

GRIMOIRE D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

Lorenzo Ramero



Dernière mise-à-jour : 14 Avril 2025



LES PRESSES INSOUMISES



Adresse de l'auteur :

Lorenzo Ramero
Laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé
Université de Lille
Cité Scientifique – Bâtiment M2
F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex
FRANCE

Courriel : `lorenzo.ramero@univ-lille.fr`

Les Presses Insoumises

PUNK PUBLISHING HOUSE

`les.presses.insoumises@gmail.com`

Imprimé en Avril 2022 par

Duplprint Mayenne

733, rue Saint-Léonard

53100 Mayenne

Dépôt Légal : Avril 2022

ISBN : 979-10-699-9068-5

La reproduction partielle ou totale de cet ouvrage est
consentie, exclusivement pour un usage non commercial.

Le texte intégral peut être téléchargé gratuitement
à partir du site web de l'auteur :

<https://pro.univ-lille.fr/lorenzo-ramero/publications/>

To the great Variety of Readers.

From the most able, to him that can but spell : there you are number'd. We had rather you were weighed ; especially, when the fate of all bookes depends upon your capacities and not of your heads alone, but of your purses. Well ! It is now publique, & you wil stand for your priviledges wee know : to read, and censure. Do so, but buy it first. That doth best commend a Booke, the Stationer saies. Then, how odde soever your braines be, or your wisdomes, make your licence the same, and spare not. Judge your six-pen'orth, your shillings worth, your five shillings worth at a time, or higher, so you rise to the just rates, and welcome. But, whatever you do, Buy. Censure will not drive a Trade, or make the Jacke go. And though you be a Magistrate of wit, and sit on the Stage at Black-Friers, or the Cock-pit, to arraigne Playes dailie, know, these Playes have had their triall alreadie, and stood out all Appeales ; and do now come forth quitted rather by a Decree of Court, then any purchased letters of commendation.

[from the preface of the *First Folio*, the first collected edition of Shakespeare's plays, published posthumously in London, in 1623]

Voulez-vous maintenant que vos enfants donnent dans les mathématiques ? je ne vous en détournerai pas si vous y tenez, mais il faut que l'enseignement en soit fait avec précaution et avec prudence, c'est-à-dire dans un appartement intérieur, sans se permettre de tracer sur les planchers, sur les murs, de figures de géométrie, de caractères ou grimoire d'algèbre. Il ne faut scandaliser personne ; et surtout on doit se garder de donner une réputation de sorcellerie à la maison d'un magistrat.

[extrait de *Histoire des Français des divers états*, de Amans-Alexis Monteil, publié à Paris en 1843]

TABLE DES MATIÈRES

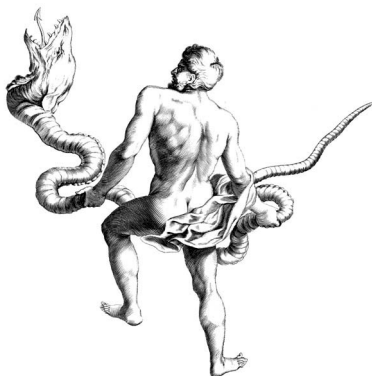
Invocation des Ténèbres	iii
1. Bélier Υ	1
1.1. Anneaux, idéaux, modules	1
1.2. Fonctions continues sur un espace topologique	9
1.3. Spectre maximal et spectre premier	13
1.4. Théorie élémentaire des corps	22
1.5. Le langage catégoriel	39
1.6. Solutions aux exercices et problèmes	50
2. Taureau $\mathfrak{O}$	69
2.1. Le lemme de Yoneda	69
2.2. Limites et colimites	79
2.3. Foncteurs exacts	90
2.4. Catégories abéliennes	104
2.5. Premiers pas dans l'algèbre homologique	117
2.6. Solutions aux exercices et problèmes	128
3. Gémeaux Π	160
3.1. Produit tensoriel de modules	161
3.2. Restriction et extension des scalaires	167
3.3. Localisation et lemme de Nakayama	174
3.4. Produit tensoriel d'algèbres	184
3.5. Modules plats et algèbres plates	191
3.6. Solutions aux exercices et problèmes	199
4. Cancer $\mathfrak{C}$	224
4.1. Les théorèmes de Gabriel-Popescu et de Freyd-Mitchell	225
4.2. Espaces spectraux	243
4.3. Préfaisceaux et faisceaux	254
4.4. Modules projectifs et groupes de Picard	265
4.5. Fibrés vectoriels et théorème de Swan	273
4.6. Solutions aux exercices et problèmes	281
5. Lion $\mathfrak{L}$	310
5.1. Homotopies et résolutions	310
5.2. Schémas	328
5.3. Modules quasi-cohérents	339
5.4. Constructions élémentaires de schémas	347
5.5. Immersions, morphismes séparés, et éclatements	357
5.6. Solutions aux exercices et problèmes	366
6. Vierge $\mathfrak{M}$	389
6.1. Extensions entières d'anneaux	390
6.2. Homomorphismes quasi-finis et "Main Theorem" de Zariski	398
6.3. Anneaux noethériens	405
6.4. Variétés normales et normalisation	411
6.5. Platitude générique et théorème de Chevalley	421
6.6. Solutions aux exercices et problèmes	427
7. Balance $\mathfrak{Q}$	450
7.1. Idéaux premiers associés à un module	450
7.2. Décomposition primaire	454
7.3. Anneaux noethériens de dimension zéro et un	459
7.4. Un exemple géométrique	465
7.5. Foncteurs dérivés d'un foncteur additif	474
7.6. Solutions aux exercices et problèmes	485
8. Scorpion $\mathfrak{M}$	500

8.1. Valuations sur les anneaux	501
8.2. Ordres sur les anneaux et corps formellement réels	510
8.3. Le spectre réel	524
8.4. Le spectre valuatif	537
8.5. Complexes doubles	545
8.6. Solutions aux exercices et problèmes	555
9. Sagittaire $\nearrow$	579
9.1. Anneaux et modules topologiques	579
9.2. Technique de complétion	587
9.3. Complétion et limites inverses	594
9.4. Anneaux de Huber	602
9.5. Le lemme d'Artin-Rees	614
9.6. Solutions aux exercices et problèmes	621
10. Capricorne Z	639
10.1. Valuations continues	640
10.2. Anneaux affinoïdes	647
10.3. Foncteurs Tor et extension des scalaires	655
10.4. Le critère local de platitude	663
10.5. Le théorème de Gruson et Raynaud	670
10.6. Solutions aux exercices et problèmes	678
11. Verseau W	694
11.1. Série de Hilbert-Poincaré et polynôme de Samuel	695
11.2. Théorie de la dimension des anneaux locaux noethériens	702
11.3. Théorie de la profondeur et modules de Cohen-Macaulay	709
11.4. Complexe de Koszul et dimension projective des modules	721
11.5. Critères de normalité et de factorialité	732
11.6. Solutions aux exercices et problèmes	743
12. Poissons X	766
12.1. Espaces adiques	767
12.2. Anneaux analytiquement noethériens et algèbres de Tate	777
12.3. Morphismes topologiquement de type fini	792
12.4. Le théorème d'acyclicité de Tate	801
12.5. Applications au spectre valuatif et au spectre adique	815
12.6. Solutions aux exercices et problèmes	831
Références	849
INDEX	851

La quête de l'esprit tournait en cercle. A Bâle jadis, et en bien d'autres lieux, il avait passé par la même nuit. Les mêmes vérités avaient été réappries plusieurs fois. Mais l'expérience était cumulative : le pas à la longue se faisait plus sûr ; l'œil voyait plus loin dans certaines ténèbres ; l'esprit constatait au moins certaines lois.

Marguerite Yourcenar – *L'Œuvre au Noir*

INVOCATION DES TÉNÈBRES



SI vous cherchez une *Bible* de l'algèbre commutative – un survol complet et systématique d'un territoire des mathématiques bien démarqué – mon texte n'est pas pour vous. Ce que je vous propose, c'est plutôt un apprentissage expérimental, dans un atelier d'alambics et chaudrons bouillonnants, où les outils proprement algébriques en côtoient d'autres, récupérés des champs de l'analyse réelle ou complexe, de la topologie générale, de la théorie des nombres, voire de la théorie des représentations.

En fait, le caractère hybride de notre sujet se manifestera dès la première leçon, et nous fournira un motif conducteur inépuisable : car d'un côté, un effet collatéral de nombreuses investigations mathématiques est la production d'une quantité importante d'anneaux, de modules, d'homomorphismes... et les efforts visant à analyser et interpréter ces données n'ont jamais cessé de stimuler le développement de l'algèbre commutative. Ainsi, un lemme de Stone nous montre que tout espace topologique compact et séparé est déterminé, à homéomorphisme près, par l'anneau de ses fonctions continues à valeurs réelles. De même, si C est une surface de Riemann complexe compacte, et $P \in C$ un point arbitraire, les fonctions holomorphes sur $C \setminus \{P\}$ et méromorphes en P forment une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini qui encode fidèlement la géométrie de C ; à l'aide de cet anneau, on peut plonger C dans un espace projectif, et donc la munir d'une structure intrinsèque de courbe algébrique. Voici un autre exemple avec une longue histoire : pour tout corps K et toute représentation d'un groupe G sur un K -espace vectoriel V , on peut considérer l'anneau $K[V]^G$ des fonctions polynomiales sur V qui sont invariantes sous l'action induite de G , et maints problèmes de théorie des invariants se ramènent à des questions sur les propriétés de cet anneau ; en particulier, le célèbre XIVème problème de Hilbert porte sur les conditions que l'on doit imposer sur G , afin d'assurer que $K[V]^G$ soit une K -algèbre de type fini, quel que soit V de K -dimension finie.

De l'autre côté, un des buts principaux de ce cours est l'explication de certains procédés pour transmuter tout anneau (commutatif, associatif et unitaire) en un objet géométrique : cela nous permettra d'étudier des questions algébriques par des méthodes géométriques (mais aussi, réciproquement, des questions géométriques par des moyens

algébriques). Le prototype – et jusqu’à nos jours, l’exemple le plus important – est l’opération qui consiste à associer à chaque anneau son *spectre premier*, *i.e.* l’ensemble de ses idéaux premiers, muni d’une topologie convenable, appelée souvent *topologie de Zariski*, du nom du premier mathématicien qui a mis en évidence l’utilité de cette construction. En effet, la notion de spectre premier, et celle de schéma affine qui en dérive naturellement, constituent les piliers sur lesquels se fonde la géométrie algébrique telle qu’elle est conçue aujourd’hui. Mais on s’intéressera aussi aux *spectres valuatifs* et aux *spectres réels* des anneaux, qui depuis une trentaine d’années jouent un rôle analogue, respectivement pour la géométrie analytique non-archimédienne et la géométrie semi-algébrique réelle.

Tout au long du parcours, la collaboration du lecteur sera sollicitée, car une proportion importante du matériel présenté ici, y paraît sous forme d’exercices et problèmes de niveaux assez variables, les deuxièmes étant en général plus difficiles que les premiers ; en fait, certains problèmes sont probablement trop durs pour les débutants auxquels ce cours s’adresse en priorité : si vous n’aimez pas les bouquins qui vous interpellent et vous défient de temps en temps, mon texte n’est pas pour vous non plus. D’autre part, pour presque tout problème et exercice je propose des solutions détaillées ; on peut ainsi moduler à souhait son degré d’implication : d’une consultation modérée des solutions pour un entraînement plus sportif, jusqu’à la balade touristique pour les vacanciers de l’algèbre.

Ce *Grimoire* est l’aboutissement imparfait d’une longue et, en bonne partie, accidentelle gestation : il s’est d’abord matérialisé sous forme d’un recueil de notes manuscrites, pour des cours au niveau de la deuxième année de Maîtrise que j’ai eu occasion d’enseigner à plusieurs reprises à Bordeaux et plus tard à Lille. Son format trahit la cadence hebdomadaire de ses origines orales, avec ses contraintes de temps et les choix pédagogiques que j’ai infligés à mes différents auditeurs ; c’est pourquoi il n’est pas organisé en chapitres (terminologie qui évoque un découpage en unités thématiques), mais plutôt en leçons qui suivent un tracé approximatif, à partir d’une dotation légère de quelques questions initiales, revisitées et enrichies en route, à la lumière des techniques et des théorèmes appris chemin faisant.

Ma référence principale était le classique [2] de Atiyah-Macdonald, et j’avais aussi utilisé le livre [55] de Matsumura comme source secondaire ; même après de nombreux réaménagements, des ajouts et suppressions, je crois que l’on peut encore apercevoir en filigrane l’influence atavique de ces deux textes (surtout du premier). En particulier, le cœur du cours reste toujours la théorie des anneaux noethériens, dans son articulation classique, canonisée au début des années 60 : d’abord les résultats fondateurs de Hilbert (théorème de la base et Nullstellensatz), puis la décomposition primaire de Noether, l’étude détaillée en dimension zéro (anneaux artiniens) et en dimension un (anneaux de Dedekind), les topologies adiques et la technique de complétion, les théories de la dimension et de la profondeur, pour conclure avec les anneaux locaux réguliers et leur caractérisation homologique (théorème de Serre). L’algèbre homologique dont on se sert est développée *ab ovo*, d’un style minimaliste mais tout à fait rigoureux ; pour la rendre plus digeste, elle est administrée en pilules : en moyenne, une section par leçon, mêlée à du contenu plus appétissant.

Autour de ce noyau, j’ai ajouté un assortiment de sujets détachés : en premier lieu des éléments de théorie des valuations, un sujet assez ancien – son origine remonte aux travaux de Krull des années 30 – dont les cotations dans la bourse des valeurs algébriques ont été, pendant longtemps, assez volatiles : aux années 40 elle était au centre des intérêts de Zariski, qui y voyait la clef pour son programme de désingularisation des variétés algébriques ; reléguée, dès les années 60, à l’arrière-plan à la suite de la percée de Hironaka, établissant la désingularisation en caractéristique zéro par des idées et avec un langage différents, entièrement basés sur la nouvelle théorie des schémas ; récupérée aux années 90 pour l’étude des variétés analytiques définies sur les corps ultramétriques, et leurs

généralisations : les *espaces analytiques* de V.Berkovich et les *espaces adiques* de R.Huber. Ces derniers, en particulier, sont parvenus récemment à se tailler une niche assez centrale dans l'écosystème de la géométrie algébrique et arithmétique, surtout depuis l'entrée en scène fracassante des espaces perfectoides de P.Scholze. La douzième et dernière leçon de ce *Grimoire* se veut comme un point d'accès vers ce nouveau cercle d'idées en plein essor, dont l'importance ne fait plus de doute.

Un autre sujet récurrent sera l'algèbre des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace topologique : il s'agit d'une classe d'anneaux très éloignés de ceux que l'on rencontre lors de l'étude de la géométrie algébrique, dans lesquels on retrouve pourtant des échos étonnants de la théorie noethérienne. Par exemple, le lemme de Stone cité ci-dessus peut se voir comme une contrepartie du Nullstellensatz ; aussi, l'analyse du spectre premier d'une algèbre de fonctions continues révèle d'un côté des analogies avec les anneaux de valuation, et de l'autre côté conduit naturellement à la découverte de toute une panoplie de structures d'intérêt général : notamment, les filtres premiers et les ultrafiltres, les anneaux ordonnés, et enfin la notion de spectre réel d'un anneau.

Certains thèmes du *Grimoire* n'étaient pas prévus par le plan originaire du projet, mais ont su s'imposer graduellement. C'est le cas de la théorie des catégories, à laquelle j'envisageais initialement de ne consacrer qu'une poignée de digressions rapides ; celles-ci ont fini pourtant par converger et fusionner en un segment autonome, proposant une revue des principales notions catégoriques utiles à l'algébriste : le langage des foncteurs et des transformations naturelles, le lemme de Yoneda, adjonctions, limites et colimites, extensions de Kan, jusqu'aux catégories abéliennes et ses aspects plus profonds, en premier lieu les théorèmes de Gabriel-Popescu et de Freyd-Mitchell. Pour ce dernier j'ai choisi une preuve due essentiellement à Mitchell, s'appuyant sur l'existence d'enveloppes injectives dans toute catégorie de Grothendieck munie d'un générateur ; à son tour, ce résultat est ramené au cas particulier des catégories de modules sur les anneaux associatifs unitaires : nouvelle démonstration de la tentacularité de l'algèbre commutative !

Un autre tel sujet émergent a coalescé autour de la notion de *schéma* ; le *Grimoire* n'ambitionne pas de remplacer des traités systématiques, mais il développe néanmoins avec soin les bases algébriques et topologiques de la géométrie algébrique : la théorie des faisceaux, les espaces annelés et localement annelés, les modules quasi-cohérents, et les méthodes élémentaires de construction de schémas, par recollement, par produits fibrés, par immersions ouvertes et fermées, et surtout, par la technique fondamentale d'*éclatement d'un idéal quasi-cohérent*, que l'on emploiera dans des situations variées, et notamment en un rôle de médiateur entre espaces adiques et schémas. Car d'un côté les éclatements permettent parfois d'attaquer des questions de géométrie adique par la géométrie algébrique, mais aussi, réciproquement, de démontrer des résultats algèbro-géométriques par des méthodes adiques (donc, essentiellement, de théorie des valuations), comme illustré parfaitement par la preuve, découverte par K.Fujiwara vers la fin des années 90, du célèbre théorème de Gruson-Raynaud, que l'on détaillera dans notre dixième leçon.

Les prérequis sont assez modestes : une familiarité avec les notions de base relatives aux anneaux et aux idéaux, et plus généralement, l'algèbre élémentaire du niveau de la Licence ; les premiers éléments de la théorie des corps et de la théorie de Galois, nécessaires pour le cours, sont revus rapidement dans la première leçon.

Suggestions, corrections et remarques sont bienvenues !

Je remercie Najib Ouled Azaiez, Benjamin Beutin, Luther Blissett, Niels Borne, Jean-François Burnol, Adrien Cortes, Pietro Corvaja, Covid-19, Pierre Dèbes, Mladen Dimitrov, Michel Emsalem, Barbara Fantechi, Raphael Freitas, Ofer Gabber, Hana Hancinova, Roland Huber, Ivan Karabasov, Steven Kleiman, Louis Loiseau, Pietro Majer, Mohamed Rafik Mammeri, Dimitri Markushevich, William D. Montoya, Laurent Moret-Bailly, Maxime Oger, Pierre-Antoine Oria, Maëva Ostermann, Giulia Pilli, Matthieu

Romagny, Gabriele Vezzosi et Andrei Zinovyev pour des nombreuses observations très utiles et intéressantes. Mes remerciements aussi à Marie-Claude Vergne et à Fosco Loregian pour leurs assistance avec Photoshop et avec les aspects graphiques de ce projet ; et à Jean-Jacques Derycke et Frédérique Maréchal, qui tout au long des années ont assuré l'impression des versions préliminaires du volume, à l'imprimerie du Laboratoire Painlevé de Lille.

L'image de couverture est basée sur le *pentagramme inversé* contenu dans le livre “La Clef de la Magie Noire” de l'occultiste français Stanislas de Guaita (1861–1897). Les signes astrologiques qui ouvrent chaque leçon sont empruntés (à l'exception près du Bélier, Capricorne et Poissons) à une collection d'images numériques réalisées par une équipe du Hubble Space Telescope Institute, à partir de l'ouvrage “Firmamentum Sobiescianum sive Uranographia” de l'astronome polonais Johannes Hevelius (1611–1687). Les autres signes proviennent du “Liber Astronomiae” de l'astrologue italien Guido Bonatti (XIII siècle). Les deux petits diables qui entourent le logo des Presses Insoumises sont dus au célèbre dessinateur pour enfants A.Grothendieck, et sont conservés à l'Université de Bielefeld, en Allemagne. Ces images sont dans le domaine public. La malédiction qui clôture le volume reproduit celle d'un ancien parchemin de l'Abbaye de Sainte Marie et Saint Nicolas à Arnstein (Allemagne), actuellement dans la collection de la British Library de Londres (MS. Harley 2798) ; son auteur – un obscur moine copiste dont l'histoire n'a gardé que le nom : Lunandus – y promet fièvres pestilentiennes, supplice par la roue, meurtre par pendaison, et j'en passe et des meilleurs, à l'intention de toute crapule déplorable qui oserait soustraire ou endommager le fruit de ses labeurs.

Pour finir, ce cours a été rédigé avec l'éditeur de textes L^AT_EX, une interface graphique pour le logiciel L^AT_EX.



BIENVENUE à bord : on démarre notre cours avec une revue du vocabulaire de base de l'algèbre (section 1.1), de la topologie générale (section 1.2), de la théorie des catégories (section 1.5), et avec une présentation rapide de la théorie élémentaire des corps (section 1.4). La troisième section discute les premières propriétés des spectres maximaux et des spectres premiers des anneaux, deux concepts parmi les plus importants dans ce texte, et dans la géométrie algébrique moderne.

1.1. Anneaux, idéaux, modules. Le lecteur aura déjà rencontré les concepts basiques de l'algèbre dans les cours et les textes du niveau de la Licence ; notamment, les notions d'anneau, d'idéal, de module, d'homomorphisme d'anneaux, qu'on ne reproduira pas ici. Néanmoins, ajoutons que – sauf mention contraire – dans ce cours, tout anneau A sera :

- *commutatif* : $x \cdot y = y \cdot x$ pour tout $x, y \in A$
- *associatif* : $x(yz) = (xy)z$ pour tout $x, y, z \in A$
- *unitaire* : il existe $1 \in A$ tel que $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ pour tout $x \in A$.

Aussi, tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ préserve les unités : $f(1) = 1$. On notera $A^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A . On dira qu'un élément $a \in A$ est :

- *nilpotent*, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$ dans A .
- *diviseur de zéro*, s'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.
- *régulier*, s'il n'est pas diviseur de zéro.

On dit que A est *intègre* (resp. est un *corps*) si $A \neq \{0\}$ et si tout élément non nul de A est régulier (resp. inversible). On notera $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps des nombres rationnels, réels et complexes.

Un idéal $I \subset A$ est *principal* s'il existe $a \in A$ tel que $I = Aa := \{ab \mid b \in A\}$. On dit que I est *de type fini*, s'il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ (pour quelque $n \in \mathbb{N}$) tels que $I = Aa_1 + \dots + Aa_n$; dans ce cas, l'anneau quotient A/I est aussi dénoté souvent :

$$A/(a_1, \dots, a_n).$$

On dit que A est *principal* si tous ses idéaux sont principaux.¹

Remarque 1.1. Si A est non commutatif, il faut distinguer entre les idéaux à gauche et à droite : un sous-groupe additif $I \subset A$ est un *idéal à gauche* (resp. *à droite*), si l'on a $ab \in I$ (resp. $ba \in I$) pour tout $a \in A$ et tout $b \in I$: voir aussi le §1.1.4.

Exemple 1.2. (i) L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal ; rappelons la preuve : on doit montrer que tout idéal $I \subset \mathbb{Z}$ est principal ; si $I = 0$, l'assertion est triviale, et sinon, soit $a \in I$ le plus petit élément > 0 . Pour tout $b \in I$ il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $b = aq + r$ et $0 \leq r < a$; par suite $r \in I$, donc $r = 0$, par la minimalité de a , d'où $I = a\mathbb{Z}$.

1. Ici on suit la tradition anglo-saxonne ; dans la tradition française, un anneau principal est en outre supposé *intègre* par définition.

(ii) Si K est un corps, le même argument s'applique à l'anneau des polynômes $K[X]$: pour tout idéal non nul $I \subset K[X]$ on choisit $p(X) \in I$ non nul de degré minimal ; si $b(X) \in I$, la division euclidienne nous donne $q(X), r(X) \in K[X]$ tels que $b(X) = p(X) \cdot q(X) + r(X)$ avec soit $r(X) = 0$, soit $\deg_X r(X) < \deg_X p(X)$. Mais $r(X) \in I$, donc finalement $r(X) = 0$ par la minimalité de $\deg_X p(X)$, d'où $I = p(X) \cdot K[X]$. (Voir le problème 1.37 pour une généralisation.)

