques munies de la composition que nous avons défini au début de cette section forment un exemple d'opérade. Si A est un $\mathbb{K}$-module, $(Hom(A^{\otimes n}, A))_n$ forme aussi une opérade, notée End_A, que nous définissons avec les compositions partielles $p \circ_i q$ définies en mettant q à la i-ème composante de p, dans le sens où : $p \circ_i q(a_1, ..., a_{n+m-1}) = p(a_1, ..., a_{i-1}, q(a_i, ..., a_{i+m-1}), ..., a_{n+m-1})$.

A.3.2 Opérades par générateurs et relations

Dans cette sous-partie, on s'attarde en particulier sur la création d'une opérade via des générateurs et des relations, comme pour les groupes.

Commençons par le théorème suivant :

Théorème A.3.1. *Soit M une séquence symétrique et soit P une opérade. Il existe une opérade $\Theta(M)$ appelée opérade libre engendrée par M telle que pour tout morphisme $f : M \longrightarrow P$ de séquences symétriques, il existe un unique morphisme $\phi_f : \Theta(M) \longrightarrow P$ d'opérades tel que $f = \phi_f \circ i$:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & P \\
& \Theta(M) \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi_f"'] &
\end{tikzcd}.$$

Démonstration. Voir [Fre17].

□

Ceci est donc l'analogue, pour les groupes, des groupes libres à n éléments $\mathbb{F}_n$, pour lesquels un morphisme de groupe basé en $\mathbb{F}_n$ ne dépends que de la donnée des images des n générateurs.

Intuitivement, l'opérade $\Theta(M)$ s'obtient en composant formellement les éléments de M, de sorte que tous les axiomes d'une opérade soient satisfaits. Ceci peut se formaliser en terme d'arbres (voir pour cela [Fre17] et [LV12]).

Définition A.3.2. *Soit P une opérade. Un idéal dans P est une collection de sous-modules $S(r) \subset P(r)$ pour tout $r \geqslant 0$ préservés par l'action de Σ_r et tels que pour tout $p \in P(r)$, pour tout $q_1 \in P(n_1), ..., q_r \in P(n_r)$, on ait $p(q_1, ..., q_r) \in S(n_1 + ... + n_r)$ dès que $p \in S(r)$, ou dès que il existe $i \in [\![1; r]\!]$ tel que $q_i \in S(n_i)$.*

Naturellement, on peut définir la notion d'idéal engendré par des éléments ; donnons-nous une opérade P, ainsi qu'une famille d'éléments $z^\alpha \in P(n_\alpha)$. La séquence symétrique formée des combinaisons linéaires des éléments de la forme $p(1, ..., z^\alpha(q_1, ..., q_{n_\alpha}), ..., 1)$ où p et les q_i sont des éléments de P (de sorte que l'expression précédente soit bien définie), où α varie dans l'ensemble d'indexation de la famille des z^α constitue un idéal dans P qui contient tous les éléments z^α. On dit que c'est *l'idéal engendré par les z^α*, noté $< z^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I} >$.

Proposition A.3.1. *Soit P une opérade et soit S un idéal de P. Alors les modules quotients $R(n) = P(n)/S(n)$ induisent une opérade R noté $R = P/S$.*

De plus, si $S =< z^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I} >$ et si on note $\pi : P \longrightarrow P/S$ le morphisme d'opérade obtenu par projection sur chaque composante, un morphisme d'opérades $\phi : P \longrightarrow Q$ se factorise en $\overline{\phi} : P/S \longrightarrow Q$ à travers π si et seulement si $\forall \alpha \in \mathcal{I}, \phi(z^\alpha) = 0$.

Avec la remarque précédente cette proposition, nous sommes donc en mesure de définir une opérade à l'aide de générateurs et de relations :

Définition A.3.3. *Soit M une séquence symétrique. Soit $w_0^\alpha, w_1^\alpha \in \Theta(M)(n_\alpha) \times \Theta(M)(n_\alpha)$ une famille d'éléments. On définit l'opérade généré par M avec pour relations $w_0^\alpha \equiv w_1^\alpha$ par :*

$$\Theta(M \ : \ w_0^\alpha \equiv w_1^\alpha, \alpha \in \mathcal{I}) = \Theta(M)/ < w_0^\alpha - w_1^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I} > .$$

Ainsi, nous avons construit une opérade, générée par M, dans laquelle les opérations w_0^α et w_1^α dans $\Theta(M)$ coïncident.

Ceci sera particulièrement utile pour construire facilement les opérades nous permettant de retrouver les structures d'algèbres classiques.