1.1.1. *Algèbres.* Une A -algèbre est une donnée (B, f) constituée d'un anneau B et d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$, appelé le *morphisme structurel* de B . Si le contexte ne donne pas lieu à des ambiguïtés, on notera souvent une A -algèbre simplement par son anneau sous-jacent B . Un *homomorphisme de A -algèbres*

$$g : (B, f) \rightarrow (B', f')$$

est un homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow B'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array} \quad \text{i.e. } f' = g \circ f.$$

Evidemment, la composition de deux homomorphismes de A -algèbres $g : B \rightarrow B'$ et $g' : B' \rightarrow B''$ est un homomorphisme de A -algèbres $g' \circ g : B \rightarrow B''$. On notera

$$A - \text{Alg}(B, B')$$

l'ensemble des homomorphismes de A -algèbres $B \rightarrow B'$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'anneau des polynômes à n indéterminées $A[X_1, \dots, X_n]$ à coefficients dans A est muni d'une structure canonique de A -algèbre, dont le morphisme structurel est l'inclusion $A \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$ qui identifie A avec le sous-anneau des polynômes de degré total ≤ 0 (le degré de 0 est -1). Aussi, pour tout idéal $I \subset A$, la projection canonique $A \rightarrow A/I$ munit le quotient A/I d'une structure naturelle de A -algèbre.

Remarque 1.3. (i) Tout anneau A admet un unique homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow A$, donc tout anneau est canoniquement une $\mathbb{Z}$ -algèbre.

(ii) Soit A un anneau, B une A -algèbre, $n \in \mathbb{N}$, et $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$. Noter qu'il existe un unique homomorphisme de A -algèbres $f : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ tel que $f(X_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$: il s'agit de l'homomorphisme défini par

$$f(P) := P(b_1, \dots, b_n) \quad \forall P \in A[X_1, \dots, X_n].$$

Autrement dit, pour toute A -algèbre B et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une bijection naturelle

$$B^n \xrightarrow{\sim} A - \text{Alg}(A[X_1, \dots, X_n], B).$$

On verra dans la section 2.1 comment cette propriété caractérise $A[X_1, \dots, X_n]$ à isomorphisme canonique près.

On dit qu'une A -algèbre B est *de type fini*, s'il existe un homomorphisme surjectif de A -algèbres $\pi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$, pour quelque $n \in \mathbb{N}$. Au vu de la remarque 1.3(ii), cela revient à dire qu'il existe un système fini $b_\bullet := (b_1, \dots, b_n)$ d'éléments de B tel que tout $b \in B$ s'écrit sous la forme $b = P(b_1, \dots, b_n)$ pour quelque polynôme $P \in A[X_1, \dots, X_n]$; on dit que $b_\bullet$ est un *système fini de générateurs* de la A -algèbre B , et on écrit aussi $B = A[b_1, \dots, b_n]$. On dit que B est une A -algèbre *de présentation finie*, si l'on peut trouver une surjection π comme ci-dessus, dont le *noyau* $\text{Ker}(\pi) := \pi^{-1}(0)$ soit un idéal de type fini ; dans ce cas B est isomorphe à un quotient $A[X_1, \dots, X_n]/I$, avec $I \subset A[X_1, \dots, X_n]$ un idéal de type fini. Si (B, f) est une A -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), on dit aussi que f est un *homomorphisme d'anneaux de type fini* (resp. *de présentation finie*).

Exercice 1.4. Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sont deux homomorphismes d'anneaux de type fini (resp. de présentation finie), montrer qu'il en est de même pour $g \circ f$.

1.1.2. *Corps des fractions.* Pour tout anneau intègre A on notera par

$$\text{Frac } A$$

le *corps des fractions* de A . Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des *fractions* a/b (notées aussi $b^{-1}a$), *i.e.* des classes d'équivalence de couples (a, b) avec $a, b \in A$ et $b \neq 0$; deux tels couples $(a, b), (a', b')$ sont équivalents $\Leftrightarrow ab' = a'b$. On définit les lois d'addition et multiplication de $\text{Frac } A$ par les formules évidentes :

$$a/b + c/d := (ad + cb)/bd \quad a/b \cdot c/d := ac/bd.$$

On vérifie sans peine que ces lois ne dépendent pas du choix des représentants $(a, b), (c, d)$ pour a/b et c/d ; les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sont $0/1$ et $1/1$, de sorte que $-(a/b) = (-a)/b$ et $(a/b)^{-1} = b/a$ si $a \neq 0$. En outre, on a l'homomorphisme *injectif* d'anneaux $A \rightarrow \text{Frac } A : a \mapsto a/1$; ainsi, $\text{Frac } A$ est le plus petit corps contenant A , unique à isomorphisme unique près. On laisse les détails au lecteur, car on verra une construction plus générale dans la section 3.3.

1.1.3. *Idéaux premiers et maximaux.* On rappelle qu'un idéal $I \subset A$ est dit :

- *premier* si $1 \notin I$, et si $x, y \notin I \Rightarrow xy \notin I$ pour tout $x, y \in A$.
- *maximal* si $1 \notin I$, et si les seuls idéaux de A contenant I sont I et A .

Proposition 1.5. *Soient A un anneau, et $I \subset A$ un idéal. On a :*

- (i) *I est premier si et seulement si A/I est un anneau intègre.*
- (ii) *I est maximal si et seulement si A/I est un corps.*
- (iii) *Tout idéal maximal est premier.*

Démonstration. (i) : Soient $x, y \in A$, et notons $\bar{x}, \bar{y} \in A/I$ les classes de x et y . Supposons que $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$, de sorte que $x, y \notin I$; si maintenant I est premier, on déduit $xy \notin I$, et donc $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0$, ce qui montre que A/I est intègre. Réciproquement, si A/I est intègre, il vient $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0$, *i.e.* $xy \notin I$, et alors I est premier.

(ii) : Soit $x \in A \setminus I$, de sorte que $\bar{x} \neq 0$. Si A/I est un corps, il existe $y \in A$ tel que $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$ dans A/I , donc $xy - 1 \in I$, d'où $I + Ax = A$; puisque x est arbitraire, on déduit que les seuls idéaux qui contiennent I sont I et A , *i.e.* I est maximal. D'autre part, si I est maximal, l'hypothèse $x \notin I$ implique que l'on a $I + Ax = A$, donc il existe $a \in I$, $y \in A$ tel que $xy + a = 1$, d'où $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$, ce qui montre que A/I est un corps. L'assertion (iii) découle aussitôt de (i) et (ii). $\square$

Définition 1.6. Pour tout anneau A , on dénote :

- $\text{Max } A$ l'ensemble des idéaux maximaux de A (*spectre maximal* de A)
- $\text{Spec } A$ l'ensemble des idéaux premiers de A (*spectre premier* de A).

Un des objectifs de ce cours est d'expliquer pourquoi $\text{Max } A$ et $\text{Spec } A$ sont des "objets géométriques". D'après la proposition 1.5(iii), on a :

$$\text{Max } A \subset \text{Spec } A.$$

Lemme 1.7. *Pour tout idéal $I \subset A$ on a une bijection canonique :*

$$\{\text{idéaux } J \text{ de } A \text{ tels que } I \subset J\} \longleftrightarrow \{\text{idéaux de } A/I\} \quad (J \subset A) \mapsto (J/I \subset A/I).$$

Cette bijection induit par restriction des bijections :

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \text{Spec } A/I \quad \{\mathfrak{m} \in \text{Max } A \mid I \subset \mathfrak{m}\} \longleftrightarrow \text{Max } A/I.$$

Démonstration. Soit $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection canonique ; la bijection réciproque associe à tout idéal $\bar{J}$ de A/I , l'idéal $\pi^{-1}(\bar{J}) \subset A$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal de A et si $I \subset \mathfrak{p}$, la composition des projections $A \rightarrow A/I \rightarrow (A/I)/(\mathfrak{p}/I)$ est surjective, avec noyau $\mathfrak{p}$; par suite elle induit un isomorphisme d'anneaux $A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} (A/I)/(\mathfrak{p}/I)$, donc $A/\mathfrak{p}$ est intègre (resp. un corps) si et seulement si $(A/I)/(\mathfrak{p}/I)$ est intègre (resp. un corps), et avec la proposition 1.5 on déduit que $\mathfrak{p}$ est premier (resp. maximal) dans A si et seulement si $\mathfrak{p}/I$ est premier (resp. maximal) dans A/I . $\square$

Exercice 1.8. Soit A un anneau principal intègre. Montrer que $\text{Spec} A = \{0\} \cup \text{Max} A$.

Définition 1.9. Soient A un anneau, et $a \in A$ un élément non nul.

- (i) On dit que a est *premier* si l'idéal Aa est premier.
- (ii) On dit que a est *réductible*, s'il est le produit de deux éléments non inversibles de A . On dit que a est *irréductible*, s'il est non réductible et non inversible.
- (iii) On dit que A est *factoriel* s'il est intègre et si tout élément non nul et non inversible de A s'écrit comme produit d'éléments premiers.

Remarque 1.10. (i) Soit A un anneau. Dans la suite, on utilisera la notation $\cdot| \cdot$ pour la relation de divisibilité dans A : donc, $a|b$ veut dire que $a, b \in A$ et $b \in Aa$. Il est clair que tout élément premier de A est irréductible, et si A est factoriel, tout élément irréductible de A est premier.

(ii) Si A est factoriel et si $a \in A \setminus \{0\}$, la factorisation $a = up_1 \cdots p_t$ avec $u \in A^\times$ et $p_1, \dots, p_t$ éléments premiers est *essentiellement unique* : si $a = vq_1 \cdots q_s$ est une autre telle factorisation, on a $s = t$ et il existe une permutation

$$\sigma : \{1, \dots, t\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, t\} \quad \text{telle que} \quad p_i^{-1} q_{\sigma(i)} \in A^\times \quad \forall i = 1, \dots, t.$$

Pour la preuve, on raisonne par récurrence sur t : on a $t = 0$ si et seulement si $a \in A^\times$, et dans ce cas il est clair que $s = 0$. Supposons que $t \geq 1$ et que l'unicité des facteurs soit déjà connue pour les produits de $t - 1$ éléments premiers ; puisque p_1 est premier, on a $p_1 | q_i$ pour quelque $i \leq s$, et quitte à permuter les facteurs on peut supposer que $i = 1$. Il existe alors $w \in A$ avec $q_1 = p_1 w$, d'où $w \in A^\times$ et $a' := up_2 \cdots p_t = vw \cdot q_2 \cdots q_s$; par hypothèse de récurrence, on a l'unicité de la factorisation de a' à permutation des facteurs près, d'où de même pour a .

(iii) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$; on dit que $d \in A \setminus \{0\}$ est un *plus grand commun diviseur* (abrégié pgcd) de $a_1, \dots, a_n$, si $a_1, \dots, a_n \in dA$ et si pour tout $b \in A$ avec $a_1, \dots, a_n \in bA$, on a $d \in bA$. Symétriquement, $e \in A \setminus \{0\}$ est un *plus petit commun multiple* (abrégié ppcm) de $a_1, \dots, a_n$ si $e \in Aa_1 \cap \cdots \cap Aa_n$ et si pour tout $c \in Aa_1 \cap \cdots \cap Aa_n$ on a $c \in Ae$; i.e. $Ae = Aa_1 \cap \cdots \cap Aa_n$. Si A est intègre, le pgcd et le ppcm de $a_1, \dots, a_n$, quand ils existent, sont déterminés à multiplication d'éléments inversibles près : car si d et d' sont deux pgcd de $a_1, \dots, a_n$, on a $d'|d$ et $d|d'$, i.e. $d = d'u$, $d' = dv$ pour quelque $u, v \in A$, d'où $d = duv$, et donc $uv = 1$, car A est intègre ; on raisonne de même pour le ppcm.

(iv) Si A est intègre et si ppcm(a, b) existe, alors pgcd(a, b) existe, et on a :

$$\text{pgcd}(a, b) \cdot \text{ppcm}(a, b) = ab$$

à multiplication d'éléments inversibles près, i.e. si e est un ppcm de a et b , alors $e^{-1}ab \in A$ est un pgcd de a et b : en effet, il existe $d \in A$ tel que $ab = ed$, et puisque d'un côté $a|e$, il s'ensuit que $d|b$, et de l'autre côté, $b|e$, donc $d|a$ aussi. Or, si c divise a et b , disons $a = cx$, $b = cy$, on voit que cxy est un multiple commun de a et b , donc $e|cxy$, et puisque $ed = c \cdot cxy$, il vient $c|d$, comme souhaité. (D'autre part, l'existence du pgcd n'entraîne pas celle du ppcm : voir la remarque 1.133).

(v) Si A est factoriel, tout couple (a, b) d'éléments de $A \setminus \{0\}$ admet un pgcd et un ppcm. En effet, grâce à (iv) il suffit de montrer l'existence du ppcm ; soient donc $a = up_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ et $b = vp_1^{\mu_1} \cdots p_k^{\mu_k}$ des factorisations avec $u, v \in A^\times$, $\nu_i, \mu_i \in \mathbb{N}$ et p_i premier pour tout $i = 1, \dots, k$, avec $Ap_i \neq Ap_j$ pour $i \neq j$. Compte tenu de (ii), on voit aisément que $\prod_{i=1}^k p_i^{\max(\nu_i, \mu_i)}$ est un ppcm de a et b ; on déduit également que $\prod_{i=1}^k p_i^{\min(\nu_i, \mu_i)}$ est un pgcd de a et b : les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 1.11. (i) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas factoriel.

(ii) Soit A un anneau intègre ; montrer que tout couple d'éléments de $A \setminus \{0\}$ admet un pgcd $\Leftrightarrow$ tout couple d'éléments de $A \setminus \{0\}$ admet un ppcm.

(iii) Soient A un anneau intègre, $d \in A$, et $p_1, \dots, p_n$ une suite finie d'éléments premiers de A tels que $d | \prod_{i=1}^n p_i$. Montrer que $d = u \cdot \prod_{i \in \Lambda} p_i$, avec $u \in A^\times$ et $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$.

1.1.4. *Modules.* Rappelons aussi quelque notation et terminologie concernant les A -modules. La discussion de ce paragraphe s'applique même aux anneaux A non commutatifs, et en fait, pour certaines constructions que l'on rencontrera dans la section 4.1, il importe de pouvoir disposer d'un formalisme incluant les modules sur un anneau non commutatif. Donc, *jusqu'à la fin de ce paragraphe*, soit $A := (A, \mu_A)$ un anneau associatif et unitaire, avec loi de multiplication $\mu_A : A \times A \rightarrow A$. Dans ce cadre plus général, il faut distinguer entre A -modules à gauche et A -modules à droite, selon que la loi de multiplication scalaire est notée à gauche ou à droite :

$$A \times M \xrightarrow{\mu_M^g} M : (a, x) \mapsto ax \quad \text{et respectivement} \quad M \times A \xrightarrow{\mu_M^d} M : (x, a) \mapsto xa.$$

Noter que la condition d'associativité pour la multiplication scalaire est différente dans les deux cas, car on aura $(ab) \cdot x = a \cdot (bx)$ et respectivement $x \cdot (ab) = (xa) \cdot b$. On peut toutefois unifier la discussion des modules à gauche et à droite, par la construction suivante. Soit A^{op} l'anneau associatif et unitaire dont le groupe abélien sous-jacent coïncide avec A , et avec loi de multiplication $\mu_A^{\text{op}} : A \times A \rightarrow A$ telle que $\mu_A^{\text{op}}(a, b) := \mu_A(b, a)$ pour tout $a, b \in A$. Parfois on notera a^{op} pour signaler que l'on regarde $a \in A$ comme un élément de A^{op} ; avec cette notation, on a alors :

$$a^{\text{op}} \cdot b^{\text{op}} := (ba)^{\text{op}} \quad \forall a, b \in A.$$

On appelle $(A^{\text{op}}, \mu_A^{\text{op}})$ l'anneau opposé de A . Cela posé, à tout A -module à droite (M, μ_M^d) on peut associer le A^{op} -module à gauche $M^{\text{op}} := (M, \mu_M^g)$ dont le groupe abélien sous-jacent coïncide avec M , et avec loi de multiplication scalaire telle que $\mu_M^g(a, x) := \mu_M^d(x, a)$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$; de même, on écrira parfois x^{op} pour signaler que l'on regarde x comme un élément de M^{op} , et alors on a :

$$a^{\text{op}} \cdot x^{\text{op}} := (xa)^{\text{op}} \quad \forall a \in A, \forall x \in M.$$

Evidemment, $(A^{\text{op}})^{\text{op}} = A$, et $(M^{\text{op}})^{\text{op}} = M$; on obtient ainsi une bijection naturelle entre A -modules à droite et A^{op} -modules à gauche. En outre, tout homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'anneaux associatifs unitaires induit un *homomorphisme opposé* $f^{\text{op}} : A^{\text{op}} \rightarrow B^{\text{op}}$ qui n'est que la même application f sur les groupes abéliens sous-jacents, et toute application A -linéaire $g : M \rightarrow N$ de A -modules à gauche induit de même une *application A^{op} -linéaire opposée* $g^{\text{op}} : M^{\text{op}} \rightarrow N^{\text{op}}$ qui n'est que g sur les groupes abéliens sous-jacents. Par suite, *dans notre cours on traitera généralement de A -modules à gauche*, donc on omettra de préciser cette qualification par la suite, sous-entendant que tout raisonnement sur les A -modules à gauche s'applique, par le biais de cette construction, également aux modules à droite.

- En particulier, A est à la fois un A -module et un A^{op} -module, avec les lois telles que $\mu_A^g(a, x) := ax$ et $\mu_A^d(x, a) := xa$ pour tout $a, x \in A$. Un idéal de A est censé être un sous-module de A , et il est clair que les idéaux à gauche (resp. à droite) sont précisément les sous- A -modules (resp. les sous- A^{op} -modules) de A . Donc lorsqu'il s'agira d'anneaux non commutatifs, le terme « idéal » sera réservé, sauf mention contraire, aux idéaux à gauche, sous-entendant que toute discussion des idéaux à gauche s'applique de même aux idéaux à droite.

- D'autre part, soit $I \subset A$ un sous-groupe additif, et munissons le quotient A/I de la loi d'addition induite par A , de sorte que la projection $p : A \rightarrow A/I$ soit un homomorphisme de groupes abéliens; pour que A/I soit aussi muni d'une structure d'anneau associatif et unitaire, de sorte que p soit un homomorphisme d'anneaux associatifs, il faut et il suffit que I soit un idéal bilatère, i.e. à la fois à gauche et à droite. Un exemple important d'idéal bilatère est le sous-groupe additif $J \subset A$ engendré par la partie $\{a(bc - cb)d \mid a, b, c, d \in A\}$; noter que le quotient

$$C(A) := A/J$$

est un anneau commutatif : en fait, on voit aussitôt que $C(A)$ est le *plus grand quotient commutatif* de A : le morphisme structurel de toute A -algèbre commutative B se factorise à travers p et un unique homomorphisme d'anneaux $C(A) \rightarrow B$.

• Si M, N sont deux A -modules, un *homomorphisme de A -modules* $f : M \rightarrow N$ est une application A -linéaire de M dans N , et on notera

$$\text{Ker}(f) := f^{-1}(0) \subset M \quad (\text{le noyau de } f)$$

$$\text{Im}(f) := f(M) \subset N \quad (\text{l'image de } f)$$

$$\text{Coker}(f) := N/f(M) \quad (\text{le conoyau de } f).$$

Rappelons que f est injectif (resp. surjectif) si et seulement si $\text{Ker } f = 0$ (resp. $\text{Coker } f = 0$). On dit que f est un *isomorphisme de A -modules* s'il est bijectif, le cas échéant l'application réciproque $f^{-1} : N \rightarrow M$ est aussi A -linéaire.

• Soient M un A -module, $I \subset A$ un idéal à gauche et $J \subset A$ un idéal à droite ; l'annulateur de M dans A et l'annulateur de J dans M sont respectivement

$$\text{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid ax = 0 \ \forall x \in M\} \quad \text{Ann}_M(J) := \{x \in M \mid ax = 0 \ \forall a \in J\}.$$

Ainsi, $\text{Ann}_A(M)$ est un idéal bilatère de A , et $\text{Ann}_M(J)$ est un sous-module de M . On dit que M est *fidèle*, si $\text{Ann}_A(M) = 0$. Si A est commutatif, on pose aussi

$$\text{Ann}_A(x) := \text{Ann}_A(Ax) \quad \text{Ann}_M(a) := \text{Ann}_M(Aa) \quad \forall x \in M, \forall a \in A.$$

i.e. $\text{Ann}_A(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ (resp. $\text{Ann}_M(a) = \{x \in M \mid ax = 0\}$) est l'annulateur de x dans A (resp. de a dans M). On dit que M est *sans torsion*, si $\text{Ann}_A(x) = 0$ pour tout $x \in M \setminus \{0\}$. On dit que a est *M -régulier* si $\text{Ann}_M(a) = 0$. Noter que s'il existe un A -module $M \neq 0$ sans torsion, alors A est un anneau intègre.

• On dénote par $IM \subset M$ le sous-module engendré par $\{am \mid a \in I, m \in M\}$. En particulier, si $I, I' \subset A$ sont deux idéaux, alors $II' \subset A$ est l'idéal engendré par $\{ab \mid a \in I, b \in I'\}$; de même, si $(B, f : A \rightarrow B)$ est une A -algèbre, alors IB dénote l'idéal à droite de B engendré par $f(I)$ (et IB est un A -sous-module à gauche de B , pour la structure de A -module induite par f : voir le §3.2.2 pour plus de détails).

Exemple 1.12. Soit Λ un ensemble, $M_\bullet := (M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille de A -modules.

(i) Le *produit direct* de la famille $M_\bullet$, noté :

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

est l'ensemble des suites $(m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ avec $m_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il est muni d'une structure de A -module naturelle : à savoir, si $m_\bullet := (m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $m'_\bullet := (m'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ sont deux suites, et $a \in A$ un élément, on pose

$$m_\bullet + m'_\bullet := (m_\lambda + m'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad a \cdot m_\bullet := (a \cdot m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda).$$

Le Λ -support de $(m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est la partie $\{\lambda \in \Lambda \mid m_\lambda \neq 0\}$.

(ii) La *somme directe* de $M_\bullet$ est le A -sous-module de $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ noté

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

et constitué des suites dont le Λ -support est un ensemble fini.

(iii) Si $M_\lambda = M$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, on écrit aussi

$$M^\Lambda \quad \text{et} \quad M^{(\Lambda)}$$

pour le produit direct et respectivement la somme directe de la famille $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Noter que M^Λ n'est rien d'autre que l'ensemble des applications $\Lambda \rightarrow M$, et sa loi d'addition est donnée par la somme d'applications : pour $f, g : \Lambda \rightarrow M$ et tout $\lambda \in \Lambda$ on pose $(f + g)(\lambda) := f(\lambda) + g(\lambda)$; de même, $(a \cdot f)(\lambda) := a \cdot f(\lambda)$ pour tout $a \in A$.

(iv) En particulier, $A^{(\Lambda)}$ est le A -module libre sur l'ensemble Λ ; il admet un système de générateurs $(e_\lambda^\bullet \mid \lambda \in \Lambda)$ appelé la *base canonique* de $A^{(\Lambda)}$: à savoir, $e_\lambda^\bullet$ est l'unique suite telle que $e_\lambda^\lambda = 1$ et $e_\mu^\lambda = 0$, pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \neq \mu$. Si $A \neq 0$, cette famille

est évidemment en bijection naturelle avec Λ , et si $A = 0$, on a $A^\Lambda = A^{(\Lambda)} \simeq \{0\}$ pour tout Λ , et $e_\bullet^\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Définition 1.13. Soit M un A -module. On dit que M est :

— *de type fini*, s'il est engendré par une partie finie $\{m_1, \dots, m_k\} \subset M$; i.e. :

$$M = \{a_1 m_1 + \dots + a_k m_k \mid a_1, \dots, a_k \in A\}.$$

— *cyclique*, s'il est isomorphe à A/I , pour un idéal $I \subset A$

— *libre de rang fini*, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme $A^n \xrightarrow{\sim} M$ de A -modules

— *de présentation finie*, s'il est isomorphe au conoyau d'une application A -linéaire $L \rightarrow L'$ avec L et L' libres de rang fini.