A.3.3 Algèbres sur une opérade

Définition A.3.4. *Une algèbre sur une opérade P (ou P-algèbre) est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module A et de morphismes $\lambda : P(r) \otimes A^{\otimes r} \longrightarrow A$ satisfaisant les relations suivantes, où on note $p(a_1, ..., a_n)$ l'image de $p \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n$ par λ :*

- *Associativité : pour $p \in P(n)$, $q_i \in P(l_i)$, $a_j \in A$,*
  $p(q_1, ..., q_r)(a_1, ..., a_l) = p(q_1(a_1, ..., a_{l_1}), ..., q_r(a_{l_1+...+l_{r-1}+1}, ..., a_{l_1+...+l_r}))$.
- *Unité : $\forall a \in A, 1(a) = a$.*
- *Equivariance : pour $p \in P(n)$, $a_1, ..., a_n \in A$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(\sigma.p)(a_1, ..., a_n) = p(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$.*

Comme pour la définition d'une opérade, ceci peut se résumer à la commutativité des diagrammes suivants :

La définition d'algèbre sur une opérade donne directement le théorème suivant :

$$\begin{tikzcd}
P(r)\otimes A^{\otimes r} \arrow[r, "s\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes s^*"'] & P(r)\otimes A^{\otimes r} \arrow[d, "\lambda"] \\
P(r)\otimes A^{\otimes r} \arrow[r, "\lambda"'] & A
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.4 – Relations d'équivariance

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes A \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & P(1)\otimes A \arrow[d, "\lambda"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.5 – Relations d'unités

$$\begin{tikzcd}
(P(r)\otimes P(n_1)\otimes ...\otimes P(n_r))\otimes A^{\otimes n} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "\mu\otimes id^{\otimes n}"'] & & P(r)\otimes(P(n_1)\otimes A^{\otimes n_1})\otimes ...\otimes(P(n_r)\otimes A^{n_r}) \arrow[d, "id\otimes\lambda\otimes...\otimes\lambda"] \\
P(n_1+...+n_r)\otimes A^{\otimes n} \arrow[r, "\lambda"'] & A & P(r)\otimes A^{\otimes r} \arrow[l, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.6 – Relations d'associativité

Théorème A.3.2. *La donnée d'une algèbre A au-dessus d'une opérade P est équivalente à se donner un morphisme d'opérades $\phi : P \longrightarrow End_A$.*

Donnons quelques exemples classiques. On définit la séquence symétrique M_{Com} comme étant $\mathbb{K}X_1X_2$ en arité 2, et 0 sinon, où on considère les polynômes en 2 variables commutatives, munies de l'action du groupe symétrique par permutation des variables. On définit, dans le cas non commutatif, M_{As} comme étant $\mathbb{K}X_1X_2 \bigoplus \mathbb{K}X_2X_1$ en arité 2, et 0 sinon, munie de l'action du groupe symétrique par permutation des variables. On définit enfin $M_{\mathcal{L}ie}$ comme étant M_{Com} ensemblistement, mais munie de l'action $(12).X_1X_2 = -X_1X_2$. On pose alors :

$$Com = \Theta(M_{Com} : X_1(X_2X_3) = (X_1X_2)X_3),$$
$$As = \Theta(M_{As} : X_1(X_2X_3) = (X_1X_2)X_3),$$
$$\mathcal{L}ie = \Theta(M_{\mathcal{L}ie} : X_1(X_2X_3) + X_3(X_1X_2) + X_2(X_3X_1) = 0).$$

Il est alors facile de voir que se donner une algèbre associative (commutative) est équivalent à se donner une algèbre sur l'opérade As (ou Com dans le cas commutatif). Si on change l'hypothèse d'alternance en anti-symétrie dans la définition d'une algèbre de Lie, on a aussi équivalence entre le fait de se donner une algèbre de Lie, et le fait de se donner une algèbre sur l'opérade $\mathcal{L}ie$.