Remarque 1.14. (i) Evidemment, un A -module est de type fini si et seulement s'il est isomorphe à un quotient d'un A -module libre de rang fini.

(ii) Pour tout A -modules M et N , on notera

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)$$

l'ensemble des applications A -linéaires $M \rightarrow N$. Il est contenu dans le A -module N^M de l'exemple 1.12(iii), et on voit aisément qu'il est même un sous-module de ce dernier, si A est commutatif. Plus généralement, considérons le *centre* de A :

$$Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba \ \forall b \in A\}.$$

Evidemment $Z(A)$ est un sous-anneau commutatif de A , et N^M est alors aussi un $Z(A)$ -module, par restriction de scalaires ; on voit aisément que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un sous- $Z(A)$ -module de N^M , et on munira $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de la structure de $Z(A)$ -module héritée de N^M . En particulier, avec $M = N$, on obtient le $Z(A)$ -module

$$\mathrm{End}_A(M) := \mathrm{Hom}_A(M, M)$$

des *endomorphismes A -linéaires* du A -module M .

(iii) Toute application A -linéaire $u : M' \rightarrow M$ induit des applications

$$\begin{aligned} u^* : \mathrm{Hom}_A(M, N) &\rightarrow \mathrm{Hom}_A(M', N) & f &\mapsto f \circ u \\ u_* : \mathrm{Hom}_A(N, M') &\rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M) & f &\mapsto u \circ f \end{aligned}$$

qui sont évidemment A -linéaires, si A est commutatif.

(iv) Si $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille de A -modules, on a l'identification naturelle

$$\omega_{M_\bullet, N} : \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N) \quad \text{pour tout } A\text{-module } N$$

associant à toute suite $(\phi_\lambda : M_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ l'homomorphisme de A -modules

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow N \quad (m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(m_\lambda).$$

Si A est commutatif, $\omega_{M_\bullet, N}$ est un isomorphisme de A -modules.

(v) Si M' et M'' sont deux sous-modules du A -module M , la partie

$$M' + M'' := \{x' + x'' \mid x' \in M', x'' \in M''\}$$

est le plus petit sous-module de M contenant $M' \cup M''$. De plus, la projection naturelle $M' + M'' \rightarrow (M' + M'')/M''$ se restreint en une surjection $M' \rightarrow (M' + M'')/M''$ dont le noyau est $M' \cap M''$, d'où un isomorphisme canonique de A -modules :

$$\frac{M'}{M' \cap M''} \xrightarrow{\sim} \frac{M' + M''}{M''}.$$

1.1.5. *Bimodules.* Soient A et B deux anneaux associatifs unitaires. On appelle (A, B) -bimodule toute donnée (M, μ_M^g, μ_M^d) constituée d'un groupe abélien M muni à la fois d'une structure (M, μ_M^g) de A -module à gauche, et d'une structure (M, μ_M^d) de B -module à droite, avec la condition de compatibilité :

$$(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b) \quad \forall a \in A, \forall x \in M, \forall b \in B.$$

Si A est commutatif, tout A -module (M, μ_M) admet une structure naturelle de (A, A) -bimodule, dont la loi de multiplication scalaire à droite est l'opposée μ_M^{op} de celle de M , comme expliqué au §1.1.4, de sorte que $a \cdot x = x \cdot a$ pour tout $x \in M$ et tout $a \in A$; on dira que $(M, \mu_M, \mu_M^{\text{op}})$ est le (A, A) -bimodule associé à (M, μ_M) .

En outre, tout anneau associatif A est naturellement un (A, A) -bimodule, pour les lois évidentes de multiplication scalaire à gauche et à droite héritées de l'anneau A . Aussi, l'opposé M^{op} de tout (A, B) -bimodule M est un $(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -bimodule.

Un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ de (A, B) -bimodules sera évidemment une application qui est à la fois A -linéaire à gauche et B -linéaire à droite ; on dit alors aussi que f est (A, B) -linéaire. L'ensemble de ces homomorphismes sera noté :

$$\text{Hom}_{(A, B)}(M, N).$$

Noter l'identification naturelle :

$$\text{Hom}_{(A, B)}(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})}(M^{\text{op}}, N^{\text{op}}) \quad u \mapsto u^{\text{op}}$$

associant à toute application (A, B) -linéaire $u : M \rightarrow N$ la même application, que l'on regarde comme une application $(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -linéaire $M^{\text{op}} \rightarrow N^{\text{op}}$.

Remarque 1.15. (i) La construction suivante nous sera utile dans la section 3.2. Soit C un troisième anneau associatif unitaire, et considérons un (A, B) -bimodule M et un (C, B) -module N ; en particulier, M et N sont deux B^{op} -modules (à gauche), donc on peut former l'ensemble $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(M, N)$ comme dans la remarque 1.14(i) ; mais dans cette situation, on gagne une structure naturelle de (C, A) -bimodule sur cet ensemble, avec les lois de multiplication scalaire telles que

$$(c \cdot u \cdot a)(x) := c \cdot u(ax) \quad \forall c \in C, \forall u \in \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(M, N), \forall a \in A.$$

(ii) De même, si M est un (B, A) -bimodule et si N est un (B, C) -bimodule, on a une structure naturelle de (A, C) -bimodule sur $\text{Hom}_B(M, N)$, avec les lois :

$$(a \cdot u \cdot c)(x) := u(xa) \cdot c \quad \forall a \in A, \forall u \in \text{Hom}_B(M, N), \forall c \in C.$$

Noter aussi l'identification naturelle de $(C^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -bimodules :

$$\text{Hom}_B(M, N)^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(M^{\text{op}}, N^{\text{op}}) \quad u \mapsto u^{\text{op}}.$$

Les vérifications détaillées sont confiées aux soins du lecteur.

1.1.6. *Anneaux gradués.* Soit $(\Gamma, +, 0)$ un groupe abélien ; un anneau Γ -gradué est la donnée d'un anneau A et une décomposition du groupe abélien additif sous-jacent à A comme somme directe de sous-groupes $(A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

appelés les *composantes homogènes* de A , tels que

$$A_\gamma \cdot A_\delta \subset A_{\gamma+\delta} \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma$$

(i.e. le produit d'éléments homogènes de degrés γ et respectivement δ est homogène de degré $\gamma + \delta$). Si $\Gamma = \mathbb{Z}$ et si $A_n = 0$ pour tout $n < 0$, on dit que A est $\mathbb{N}$ -gradué.

Exercice 1.16. Dans la situation du §1.1.6, montrer que $1 \in A_0$.

Avec l'exercice 1.16, il est clair que A_0 est un sous-anneau de A ; en outre, si A est $\mathbb{N}$ -gradué, la partie

$$A_+ := \bigoplus_{n \geq 1} A_n$$

est un idéal de A . Si A est un anneau Γ -gradué, un A -module Γ -gradué est la donnée d'un A -module M et une décomposition du groupe abélien sous-jacent à M :

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$$

par des sous-groupes $(M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ appelés les *composantes homogènes* de M , tels que

$$A_\gamma \cdot M_\delta \subset M_{\gamma+\delta} \quad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, chaque M_γ est un A_0 -module. Soient M, N deux A -modules Γ -gradués; un *morphisme de A -modules gradués* $f : M \rightarrow N$ est une application A -linéaire avec $f(M_\gamma) \subset N_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. De même, un *morphisme $u : A \rightarrow B$ d'anneaux gradués* est un homomorphisme d'anneaux avec $u(A_\gamma) \subset B_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Exemple 1.17. (i) Pour tout anneau R et $n \in \mathbb{N}$, la R -algèbre $R[T_1, \dots, T_n]$ des polynômes à n indéterminées est $\mathbb{N}$ -graduée : sa composante homogène de degré k est le R -sous-module engendré par les monômes de degré total k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Mais on peut aussi munir $R[T_1, \dots, T_n]$ de graduations plus exotiques : on choisit arbitrairement des entiers $\nu_1, \dots, \nu_n$, et on déclare que l'indéterminée T_i est un élément homogène de degré ν_i , pour tout $i = 1, \dots, n$. Avec cette graduation, la composante homogène de degré $k \in \mathbb{Z}$ est le R -sous-module libre engendré par les monômes $T_1^{\mu_1} \dots T_n^{\mu_n}$ tels que $\nu_1 \mu_1 + \dots + \nu_n \mu_n = k$. Voir l'exercice 11.19 et le problème 11.115 pour des applications de ces graduations non standards.

Exercice 1.18. Soient $A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ un anneau $\mathbb{Z}$ -gradué intègre, $i \in \mathbb{Z}$, et $x \in A_i \setminus \{0\}$, $y \in A_{i+1} \setminus \{0\}$ avec $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Montrer que $x + y$ est un élément irréductible de A .

1.2. Fonctions continues sur un espace topologique. La définition ci-dessous et l'exemple suivant ont pour but de rappeler les notions de base de la topologie élémentaire, et d'en fixer les notations et la terminologie qui seront d'usage constant dans tout le cours.

Définition 1.19. (i) Une *topologie* sur un ensemble T est la donnée d'une famille $\mathcal{T}$ de parties de T soumise aux conditions suivantes :

- $\emptyset, T \in \mathcal{T}$.
- Pour toute partie $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, on a $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$.
- Pour toute partie *finie* $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, on a $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$.

(ii) Un *espace topologique* est la donnée $(T, \mathcal{T})$ d'un ensemble T et d'une topologie $\mathcal{T}$ sur T . Les *points* de T sont les éléments de T , et les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent *parties ouvertes* de T ; une partie F de T est *fermée*, si $T \setminus F$ est ouverte. Une partie fermée Z est *réductible*, si elle est la réunion des deux parties fermées strictement contenues dans Z ; on dit que $Z \neq \emptyset$ est *irréductible*, si elle n'est pas réductible.

(iii) On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *disconnexe*, s'il est la réunion disjointe $T = U \sqcup U'$ de parties ouvertes $U, U' \neq \emptyset$. On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *connexe* s'il n'est pas disconnexe.

(iv) Soit $S \subset T$ une partie; on appelle *adhérence* de S dans T la plus petite partie fermée de T contenant S . L'*intérieur* de S est la plus grande partie ouverte de T contenue dans S (donc, l'adhérence de $T \setminus S$ est égale au complémentaire de l'intérieur de S). La partie S est un *voisinage* d'un point $t \in T$, si t appartient à l'intérieur de S . On dit que S est *dense* dans T , si l'adhérence de S dans T est T .

(v) Soit $U \in \mathcal{T}$; un *recouvrement* de U est une partie $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ avec $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V = U$.

(vi) Soient $(T, \mathcal{T})$ et $(T', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et $f : T \rightarrow T'$ une application. On dit que f est :

- *continue* si pour toute partie ouverte $U \subset T'$, la partie $f^{-1}U \subset T$ est ouverte
- *ouverte* (resp. *fermée*) si pour toute partie ouverte (resp. fermée) X de T , la partie $f(X)$ est ouverte (resp. fermée) dans T'

- un *homéomorphisme* si f est continue et bijective, et si l'application réciproque $f^{-1} : T' \rightarrow T$ est continue. Donc, f induit une bijection

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}' \quad : \quad U \mapsto f(U).$$

(vii) Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux topologies sur un ensemble T , on dit que $\mathcal{T}$ est *plus fine* que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ (auquel cas, on dit aussi que $\mathcal{T}'$ est *moins fine* que $\mathcal{T}$).

Exemple 1.20. (i) Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, E un ensemble, $g : E \rightarrow T$ une application. La topologie

$$\mathcal{T}^E := \{g^{-1}U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est la moins fine des topologies $\mathcal{T}'$ sur E telles que $g : (E, \mathcal{T}') \rightarrow (T, \mathcal{T})$ soit une application continue. On appelle $\mathcal{T}^E$ la *topologie induite par $\mathcal{T}$ via g* (ou simplement, la *topologie induite par T*).

(ii) Soient T, T' deux espaces topologiques. On dit que T' est un *sous-espace* de T si $T' \subset T$ et si la topologie de T' est induite par celle de T via l'inclusion $T' \rightarrow T$.

(iii) De même, si $h : T \rightarrow E$ est une application, alors

$$\mathcal{T}_E := \{U \subset E \mid h^{-1}U \in \mathcal{T}\}$$

est la plus fine des topologies $\mathcal{T}'$ sur E telles que $h : (T, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{T}')$ soit une application continue. On appelle $\mathcal{T}_E$ la *topologie de E induite par $\mathcal{T}$ via h* .

(iv) Soient T un ensemble, et $\mathcal{B}$ une famille de parties de T . L'intersection $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ de toutes les topologies de T contenant $\mathcal{B}$ est évidemment la moins fine des topologies contenant $\mathcal{B}$. Pour décrire $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ explicitement, notons d'abord $\mathcal{B}^+$ la famille des intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$: i.e. $X \in \mathcal{B}^+$ si et seulement s'il existe une partie finie $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ avec $X = \bigcap_{U \in \mathcal{B}'} U$. Avec cette notation, une partie U de T est dans $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ si et seulement s'il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^+$ tel que $U = \bigcup_{U' \in \mathcal{B}'} U'$ (détails laissés aux soins du lecteur). Dans ce cas, on dit que $\mathcal{B}$ *engendre* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, et aussi que $\mathcal{B}$ est une *prébase* de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Si tout élément de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ s'écrit déjà comme réunion d'une famille d'éléments de $\mathcal{B}$, on dit que $\mathcal{B}$ est une *base* de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$: pour cela, il suffit que tout $X \in \mathcal{B}^+$ s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

(v) Pour tout ensemble S , l'ensemble des parties de S est une topologie appelée *topologie discrète* de S . Elle est évidemment la topologie la plus fine sur S . A l'autre extrémité, la *topologie chaotique* $\{S, \emptyset\}$ est la moins fine des topologies sur S .

Exercice 1.21. Soient T, S deux espaces topologiques, $f : T \rightarrow S$ une application.

(i) On dit que f est *continue au point* $t \in T$ si pour tout voisinage V de $f(t)$ dans S , la partie $f^{-1}V$ est un voisinage de t dans T . Montrer que f est continue si et seulement si elle est continue en tout point de T .

(ii) Supposons que f soit *localement continue*, i.e. pour tout $t \in T$ il existe des voisinages $U_t \subset T$ de t et $V_t \subset S$ de $f(t)$ avec $f(U_t) \subset V_t$, tels que la restriction $f_t : U_t \rightarrow V_t$ de f soit continue pour les topologies de U_t et V_t induites par T et S . Montrer que f est continue.

(iii) Soit $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de S ; pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $f_\lambda : f^{-1}U_\lambda \rightarrow U_\lambda$ la restriction de f , et munissons U_λ et $f^{-1}U_\lambda$ des topologies induites par S et T . Montrer que f est fermée (resp. ouverte) $\Leftrightarrow$ il en est de même pour tout f_λ .

(iv) Soit f continue, et pour toute partie $Z \subset T$ (resp. $Z \subset S$), notons par $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans T (resp. dans S). Montrer que $f(\overline{Z}) \subset \overline{f(Z)}$ pour toute partie $Z \subset T$. En particulier, si Z est dense dans T et $f(T)$ est dense dans S , alors $f(Z)$ est dense dans S .

Exercice 1.22. Soient $S \neq \emptyset$ un espace topologique, et $\mathcal{U}$ un recouvrement de S avec $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Montrer que S irréductible $\Leftrightarrow$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- Tout $U \in \mathcal{U}$ est irréductible, pour la topologie induite par S .
- $U \cap V \neq \emptyset$ pour tout $U, V \in \mathcal{U}$.

1.2.1. Dans ce cours on munira toujours l'ensemble $\mathbb{R}$ de sa topologie standard, engendrée par la base $\{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Pour tout espace topologique $(T, \mathcal{T})$, l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles $T \rightarrow \mathbb{R}$ est un anneau noté

$$\mathcal{C}(T)$$

car l'addition et le produit de deux fonctions continues sont continues (exercice!). Si $T = \emptyset$, évidemment $\mathcal{C}(T) = \{0\}$; d'autre part, pour tout $t \in T$, la partie

$$\mathfrak{m}_t := \{f \in \mathcal{C}(T) \mid f(t) = 0\}$$

est le noyau de l'homomorphisme d'évaluation

$$\varepsilon_t : \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto f(t)$$

qui est évidemment surjectif, et donc induit un isomorphisme $\mathcal{C}(T)/\mathfrak{m}_t \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$; par suite $\mathfrak{m}_t$ est un idéal maximal (proposition 1.5(ii)). On a ainsi une application

$$\phi_T : T \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C}(T)) \quad t \mapsto \mathfrak{m}_t.$$

Exercice 1.23. Montrer que $\mathcal{C}(T)^\times = \{f \in \mathcal{C}(T) \mid f(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in T\}$.

Remarque 1.24. (i) L'application ϕ_T n'est pas forcément injective. Par exemple, soit $T := \{a, b\}$ et $\mathcal{T} := \{\emptyset, T, \{a\}\}$. On voit aisément que toute fonction continue $T \rightarrow \mathbb{R}$ est constante, donc $\mathcal{C}(T) = \mathbb{R}$, et évidemment $\text{Max}(\mathbb{R})$ contient un seul élément, à savoir l'idéal trivial $\{0\}$.

(ii) ϕ_T n'est pas non plus surjective pour un espace topologique T arbitraire : voir l'exercice 1.43. Pour obtenir un résultat positif, rappelons les définitions suivantes :

Définition 1.25. Soient $(T, \mathcal{T})$ et $(T', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(i) On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *de type* T_0 si pour tout $x, y \in T$ distincts il existe soit un voisinage $U \subset T \setminus \{y\}$ de x , soit un voisinage $U' \subset T \setminus \{x\}$ de y .

(ii) On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *séparé* si pour tout $x, y \in T$ distincts il existe un voisinage U_x de x et un voisinage U_y de y dans T tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

(iii) On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *compact*² si pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de T , il existe une partie finie $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ qui est encore un recouvrement de T .

(iv) On dit que $(T, \mathcal{T})$ est *normal* s'il est séparé et si pour tout couple de parties fermées $Z, Z' \subset T$ avec $Z \cap Z' = \emptyset$ il existe des parties ouvertes U, U' de T avec

$$Z \subset U \quad Z' \subset U' \quad U \cap U' = \emptyset.$$

(v) On dit qu'une application $f : T' \rightarrow T$ est *compacte*, si pour toute partie ouverte compacte $U \subset T$, la partie $f^{-1}U$ est ouverte et compacte dans T' .

Exercice 1.26. (i) (Propriété de l'intersection finie) Soit T un espace topologique. Montrer que T est compact $\Leftrightarrow$ pour toute famille $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de parties fermées de T avec $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda = \emptyset$, il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} Z_\lambda = \emptyset$.

(ii) Soient T, T' deux espaces topologiques, $f : T \rightarrow T'$ une application continue, $Z \subset T$ une partie. On munit Z et $f(Z)$ des topologies induites par les inclusions dans T et respectivement T' . Montrer les assertions suivantes :

(a) Si T est séparé et si Z est compact, alors Z est une partie fermée de T .

(b) Si T est compact et si Z est une partie fermée de T , alors Z est compact.

(c) Si Z est compact, alors $f(Z)$ est compact.

(iii) Montrer que toute application continue $f : X \rightarrow Y$ d'un espace topologique compact X vers un espace topologique séparé Y est compacte, et si f est bijective, alors elle est un homéomorphisme.

(iv) Soient $f, g : T \rightarrow S$ deux applications continues d'un espace T vers l'espace séparé $(S, \mathcal{T}_S)$. Montrer que $Z := \{t \in T \mid f(t) = g(t)\}$ est une partie fermée de T .

2. Dans la tradition française, on dit plutôt *quasi-compact*, et le mot *compact* est réservé pour les espaces *quasi-compacts et séparés*.

(v) Montrer que tout espace topologique T compact et séparé est normal.

On utilisera le résultat fondamental suivant :

Lemme 1.27. (Urysohn) *Un espace topologique $(T, \mathcal{T})$ est normal $\Leftrightarrow (T, \mathcal{T})$ est séparé et pour tout couple de parties fermées $A, B \subset T$ avec $A \cap B = \emptyset$ il existe une fonction continue $f : T \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$.*

Démonstration. Soient $A, B \subset T$ deux parties fermées disjointes ; si une telle f est donnée, les parties ouvertes $f^{-1}([0, 1/2[)$ et $f^{-1}(]1/2, 1])$ sont disjointes et contiennent A et respectivement B ; cela montre que T est normal.

Réciproquement, soit T normal ; on pose $\Lambda_n := \{k/2^n \mid k = 0, \dots, 2^n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$. Pour toute partie $S \subset T$ on dénote par $\overline{S}$ l'adhérence de S dans T . On va construire une application $U : \Lambda \rightarrow \mathcal{T}$ telle que :

$$A \subset U(0) \quad B \cap U(1) = \emptyset \quad \overline{U(\lambda)} \subset U(\lambda') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda \text{ avec } \lambda < \lambda'.$$

On définit la restriction de U à Λ_n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ on pose $U(1) := T \setminus B$; la normalité de T entraîne l'existence de $V \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U(1)$ et on pose $U(0) := V$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de U à Λ_n est déjà connue. Donc pour $k = 0, \dots, 2^n - 1$ on a $\overline{U(k/2^n)} \subset U((k+1)/2^n)$, et par normalité de T on trouve $V \in \mathcal{T}$ tel que $\overline{U(k/2^n)} \subset V \subset \overline{V} \subset U((k+1)/2^n)$; on pose $U((2k+1)/2^{n+1}) := V$. Cela achève la construction de U . Or, posons $U'(\lambda) := U(\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}$ et $U'(1) := T$; on définit :

$$f(t) := \inf\{\lambda \in \Lambda \mid t \in U'(\lambda)\} \quad \forall t \in T.$$

Evidemment $f(A) = 0$ et $f(B) = 1$. Il reste à vérifier la continuité de f . Pour cela, soient $t \in T$, $r := f(t)$ et $\varepsilon \in]0, 1]$; il suffit de montrer que $f^{-1}(]r - \varepsilon, r + \varepsilon])$ est un voisinage de t dans T (exercice 1.21(i)). Or, si $r = 0$ on a $t \in U(\lambda) \subset f^{-1}([0, \varepsilon])$ pour tout $\lambda \in \Lambda \cap]0, \varepsilon[$; si $r = 1$ on a $t \in T \setminus \overline{U(\lambda)} \subset f^{-1}(]1 - \varepsilon, 1])$ pour tout $\lambda \in \Lambda \cap]1 - \varepsilon, 1[$. Si $0 < r < 1$, choisissons $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ tels que $r - \varepsilon < \lambda < r < \lambda' < r + \varepsilon$; il vient $t \in U(\lambda') \setminus \overline{U(\lambda)} \subset f^{-1}(]r - \varepsilon, r + \varepsilon])$, d'où l'assertion. $\square$

Théorème 1.28. (Lemme de Stone) *Si $(T, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et séparé, l'application ϕ_T est bijective.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathcal{C}(T))$. Notons

$$V(\mathfrak{m}) := \{t \in T \mid f(t) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathfrak{m}\}.$$

Vérifions que $V(\mathfrak{m})$ est non vide : sinon, pour tout $t \in T$ il existe $f_t \in \mathfrak{m}$ tel que $f_t(t) \neq 0$. Posons $U_t := f_t^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$; la partie U_t est ouverte dans T pour tout $t \in T$, et évidemment on a $\bigcup_{t \in T} U_t = T$. Puisque T est compact, il existe une partie finie $S \subset T$ telle que $\bigcup_{t \in S} U_t = T$. Soit $g := \sum_{t \in S} f_t^2$. On voit aisément que $g(t) > 0$ pour tout $t \in T$, donc g est inversible dans $\mathcal{C}(T)$ (exercice 1.23). Mais par construction $g \in \mathfrak{m}$, contradiction.