A.3.4 Monades $S(P,-)$ et $\Gamma(P,-)$ associées à une opérade P

On rappelle dans un premier temps la définition d'une *monade* :

Définition A.3.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une monade est la donnée d'un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ muni d'un morphisme produit $\mu : T\circ T \longrightarrow T$ et d'un morphisme unité $\eta : id \longrightarrow T$ dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$ faisant commuter les diagrammes suivant :*

$$\begin{tikzcd} T \circ id \arrow[r, "id \circ \eta"] \arrow[dr, "="'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & id \circ T \arrow[l, "\eta \circ id"'] \arrow[dl, "="] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \circ T \circ T \arrow[r, "id \circ \mu"] \arrow[d, "\mu \circ id"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

Un morphisme de monades est un morphisme de foncteurs $\phi : S \longrightarrow T$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} & id \arrow[dl, "\eta_S"'] \arrow[dr, "\eta_T"] & \\ S \arrow[rr, "\phi"'] & & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \circ S \arrow[r, "\phi \circ \phi"] \arrow[d, "\mu_S"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu_T"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & T \end{tikzcd}$$

On peut ainsi définir les algèbres sur une monade :

Définition A.3.6. *Soit (T, μ, η) une monade dans une catégorie $\mathcal{C}$. Une algèbre sur la monade (T, μ, η) est un objet $A \in \mathcal{C}$ muni d'un morphisme $\lambda : T(A) \longrightarrow A$ faisant commuter les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta(A)"] \arrow[dr, "="'] & T(A) \arrow[d, "\lambda"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \circ T(A) \arrow[r, "T(\lambda)"] \arrow[d, "\mu(A)"'] & T(A) \arrow[d, "\lambda"] \\ T(A) \arrow[r, "\lambda"'] & A \end{tikzcd}$$

Si A et B sont deux algèbres sur la monade (T, μ, η), on définit un morphisme d'algèbres comme étant un morphisme $f : A \longrightarrow B$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & T(B) \arrow[d, "\lambda_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Ceci définit alors une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^T$.

La remarque A.3.1 nous permet directement d'avoir :

Proposition A.3.2. *Soit $P \in Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}$ une opérade. Alors $S(P, -)$ est une monade.*

Démonstration. On pose $T = S(P, -) \in End(\mathrm{Mod}_{\mathbb{K}})$. Considérons $\mu : P \underset{\sim}{\circ} P \longrightarrow P$ le morphisme de composition donné par la structure d'opérade de P, et par la remarque précédente, ainsi que le morphisme unité $\eta : I \longrightarrow P$. Ceci induit, d'après la proposition A.2.3 un morphisme produit $\widetilde{\mu} : T \circ T \longrightarrow T$ et un morphisme unité $\widetilde{\eta} : Id \longrightarrow T$ qui confèrent, d'après les relations vérifiées par μ et η, une structure de monade à $S(P, -)$. $\square$

En particulier, une algèbre sur une opérade P équivaut à se donner une algèbre sur la monade $S(P, -)$.

En ce qui concerne la structure de monade de $\Gamma(P, -)$, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire :

Définition A.3.7. *Une séquence symétrique M est dite connexe si $M(0) = 0$.*

Proposition A.3.3. *Soient $M, N \in Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}$. Si N est connexe, alors la trace $Tr_{M,N} : M \underset{\sim}{\circ} N \longrightarrow M \widetilde{\circ} N$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Voir [Frea].

□

On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition A.3.4. *Soit (P, μ, η) une opérade connexe. Il existe alors un produit $\widetilde{\mu} : P \widetilde{\circ} P \longrightarrow P$ donné par $\widetilde{\mu} = \mu \circ Tr_{P,P}^{-1}$.*

De plus, ce produit donne une structure de monoïde $(P, \widetilde{\mu}, \eta)$ dans la catégorie monoïdale $(Mod_{\mathbb{K}}^{\mathbb{S}}, \widetilde{\circ}, I)$.

Corollaire A.3.1. *Soit (P, μ, η) une opérade connexe. Alors $(\Gamma(P, -), \widetilde{\mu}, \eta)$ est une monade.*

Définition A.3.8. *Soit P une opérade connexe. Une ΓP-algèbre est une algèbre sur la monade $\Gamma(P, -)$.*

Nous récupérons alors de plus la proposition suivante :

Proposition A.3.5. *Soit P une opérade connexe. Alors la transformation naturelle $Tr : S(P, -) \longrightarrow \Gamma(P, -)$ est un morphisme de monades.*

Démonstration. Voir [Frea].

□

En particulier, toute P-algèbre est une ΓP-algèbre. C'est pourquoi les ΓP-algèbres sont aussi appelées *P-algèbres à puissances divisées.*

Annexe B

Bialgèbres et algèbres de Hopf

Dans ce chapitre de l'annexe, nous allons donner toutes les définitions utiles dans le chapitre 3 de ce mémoire qui concernent les algèbres de Hopf. Nous allons nous restreindre à la catégorie des $\mathbb{K}$-modules, où $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif et unitaire, mais la plupart de ces définitions se généralisent aisément dans le cas d'une catégorie monoïdale symétrique.

Pour une lecture plus approfondie sur ces objets et leurs utilisations, voir par exemple [Fre17].

B.1 Bialgèbres

Dans un premier temps, nous allons définir les algèbres, les coalgèbres puis les bialgèbres. Les définitions seront données de sorte qu'elles puissent s'adapter aisément dans le contexte d'une catégorie monoïdale symétrique. Si A est un $\mathbb{K}$-module, $\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ désignera l'isomorphisme induit par la permutation (12).

B.1.1 Algèbres associatives unitaires

Un $\mathbb{K}$-module A est une *algèbre unitaire associative* (ou $\mathbb{K}$-algèbre) si elle est munit d'un morphisme produit $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ et d'un élément unité $1 \in A$ tel que les égalités suivantes soient satisfaites :

- $\mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c))$ (Associativité) ;
- $\mu(a \otimes 1) = a = \mu(1 \otimes a)$ (Unité).

L'axiome d'unité peut aussi être donné via un morphisme $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow A$ dit le *morphisme unité*.

L'algèbre est dite *commutative* si en plus $\mu(a \otimes b) = \mu(b \otimes a)$.

On peut résumer ceci avec la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "id\otimes\eta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{1} \otimes A \arrow[l, "\eta\otimes id"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse de commutativité demande en plus la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

On note en général $a.b = \mu(a\otimes b)$ le produit.

Tout anneau $\mathbb{K}$ en particulier est muni d'une structure d'algèbre dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules.

Un *morphisme* $f : A \longrightarrow B$ entre deux algèbres dans $\mathcal{M}$ est un morphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve le produit et l'unité.
Ceci défini donc en particulier deux sous-catégories de $Mod_{\mathbb{K}}$, que nous notons $\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{C}om_{\mathbb{K}}$ dans le cas commutatif (on peut oublier l'indice $\mathbb{K}$ s'il n'y a aucune ambiguité sur l'anneau de base).

Par ailleurs, ces catégories admettent une structure de catégorie monoïdale. Soient en effet A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres. Alors $A\otimes B$ est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, munie de $1_{A\otimes B} = 1_A\otimes 1_B$ et $(a_1\otimes b_1).(a_2\otimes b_2) = (a_1.a_2)\otimes(b_1.b_2)$.

B.1.2 Coalgèbres coassociatives counitaires

On définit les *coalgèbres coassociatives counitaires* dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules de façon duale à la définition des $\mathbb{K}$-algèbres.

Une coalgèbre coassociative counitaire est un $\mathbb{K}$-module muni d'un morphisme counité $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$ (aussi appelé augmentation) et d'un coproduit $\Delta : C \longrightarrow C\otimes C$ satisfaisant des propriétés de counité et de cocommutativité.

Pour écrire ces axiomes, on écrit $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{r} x^i_{(1)} \otimes x^i_{(2)}$. Nous simplifierons cette écriture en utilisant la *notation de Sweedler* : $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ voir parfois $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ en voyant $x_{(1)}, x_{(2)} \in C$. Cette dernière notation se justifie par le fait que toutes les formules que nous écrivons dans les coalgèbres reviennent à s'intéresser aux monômes $a\otimes b$ qui apparaissent dans les formules.

C est alors une *coalgèbre* si les relations suivantes sont satisfaites :

— $\Delta(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)})$ (Coassociativité) ;
— $\varepsilon(x_{(2)})x_{(1)} = x = \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)}$ (Counité).

C est dite *cocommutative* si en plus $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$.

L'axiome de coassociativité permet par ailleurs d'itérer Δ et de définir $\Delta^{(n)} : C \longrightarrow C^{\otimes n}$, et nous écrirons $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes ... \otimes x_{(n)}$.

Comme précédemment, ceci peut se résumer avec la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\ C\otimes \mathbb{1} & C\otimes C \arrow[l, "id\otimes\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon\otimes id"'] & \mathbb{1}\otimes C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd}$$

La cocommutativité se traduit alors par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C\otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C\otimes C \end{tikzcd}$$

Exactement comme dans le cas des algèbres, un *morphisme* $f : C \longrightarrow D$ de coalgèbres est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules tel que :

— $\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$;
— $(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$.

Ceci définit alors, à nouveau, deux catégories.

De même que dans le cas des algèbres, on peut donner à $C \otimes D$ une structure de coalgèbre coassociative counitaire (et cocommutative si C et D le sont), de la façon suivante : l'augmentation sera le morphisme $\varepsilon_{C\otimes D} : C\otimes D \xrightarrow{\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D} \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$ et $\Delta_{C\otimes D} : C\otimes D \xrightarrow{\Delta_C\otimes\Delta_D} (C\otimes C)\otimes(D\otimes D) \xrightarrow{id\otimes\tau\otimes id} (C\otimes D)\otimes(C\otimes D)$.