Or, si $t \in V(\mathfrak{m})$ on a $\mathfrak{m} \subset \phi_T(t)$, donc $\mathfrak{m} = \phi_T(t)$ car ces deux idéaux sont maximaux. Cela montre que ϕ_T est surjective. Pour l'injectivité on applique le lemme de Urysohn : si $x, y \in T$ sont deux points distincts, il existe $f \in \mathcal{C}(T)$ telle que $f \in \phi_T(x)$ mais $f \notin \phi_T(y)$, d'où $\phi_T(x) \neq \phi_T(y)$. $\square$

On peut faire encore mieux : à partir de l'anneau $\mathcal{C}(T)$ on peut même récupérer la topologie $\mathcal{T}$ de T ! En fait, soit $f \in \mathcal{C}(T)$, et notons

$$D(f) := \{\mathfrak{m} \in \text{Max} \mathcal{C}(T) \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

On voit que pour tout $t \in T$, on a $\mathfrak{m}_t \in D(f)$ si et seulement si $f(t) \neq 0$. C'est à dire, $\phi_T^{-1}D(f) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est une partie ouverte de T . Le lemme de Urysohn implique que

la famille $(\phi_T^{-1}D(f) \mid f \in \mathcal{C}(T))$ engendre la topologie $\mathcal{T}$. On munira donc $\text{Max } \mathcal{C}(T)$ de la *topologie de Zariski* $\mathcal{T}_{T,\text{Zar}}$, i.e. la topologie engendrée par

$$(D(f) \mid f \in \mathcal{C}(T)).$$

Avec cette topologie, l'application ϕ_T est un homéomorphisme

$$(T, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} (\text{Max } \mathcal{C}(T), \mathcal{T}_{T,\text{Zar}}).$$

Exercice 1.29. (Théorème de Gelfand-Kolmogoroff) Soient T et T' deux espaces topologiques, $f : T \rightarrow T'$ une application continue, et $\psi : \mathcal{C}(T') \rightarrow \mathcal{C}(T)$ un homomorphisme d'anneaux. On déduit de f un homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres

$$f^* : \mathcal{C}(T') \rightarrow \mathcal{C}(T) \quad g \mapsto g \circ f.$$

Pour T et T' séparés et compacts, compléter la discussion de cette section avec :

- (i) ψ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres et induit une application continue

$$\text{Max}(\psi) : (\text{Max } \mathcal{C}(T), \mathcal{T}_{T,\text{Zar}}) \rightarrow (\text{Max } \mathcal{C}(T'), \mathcal{T}_{T',\text{Zar}}) \quad \mathbf{m} \mapsto \psi^{-1}(\mathbf{m}).$$

- (ii) Le diagramme suivant commute si et seulement si $\psi = f^*$:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T' \\ \phi_T \downarrow & & \downarrow \phi_{T'} \\ \text{Max } \mathcal{C}(T) & \xrightarrow{\text{Max}(\psi)} & \text{Max } \mathcal{C}(T'). \end{array}$$

Autrement dit, tout homomorphisme ψ d'anneaux comme ci-dessus *provient d'une unique application continue* $T \rightarrow T'$. Noter que, d'autre part, tout homomorphisme d'anneaux induit par une application continue $T \rightarrow T'$ est forcément unitaire ; donc, notre condition $\psi(1) = 1$ pour les homomorphismes d'anneaux, qui peut paraître anodine d'un point de vue algébrique, en fait caractérise les homomorphismes “d'origine géométrique”.

1.3. Spectre maximal et spectre premier. Le théorème 1.28 montre trivialement que, pour T compact et séparé, le spectre maximal de $\mathcal{C}(T)$ est vide si et seulement si $T = \emptyset$, et cela équivaut aussi à la condition $\mathcal{C}(T) = 0$ (il y a exactement une application de l'ensemble vide vers n'importe quel autre ensemble). En fait, il s'agit là d'une propriété tout à fait générale : le spectre maximal de tout anneau $A \neq 0$ est non vide. Pour la preuve, il nous faudra quelques notions standards de la théorie des ensembles. Tout d'abord, rappelons la définition suivante :

Définition 1.30. (i) Un *ensemble partiellement ordonné* $(E, \leq)$ est la donnée d'un ensemble E et d'une *relation d'ordre* $\leq$ sur E , i.e. une relation binaire telle que :

- (réflexivité) $x \leq x$ pour tout $x \in E$.
- (antisymétrie) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$ pour tout $x, y \in E$.
- (transitivité) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ pour tout $x, y, z \in E$.

(ii) On dit que $(E, \leq)$ est un *ensemble totalement ordonné*, ou que $\leq$ est une *relation d'ordre total*, si en outre, la condition suivante est vérifiée :

- pour tout $x, y \in E$ on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

(iii) Un élément $e \in E$ est dit *maximal*, si le seul élément $e' \in E$ avec $e \leq e'$ est e .

(iv) Un *morphisme d'ensembles partiellement ordonnés* $\phi : (E, \leq) \rightarrow (E', \leq)$ est la donnée d'une application d'ensembles $\phi : E \rightarrow E'$ telle que

$$x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Remarque 1.31. Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

(i) Noter qu'un élément maximal e de E n'est pas forcément “le plus grand élément de E ”, c'est-à-dire qu'on n'a pas nécessairement $e' \leq e$ pour tout $e' \in E$.

(ii) Si l'on “renverse la relation d'ordre” de E , on obtient un nouvel ensemble partiellement ordonné $(E^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$, tel que $E^{\text{op}} = E$ et

$$x \leq^{\text{op}} y \Leftrightarrow y \leq x \quad \forall x, y \in E.$$

On appelle $(E^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$ l'opposé de l'ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$. Evidemment, tout morphisme $\phi : (E, \leq) \rightarrow (E', \leq)$ d'ensembles ordonnés est aussi un morphisme d'ordres opposés $\phi^{\text{op}} := \phi : (E^{\text{op}}, \leq^{\text{op}}) \rightarrow (E'^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$. On dira qu'un élément $e \in E$ est *minimal*, s'il est maximal dans $(E^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$.

Lemme 1.32. (Zorn) Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné $\neq \emptyset$, vérifiant la condition suivante. Pour toute partie $E' \subset E$ totalement ordonnée non vide il existe $e \in E$ tel que $e' \leq e$ pour tout $e' \in E'$. Alors, E a un élément maximal. $\square$

On n'essayera pas ici de démontrer le lemme de Zorn ; toute preuve de ce lemme utilise une forme ou une autre de l'axiome du choix suivant :

- Toute surjection $f : X \rightarrow Y$ d'ensembles admet une section, i.e. une application $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g = \text{Id}_Y$.

Ce dernier est un axiome dans la plupart des théories axiomatiques des ensembles d'usage courant ; mais dans ces théories, le lemme de Zorn a en fait la même force que l'axiome du choix, i.e. dans la liste des axiomes de la plupart des théories axiomatiques des ensembles, on peut remplacer l'axiome du choix par l'énoncé du lemme de Zorn, et ainsi faisant on obtiendra une théorie équivalente (l'axiome du choix deviendra un théorème dans ce nouveau système axiomatique). Donc, on peut tout simplement décider que pour nous le lemme de Zorn est un axiome.

Exercice 1.33. Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné, et munissons toute partie de E de l'ordre induit par E . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) Toute partie $S \subset E$ non vide a un élément minimal.
- (b) Tout chaîne décroissante $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$ d'éléments de E est *stationnaire*, i.e. elle admet $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = x_n$ pour tout $k \geq n$.

On dit que $(E, \leq)$ est (*partiellement*) *bien ordonné*, s'il satisfait ces conditions ; dans ce cas, on dit aussi que $\leq$ est un bon ordre (*partiel*) sur E .

On est maintenant prêt pour montrer le résultat annoncé :

Théorème 1.34. Pour tout anneau $A \neq 0$ on a $\text{Max } A \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit E l'ensemble des idéaux $I \subset A$ tels que $1 \notin I$. On munit E de la relation d'ordre donnée par l'inclusion : $I \leq J \Leftrightarrow I \subset J$, pour tout $I, J \in E$. Si $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de E avec $\Lambda \neq \emptyset$, on pose $I := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$; on a $I \in E$ et $I_\lambda \leq I$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc le lemme de Zorn nous assure que E admet un élément maximal. Mais évidemment, tout élément maximal de E est un idéal maximal de A . $\square$

Corollaire 1.35. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et $f \in A$. On a :

- (i) Si $1 \notin I$, il existe un idéal maximal de A qui contient I .
- (ii) Si $f \notin A^\times$, il existe un idéal maximal qui contient f .

Démonstration. (i) : On applique le théorème 1.34 à l'anneau A/I qui est non nul, car $1 \notin I$. Si $\bar{\mathfrak{m}}$ est n'importe quel idéal maximal de A/I , l'image réciproque de $\bar{\mathfrak{m}}$ dans A est un idéal maximal de A contenant I (voir le lemme 1.7).

- (ii) : Puisque $f \notin A^\times$, on a $1 \notin Af$, et on peut appliquer (i) avec $I := Af$. $\square$

Voici une première application :

Exercice 1.36. Montrer que tout anneau A intègre et principal est factoriel. En outre, le pgcd de tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ engendre l'idéal $\sum_{i=1}^n Aa_i$.

Avec l'exercice 1.36 et l'exemple 1.2 on voit e.g. que $\mathbb{Z}$ est factoriel, et de même pour $K[X]$, si K est un corps arbitraire. Les éléments premiers de $\mathbb{Z}$ sont évidemment les nombres entiers premiers usuels ; les premiers de $K[X]$ sont les polynômes *irréductibles*, i.e. les $P \in K[X]$ avec $d := \deg_X P > 0$, qui ne sont pas produits de polynômes de

degrés $< d$. Dans les deux cas, le point clef de la preuve est l'existence d'une *division euclidienne* pour tout couple d'éléments non nuls ; le problème suivant axiomatise les propriétés requises pour reproduire cet argument :

Problème 1.37. On dit que l'anneau A est *euclidien* s'il est intègre et s'il existe une application

$$|\cdot| : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

vérifiant la condition suivante : pour tout $a, b \in A \setminus \{0\}$ il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et soit $r = 0$, soit $|r| < |b|$ (*division euclidienne* de a par b).

- (i) Montrer que tout anneau euclidien est principal (et donc, factoriel).
- (ii) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est un anneau euclidien pour $n = 1, 2$.
- (iii) La suite du problème est consacrée à une application arithmétique classique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss. D'abord, soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod{4}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
- (iv) Dédire de (ii) et (iii) le *Théorème de Fermat* suivant : Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier impair ; alors p est la somme de deux carrés $p = a^2 + b^2$ de nombres entiers $a, b \in \mathbb{N}$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Remarque 1.38. (i) L'analyse des éléments premiers de $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ (pour $n = 1, 2$) conduit aussi à des résultats arithmétiques intéressants. D'abord, remarquons que

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]^\times = \{1, -1\}.$$

(ii) Ensuite, soit $x := a + i\sqrt{n}b$ un premier de $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$; évidemment le conjugué complexe $\bar{x}$ est aussi premier. Si $a, b \neq 0$, on a $\text{pgcd}(x, \bar{x}) = 1$ grâce à (i), sauf si $n = 1$ et $x \in \{1 + i, 1 - i\}$. Si $a = 0$ et $n = 2$, on a $x = \pm i\sqrt{2}$; si $a = 0$ et $n = 1$, on a $x = ib$ avec b premier dans $\mathbb{Z}$. Si $b = 0$, on a $x = a$ avec a premier dans $\mathbb{Z}$.

(iii) Avec la notation de (ii), si $a, b \neq 0$, l'entier $x\bar{x}$ est premier (dans $\mathbb{Z}$). En effet, l'assertion est claire pour $n = 1$ et $x \in \{1 + i, 1 - i\}$. Dans les autres cas, supposons par l'absurde que $x\bar{x} = uv$ avec des entiers $u, v > 1$; donc, soit $x|u$, soit $x|v$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$, et si $x|u$, on a aussi $\bar{x}|u$, d'où $x\bar{x}|u$, car $\text{pgcd}(x, \bar{x}) = 1$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est factoriel (problème 1.37(ii)). Mais cela veut dire que $x\bar{x} = u$, contradiction.

(iv) On peut maintenant adapter la démonstration classique (due à Euclide) de l'existence d'un nombre infini de nombres entiers premiers, afin de prouver l'assertion suivante. Pour $n = 1, 2$, il existe un nombre infini de nombres entiers premiers p de la forme $p = a^2 + nb^2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. En effet, supposons par l'absurde que la partie $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{Z}$ de ces premiers soit finie, posons $N := 1 + n \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^2$, et soit $x = c + i\sqrt{n}d \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ un facteur premier de N . Si $c, d \neq 0$, on a $x \cdot \bar{x} \in \mathcal{P}_n$ par (iii), et $x\bar{x}$ diviserait $N\bar{N} = N^2$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$, donc aussi dans $\mathbb{Z}$, contradiction. Ensuite, si $c = 0$ et $n = 2$, on a $x = \pm i\sqrt{2}$, d'où $2|N^2$, contradiction. Si $c = 0$ et $n = 1$, on a $x = id$ avec d premier dans $\mathbb{Z}$. De même, si $d = 0$ on a $x = c$ avec c premier dans $\mathbb{Z}$. En conclusion, x est en fait le produit d'un élément inversible et d'un nombre entier premier. Mais si l'on pose $M := \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$, on a la factorisation :

$$N = (1 + i\sqrt{n}M) \cdot (1 - i\sqrt{n}M) \quad \text{dans } \mathbb{Z}[i\sqrt{n}].$$

D'autre part, on voit aisément qu'un tel x ne divise aucun des facteurs, CQFD.

Problème 1.39. Soient A un anneau factoriel, et $P := \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X] \setminus A$.

- (i) On dit que P est *primitif* si le pgcd des coefficients $a_0, \dots, a_n$ est 1. Prouver le *lemme de Gauss* : si $P, Q \in A[X]$ sont primitifs, il en est de même pour $P \cdot Q$.
- (ii) Soit K le corps des fractions de A . Montrer que P est irréductible dans $A[X]$ si et seulement s'il est primitif dans $A[X]$ et irréductible dans $K[X]$.
- (iii) Dédire de (i) que $A[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau factoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3.1. *Anneaux de type fini sur un corps.* Les anneaux que l'on rencontre lors de l'étude de la géométrie algébrique sont parmi les plus intéressants pour nous. Ils sont surtout des K -algèbres de présentation finie, sur un corps K arbitraire.

Pour simplifier, on supposera ici que K soit algébriquement clos, et on considère la K -algèbre $A := K[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées. Tout $f \in A$ peut se voir comme une fonction algébrique définie sur le K -espace affine n -dimensionnel

$$f : K^n \rightarrow K \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n).$$

Soit $\underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in K^n$; on peut définir comme dans la section précédente :

$$\mathfrak{m}_{\underline{a}} := \{f \in A \mid f(\underline{a}) = 0\}$$

et le même argument montre que $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$ est un idéal maximal de A . Un des théorèmes importants que l'on démontrera dans ce cours est le *Nullstellensatz* de Hilbert, qui est l'analogue algébrique suivant du théorème 1.28 :

Théorème 1.40. *Dans la situation du §1.3.1, on obtient une bijection :*

$$K^n \xrightarrow{\sim} \text{Max } A \quad \underline{a} \mapsto \mathfrak{m}_{\underline{a}}. \quad \square$$

En particulier, cela donne une interprétation géométrique de l'ensemble $\text{Max } A$. On peut se demander s'il y a une interprétation géométrique plus généralement pour les idéaux premiers, ou même pour les idéaux tout court. Ci-dessous je vais esquisser à grandes lignes la situation générale : on y reviendra plus tard en détail.

Soit $I \subset A := K[X_1, \dots, X_n]$ un idéal ; on associe à I l'ensemble

$$V_K(I) := \{\underline{a} \in K^n \mid f(\underline{a}) = 0 \ \forall f \in I\}.$$

D'autre part, à toute partie $S \subset K^n$ on peut associer l'idéal de A :

$$I(S) := \{f \in A \mid f(\underline{a}) = 0 \ \forall \underline{a} \in S\}.$$

Avec cette notation, on a l'identité suivante :

$$I(V_K(I)) = \text{rad}(I) := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^n \in I\}.$$

En particulier, la partie $\text{rad}(I)$ est un idéal de A , appelé le *radical* de I . L'inclusion $\text{rad}(I) \subset I(V_K(I))$ est triviale, car si $f^n(\underline{a}) = 0$ pour tout $\underline{a} \in V(I)$, on a évidemment déjà $f(\underline{a}) = 0$ pour tout $\underline{a} \in V(I)$. L'inclusion inverse est un résultat difficile, et donne une forme forte du Nullstellensatz.

Un sous-ensemble de K^n du type $V_K(I)$ pour un idéal $I \subset A$ est dit *algébrique*. Notons que si $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille de générateurs de l'idéal I , on a aussi

$$V_K(I) = \{\underline{a} \in K^n \mid f_\lambda(\underline{a}) = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

En effet, tout élément de I s'écrit sous la forme $g = \sum_{\lambda \in \Lambda'} P_\lambda \cdot f_\lambda$ pour une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et un système de polynômes $(P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$, et si $f_\lambda(\underline{a}) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, on obtient $g(\underline{a}) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} P_\lambda(\underline{a}) \cdot f_\lambda(\underline{a}) = 0$, i.e. $\underline{a} \in V_K(I)$.

On montrera en outre que *tout idéal de A est engendré par un nombre fini de polynômes* (il s'agit du *théorème de la base*, qui est aussi dû à Hilbert). Donc, les sous-ensembles algébriques de K^n sont précisément les parties qui peuvent s'écrire comme lieux des zéros d'un nombre fini de polynômes de A . Par ce qui précède, les sous-ensembles algébriques sont en bijection avec les *idéaux radicaux*, c'est-à-dire, les idéaux $I \subset A$ tels que $I = \text{rad}(I)$. Remarquons que

$$\text{rad}(\text{rad}(I)) = \text{rad}(I) \quad \text{pour tout idéal } I \subset A$$

donc le radical de n'importe quel idéal est un idéal radical (exercice!). Quel est le rôle des idéaux premiers dans cette description ? On verra que tout sous-ensemble algébrique

de K^n peut se décomposer de façon unique comme réunion finie de sous-ensembles algébriques *irréductibles* : ces derniers sont les sous-ensembles algébriques qui ne se décomposent pas davantage de cette façon. Or, l'idéal $I(Z)$ d'un sous-ensemble algébrique $Z \subset K^n$ est premier si et seulement si Z est irréductible.

Par analogie avec la situation topologique de la section 1.2, il convient d'introduire une topologie sur K^n : les parties fermées sont les sous-ensembles algébriques. Donc, les ouverts sont réunions finies de parties de la forme

$$D_K(f) := \{\underline{a} \in K^n \mid f(\underline{a}) \neq 0\} \quad \forall f \in A$$

et les sous-ensembles algébriques irréductibles seront précisément les parties fermées irréductibles de K^n .

Exercice 1.41. Montrer que deux parties ouvertes non vides de K^n ont toujours une intersection non vide. Donc, en contraste avec le cas topologique, la topologie de Zariski sur K^n n'est pas séparée si $n > 0$.

Si maintenant A est un anneau arbitraire, on peut s'inspirer de ce qui précède pour munir $\text{Max } A$ d'une topologie de Zariski, engendrée par les parties

$$D_{\text{Max}}(f) := \{\mathfrak{m} \in \text{Max } A \mid f \notin \mathfrak{m}\} \quad \forall f \in A.$$

Comme ci-dessus, tout idéal I de A définit une partie fermée de $\text{Max } A$ notée encore :

$$V_{\text{Max}}(I) = \{\mathfrak{m} \in \text{Max } A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$$

On a vu que cette topologie est, en général, non séparée ; d'autre part, on a :

Proposition 1.42. *La topologie de Zariski de $\text{Max } A$ est compacte.*

Démonstration. Soit $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de $\text{Max } A$. Il faut exhiber une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $\text{Max } A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$. Pour cela, on se ramène aisément au cas où, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $f_\lambda \in A$ tel que $U_\lambda = D_{\text{Max}}(f_\lambda)$. Donc, pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $f_\lambda \notin \mathfrak{m}$. On déduit que l'idéal $I := \sum_{\lambda \in \Lambda} A f_\lambda$ n'est contenu dans aucun idéal maximal, et donc $I = A$, par le corollaire 1.35(i). D'où, une identité de la forme $1 = \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda f_\lambda$ pour quelque partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et un système d'éléments $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$ de A . On voit aisément que ce Λ' convient. $\square$

Exercice 1.43. Donner un exemple d'un espace topologique T tel que l'application ϕ_T du §1.2.1 ne soit pas surjective. Noter que la preuve du théorème 1.28 montre qu'un tel espace doit forcément être non compact.

Problème 1.44. Soit $T := [0, 1]$ muni de sa topologie standard, induite par l'inclusion dans l'espace topologique $\mathbb{R}$ des nombres réels. Donc T est séparé et compact, et le théorème 1.28 nous donne une bijection canonique $[0, 1] \simeq \text{Max } \mathcal{C}([0, 1])$. Question (difficile!) : l'anneau $\mathcal{C}([0, 1])$ a-t-il des idéaux premiers non maximaux?

1.3.2. Le spectre premier. La discussion précédente s'applique aussi bien au spectre premier $\text{Spec } A$. En particulier, le théorème 1.34 implique trivialement que le spectre premier d'un anneau A est vide si et seulement si $A = 0$. On a aussi une topologie de Zariski sur $\text{Spec } A$, engendrée par les parties ouvertes de la forme

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \quad \forall f \in A$$

et la preuve de la proposition 1.42 montre aussi bien que la topologie de Zariski de $\text{Spec } A$ est compacte. Si l'on s'intéressait seulement aux anneaux de type fini sur un corps, on pourrait négliger le spectre premier, et ne considérer que le spectre maximal, dont les points ont une interprétation géométrique directe, grâce au Nullstellensatz. Toutefois, même pour l'étude des variétés algébriques définies sur un corps algébriquement clos K , on a souvent affaire avec des anneaux qui ne sont pas des K -algèbres de type fini, et pour manipuler des tels anneaux, le spectre premier s'avère être un outil plus efficace.

Notamment, remarquons que tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ induit une application

$$\mathrm{Spec} f : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A \quad \mathfrak{p} \mapsto f^{-1}\mathfrak{p}.$$

Car, si $\mathfrak{p} \subset B$ est n'importe quel idéal, f induit un homomorphisme injectif d'anneaux $A/f^{-1}\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{p}$; or, si $\mathfrak{p}$ est premier, $B/\mathfrak{p}$ est intègre (lemme 1.7), donc de même pour $A/f^{-1}\mathfrak{p}$ (trivialement, un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre), et par suite, $f^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$. En outre, on vérifie aisément l'identité :

$$(\mathrm{Spec} f)^{-1}D(a) = D(f(a)) \quad \forall a \in A$$

(exercice!) donc $\mathrm{Spec} f$ est une application continue de $\mathrm{Spec} B$ dans $\mathrm{Spec} A$. Par contre, l'image réciproque d'un idéal maximal de B n'est pas nécessairement un idéal maximal de A (bien qu'elle soit, bien entendu, un idéal premier de A) : e.g. soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ l'inclusion naturelle; l'idéal $\{0\}$ est maximal dans $\mathbb{Q}$, mais son image réciproque $f^{-1}(0) = \{0\}$ n'est pas maximale dans $\mathbb{Z}$.