B.1.3 Bialgèbres

Nous définissons à présent les bialgèbres, essentiellement comme étant des objets étant à la fois algèbres, et à la fois coalgèbres :

Définition B.1.1. *Une bialgèbre est un $\mathbb{K}$-module H muni d'un produit μ et d'un coproduit Δ vérifiant les formules de comptabilité suivantes :*

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "\simeq"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\simeq"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "\eta\otimes\eta"'] & H\otimes H \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "="'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[dd, "\Delta"] \\ (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[d, "id\otimes\tau\otimes id"'] & \\ (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu\otimes\mu"'] & H\otimes H \end{tikzcd}$$

B.2 Algèbres de Hopf

Essentiellement, une algèbre de Hopf est une bialgèbre munie d'une opération particulière appelée *antipode*, qui généralise le passage à l'inverse dans un groupe :

Définition B.2.1. *Une algèbre de Hopf est une bialgèbre H muni d'un morphisme $\sigma : H \longrightarrow H$ appelé antipode faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "\sigma \otimes id"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "id \otimes \sigma"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Avec nos notations, la commutativité de ce diagramme équivaut aux deux égalités :

$$a_{(1)}\sigma(a_{(2)}) = \varepsilon(a).1 = \sigma(a_{(1)})a_{(2)}.$$

Nous n'irons pas plus loin sur la notion d'algèbres de Hopf, dont seule la définition nous est utile dans ce mémoire. Pour des applications intéressantes des algèbres de Hopf en topologie algébrique, voir par exemple [Fre17].

Bibliographie

[GM88] William GOLDMAN et John MILLSON. “The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds”. In : *”Publications mathématiques de l’IHES”* tome 67 (1988), p. 43-96. DOI : `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1988__67__43_0.pdf`.

[CL01] Frederic CHAPOTON et Muriel LIVERNET. “Pre-Lie algebras and the rooted trees operad”. In : *”International Mathematics Research Notices”* vol 8 (2001), p. 395-408. DOI : `https://arxiv.org/pdf/math/0002069.pdf`.

[LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. *Algebraic operads*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2012. ISBN : 978-3-642-30362-3.

[DSV16] Vladimir DOTSENKO, Sergey SHADRIN et Bruno VALLETTE. “Pre-Lie deformation theory”. In : *”Moscow Mathematical Journal”* 16.3 (2016), p. 505-543. DOI : `https://arxiv.org/pdf/1502.03280.pdf`.

[Fre17] Benoit FRESSE. *Homotopy of Operads & Grothendieck-Teichmüller Groups*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2017. ISBN : 9781470434816.

[Ces] Andrea CESARO. *Pre-Lie Algebras and Operads in Positive Characteristic*. URL : `https://pepite-depot.univ-lille.fr/LIBRE/EDSPI/2016/50376-2016-Cesaro.pdf`. (accessed: 09.04.2022).

[Frea] Benoit FRESSE. *On the homotopy of simplicial algebras over an operad*. URL : `https://www.ams.org/journals/tran/2000-352-09/S0002-9947-99-02489-7/S0002-9947-99-02489-7.pdf`. (accessed: 10.04.2022).

[Freb] Benoit FRESSE. *Operadic cobar constructions, cylinder objects and homotopy morphisms of algebras over operads*.

[HP] Patrick HILGER et Norbert PONCIN. *Lectures on Algebraic Operads*. URL : `https://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/14381/1/LecturesAlgebraicOperads.pdf`. (accessed: 03.02.2022).

[Iko] Sacha IKONICOFF. *Algèbres à niveaux et applications en topologie algébrique*. URL : `https://u-paris.fr/theses/detail-dune-these/?id_these=4108`. (accessed: 09.05.2022).

[Man] Marco MANETTI. *Deformation theory via differential graded Lie algebras*. URL : `https://arxiv.org/pdf/math/0507284.pdf`. (accessed: 02.06.2022).

[OG] J.-M. OUDOM et D. GUIN. *On the Lie envelopping algebra of a pre-Lie algebra*. URL : `https://arxiv.org/pdf/math/0404457.pdf`. (accessed: 19.02.2022).

[Wil] Brian R. WILLIAMS. *DG Lie algebras ant the Maurer-Cartan equation*. URL : `https://web.northeastern.edu/brwilliams/wp-content/uploads/2019/01/Lecture-3.pdf`. (accessed: 03.02.2022).