Remarque 1.45. (i) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal; la projection canonique $\pi : A \rightarrow A/I$ induit une application continue

$$\mathrm{Spec} \pi : \mathrm{Spec} A/I \rightarrow \mathrm{Spec} A.$$

Le lemme 1.7 nous dit que $\mathrm{Spec} \pi$ est injective, et son image est la partie fermée

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\}.$$

Plus précisément, la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec} A/I$ est induite par celle de $\mathrm{Spec} A$ via l'application $\mathrm{Spec} \pi$. En effet, toute partie ouverte de $\mathrm{Spec} A/I$ est réunion de parties de la forme $D(\bar{a})$, avec $\bar{a} \in A/I$ la classe d'un élément $a \in A$; on voit aisément que $D(\bar{a}) = (\mathrm{Spec} \pi)^{-1}(D(a))$, donc toute partie ouverte U de $\mathrm{Spec} A/I$ est image réciproque d'une partie ouverte de $\mathrm{Spec} A$. Autrement dit, l'espace topologique $\mathrm{Spec} A/I$ s'identifie canoniquement au sous-espace fermé $V(I)$ de $\mathrm{Spec} A$.

(ii) Soient $g : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $I \subset A$ un idéal; on dénote par $\bar{g} : A/I \rightarrow B/IB$ l'homomorphisme d'anneaux induit par g . Noter que

$$V(IB) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} B \mid f(I) \subset \mathfrak{p}\} = (\mathrm{Spec} g)^{-1}V(I)$$

et l'homéomorphisme canonique $V(IB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec} B/IB$ de (i) identifie aussi $\mathrm{Spec}(\bar{g}) : \mathrm{Spec} B/IB \rightarrow \mathrm{Spec} A/I$ à la restriction $V(IB) \rightarrow V(I)$ de $\mathrm{Spec}(g)$.

(iii) On a vu que g n'induit pas en général une application

$$\mathrm{Max} g : \mathrm{Max} B \rightarrow \mathrm{Max} A.$$

Toutefois, si g est surjective, $\mathrm{Max} g$ existe : en effet, dans ce cas l'image réciproque $g^{-1}\mathfrak{m}$ d'un idéal maximal de B est bien un idéal maximal de A , car l'application induite $A/g^{-1}\mathfrak{m} \rightarrow B/\mathfrak{m}$ est bijective, donc $A/g^{-1}\mathfrak{m}$ est un corps si et seulement si $B/\mathfrak{m}$ est un corps (proposition 1.5(ii)). En raisonnant comme dans (i), on voit aisément que dans ce cas $\mathrm{Max} g$ identifie $\mathrm{Max} B$ au sous-espace fermé $\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max} A \mid g^{-1}(0) \subset \mathfrak{m}\}$ de $\mathrm{Max} A$: les détails seront laissés aux soins du lecteur.

Exercice 1.46. (i) Déterminer $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ (avec sa topologie).

(ii) Soit K un corps algébriquement clos. Donner une description de l'espace topologique $\mathrm{Spec} K[T]$.

(iii) Plus généralement, décrire $\mathrm{Spec} K[T]$ si K est un corps parfait.

(iv) Soient K un corps, E une extension algébrique purement inséparable de K . Montrer que l'inclusion $i : K[T] \rightarrow E[T]$ induit un homéomorphisme

$$\mathrm{Spec} i : \mathrm{Spec} E[T] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec} K[T].$$

(Les généralités fondamentales sur les corps parfaits et les extensions purement inséparables de corps sont rappelées dans la section suivante 1.4.)

Exercice 1.47. Soient K un corps algébriquement clos, $n, m \in \mathbb{N}$, et

$$f : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K[Y_1, \dots, Y_m]$$

un homomorphisme de K -algèbres. Donc $f(a) = a$ pour toute constante $a \in K$, et f est déterminé par les polynômes $(P_i(Y_1, \dots, Y_m) := f(X_i) \mid i = 1, \dots, n)$.

(i) Montrer que, malgré la discussion ci-dessus, f induit une application

$$\text{Max } f : \text{Max } K[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow \text{Max } K[X_1, \dots, X_n] \quad \mathfrak{m} \mapsto f^{-1}\mathfrak{m}.$$

(ii) Les identifications $K^n \simeq \text{Max } K[X_1, \dots, X_n]$ et $K^m \simeq \text{Max } K[Y_1, \dots, Y_m]$ données par le Nullstellensatz permettent d'interpréter $\text{Max } f$ comme une application $\phi : K^m \rightarrow K^n$. Montrer que

$$\phi(\underline{a}) = (P_1(\underline{a}), \dots, P_n(\underline{a})) \quad \forall \underline{a} := (a_1, \dots, a_m) \in K^m.$$

Définition 1.48. (i) Soit A un anneau. Les idéaux

$$\mathcal{J}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(A) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$$

sont appelés respectivement le *radical de Jacobson* et le *radical nilpotent* (ou *nilradical*) de A . (Si $A = \{0\}$, on pose $\mathcal{J}(A) = \mathcal{N}(A) = \{0\}$.)

(ii) On dit que A est *réduit* si $\mathcal{N}(A) = 0$.

(iii) On dit que A est *local*, si $\mathcal{J}(A)$ est un idéal maximal; évidemment cela revient à dire que $\mathcal{J}(A)$ est l'*unique* idéal maximal de A . On écrira aussi parfois

$$(A, \mathfrak{m})$$

pour désigner le couple d'un anneau local A et de son idéal maximal $\mathfrak{m}$.

(iv) On dit que A est *semi-local*, si $\text{Max}(A)$ est un ensemble fini.

Exemple 1.49. Si $A = \mathcal{C}(T)$ avec T un espace topologique compact et séparé, le théorème 1.28 montre qu'un élément $f \in A$ appartient à $\mathcal{J}(A) \Leftrightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in T \Leftrightarrow f = 0$; donc $\mathcal{J}(A) = 0$ (et *a fortiori*, aussi $\mathcal{N}(A) = 0$).

Théorème 1.50. Soient $A \neq 0$ un anneau, et $f \in A$. Alors :

(i) $f \in \mathcal{J}(A)$ si et seulement si $1 - af \in A^\times$ pour tout $a \in A$.

(ii) $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A .

Démonstration. (i) : Si $f \in \mathcal{J}(A)$ et $a \in A$, aucun idéal maximal de A ne contient $1 - af$ (car si $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ et $1 - af \in \mathfrak{m}$, on aurait $1 = (1 - af) + af \in \mathfrak{m}$, ce qui est absurde). Par le corollaire 1.35(ii) on déduit que $1 - af$ est inversible.

D'autre part, si $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ et $f \notin \mathfrak{m}$, alors la classe $\bar{f} \in A/\mathfrak{m}$ de f est $\neq 0$, et puisque $A/\mathfrak{m}$ est un corps (proposition 1.5(ii)), il existe $a \in A$ dont la classe $\bar{a} \in A/\mathfrak{m}$ satisfait $\bar{f} \cdot \bar{a} = \bar{1}$. Ainsi $1 - af \in \mathfrak{m}$, en particulier, $1 - af \notin A^\times$.

(ii) : Si f est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$, donc $f^n \in \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , d'où $f \in \mathfrak{p}$. D'autre part, si $f \in A$ n'est pas nilpotent, notons

$$S_f := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Soit E l'ensemble des idéaux $I \subset A$ tels que $I \cap S_f = \emptyset$. On munit E de la relation d'ordre donnée par inclusion d'idéaux. Puisque $0 \notin S_f$, on a $\{0\} \in E$, donc $E \neq \emptyset$. Si $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de E avec $\Lambda \neq \emptyset$, l'idéal $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est aussi un élément de E . Par le lemme de Zorn, on déduit que E possède un élément maximal I . Montrons que I est un idéal premier de A . En effet, soient $x, y \in A \setminus I$; par maximalité de I on a $I + Ax, I + Ay \notin E$, i.e. il existe $n, m \in \mathbb{N}$, $a, a' \in A$ et $b, b' \in I$ tels que $f^n = ax + b$, $f^m = a'y + b'$. Donc, $f^{m+n} = aa'xy + axb' + ba'y + bb' \notin I$. Par suite $aa'xy \notin I$, et alors $xy \notin I$, d'où l'assertion. Par construction, $f \notin I$, et on conclut que $f \notin \mathcal{N}(A)$. $\square$

Corollaire 1.51. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection canonique. Alors on a :

- (i) $\text{Spec } \pi : \text{Spec } A/I \rightarrow \text{Spec } A$ est un homéomorphisme $\Leftrightarrow I \subset \mathcal{N}(A)$.
- (ii) $\text{Max } \pi : \text{Max } A/I \rightarrow \text{Max } A$ est un homéomorphisme $\Leftrightarrow I \subset \mathcal{J}(A)$.

Démonstration. Cela découle aussitôt de la remarque 1.45(i,iii). $\square$

Exercice 1.52. Soient A un anneau, et $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Soit aussi $P(T) := a_0 + a_1T + \dots + a_kT^k \in A[T]$ un polynôme. Montrer que :
 - (a) P est inversible dans $A[T] \Leftrightarrow a_0 \in A^\times$ et $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{N}(A)$.
 - (b) P est un diviseur de zéro dans $A[T] \Leftrightarrow$ il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $b \cdot P = 0$.
- (ii) Pour tout idéal $I \subset A$, soit $I[T_1, \dots, T_n] := I \cdot A[T_1, \dots, T_n]$. Dédurre de (i) que

$$\mathcal{J}(A[T_1, \dots, T_n]) = \mathcal{N}(A[T_1, \dots, T_n]) = \mathcal{N}(A)[T_1, \dots, T_n].$$

Donc, $\mathcal{J}(A[T_1, \dots, T_n]) = 0$ si $\mathcal{N}(A) = 0$ (voir aussi les exercices 6.22 et 6.86).

- (iii) Soit $A[[T_\bullet]]$ l'anneau des séries formelles des indéterminées $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$, à coefficients dans A . Montrer que $\mathcal{J}(A[[T_\bullet]]) = \mathcal{J}(A) \cdot A[[T_\bullet]] + T_\bullet A[[T_\bullet]]$. En déduire que pour tout $\mathfrak{n} \in \text{Max } A[[T_\bullet]]$ on a $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{n} \in \text{Max } A$ et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + T_\bullet A[[T_\bullet]]$.

1.3.3. Intersections et réunions d'idéaux. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal; on rappelle la définition (déjà mentionnée au §1.3.1) du *radical* de I :

$$\text{rad}(I) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f \in A \mid f^n \in I\}.$$

Il s'agit d'un idéal de A : en effet, soient $f, g \in A$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $f^n, g^n \in I$; par suite $(f+g)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} f^k g^{2n-k-1} \in I$, car $\max(k, 2n-1-k) \geq n$. On dit que I est un *idéal radical* si $I = \text{rad}(I)$.

Corollaire 1.53. Avec les notations ci-dessus, on a $\text{rad}(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$.

Démonstration. (Si $I = A$, on a $V(I) = \emptyset$, et l'intersection d'une famille vide d'idéaux de A est A .) Soit $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection canonique; on voit aisément que $\text{rad}(I) = \pi^{-1}\mathcal{N}(A/I)$. Compte tenu du théorème 1.50(ii), on déduit que $\text{rad}(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A/I} \pi^{-1}\mathfrak{p}$. Mais $\{\pi^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } A/I\}$ est précisément l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent I (voir le lemme 1.7), d'où l'assertion. $\square$

Exemple 1.54. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $I_t \subset \mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f^{-1}(0)$ est un voisinage de t . Evidemment I_t est un idéal de $\mathcal{C}([0, 1])$, et on voit aisément que $\text{rad}(I_t) = I_t$. Par le corollaire 1.53, il s'ensuit que I_t est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent; mais par le théorème 1.28, le seul idéal maximal contenant I_t est l'idéal $\mathfrak{m}_t$ des fonctions qui s'annulent au point t , et évidemment $I_t \subsetneq \mathfrak{m}_t$. On conclut qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}([0, 1])$ tels que $I_t \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_t$. Cela fournit une solution rapide au problème 1.44, qui pourtant ne nous renseigne en rien sur la nature de ces idéaux premiers $\mathfrak{p}$.

Lemme 1.55. Soient A un anneau, $I_1, \dots, I_k \subset A$ des idéaux, $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier tel que $\bigcap_{i=1}^k I_i \subset \mathfrak{p}$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $I_i \subset \mathfrak{p}$.

Démonstration. Supposons que $I_1, \dots, I_k \not\subset \mathfrak{p}$; pour tout $i = 1, \dots, k$, on trouve alors $a_i \in I_i \setminus \mathfrak{p}$, d'où $a_1 \cdots a_k \in \bigcap_{i=1}^k I_i \setminus \mathfrak{p}$, car $\mathfrak{p}$ est premier. $\square$

Remarque 1.56. Le lemme 1.55 nous permet de justifier quelques-unes des assertions géométriques mentionnées au §1.3.1 :

- (i) On a vu que pour tout idéal $I \subset A$, la partie $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ est fermée dans $\text{Spec } A$, et toute partie fermée de $\text{Spec } A$ est de cette forme (comparer avec la notation du §1.3.1). Avec le corollaire 1.53, il vient :

$$I \subset J \Rightarrow \text{rad}(I) \subset \text{rad}(J) \Leftrightarrow V(J) \subset V(I).$$

(ii) Pour toute suite finie $I_1, \dots, I_k$ d'idéaux de A , on déduit :

$$\bigcup_{i=1}^k V(I_i) = V\left(\bigcap_{i=1}^k I_i\right).$$

En effet, l'inclusion $V(I_j) \subset V\left(\bigcap_{i=1}^k I_i\right)$ pour tout $j = 1, \dots, k$ suit aussitôt de (i); réciproquement, soit $\mathfrak{p} \in V\left(\bigcap_{i=1}^k I_i\right)$; cela veut dire que $\bigcap_{i=1}^k I_i \subset \mathfrak{p}$, et le lemme 1.55 implique qu'il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $I_i \subset \mathfrak{p}$, i.e. $\mathfrak{p} \in V(I_i)$.

(iii) Notons aussi que si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier et si $\mathfrak{p} \in V(I)$, on a $I \subset \mathfrak{p}$, d'où $V(\mathfrak{p}) \subset V(I)$; donc, toute partie fermée de $\text{Spec } A$ qui contient $\mathfrak{p}$ contient aussi $V(\mathfrak{p})$, i.e. $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence de $\{\mathfrak{p}\}$ dans $\text{Spec } A$. Par suite $V(\mathfrak{p})$ est irréductible : car si Z_1 et Z_2 sont deux parties fermées de $\text{Spec } A$ telles que $V(\mathfrak{p}) = Z_1 \cup Z_2$, on a soit $\mathfrak{p} \in Z_1$, soit $\mathfrak{p} \in Z_2$, d'où, soit $V(\mathfrak{p}) \subset Z_1$, soit $V(\mathfrak{p}) \subset Z_2$.

(iv) Plus précisément, $V(I) = V(\text{rad}(I))$, et $V(I)$ est une partie irréductible de $\text{Spec } A$ si et seulement si $\text{rad}(I)$ est un idéal premier. En effet, la condition est suffisante, par (iii). De l'autre côté, soient $f, g \in A$ avec $fg \in \text{rad}(I)$; il vient :

$$V(I) \subset V(Afg) = V(Af) \cup V(Ag).$$

Or, si $V(I)$ est irréductible, il est contenu déjà dans $V(Af)$ ou $V(Ag)$; disons $V(I) \subset V(Af)$; donc, $f \in \text{rad}(I)$, par (i). Cela montre que $\text{rad}(I)$ est premier.

(v) Soient $I, J \subset A$ deux idéaux; noter que $(I \cap J)^2 \subset IJ \subset I \cap J$, et évidemment $\text{rad}((I \cap J)^2) = \text{rad}(I \cap J)$. Avec (i), lemme 1.55 et corollaire 1.53 il vient :

$$\text{rad}(I) \cap \text{rad}(J) = \text{rad}(I \cap J) = \text{rad}(IJ).$$

Cela se voit aussi aisément par un argument direct (exercice!).

Exercice 1.57. Montrer qu'un anneau A est intègre $\Leftrightarrow A$ est réduit et $\text{Spec } A$ est irréductible.

Proposition 1.58. Soient A un anneau, $I, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n \subset A$ des idéaux ($n \geq 2$), avec $\mathfrak{p}_3, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{Spec } A$ et $I \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $I \subset \mathfrak{p}_i$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ pour tout $i \neq j$. Montrons, par récurrence sur n , que si $I \not\subset \mathfrak{p}_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors il existe $x \in I \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

Si $n = 2$, l'hypothèse veut dire qu'il existe $x_1 \in I \setminus \mathfrak{p}_1$ et $x_2 \in I \setminus \mathfrak{p}_2$; or, si $x_1 \notin \mathfrak{p}_2$, on peut prendre $x := x_1$, et si $x_2 \notin \mathfrak{p}_1$, on peut prendre $x := x_2$. Si $x_1 \in \mathfrak{p}_2$ et $x_2 \in \mathfrak{p}_1$, on peut prendre $x := x_1 + x_2$.

Soit $n > 2$; par récurrence on sait déjà qu'il existe $y \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{p}_i$, et comme $I, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1} \not\subset \mathfrak{p}_n$, on trouve $z_1, \dots, z_n \in A$ avec $z_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_n$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et $z_n \in I \setminus \mathfrak{p}_n$. On pose $z := z_1 \cdots z_n$; on a $z \in I \cap \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{n-1} \setminus \mathfrak{p}_n$ car $\mathfrak{p}_n$ est premier. Or, si $y \notin \mathfrak{p}_n$, on prendra $x := y$, et si $y \in \mathfrak{p}_n$, on prendra $x := y + z$. $\square$

Exercice 1.59. Soient A un anneau, $x \in A$, et $I, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subset A$ des idéaux tels que $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{Spec } A$ et $Ax + I \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Exhiber $y \in I$ tel que $x + y \notin \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

Lemme 1.60. (Lemme chinois) Soient A un anneau, $I_1, \dots, I_k \subset A$ des idéaux tels que $I_i + I_j = A$ pour tout $i \neq j$. Alors l'application naturelle

$$\phi : A/(I_1 \cap \cdots \cap I_k) \rightarrow A/I_1 \times \cdots \times A/I_k$$

est un isomorphisme d'anneaux. En outre, on a

$$(*) \quad I_1 \cap \cdots \cap I_k = I_1 \cdots I_k.$$

Démonstration. L'injectivité de ϕ est immédiate. Pour tout $i = 1, \dots, k$, notons $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ l'élément de $\prod_{i=1}^k A/I_i$ dont les composantes sont toutes nulles, sauf la i -ème, qui est égale à 1; pour vérifier la surjectivité de ϕ , il suffit de montrer que $e_i \in \text{Im}(\phi)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Or, pour chaque $j \neq i$ il existe $x_j \in I_i$ et $y_j \in I_j$ tels que $x_j + y_j = 1$. On voit aisément que $\phi\left(\prod_{j \neq i} y_j\right) = e_i$.

Ensuite, remarquons que si $J_1, J_2, J_3 \subset A$ sont trois idéaux tels que $J_i + J_j = A$ pour tout $1 \leq i < j \leq 3$, alors $J_1 + J_2 J_3 = A$; en effet, on a :

$$A = (J_1 + J_2) \cdot (J_1 + J_3) \subset J_1 + J_2 J_3 \subset A.$$

On vérifie l'identité (*) par récurrence sur $k \geq 2$. Si $k = 2$, par hypothèse il existe $a \in I_1$ et $b \in I_2$ tels que $a + b = 1$; or, si $x \in I_1 \cap I_2$ il vient $x = x \cdot (a + b) = xa + xb \in I_1 I_2$, d'où $I_1 \cap I_2 \subset I_1 I_2$, et l'inclusion réciproque est triviale. Soit maintenant $k \geq 2$, supposons que l'identité (*) soit connue pour toute suite d'idéaux $I_1, \dots, I_k \subset A$ tels que $I_i + I_j = A$ pour tout $i \neq j$, et soit $I_1, \dots, I_{k+1} \subset A$ une suite d'idéaux vérifiant la même condition. On pose $I'_j := I_j$ pour $j = 1, \dots, k-1$ et $I'_k := I_k I_{k+1}$. Par l'observation ci-dessus, on a encore $I'_i + I'_j = A$ pour tout $1 \leq i < j \leq k$, et on vient de voir aussi que $I'_k = I_k \cap I_{k+1}$. Par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que

$$I_1 \cap \dots \cap I_{k+1} = I'_1 \cap \dots \cap I'_{k-1} \cap I'_k = I'_1 \dots I'_k = I_1 \dots I_{k+1}$$

et la preuve est achevée. $\square$

Exercice 1.61. Soit $A \neq 0$ un anneau; on munit $\text{Spec } A$ de l'ordre partiel tel que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } A$.

- (i) Montrer que la partie $\text{Min } A$ des éléments minimaux de $\text{Spec } A$ est non vide.
- (ii) Plus précisément, montrer que tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ contient un élément de $\text{Min } A$.
- (iii) En déduire que $\mathcal{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min } A} \mathfrak{p}$.

1.4. Théorie élémentaire des corps. Les corps sont les anneaux les plus simples, et une certaine familiarité avec la théorie des corps est une condition préalable indispensable pour pouvoir aborder l'étude de l'algèbre commutative; on rassemble ici les résultats fondamentaux sur les corps que l'on utilisera librement dans notre cours. La théorie élémentaire des corps concerne principalement la classification des *extensions* d'un corps fixé K , i.e. des homomorphismes d'anneaux $f : K \rightarrow E$ de K vers un autre corps E . Noter qu'un tel f est toujours injectif, donc il identifie K avec un *sous-corps* de E ; en outre, E est naturellement une K -algèbre via f .

Définition 1.62. Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $x \in E$.

- (i) On dit que x est *algébrique sur K* s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$.
- (ii) Soit $F \subset E$ la partie des éléments de E algébriques sur K . On dit que E est une *extension algébrique* (resp. *transcendante*) de K , si $F = E$ (resp. si $F \neq E$). Si $F = K$, on dit que K est *algébriquement fermé dans E* .
- (iii) Le *degré de E sur K* est la dimension du K -espace vectoriel E , notée :

$$[E : K] \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Exercice 1.63. Soient $K \subset K' \subset K''$ deux extensions de corps. Montrer que :

$$[K'' : K] = [K' : K] \cdot [K'' : K'].$$

Remarque 1.64. (i) Dans la situation de la définition 1.62, soit Σ une partie de E ; on notera par $K[\Sigma]$ (resp. $K(\Sigma)$) l'intersection de tous les sous-anneaux (resp. de tous les sous-corps) de E contenant K et Σ . Evidemment $K[\Sigma]$ est la plus petite K -sous-algèbre de E contenant Σ , et $K(\Sigma)$ est la plus petite extension de K contenue dans E et contenant Σ . Si $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$, on notera cette K -sous-algèbre (resp. cette sous-extension de K) aussi par $K[x_1, \dots, x_n]$ (resp. par $K(x_1, \dots, x_n)$). On dit que E est une *extension monogène* (resp. *finiment engendrée*) de K s'il existe $x \in E$ tel que $E = K(x)$ (resp. s'il existe une partie finie $\Sigma \subset E$ telle que $E = K(\Sigma)$).

(ii) Soit $x \in E$ algébrique sur K ; alors la partie $I := \{Q \in K[X] \mid Q(x) = 0\}$ est un idéal premier $\neq 0$, car elle est le noyau de l'homomorphisme de K -algèbres $f : K[X] \rightarrow K[x]$ tel que $f(X) = x$. Donc I est maximal, engendré par un unique polynôme unitaire P , appelé le *polynôme minimal de x sur K* (exemple 1.2(ii) et exercice 1.8), et on voit aussitôt que P est *irréductible* dans $K[X]$.

Proposition 1.65. Soient $K \subset E$ une extension de corps, $x \in E$, et $F \subset E$ la partie des éléments algébriques sur K . Alors :

- (i) $x \in F \Leftrightarrow K[x]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie $\Leftrightarrow K[x] = K(x)$.
- (ii) Pour toute partie finie $\Sigma \subset F$ on a $[K(\Sigma) : K] < +\infty$.
- (iii) F est un sous-corps de E , appelé la fermeture algébrique de K dans E .
- (iv) F est algébriquement fermé dans E .
- (v) Pour toute partie $\Sigma \subset F$ on a $K(\Sigma) = K[\Sigma]$.

Démonstration. (i) : Soit $f : K[X] \rightarrow E$ l'homomorphisme de K -algèbres tel que $f(X) = x$; évidemment $\text{Im}(f) = K[x]$, et $\text{Ker } f = P \cdot K[X]$ pour quelque $P \in K[X]$ (exemple 1.2(ii)). Ainsi f induit un isomorphisme $K[X]/(P) \xrightarrow{\sim} K[x]$ et on a :

$$x \in F \Leftrightarrow P \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \in \text{Max } K[X] \Leftrightarrow K[X]/(P) \text{ est un corps.}$$

(remarque 1.64(ii) et proposition 1.5(ii)). En outre, si $P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$, le quotient $K[X]/(P)$ est un K -espace vectoriel de dimension n (avec une base formée des classes de $1, X, \dots, X^{n-1}$), d'où les équivalences souhaitées.

(ii) : On raisonne par récurrence sur la cardinalité n de Σ . Si $n = 1$, l'assertion découle de (i); soit alors $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute partie de F de cardinalité $n - 1$. Choisissons $x \in \Sigma$, et soit $\Sigma' := \Sigma \setminus \{x\}$; évidemment x est algébrique sur $K(\Sigma')$, donc $[K(\Sigma) : K(\Sigma')] < +\infty$; d'autre part, par hypothèse on a $[K(\Sigma') : K] < +\infty$, et il suffit alors d'invoquer l'exercice 1.63.

(iii) : Soient $x, y \in F \setminus \{0\}$; d'après (ii) on a $[K(x, y) : K] < +\infty$; mais

$$K(xy), K(x^{-1}), K(x + y) \subset K(x, y)$$

donc $xy, x^{-1}, x + y \in F$, par (i), et évidemment $K \subset F$, d'où l'assertion.

(iv) : Soit $y \in E$ algébrique sur F ; ainsi, il existe $P \in F[X]$ avec $P(y) = 0$. Soient $P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$ avec $a_1, \dots, a_n \in F$, et $E' := K(a_1, \dots, a_n)$; d'après (ii), il vient $[E' : K] < +\infty$, et y est algébrique sur E' , donc $[E'(y) : E'] < +\infty$. Par suite, $[K(y) : K] \leq [E'(y) : K] < +\infty$ (exercice 1.63), d'où $y \in F$, d'après (i).

(v) : Pour tout $x \in K(\Sigma)$ il existe une partie finie $\Delta \subset \Sigma$ avec $x \in K(\Delta)$, et on se ramène aussitôt à vérifier que $K(\Delta) = K[\Delta]$. Cela découle de (i) et d'une simple récurrence sur la cardinalité de Δ : les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

Remarque 1.66. (i) Soient $K \subset E$ et $E \subset F$ des extensions algébriques de corps; alors l'extension composée $K \subset F$ est algébrique. En effet, soit $x \in F$, et notons par $P \in E[X]$ le polynôme minimal de x ; il existe une partie finie $\Sigma \subset E$ telle que $P \in K(\Sigma)[X]$, et x est alors algébrique sur $K(\Sigma)$. Par suite, $[K(x) : K] \leq [K(x, \Sigma) : K] = [K(x, \Sigma) : K(\Sigma)] \cdot [K(\Sigma) : K] < +\infty$ (proposition 1.65(i,ii)), donc x est algébrique sur K (proposition 1.65(i)).

(ii) Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $F_1, F_2 \subset E$ des sous-corps. On notera par $F_1F_2 \subset E$ le plus petit sous-corps de E contenant F_1 et F_2 . Si F_1 est une extension algébrique de K , et $K \subset F_2$, alors F_1F_2 est une extension algébrique de F_2 . En effet, évidemment $F_1F_2 = F_2(F_1)$, donc il suffira de montrer que chaque $x \in F_1$ est algébrique sur F_2 (proposition 1.65(iii)); mais cela est clair, car x est algébrique sur K , et $K \subset F_2$.

(iii) Dans la situation de (ii), si F_1 et F_2 sont des extensions algébriques de K , il en est de même pour F_1F_2 : cela découle aussitôt de (i) et (ii).

Définition 1.67. Soient K un corps, $P \in K[X] \setminus K$, et E une extension de K .

(i) E est un *corps de décomposition* de P s'il existe $a_1, \dots, a_k \in E$ (avec $a_i \neq a_j$ pour tout $i \neq j$) et $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $P = \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{d_i}$ dans $E[X]$, et $E = K(a_1, \dots, a_k)$. Pour $i = 1, \dots, k$, on appelle d_i la *multiplicité* de la racine a_i .

(ii) On dit que K est *algébriquement clos* s'il est le corps de décomposition de tout $Q \in K[X] \setminus K$. On dit que E est une *clôture algébrique* de K s'il est une extension algébrique de K et s'il est algébriquement clos.

Exercice 1.68. (i) Montrer que tout $P \in K[X] \setminus K$ a un corps de décomposition E , et que $[E : K]$ divise $\deg_X(P)!$.

(ii) Soit $K \subset E$ une extension algébrique. Montrer que E est une clôture algébrique de K si et seulement si chaque polynôme irréductible de $K[X]$ admet un corps de décomposition contenu dans E .

Proposition 1.69. Soient $f : K_1 \xrightarrow{\sim} K_2$ un isomorphisme de corps, $P_1 := a_0X^n + \dots + a_n \in K_1[X] \setminus K_1$, et E_1 (resp. E_2) un corps de décomposition de P_1 (resp. de $P_2 := \sum_{i=0}^n f(a_i)X^{n-i}$). Alors f se prolonge en un isomorphisme de corps $E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$.

Démonstration. Montrons d'abord :

Affirmation 1.70. Pour $i = 1, 2$ soit $x_i \in E_i$ avec $P_i(x_i) = 0$. Si P_1 est irréductible dans $K_1[X]$, f se prolonge en un isomorphisme $K_1(x_1) \xrightarrow{\sim} K_2(x_2)$ avec $x_1 \mapsto x_2$.

Preuve : Cela est clair, car sous ces hypothèses P_2 est irréductible dans $K_2[X]$, et par suite, pour $i = 1, 2$ on a un isomorphisme de K_i -algèbres $K_i[X]/(P_i) \xrightarrow{\sim} K_i(x_i)$ tel que $X \mapsto x_i$: voir la preuve de la proposition 1.65(i). $\diamond$

On raisonne par récurrence sur le degré n de P_1 . L'assertion est triviale si $n = 1$. Soit alors $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout polynôme de degré $< n$; soit $Q_1 := \sum_{i=0}^m b_i X^{n-i}$ un facteur irréductible de P_1 , et posons $Q_2 := \sum_{i=0}^m f(b_i)X^{n-i}$. Pour $i = 1, 2$, choisissons $x_i \in E_i$ avec $Q_i(x_i) = 0$, et soit $K'_i := K(x_i)$; d'après l'observation 1.70, f se prolonge en un isomorphisme $f' : K'_1 \xrightarrow{\sim} K'_2$ avec $f'(x_1) = x_2$. Evidemment pour $i = 1, 2$ il existe $R_i \in K'_i[X]$ tel que $P_i = (X - x_i) \cdot R_i$ dans $K'_i[X]$, et E_i est un corps de décomposition de R_i ; par hypothèse de récurrence, f' se prolonge alors en un isomorphisme $E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$. $\square$

Théorème 1.71. (i) Tout corps K admet une clôture algébrique $\bar{K}$.

(ii) Pour toute extension algébrique de corps $K \rightarrow E$ il existe un homomorphisme de K -algèbres $E \rightarrow \bar{K}$.

(iii) $\bar{K}$ est unique, à isomorphisme de K -algèbres près.

(iv) Plus précisément, si E est une autre clôture algébrique de K , tout homomorphisme de K -algèbres $\phi : E \rightarrow \bar{K}$ est un isomorphisme.

Démonstration. (i) : Pour tout entier $n > 1$ soit $\Sigma_n \subset K[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré n . Pour tout $f \in \Sigma_n$, soient $X_{1,f}, \dots, X_{n,f}$ des indéterminées ; disons que :

$$f = X^n + a_{f,1}X^{n-1} + \dots + a_{f,n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n (X - X_{i,f}) = X^n + P_{f,1}X^{n-1} + \dots + P_{f,n}$$

avec $a_{f,1}, \dots, a_{f,n} \in K$ et $P_{f,1}, \dots, P_{f,n} \in K[X_{1,f}, \dots, X_{n,f}]$, et pour $i = 1, \dots, n$ posons $Q_{f,i} := a_{f,i} - P_{f,i}$. Soit en outre

$$A := K[X_{1,f}, \dots, X_{n,f} \mid n > 1, f \in \Sigma_n]$$

et notons $I \subset A$ l'idéal engendré par $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{f \in \Sigma_n} \{Q_{f,i} \mid i = 1, \dots, n\}$. Vérifions que $1 \notin I$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $f_1, \dots, f_k \in \Sigma$, $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_k \in A$ tels que $Q_{f_1, j_1} \cdot a_1 + \dots + Q_{f_k, j_k} \cdot a_k = 1$; il existe une partie finie $S \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout $n \in S$ une partie finie $\Delta_n \subset \Sigma_n$ tels que

$$f_1, \dots, f_k \in \bigcup_{n \in S} \Delta_n \quad \text{et} \quad a_1, \dots, a_k \in A' := K[X_{1,f}, \dots, X_{n,f} \mid n \in S, f \in \Delta_n].$$

Soit en outre $I' \subset A'$ l'idéal engendré par $\mathcal{Q} := \bigcup_{n \in S} \bigcup_{f \in \Delta_n} \{Q_{f,i} \mid i = 1, \dots, n\}$, de sorte que $1 \in I'$. Soit E un corps de décomposition de $\prod_{f \in \Delta} f \in K[X]$ (exercice 1.68(ii)) ; ainsi, pour tout $n \in S$ et tout $f \in \Delta_n$ il existe $y_{1,f}, \dots, y_{n,f} \in E$ tels que $f = \prod_{i=1}^n (X - y_{i,f})$ dans $E[X]$. Soit alors $\phi : A' \rightarrow E$ l'homomorphisme de K -algèbres tel que $\phi(X_{i,f}) := y_{i,f}$ pour tout $n \in S$, tout $f \in \Delta_n$, et tout $i = 1, \dots, n$. Par construction, $\phi(Q_{f,i}) = 0$ pour tout $Q_{f,i} \in \mathcal{Q}$; i.e. $I' \subset \text{Ker}(\phi)$, contradiction.

Soient $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ avec $I \subset \mathfrak{m}$ (corollaire 1.35(i)) et $\overline{K} := A/\mathfrak{m}$. Par construction, les classes $\xi_{1,f}, \dots, \xi_{n,f} \in \overline{K}$ de $X_{1,f}, \dots, X_{n,f}$ sont algébriques sur K , pour tout $n > 1$, et tout $f \in \Delta_n$, donc $\overline{K}$ est une extension algébrique de K (proposition 1.65(iii)); en outre, $f = \prod_{i=1}^n (X - \xi_{i,f})$ dans $\overline{K}[X]$, donc $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K (exercice 1.68(ii)).

(ii) : Soit J l'ensemble des couples (F, α) , où F est une extension de K contenue dans E , et $\alpha : F \rightarrow \overline{K}$ est un homomorphisme de K -algèbres. On munit J de l'ordre partiel tel que $(F, \alpha) \leq (F', \alpha')$ si $F \subset F'$ et α est la restriction de α' sur F . On a $J \neq \emptyset$, car $(K, \alpha_0) \in J$, avec l'inclusion $\alpha_0 : K \rightarrow \overline{K}$. En outre, si $((F_\lambda, \alpha_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée non vide de J , posons $F := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, et soit $\alpha : F \rightarrow \overline{K}$ l'unique homomorphisme de K -algèbres dont la restriction à F_λ coïncide avec α_λ , pour tout $\lambda \in \Lambda$; évidemment $(F_\lambda, \alpha_\lambda) \leq (F, \alpha)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. D'après le lemme de Zorn, J admet donc un élément maximal (G, β) , et il suffit de vérifier que $G = E$. Or, soit par l'absurde $x \in E \setminus G$, et soit $P := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in G[X]$ le polynôme minimal de x ; posons $H := \beta(G)$, et choisissons une racine $y \in \overline{K}$ du polynôme $X^n + \beta(a_1)X^{n-1} + \dots + \beta(a_n) \in H[X]$. D'après l'observation 1.70, β se prolonge en un homomorphisme $\beta' : G(x) \xrightarrow{\sim} H(y) \subset \overline{K}$ de K -algèbres, et évidemment $(G(x), \beta') > (G, \beta)$, contradiction.

(iv) : ϕ identifie E avec un sous-corps de $\overline{K}$. Mais l'extension $E \subset \overline{K}$ est algébrique, et E est algébriquement clos, donc $E = \overline{K}$.

(iii) : Soit E une autre clôture algébrique; d'après (ii) on a un homomorphisme $E \rightarrow \overline{K}$ de K -algèbres, donc l'assertion découle de (iv). $\square$

Définition 1.72. (i) Soient K un corps, $P \in K[X] \setminus K$ un polynôme irréductible, E un corps de décomposition de P . On dit que P est *séparable* si chaque racine de P dans E a multiplicité 1. On dit que P est *inséparable* s'il n'est pas séparable.

(ii) On dit que K est *parfait* si tout polynôme irréductible de $K[X]$ est séparable.

Exercice 1.73. Soient K un corps, $P \in K[X] \setminus K$, et $P' \in K[X]$ la *dérivée* de P (i.e. si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, alors $P' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$). Soit E un corps de décomposition de P . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) chaque racine de P dans E a multiplicité 1
- (b) le plus grand commun diviseur de P et P' est 1 dans $K[X]$.

Remarque 1.74. On voit aisément (e.g. avec l'exercice 1.73) que la définition 1.72(i) est indépendante du choix du corps de décomposition E .

(ii) Soient K, P, E comme dans la définition 1.72(i); si $P' \neq 0$, évidemment P et P' n'ont aucun facteur en commun, car P est irréductible et $\deg_X P' < \deg_X(P)$. D'autre part, si K est de caractéristique 0, on a $P' \neq 0$ pour tout $P \in K[X] \setminus K$. Au vu de l'exercice 1.73, on conclut que *tout corps de caractéristique 0 est parfait*.

1.4.1. Endomorphisme de Frobenius. Soit ensuite K de caractéristique $p > 0$; on voit aisément que $P' = 0$ si et seulement s'il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = Q(X^p)$. Ainsi, pour tout $a \in E$ on a l'équivalence : $P(a) = 0 \Leftrightarrow Q(a^p) = 0$. Noter que $(x + y)^p = x^p + y^p$ et $(xy)^p = x^p y^p$ pour tout $x, y \in K$; i.e. l'application $x \mapsto x^p$ est un endomorphisme ϕ du corps K , que l'on appelle *de Frobenius*. En particulier, ϕ est *injectif*, et son image est un sous-corps $K^p \subset K$; plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on notera par $K^{p^n} \subset K$ l'image de $\phi^n : K \rightarrow K$ (telle que $x \mapsto x^{p^n}$ pour tout $x \in K$). En outre, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , et noter que l'endomorphisme de Frobenius $\overline{\phi}$ de $\overline{K}$ est un isomorphisme, donc ses puissances $\overline{\phi}^n : \overline{K} \rightarrow \overline{K}$ sont définies pour tout $n \in \mathbb{Z}$; on dénote alors par $K^{p^{-n}} \subset \overline{K}$ l'image de $\overline{\phi}^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; posons aussi $K^{p^{-\infty}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^{p^{-n}}$. Avec le théorème 1.71(iii) on voit aisément que $K^{p^{-n}}$ est une extension de K indépendante du choix de $\overline{K}$, à isomorphisme unique de K -algèbres près, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a le critère suivant :

Proposition 1.75. *Un corps K de caractéristique $p > 0$ est parfait $\Leftrightarrow K = K^p$.*

Démonstration. Si $a \in K \setminus K^p$, montrons que $P := X^p - a$ est irréductible dans $K[X]$: car si b est une racine de P dans son corps de décomposition, on a $b^p = a$, d'où $P = (X - b)^p$, et tout facteur irréductible de P dans $K[X]$ est de la forme $Q := (X - b)^i$ avec $1 \leq i \leq p$. Mais noter que le coefficient de Q en degré $i - 1$ est $-ib$; puisque $b \notin K$, on a alors forcément $i = p$. Donc, K n'est pas parfait si $K \neq K^p$. Ensuite, si $K = K^p$, considérons un polynôme irréductible P de $K[X]$; si $P' \neq 0$, on sait que P est séparable (remarque 1.74(ii) et exercice 1.73). Si $P' = 0$, on a vu qu'il existe $Q \in K[X]$ avec $P = Q(X^p)$; mais puisque $K = K^p$, on a $Q = \sum_{i=0}^n a_i^p X^i$ pour certains $a_0, \dots, a_n \in K$, d'où $P = (\sum_{i=0}^n a_i X^i)^p$, contradiction. $\square$

Exercice 1.76. Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, et $a \in K \setminus K^p$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P := X^{p^n} - a$ est irréductible dans $K[X]$.

Définition 1.77. Soient $K \subset E$ une extension algébrique de corps, et $x \in E$.

(i) On dit que x est *séparable* (resp. *inséparable*) sur K si le polynôme minimal $P \in K[X]$ de x est séparable (resp. inséparable).

(ii) On dit que x est *purement inséparable* sur K si la caractéristique de K est $p > 0$, et s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $x^{p^n} \in K$.

(iii) On dit que E est une *extension séparable* de K si tout élément de E est séparable sur K ; sinon, on dit que E est une *extension inséparable* de K .

(iv) On dit que E est une *extension purement inséparable* de K si tout élément de E est purement inséparable sur K .

(v) Soit aussi $\overline{K}$ une clôture algébrique de K . Le *degré de séparabilité* de E sur K , est la cardinalité de $K - \text{Alg}(E, \overline{K})$, que l'on notera :

$$[E : K]_s.$$

Remarque 1.78. (i) Evidemment, un corps K est parfait $\Leftrightarrow$ toute extension algébrique de K est séparable. En outre, avec le théorème 1.71(iii) on voit aussitôt que la définition 1.77(v) est indépendante du choix de $\overline{K}$.

(ii) Tout corps fini est parfait, car son endomorphisme de Frobenius est injectif, donc forcément bijectif, et l'assertion découle alors de la proposition 1.75.

(iii) Avec la notation du §1.4.1, évidemment $K^{p^{-n}}$ est une extension purement inséparable de K , pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Exercice 1.79. (i) Soient $K \subset E$ une extension algébrique de corps, et $x \in E$. Montrer que x est séparable sur $K \Leftrightarrow [K(x) : K]_s = [K(x) : K]$.

(ii) Soient $K \subset K' \subset K''$ deux extensions algébriques de corps. Montrer que :

$$[K'' : K]_s = [K' : K]_s \cdot [K'' : K']_s.$$

(iii) Soit $K \subset E$ une extension de corps de degré fini. Montrer que :

$$0 < [E : K]_s \leq [E : K].$$

(iv) Dans la situation de (i), soit $p > 0$ la caractéristique de K et E . Montrer que x est séparable sur K si et seulement si $x \in K(x^p)$.

Théorème 1.80. (i) Soit $K \subset E$ une extension de corps de degré fini. Alors E est une extension séparable de K si et seulement si $[E : K]_s = [E : K]$.

(ii) Soient $\phi : K \rightarrow E$ et $\psi : E \rightarrow F$ deux extensions algébriques de corps. Alors ϕ et ψ sont séparables si et seulement s'il en est de même pour $\psi \circ \phi : K \rightarrow F$.

(iii) Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $F_1, F_2 \subset E$ des sous-corps contenant K , avec F_1 algébrique et séparable sur K . Alors :

(a) $F_1 F_2$ est une extension algébrique séparable de F_2 .

(b) Si aussi F_2 est algébrique et séparable sur K , il en est de même pour $F_1 F_2$.

Démonstration. (i) : Soit $x \in E$; d'après les exercices 1.63 et 1.79(ii) on a :

$$[E : K] = [E : K(x)] \cdot [K(x) : K] \quad \text{et} \quad [E : K]_s = [E : K(x)]_s \cdot [K(x) : K]_s.$$

Or, si $[E : K]_s = [E : K]$, compte tenu de l'exercice 1.79(iii) il vient $[K(x) : K]_s = [K(x) : K]$, donc x est séparable sur K , d'après l'exercice 1.79(i). Réciproquement, soit E séparable sur K , et disons que $E = K(x_1, \dots, x_n)$ pour une suite finie $x_1, \dots, x_n \in E$; posons $E_0 := K$ et $E_i := K(x_1, \dots, x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Afin de vérifier que $[E : K]_s = [E : K]$, on est ramené à montrer que $[E_{i+1} : E_i]_s = [E_{i+1} : E_i]$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$ (encore par les exercices 1.63 et 1.79(ii)). Mais x_{i+1} est évidemment séparable sur E_i , car le polynôme minimal de x_{i+1} sur E_i divise le polynôme minimal de x_{i+1} sur K ; il suffit alors d'invoquer l'exercice 1.79(i).

(ii) : Trivialement, si $\psi \circ \phi$ est séparable, il en est de même pour ϕ et ψ . Réciproquement, si ϕ et ψ sont séparables, montrons que tout $x \in F$ est séparable sur K . Pour cela, soit $P := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in E[X]$ le polynôme minimal de x , et posons $E' := K(a_1, \dots, a_n)$. Evidemment x est séparable sur E' , et E' est une extension séparable de degré fini de K (proposition 1.79(ii)); d'après (i) et les exercices 1.63 et 1.79(ii) il vient :

$$[E'(x) : K]_s = [E'(x) : E']_s \cdot [E' : K]_s = [E'(x) : E'] \cdot [E' : K] = [E'(x) : K].$$

Avec (i) on conclut que $E'(x)$ est une extension séparable de K , comme souhaité.

(iii.a) : Puisque $F_1 F_2 = F_2(F_1)$, il suffit de montrer que pour toute partie finie $\Sigma \subset F_1$ l'extension $F_2 \subset F_2(\Sigma)$ est séparable. Or, si $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$, posons $F_{2,0} := F_2$ et $F_{2,i} := F_2(x_1, \dots, x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$; d'après (ii), on est ramené à vérifier que l'extension $F_{2,i} \subset F_{2,i+1}$ est séparable pour $i = 0, \dots, n-1$. Mais d'après (i) et l'exercice 1.79(i), cela revient à montrer que x_{i+1} est séparable sur $F_{2,i}$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et cela est clair, car le polynôme minimal de x_{i+1} sur $F_{2,i}$ divise le polynôme minimal de x sur K , et ce dernier est séparable, par hypothèse.

(iii.b) découle aussitôt de (ii) et (iii.a). $\square$

Corollaire 1.81. Soient $K \subset E$ une extension algébrique de corps de caractéristique p quelconque, et $F \subset E$ la partie des éléments séparables sur K . Alors :

- (i) F est un sous-corps de E , et l'extension $F \subset E$ est purement inséparable.
- (ii) Si $[F : K] < +\infty$, alors $[E : K]_s = [F : K]$.
- (iii) Si $[E : K] < +\infty$, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $[E : F] = p^e$ (ici on pose $0^0 := 1$).
- (iv) E est purement inséparable sur $K \Leftrightarrow [E : K]_s = 1$.

On appelle F la fermeture séparable de K dans E .

Démonstration. (i) : Soient $x, y \in F \setminus \{0\}$; d'après l'exercice 1.79(i) et le théorème 1.80(i), les extensions $K \subset K(x)$ et $K \subset K(y)$ sont séparables, donc de même pour $K \subset K(x, y)$ (théorème 1.80(iii.b)). Par suite, $x^{-1}, x+y, xy \in F$, et évidemment $K \subset F$, ainsi F est un sous-corps de E . Si $p = 0$, on a $F = E$; si $p > 0$, soient $a \in E$, et $P \in K[X]$ le polynôme minimal de a ; soit en outre $e \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $Q \in K[X] \setminus K[X^p]$ avec $P = Q(X^{p^e})$. Puisque P est irréductible dans $K[X]$, il en est de même pour Q , et on a $Q' \neq 0$, donc Q est séparable; mais $Q(a^{p^e}) = 0$, d'où $a^{p^e} \in F$.

(ii) : Si $p = 0$, on a $F = E$ par (i), et E est séparable sur K (remarque 1.74(ii)), d'où l'assertion, d'après le théorème 1.80(i). Si $p > 0$, soient $j : F \rightarrow E$ l'inclusion, et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K ; au vu du théorème 1.80(i) il suffit de vérifier que $[E : K]_s = [F : K]_s$, et cela revient à montrer que j induit une bijection :

$$(*) \quad K - \text{Alg}(E, \overline{K}) \rightarrow K - \text{Alg}(F, \overline{K}) \quad f \mapsto f \circ j.$$

La surjectivité de $(*)$ découle aisément du théorème 1.71(ii). Pour l'injectivité, soient $y \in E$, et $g_1, g_2 : E \rightarrow K$ avec $g_1 \circ j = g_2 \circ j$; d'après (i), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a := y^{p^n} \in F$, et évidemment $g_i(y)$ est l'unique racine dans $\overline{K}$ du polynôme $X^{p^n} - g_i(a)$, pour $i = 1, 2$. Puisque $g_1(a) = g_2(a)$, il vient $g_1(y) = g_2(y)$, CQFD.

(iii) : Noter d'abord que $[E : F]_s = 1$, d'après (ii) et l'exercice 1.79(ii), d'où $[E : E']_s = 1$ pour tout sous-corps $E' \subset E$ contenant F ; d'après (i) et (ii), l'extension $E' \subset E$ est alors purement inséparable. Soit $E = F(x_1, \dots, x_n)$, et posons $E_0 := F$ et $E_i := F(x_1, \dots, x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$; par suite, chaque extension $E_i \subset E_{i+1}$ est purement inséparable, et on est ramené à vérifier que $[E_{i+1} : E_i]$ est une puissance entière de p , pour $i = 0, \dots, n-1$. Mais cela est clair, car le polynôme minimal de x_{i+1} sur E_i est de la forme $X^{p^n} - a$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in E_i$ (exercice 1.76).

(iv) : Evidemment, si E est purement inséparable sur K , alors $[E/K]_s = 1$; l'assertion réciproque découle aussitôt de (i) et (ii). $\square$

Remarque 1.82. Soient K un corps, et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K .

(i) La fermeture séparable K^s de K dans $\bar{K}$ est appelée la *clôture séparable* de K (dans $\bar{K}$). On voit aisément que si E est une deuxième clôture algébrique de K , tout isomorphisme de K -algèbres $\bar{K} \xrightarrow{\sim} E$ se restreint en un isomorphisme entre K^s et la fermeture séparable de K dans E ; avec le théorème 1.71(iii), on conclut que la clôture séparable de K est unique, à isomorphisme de K -algèbres près.

(ii) D'après le corollaire 1.81(i), l'extension $K^s \subset \bar{K}$ est purement inséparable. D'autre part, on a aussi une tour canonique d'extensions de corps $K \subset K^{\text{perf}} \subset \bar{K}$ avec K^{perf} purement inséparable sur K , et $\bar{K}$ séparable sur K^{perf} . A savoir, si K est de caractéristique 0, on pose $K^{\text{perf}} := K$. Si K est de caractéristique $p > 0$, on pose $K^{\text{perf}} := K^{p^{-\infty}}$; autrement dit, K^{perf} est la partie des $x \in \bar{K}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $x^{p^n} \in K$. On voit aussitôt que $(K^{\text{perf}})^p = K^{\text{perf}}$, donc K^{perf} est un corps parfait (proposition 1.75), que l'on appelle la *perfection* de K (dans $\bar{K}$).

Problème 1.83. Soit $K \subset E$ une extension séparable de corps de degré fini.

- (i) Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif $K^\times$ est cyclique.
- (ii) Si K est un corps infini, soit en outre F une extension algébrique monogène de E (remarque 1.64(i)). Montrer que l'extension composée $K \subset F$ est monogène.
- (iii) (Théorème de l'élément primitif) Dédurre de (i) et (ii) que E est une extension monogène de K .

Définition 1.84. On dit qu'une extension algébrique de corps $K \subset E$ est *normale* (ou que E est *normal* sur K) si pour tout $x \in E$, le polynôme minimal de x sur K se décompose dans $E[X]$ en produit de polynômes unitaires de degré un.

Proposition 1.85. Soient $f : K \rightarrow E$ une extension algébrique de corps, et $\bar{K}$ une clôture algébrique de E (et de K). Alors f est une extension normale si et seulement si tout homomorphisme de K -algèbres $g : E \rightarrow \bar{K}$ est la composition d'un automorphisme $E \xrightarrow{\sim} E$ avec l'inclusion $j : E \rightarrow \bar{K}$.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, l'élément $g(x) \in \bar{K}$ est une racine du polynôme minimal P de x sur K ; si f est normale, on a donc $g(x) \in E$ pour tout tel x , i.e. $g = j \circ h$ pour un endomorphisme (injectif) de K -algèbres $h : E \rightarrow E$. Vérifions la surjectivité de h . Pour cela, noter que par hypothèse E contient un corps de décomposition E' de P , et évidemment $h(E') \subset E'$; mais $[E' : K] < +\infty$, et h est K -linéaire, donc $h(E') = E'$, et en particulier $x \in h(E') \subset h(E)$.

Réciproquement, supposons que tout $g \in K - \text{Alg}(E, \bar{K})$ soit la composition de j avec un automorphisme de E , et soient x et P comme ci-dessus; d'après l'observation 1.70, pour toute racine $y \in \bar{K}$ de P , il existe un homomorphisme unique de K -algèbres $l : K(x) \xrightarrow{\sim} K(y) \subset \bar{K}$ avec $l(x) = y$, et d'après le théorème 1.71(ii), l se prolonge en un homomorphisme $g : E \rightarrow \bar{K}$ de $K(x)$ -algèbres (où l'on munit $\bar{K}$ et E des structures de $K(x)$ -algèbres induites respectivement par l et par l'inclusion $K(x) \subset E$). Par hypothèse, $g = j \circ h$ pour un automorphisme de K -algèbre $h : E \xrightarrow{\sim} E$, donc $y = h(x) \in E$; cela montre que toute racine de P dans $\bar{K}$ est déjà dans E , i.e. f est une extension normale. $\square$

Théorème 1.86. Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $F_1, F_2 \subset E$ des sous-corps contenant K .

- (i) Si l'extension $K \subset F_1$ est normale, il en est de même pour $F_2 \subset F_1 F_2$.
- (ii) Si F_1 et F_2 sont normaux sur K , il en est de même pour $F_1 F_2$ et $F_1 \cap F_2$.
- (iii) Si l'extension $K \subset E$ est normale, il en est de même pour l'extension $F_1 \subset E$.

Démonstration. L'assertion (iii) est triviale. Soit $\overline{E}$ une clôture algébrique de E ; évidemment $\overline{K} := \{x \in \overline{E} \mid x \text{ est algébrique sur } K\}$ est une clôture algébrique de K .

(i) : Soit $g : F_1 F_2 \rightarrow \overline{E}$ un homomorphisme de F_2 -algèbres; ainsi, la restriction de g est l'identité sur F_2 , et puisque F_1 est algébrique sur K , on a $g(F_1) \subset \overline{K}$. D'après la proposition 1.85, il vient alors $g(F_1) = F_1$, donc $g(F_1 F_2) = g(F_1)g(F_2) = F_1 F_2$. Il suffit alors d'invoquer encore la proposition 1.85.

(ii) : Soit $h : F_1 F_2 \rightarrow \overline{K}$ un homomorphisme de K -algèbres; d'après la proposition 1.85, on a $h(F_1) = F_1$ et $h(F_2) = F_2$, donc $h(F_1 F_2) = h(F_1)h(F_2) = F_1 F_2$; par suite $F_1 F_2$ est normal sur K , encore d'après la proposition 1.85. Ensuite, soit $x \in F_1 \cap F_2$; par hypothèse, le polynôme minimal P de x sur K se décompose dans $F_1[X]$ et dans $F_2[X]$ en produit de polynômes unitaires de degré un; mais on a au plus une telle décomposition dans $E[X]$, donc les coefficients de chaque facteur unitaire de P de degré un sont dans $F_1 \cap F_2$; i.e. $F_1 \cap F_2$ est normal sur K . $\square$

Remarque 1.87. (i) Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , et $E \subset \overline{K}$ un sous-corps contenant K . L'ensemble $\mathcal{F}$ des extensions normales $K \subset F$ avec $E \subset F \subset \overline{K}$ est non vide, car $\overline{K} \in \mathcal{F}$, et en raisonnant comme dans la preuve du théorème 1.86(ii) on voit que $L := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est le plus petit élément de $\mathcal{F}$ (ordonné par inclusion). On appelle L la *fermeture normale de E sur K dans $\overline{K}$* .

(ii) Dans la situation de (i), soit $E = K(a_1, \dots, a_n)$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in \overline{K}$, et soit P_i le polynôme minimal de a_i sur K , pour $i = 1, \dots, n$. Alors L est le corps de décomposition de $P := P_1 \cdots P_n$. En effet, il est clair que le corps de décomposition F de P est contenu dans L . D'autre part, pour tout homomorphisme $g : F \rightarrow \overline{K}$ de K -algèbres, et toute racine b de P , on a $P(g(b)) = 0$, donc $g(b) \in F$, et alors $F \in \mathcal{F}$ d'après la proposition 1.85, d'où l'assertion. Donc, les extensions normales de degré fini de K sont les corps de décomposition des polynômes de $K[X]$.

(iii) Dans la situation du théorème 1.86, on peut aussi montrer aisément les assertions suivantes : (a) si l'extension $K \subset F_1$ est purement inséparable, il en est de même pour $F_2 \subset F_1 F_2$; (b) si $K \subset F_1$ et $K \subset F_2$ sont purement inséparables, il en est de même pour l'extension $K \subset F_1 F_2$; (c) si $K \subset F_1$ et $F_1 \subset E$ sont purement inséparables, il en est de même pour l'extension composée $K \subset E$. Les vérifications détaillées sont confiées aux soins du lecteur.

(iv) D'autre part, signalons que si $K \subset F_1$ et $F_1 \subset E$ sont des extensions normales, l'extension composée $K \subset E$ n'est pas forcément normale : la situation générale sera éclaircie au paragraphe suivant.

1.4.2. Théorie de Galois. Soient K un corps, $(G, 1_G, \cdot)$ un groupe; rappelons que les *caractères de G à valeurs dans K* sont les morphismes de groupes $G \rightarrow K^\times$, que l'on peut voir comme éléments de l'ensemble $S(G, K)$ des applications $G \rightarrow K$, que l'on munit de sa structure naturelle de K -espace vectoriel (voir l'exemple 1.12(iii), où cet ensemble est noté K^G). L'observation suivante est due à E. Artin :

Proposition 1.88. Tout ensemble fini de caractères du groupe G à valeurs dans K est une famille libre du K -espace vectoriel $S(G, K)$.

Démonstration. Soit $\chi_1, \dots, \chi_n$ une suite de n caractères distincts; on raisonne par récurrence sur n . L'assertion est triviale si $n = 1$; soit donc $n > 1$, et supposons que la proposition soit déjà connue pour toute famille de caractères de G de cardinalité $n - 1$.

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$, avec $a_i \neq 0$ pour au moins un indice i , et tels que :

$$(*) \quad a_1\chi_1 + \dots + a_n\chi_n = 0 \quad \text{dans } S(G, K).$$

Quitte à permuter les χ_i , on peut supposer que $a_1, a_2 \neq 0$. Soit en outre $h \in G$ tel que $\chi_1(h) \neq \chi_2(h)$. L'identité $(*)$ revient à dire que $A(g) := a_1\chi_1(g) + \dots + a_n\chi_n(g) = 0$ pour tout $g \in G$, d'où aussi

$$B(g) := \sum_{i=1}^n a_i\chi_i(g)\chi_i(h) = \sum_{i=1}^n a_i\chi_i(gh) = 0 \quad \forall g \in G.$$

Si l'on pose $b_i := (1 - \chi_1(h)^{-1}\chi_i(h)) \cdot a_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, il vient $b_2 \neq 0$ et :

$$0 = A(g) - \chi_1(h)^{-1}B(g) = \sum_{i=2}^n b_i\chi_i(g) \quad \forall g \in G$$

i.e. $\sum_{i=2}^n b_i\chi_i = 0$ dans $S(G, K)$; cela contredit l'hypothèse de récurrence. $\square$

Or, soit Γ un groupe d'automorphismes du corps K ; évidemment la partie

$$K^\Gamma := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{a \in K \mid \gamma(a) = a\}$$

est un sous-corps de K , que l'on appelle *le sous-corps des Γ -invariants*, et Γ est alors un groupe d'automorphismes de la K^Γ -algèbre K . Réciproquement, à tout sous-corps $H \subset K$ on peut associer le *groupe de Galois de K sur H* , noté

$$\text{Gal}(K/H)$$

défini comme le groupe des automorphismes de la H -algèbre K . Evidemment

$$H \subset K^{\text{Gal}(K/H)} \quad \text{et} \quad \Gamma \subset \text{Gal}(K/K^\Gamma).$$

L'extension $H \subset K$ est dite *galoisienne* si elle est algébrique et si $H = K^{\text{Gal}(K/H)}$.

Proposition 1.89. *Une extension algébrique de corps $K \subset E$ est galoisienne si et seulement si elle est normale et séparable.*

Démonstration. Soit $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$; si E est galoisien sur K , pour tout $a \in E$ soit $Q_a \in K[X]$ le polynôme minimal de a sur K . Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $0 = \gamma(Q_a(a)) = Q_a(\gamma(a))$, donc $S(a) := \{\gamma(a) \mid \gamma \in \Gamma\}$ est un ensemble fini; posons

$$P_a(X) := \prod_{b \in S(a)} (X - b).$$

L'action de Γ sur E se prolonge en une action sur $E[X]$ telle que

$$\gamma(\sum_{i=0}^n c_i X^{n-i}) := \sum_{i=0}^n \gamma(c_i) X^{n-i} \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \sum_{i=1}^n c_i X^{n-i} \in E[X]$$

et noter que $\gamma(P_a) = \prod_{b \in S(a)} (X - \gamma(b)) = P_a$, donc $P_a \in E[X]^\Gamma = K[X]$. Puisque $P_a(a) = 0$, il s'ensuit que Q_a divise P_a . D'autre part, puisque Γ permute transitivement les éléments de $S(a)$, il est clair que pour toute partie $T \subsetneq S(a)$, le polynôme $\prod_{b \in T} (X - b)$ n'est pas Γ -invariant, i.e. il n'est pas dans $K[X]$; par suite, $P_a = Q_a$, et cela montre que E est une extension normale et séparable de K .

Réciproquement, soit E normal et séparable sur K , et $a \in K^\Gamma$; fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K , et soit en outre $f : K(a) \rightarrow \overline{K}$ un homomorphisme de K -algèbres. Munissons $\overline{K}$ et E des structures de $K(a)$ -algèbres induites par f et respectivement par l'inclusion $K(a) \rightarrow E$; d'après le théorème 1.71(ii), f se prolonge en un homomorphisme de $K(a)$ -algèbres $g : E \rightarrow \overline{K}$, et par hypothèse on a $g(E) = E$, i.e. $g \in \Gamma$; mais alors $g(a) = a$, donc $f = \text{Id}_{K(a)}$. Cela montre que $[K(a) : K]_s = 1$; mais $K(a)$ est une extension séparable de K (théorème 1.80(ii)), donc finalement $[K(a) : K] = 1$, i.e. $a \in K$. $\square$

Corollaire 1.90. *Soient $K \subset E$ une extension séparable de corps, et $\overline{K}$ une clôture algébrique de E . Alors, la fermeture normale $F \subset \overline{K}$ de E sur K est la plus petite extension galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$ et contenant E (voir la remarque 1.87(i)). On appelle F la fermeture galoisienne de E sur K dans $\overline{K}$.*

Démonstration. On voit aisément que la clôture séparable K^s de K dans $\overline{K}$ est une extension normale de K , et par hypothèse $E \subset K^s$. L'assertion découle alors de la remarque 1.87(i) et de la proposition 1.89. $\square$

Théorème 1.91. *Soit Γ un groupe d'automorphismes du corps K , d'ordre fini $o(\Gamma)$. Alors $[K : K^\Gamma] = o(\Gamma)$, $\Gamma = \text{Gal}(K/K^\Gamma)$, et l'extension $K^\Gamma \subset K$ est galoisienne.*

Démonstration. Disons que $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, avec $n := o(\Gamma)$. Chaque γ_i induit par restriction un caractère du groupe $G := K^\times$ à valeurs dans K ; avec la proposition 1.88, on déduit aisément que Γ est une famille libre du K -espace vectoriel $H := \text{Hom}_{K^\Gamma}(K, K)$ (la loi de multiplication scalaire sur H est telle que $(a\phi)(x) := a \cdot (\phi(x))$ pour tout $a \in K$ et tout $\phi \in H$). Posons $m := [K : K^\Gamma]$; si $m = +\infty$, alors $m \geq n$. Si $m < +\infty$, on a $\dim_{K^\Gamma} H = m^2$, et d'autre part, $m \cdot \dim_K H = \dim_{K^\Gamma} H$; par suite, $m = \dim_K H$, et donc $m \geq n$ aussi dans ce cas. Supposons par l'absurde que l'inégalité soit stricte; ainsi, il existe une famille libre $a_1, \dots, a_{n+1}$ dans le K^Γ -espace vectoriel K , et noter que le système d'équations linéaires

$$(*) \quad x_1 \cdot \gamma_i(a_1) + \dots + x_{n+1} \cdot \gamma_i(a_{n+1}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

admet une solution non triviale $x_\bullet \in K^{n+1}$, car le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Choisissons une solution *non triviale* avec un nombre *minimal* r de termes non nuls; quitte à permuter les éléments a_i , on peut supposer que cette solution soit de la forme $(b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0)$ avec $b_1, \dots, b_r \neq 0$, et noter que $r > 1$, car sinon on aurait $b_1 \gamma_1(a_1) = 0$, d'où $b_1 = 0$. On peut en outre supposer que $b_r = 1$, quitte à remplacer chaque b_j par $b_r^{-1} b_j$. Noter aussi qu'il existe au moins un indice $j \in \{1, \dots, r-1\}$ avec $b_j \notin K^\Gamma$, car sinon on aurait la relation K^Γ -linéaire $b_1 a_1 + \dots + b_r a_r = 0$, et cela est absurde, car $a_1, \dots, a_n$ est une famille libre. Quitte à permuter $a_1, \dots, a_{r-1}$, on peut ainsi supposer que $b_1 \notin K^\Gamma$, et on trouve alors $k \in \{1, \dots, n\}$ avec $\gamma_k(b_1) \neq b_1$. On déduit :

$$\sum_{j=1}^r \gamma_k(b_j) \cdot \gamma_i(a_j) = \gamma_k \left(\sum_{j=1}^r b_j \cdot \gamma_k^{-1} \circ \gamma_i(a_j) \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Posons $c_j := b_j - \gamma_k(b_j)$ pour $j = 1, \dots, r$, et noter que $c_1 \neq 0$ et $c_r = 0$; il vient :

$$\sum_{j=1}^{r-1} c_j \cdot \gamma_i(a_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et la suite $(c_1, \dots, c_{r-1}, 0, \dots, 0)$ est alors une solution non triviale du système $(*)$ ayant au plus $r-1$ termes non nuls, contradiction. Cela achève de montrer que $[K : K^\Gamma] = o(\Gamma)$; avec l'exercice 1.79(iii) et le théorème 1.80(i) on déduit aussitôt que $\Gamma = \text{Gal}(K/K^\Gamma)$, d'où trivialement $K^\Gamma = K^{\text{Gal}(K/K^\Gamma)}$. $\square$

Corollaire 1.92. (Correspondance de Galois) *Soient $K \subset E$ une extension de corps galoisienne de degré fini, et $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$. Soient aussi $\mathcal{S}(\Gamma)$ l'ensemble des sous-groupes de Γ , et $\mathcal{T}(E/K)$ l'ensemble des sous-corps de E contenant K . On a :*

- (i) *L'association $\Delta \mapsto E^\Delta$ établit une bijection $E^{(-)} : \mathcal{S}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(E/K)$.*
- (ii) *La réciproque de $E^{(-)}$ est la bijection $\mathcal{T}(E/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\Gamma) : F \mapsto \text{Gal}(E/F)$.*
- (iii) *$[E : E^\Delta] = o(\Delta)$ pour tout $\Delta \in \mathcal{S}(\Gamma)$ ($o(\Delta)$ dénote ici l'ordre du groupe Δ).*
- (iv) *$\Delta \subset \Gamma$ est un sous-groupe normal $\Leftrightarrow K \subset E^\Delta$ est une extension galoisienne.*
- (v) *Si $\Delta \subset \Gamma$ est un sous-groupe normal, on a un isomorphisme de groupes :*

$$\Gamma/\Delta \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(E^\Delta/K).$$

Démonstration. Soit $F \in \mathcal{T}(E/K)$; d'après la proposition 1.89 et les théorèmes 1.80(ii) et 1.86(iii), l'extension $F \subset E$ est galoisienne, i.e. $F = E^{\text{Gal}(E/F)}$. D'autre part, pour tout $\Delta \in \mathcal{S}(\Gamma)$, on a $\Delta = \text{Gal}(E/E^\Delta)$ et $[E : E^\Delta] = o(\Delta)$, d'après le théorème 1.91; cela achève de montrer (i), (ii) et (iii).

(iv) : Soient $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe normal, $\overline{K}$ une clôture algébrique de E , et $f : E^\Delta \rightarrow \overline{K}$ un homomorphisme de K -algèbres; munissons $\overline{K}$ et E des structures de E^Δ -algèbres induites par f et respectivement par l'inclusion $E^\Delta \subset E$. D'après le théorème

1.71(ii), f se prolonge en un homomorphisme $g : E \rightarrow \overline{K}$ de E^Δ -algèbres, et d'après les propositions 1.85 et 1.89, g est la composition d'un automorphisme $\gamma \in \text{Gal}(E/K)$ avec l'inclusion $E \rightarrow \overline{K}$. Or, soient $x \in E^\Delta$ et $\delta \in \Delta$; par hypothèse, $\delta' := \gamma^{-1} \circ \delta \circ \gamma \in \Delta$, d'où :

$$\delta(f(x)) = \delta \circ \gamma(x) = \gamma \circ \delta'(x) = \gamma(x) = f(x).$$

Ainsi, $f(x) \in E^\Delta$ pour tout tel x ; i.e. f est la composition d'un endomorphisme $\overline{f} : E^\Delta \rightarrow E^\Delta$ avec les inclusions $E^\Delta \subset E \subset \overline{K}$, et $\overline{f}$ est un automorphisme, car il est injectif, K -linéaire, et $[E^\Delta : K] < +\infty$. Avec la proposition 1.85, cela achève de montrer que l'extension $K \subset E^\Delta$ est normale, donc même galoisienne.

Réciproquement, soient $F \in \mathcal{T}(E/K)$ galoisien sur K , et $\gamma \in \Gamma$; d'après les propositions 1.85 et 1.89, on a $\gamma(F) = F$, d'où un homomorphisme de groupes $\Gamma \rightarrow \text{Gal}(F/K) : \gamma \mapsto \gamma|_F$, dont le noyau est $\text{Gal}(E/F)$; ainsi, ce dernier est un sous-groupe normal de Γ , et au vu de (i) et (ii), cela achève la preuve de (iv).

(v) : La preuve de (iv) nous fournit déjà un homomorphisme injectif de groupes $\Gamma/\Delta \rightarrow \text{Gal}(E^\Delta/K)$; d'autre part, avec (iii), l'exercice 1.63, et le théorème 1.91 il vient $o(\text{Gal}(E^\Delta/K)) = [E^\Delta : K] = o(\Gamma)/o(\Delta) = o(\Gamma/\Delta)$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 1.93. Soient $K \subset E$ une extension de corps, F la fermeture séparable de K dans E , et $F_1, F_2 \subset E$ des sous-corps contenant K . Soit aussi $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$.

(i) Si E est normal et de degré fini sur K , alors $[E : K]_s = o(\Gamma)$, et E^Γ est purement inséparable sur K . En outre, $K = E^\Gamma \cap F$ et $E = E^\Gamma F$.

(ii) Si l'extension $K \subset F_1$ est galoisienne, il en est de même pour $F_2 \subset F_1 F_2$. En outre, $\gamma(F_1) = F_1$ pour tout $\gamma \in \text{Gal}(F_1 F_2/F_2)$; d'où un morphisme de groupes :

$$(*) \quad \text{Gal}(F_1 F_2/F_2) \rightarrow \text{Gal}(F_1/K) \quad \gamma \mapsto \gamma|_{F_1}$$

qui est injectif, et dont l'image est le sous-groupe $\text{Gal}(F_1/F_1 \cap F_2)$.

(iii) Si F_1 et F_2 sont galoisiens sur K , il en est de même pour $F_1 F_2$ et $F_1 \cap F_2$. En outre, on a un homomorphisme injectif de groupes :

$$(**) \quad \text{Gal}(F_1 F_2/K) \rightarrow \text{Gal}(F_1/K) \times \text{Gal}(F_2/K) \quad \gamma \mapsto (\gamma|_{F_1}, \gamma|_{F_2})$$

qui est un isomorphisme si et seulement si $F_1 \cap F_2 = K$.

Démonstration. (i) : La première assertion découle aussitôt de la proposition 1.85. Avec le théorèmes 1.80(i) et 1.91, et la proposition 1.89, il vient $[E : E^\Gamma] = [E : E^\Gamma]_s = [E : K]_s$, d'où $[E^\Gamma : K]_s = 1$ (exercice 1.79(ii)); au vu du corollaire 1.81(iv) on obtient la deuxième assertion. Puisque K est la seule extension de K qui est à la fois purement inséparable et séparable, on a $K = E^\Gamma \cap F$. En dernier lieu, comme l'extension $F \subset E$ est purement inséparable (corollaire 1.81(i)), il en est de même pour l'extension $E^\Gamma F \subset E$, et comme l'extension $E^\Gamma \subset E$ est séparable (théorème 1.91 et proposition 1.89), il en est de même pour $E^\Gamma F \subset E$, d'où $E^\Gamma F = E$.

(ii) : La première assertion découle aussitôt de la proposition 1.89, du théorème 1.86(i,ii), et du théorème 1.80(iii). Ensuite, dans la situation de (ii), on a $\gamma(F_1) \subset F_1$, car F_1 est une extension normale de K ; de même $\gamma^{-1}(F_1) \subset F_1$, donc $\gamma(F_1) = F_1$. Il est clair que (*) est un homomorphisme injectif de groupes, car si $\gamma|_{F_1} = \text{Id}_{F_1}$, alors $\gamma = \text{Id}_{F_1 F_2}$. De même, il est clair que l'image Δ de (*) est contenue dans $\Gamma := \text{Gal}(F_1/F_1 \cap F_2)$. Or, si $[F_1 : K] < +\infty$, il vient

$$F_1^\Delta = F_1 \cap (F_1 F_2)^{\text{Gal}(F_1 F_2/F_2)} = F_1 \cap F_2$$

d'où $\Delta = \Gamma$, par le corollaire 1.92(i,ii). En dernier lieu, supposons que $[F_1 : K] = +\infty$, et soit $\gamma \in \Gamma$; notons aussi par $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-extensions $F \subset F_1$ galoisiennes de degré fini sur K . Pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $\gamma(F) = F$, i.e. $\gamma|_F \in \text{Gal}(F/F \cap F_2)$, et par ce qui précède il existe alors un unique $\delta^F \in \text{Gal}(F F_2/F_2)$ avec $(\delta^F)|_F = \gamma|_F$. Si $F \subset F' \subset F_1$ est une inclusion d'éléments de $\mathcal{F}$, on a alors $(\delta^{F'})|_{F F_2} = \delta^F$; d'autre part, avec le corollaire 1.90 on voit aussitôt que $F_1 = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Ainsi, il existe un unique

$\delta \in \text{Gal}(F_1 F_2 / F_2)$ tel que $\delta|_{F F_2} = \delta^F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, et évidemment $\delta|_{F_1} = \gamma$, comme souhaité.

(iii) : Pour tout $\gamma \in \text{Gal}(F_1 F_2 / K)$ et $i = 1, 2$, on a $\gamma(F_i) \subset F_i$ et $\gamma^{-1}(F_i) \subset F_i$, car F_i est une extension normale de K , d'où $\gamma(F_i) = F_i$, et cela montre que $(**)$ est bien défini. On voit aussitôt que $(**)$ est injectif. Si $x \in (F_1 \cap F_2) \setminus K$, il existe $\gamma \in \text{Gal}(F_1 / K)$ avec $\gamma(x) \neq x$, et évidemment l'image de $(**)$ ne peut pas contenir $(\gamma, \text{Id}_{F_2})$. Si $F_1 \cap F_2 = K$, d'après (ii) les images suivant $(**)$ des sous-groupes $\text{Gal}(F_1 F_2 / F_1)$ et $\text{Gal}(F_1 F_2 / F_2)$ sont respectivement $\{\text{Id}_{F_1}\} \times \text{Gal}(F_2 / K)$ et $\text{Gal}(F_1 / K) \times \{\text{Id}_{F_2}\}$; évidemment ces sous-groupes engendrent $\text{Gal}(F_1 / K) \times \text{Gal}(F_2 / K)$, donc $(**)$ est surjective. $\square$

Exercice 1.94. (i) Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier premier, et notons par $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à p éléments. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$ de cardinalité p^n , que l'on notera $\mathbb{F}_{p^n}$.

(ii) Pour tout $m, n > 0$, montrer que $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si m divise n .

(iii) Montrer que $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathbb{F}_{p^n}$, et $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p / \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n > 0$.

1.4.3. Extensions transcendentes. Soit $j : K \rightarrow E$ une extension transcendante de corps; cela revient à dire qu'il existe $x \in E$ tel que j se prolonge en un homomorphisme *injectif* de K -algèbres $f : K[X] \rightarrow E$ avec $f(X) := x$, et f se prolonge alors à son tour en une extension de corps $K(X) \rightarrow E$. Plus généralement, soit $\Lambda \subset E$ une partie, et notons par $K[X_\bullet] := K[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ l'algèbre des polynômes en les indéterminées $(X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, et par $K(X_\bullet)$ son corps des fractions; on dit que Λ est une *famille algébriquement libre sur* K si j se prolonge en une extension de corps $g : K(X_\bullet) \rightarrow E$ avec $g(X_\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Si g est en outre une extension algébrique de corps, on dit que Λ est une *base de transcendance* de E sur K , et si g est un isomorphisme, on dit que E est une *extension transcendante pure* de K .

Noter que l'image de g est le sous-corps $K(\Lambda)$ de E . Si E admet une base de transcendance Λ sur K telle que l'extension $K(\Lambda) \subset E$ soit séparable, on dit que E est *séparablement engendré sur* K , et que Λ est une *base de transcendance séparante*.

Cette terminologie est inspirée par les notions usuelles de famille libre et base d'un espace vectoriel, de l'algèbre linéaire, et en fait les deux situations sont des cas particuliers d'une structure plus générale de caractère purement combinatoire qu'il est utile de dégager et étudier séparément : c'est le but de la définition suivante.

Définition 1.95. (i) Soient S un ensemble, $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S , et $\mathcal{D}$ une partie du produit cartésien $S \times \mathcal{P}(S)$. Pour $s \in S$ et $T \subset S$ donnés, on écrira $s \triangleleft T$ pour signifier que $(s, T) \in \mathcal{D}$, et $s \ntriangleleft T$ signifiera que $(s, T) \notin \mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est une *relation de dépendance* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Pour tout $T \in \mathcal{P}(S)$ et tout $s \in T$, on a $s \triangleleft T$
- (b) Si $s \triangleleft T$, alors il existe une partie finie $T' \subset T$ telle que $s \triangleleft T'$
- (c) Soit $U \in \mathcal{P}(S)$ tel que $t \triangleleft U$ pour tout $t \in T$; alors, si $s \triangleleft T$, on a $s \triangleleft U$
- (d) Si $s \triangleleft T$, $t \in T$, et $s \ntriangleleft T \setminus \{t\}$, alors $t \triangleleft (T \setminus \{t\}) \cup \{s\}$.

(ii) On dit qu'une partie $T \subset S$ est *$\mathcal{D}$ -libre* si pour tout $t \in T$ on a $t \ntriangleleft T \setminus \{t\}$; sinon, on dit que T est *$\mathcal{D}$ -liée*. T est *$\mathcal{D}$ -génératrice*, si l'on a $s \triangleleft T$ pour tout $s \in S$.

(iii) Si T est $\mathcal{D}$ -libre et $\mathcal{D}$ -génératrice, on dit que T est une *$\mathcal{D}$ -base* de S .

Exercice 1.96. (i) Soient S un ensemble muni d'une relation $\mathcal{D}$ de dépendance, $a \in S$, et $U \subset U'$ deux parties de S . Montrer que si $a \triangleleft U$, alors $a \triangleleft U'$.

(ii) Montrer que si U' est $\mathcal{D}$ -libre, il en est de même pour U .

(iii) Si U est $\mathcal{D}$ -libre, montrer que $a \ntriangleleft U \Leftrightarrow U \cup \{a\}$ est $\mathcal{D}$ -libre.

Théorème 1.97. Soient S un ensemble muni d'un relation $\mathcal{D}$ de dépendance, $L \subset S$ une partie $\mathcal{D}$ -libre, et $G \subset S$ une partie $\mathcal{D}$ -génératrice avec $L \subset G$. Alors :

(i) Il existe une $\mathcal{D}$ -base B de S avec $L \subset B \subset G$.

(ii) Toutes les $\mathcal{D}$ -bases de S ont la même cardinalité.

Démonstration. (i) : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties $\mathcal{D}$ -libres L' de S avec $L \subset L' \subset G$, muni de l'ordre partiel induit par l'inclusion de parties. Or, soit $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ une partie totalement ordonnée non vide; montrons que $T := \bigcup_{L' \in \mathcal{L}'} L' \in \mathcal{L}$. On raisonne par l'absurde : si $T \notin \mathcal{L}$, il existe $s \in T$ tel que $s \triangleleft T \setminus \{s\}$, et ainsi on trouve une partie finie $T' \subset T \setminus \{s\}$ avec $s \triangleleft T'$; mais alors il existe $L' \in \mathcal{L}'$ avec $\{s\} \cup T' \subset L'$, et il vient $s \triangleleft L' \setminus \{s\}$ (exercice 1.96(i)), contradiction.

D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{L}$ admet alors un élément maximal B , et il reste à vérifier que B est $\mathcal{D}$ -génératrice. Pour cela, d'après l'axiome (c) de la définition 1.95(i) il suffit de montrer que $s \triangleleft B$ pour tout $s \in G$. Mais s'il existait $s \in G$ avec $s \not\triangleleft B$, alors $B \subsetneq B' := B \cup \{s\}$ (grâce à l'axiome (a) de la définition 1.95(i)), et B' serait $\mathcal{D}$ -libre (exercice 1.96(iii)), contredisant la maximalité de B .

(ii) : Soient B, B' deux $\mathcal{D}$ -bases de S , de cardinalités c , respectivement c' ; on doit vérifier que $c = c'$. Supposons d'abord que c soit finie; dans ce cas, on raisonne par récurrence sur la cardinalité c'' de $B \setminus B'$. Si $c'' = 0$, on a $B \subset B'$, et il faut montrer que $B = B'$; mais si $b' \in B' \setminus B$, on a d'un côté $b' \triangleleft B$ (car B est une $\mathcal{D}$ -base), et de l'autre côté $b' \not\triangleleft B' \setminus \{b'\}$ (car B' est $\mathcal{D}$ -libre), et comme $B \subset B' \setminus \{b'\}$, cela contredit l'exercice 1.96(i). Soit ensuite $c'' > 0$, et supposons que l'identité souhaitée soit déjà connue pour tout couple de bases T, T' telles que la cardinalité de $T \setminus T'$ soit $< c''$; par hypothèse, on trouve $b \in B \setminus B'$, et on exhibera $b' \in B'$ avec $b' \not\triangleleft B \setminus \{b\}$. On raisonne par l'absurde : si $b' \triangleleft B \setminus \{b\}$ pour tout $b' \in B'$, avec l'axiome (c) de la définition 1.95(i) on obtient $s \triangleleft B \setminus \{b\}$ pour tout $s \in S$, car $s \triangleleft B'$ pour tout $s \in S$; en particulier, $b \triangleleft B \setminus \{b\}$, contradiction. Posons $B'' := (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$; noter que $B \setminus \{b\}$ est $\mathcal{D}$ -libre (exercice 1.96(ii)), donc de même pour B'' (exercice 1.96(iii)). Appliquons l'axiome (d) de la définition 1.95(i) avec $T := B$, $t := b$ et $s := b'$: il vient $b \triangleleft B''$; d'autre part, on a aussi $s \triangleleft B''$ pour tout $s \in B \setminus \{b\}$ par l'axiome (a) de la définition 1.95(i). Ainsi, $s \triangleleft B''$ pour tout $s \in B$, et puisque B est une $\mathcal{B}$ -base, l'axiome (c) de la définition 1.95(i) entraîne que $s \triangleleft B''$ pour tout $s \in S$, i.e. B'' est une $\mathcal{D}$ -base de S . Par construction, la cardinalité de B'' est c , et celle de $B'' \setminus B'$ est $c'' - 1$; par hypothèse de récurrence il vient finalement $c = c'$.

En dernier lieu, supposons que c soit une cardinalité infinie; alors il en est de même pour c' , par ce qui précède, et il suffit de vérifier que $c \leq c'$. Or, pour tout $b' \in B'$ on trouve, d'après l'axiome (b) de la définition 1.95(i), une partie finie $F_{b'} \subset B$ telle que $b' \triangleleft F_{b'}$, et posons $F := \bigcup_{b' \in B'} F_{b'}$. Montrons que $F = B$: on raisonne par l'absurde : si $b \in B \setminus F$, noter que $b \triangleleft B'$ (car B' est une $\mathcal{D}$ -base) et $b' \triangleleft F$ pour tout $b' \in B'$ (exercice 1.96(i)), d'où $b \triangleleft F$, d'après l'axiome (c) de la définition 1.95(i); mais $b \not\triangleleft B \setminus \{b\}$, et comme $F \subset B \setminus \{b\}$, cela contredit l'exercice 1.96(i). Cela achève de montrer que c est majorée par la cardinalité de $\mathbb{N} \times B'$, et cette dernière est égale à c' , car on vient de voir que c' est infinie. $\square$

Remarque 1.98. (i) Les données $(S, \mathcal{D})$ formées d'un ensemble fini S et d'une relation de dépendance $\mathcal{D}$ sur S sont l'objet de la *théorie des matroïdes*, élaborée à partir du milieu des années 30 par G.Birkhoff, S.MacLane et H.Whitney aux Etats Unis, et par B.L. van der Waerden en Allemagne; il s'agit d'un sujet hybride, niché entre la combinatoire, l'algèbre linéaire, et la théorie des graphes, qui reste jusqu'à nos jours un domaine actif de recherche mathématique.

(ii) Soient K un corps, E un K -espace vectoriel, et $\mathcal{D} \subset E \times \mathcal{P}(E)$ la partie telle que $(v, T) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow v$ est dans le sous-espace de E engendré par T . On vérifie aisément que $\mathcal{D}$ est une relation de dépendance sur E , et les parties $\mathcal{D}$ -libres (resp. les $\mathcal{D}$ -base) sont les familles libres (resp. les bases) du K -espace vectoriel E . Dans ce cas le théorème 1.97 redonne alors l'existence (bien connue) d'une base pour E , et redémontre que toutes les bases de E ont la même cardinalité. Dans la suite, on s'intéressera plutôt à la relation de *dépendance algébrique* sur les extensions de K .

Exercice 1.99. Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $\mathcal{D}_{E/K} \subset E \times \mathcal{P}(E)$ la partie telle que $(x, T) \in \mathcal{D}_{E/K} \Leftrightarrow x$ est algébrique sur le sous-corps $K(T)$.

- (i) Montrer que $\mathcal{D}_{E/K}$ est une relation de dépendance sur E .
- (ii) Montrer que les $\mathcal{D}_{E/K}$ -bases sont les bases de transcendance de E sur K .

Corollaire 1.100. (Théorème de Steinitz) *Toute extension de corps $K \subset E$ admet une base de transcendance, et toutes les bases de transcendance de E sur K ont la même cardinalité, que l'on appelle le degré de transcendance de E sur K , et on notera :*

$$\text{tr.deg}(E/K).$$

Démonstration. Cela découle aussitôt du théorème 1.97 et de l'exercice 1.99. $\square$

Corollaire 1.101. (i) *Soient $K \subset E \subset F$ deux extensions de corps. Alors :*

$$\text{tr.deg}(F/K) = \text{tr.deg}(E/K) + \text{tr.deg}(F/E).$$

(ii) *Soient en outre $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-corps contenant K . Alors :*

$$\text{tr.deg}(F_1 F_2 / F_1) \leq \text{tr.deg}(F_2 / K)$$

$$\text{tr.deg}(F_1 F_2 / K) \leq \text{tr.deg}(F_1 / K) + \text{tr.deg}(F_2 / K).$$

Démonstration. (i) : Soit $\Lambda \subset E$ (resp. $\Sigma \subset F$) une base de transcendance de E sur K (resp. de F sur E) ; il suffit de montrer que $\Lambda \cup \Sigma$ est une base de transcendance de F sur K . Or, par hypothèse E est algébrique sur $K(\Lambda)$, donc $E \cdot K(\Lambda \cup \Sigma) = E(\Sigma)$ est algébrique sur $K(\Lambda \cup \Sigma)$ (remarque 1.66(ii)) ; en outre, F est algébrique sur $E(\Sigma)$, donc aussi sur $K(\Lambda \cup \Sigma)$ (remarque 1.66(i)). Cela achève de vérifier que $\Lambda \cup \Sigma$ est une partie $\mathcal{D}_{F/K}$ -génératrice. Ensuite, soient $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$, $y_1, \dots, y_m \in \Sigma$, et $P \in K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] \setminus \{0\}$ tel que $P(x_\bullet, y_\bullet) = 0$; puisque la famille $x_\bullet$ est algébriquement libre sur K , le polynôme $Q := P(x_\bullet, Y_1, \dots, Y_m)$ est non nul dans $E[Y_1, \dots, Y_m]$. Mais on a $Q(y_\bullet) = 0$, et la famille $y_\bullet$ est algébriquement libre sur E , contradiction. Cela montre que $\Lambda \cup \Sigma$ est une famille $\mathcal{D}_{F/K}$ -libre.

(ii) : Soit Δ une base de transcendance de F_2 sur K ; ainsi, F_2 est algébrique sur $K(\Delta)$, et alors $F_1 F_2$ est algébrique sur $F_1 \cdot K(\Delta) = F_1(\Delta)$ (remarque 1.66(ii)), i.e. Δ est une famille $\mathcal{D}_{F_1 F_2 / F_1}$ -génératrice. D'après le théorème 1.97(i), Δ contient alors une $\mathcal{D}_{F_1 F_2 / F_1}$ -base de $F_1 F_2$, d'où la première inégalité. La deuxième inégalité découle aussitôt de la première et de (i). $\square$

Exercice 1.102. (i) Soient K un corps, A et B deux K -algèbres intègres de type fini, E et F leurs corps de fractions respectifs, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme surjectif de K -algèbres. Montrer que $\text{tr.deg}(E/K) \geq \text{tr.deg}(F/K)$.

(ii) Si, en outre, $\text{tr.deg}(E/K) = \text{tr.deg}(F/K)$, montrer que f est un isomorphisme.

Définition 1.103. (i) Soit $K \subset E$ une extension de corps, $x_\bullet := (x_i \mid i \in I)$ et $y_\bullet := (y_j \mid j \in J)$ deux familles d'éléments de E . On dit que $x_\bullet$ est K -linéairement disjointe de $y_\bullet$, si $(x_i y_j \mid i \in I, j \in J)$ est une famille libre du K -espace vectoriel E .

(ii) Soient de plus $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-corps contenant K . On dit que F_1 et F_2 sont K -linéairement disjoints si toute famille finie libre du K -espace vectoriel F_1 est K -linéairement disjointe de toute famille finie libre du K -espace vectoriel F_2 .

Lemme 1.104. *Dans la situation de la définition 1.103, soient $A_1, A_2 \subset E$ des K -sous-algèbres avec corps des fractions F_1 , respectivement F_2 . Soit de plus $(u_i \mid i \in I)$ une base du K -espace vectoriel A_1 . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) F_1 et F_2 sont K -linéairement disjoints.
- (b) Toute famille finie libre du K -espace vectoriel A_1 est K -linéairement disjointe de toute famille finie libre du K -espace vectoriel A_2 .
- (c) Toute famille finie libre $x_1, \dots, x_n$ du K -espace vectoriel A_1 est une famille libre du F_2 -espace vectoriel $F_1 F_2$.

(d) $u_\bullet$ est une famille libre du F_2 -espace vectoriel F_1F_2 .

Démonstration. Trivialement (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (d).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $x_1, \dots, x_r$ (resp. $y_1, \dots, y_s$) une famille finie libre d'éléments de F_1 (resp. de F_2), et prenons $b_1 \in A_1 \setminus \{0\}, b_2 \in A_2 \setminus \{0\}$ tels que $b_1x_1, \dots, b_1x_r \in A_1$ et $b_2y_1, \dots, b_2y_s \in A_2$; soit aussi $(a_{ij} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ une famille d'éléments de K tels que $a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{rs}x_ry_s = 0$. Il vient $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij}b_1x_i \cdot b_2y_j = 0$, et $b_1x_\bullet$ (resp. $b_2y_\bullet$) est une famille libre du K -espace vectoriel A_1 (resp. A_2); par suite $a_{ij} = 0$ pour chaque i et j , i.e. $x_\bullet$ est K -linéairement disjointe de $y_\bullet$, d'où (a).

(a) $\Rightarrow$ (c) : Soient $y_1, \dots, y_n \in F_2$ tels que $y_1x_1 + \dots + y_nx_n = 0$ dans F_1F_2 , et soit $z_1, \dots, z_r$ une base du K -sous-espace vectoriel V de F_2 engendré par la suite $y_\bullet$. Ainsi il existe une famille $(a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r)$ d'éléments de K avec $y_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}z_j$ pour tout $i = 1, \dots, n$; il vient $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r a_{ij}x_iz_j = 0$, et avec (a) on déduit que $a_{ij} = 0$ pour chaque i et j , donc $y_1 = \dots = y_n = 0$, d'où (c).

(c) $\Rightarrow$ (b) : Soit aussi $y_1, \dots, y_m$ une famille finie libre d'éléments du K -espace vectoriel A_2 , et $(a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ une famille d'éléments de K tels que $a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{nm}x_ny_m = 0$. Avec (c) on déduit que $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où $a_{ij} = 0$ pour chaque i et j , d'où (b).

(d) $\Rightarrow$ (c) : Soit $J \subset I$ une partie finie telle que le K -espace vectoriel V engendré par $(u_j \mid j \in J)$ contient $x_1, \dots, x_n$, et notons par m la cardinalité de J . On trouve $x_{n+1}, \dots, x_m \in V$ tels que $x_\bullet := (x_1, \dots, x_m)$ soit une autre base de V , et il suffit de vérifier que $x_\bullet$ est une famille libre du F_2 -espace vectoriel F_1F_2 , i.e. que $x_\bullet$ engendre un F_2 -sous-espace W de F_1F_2 de dimension m . Mais W est aussi le F_2 -sous-espace engendré par $(u_j \mid j \in J)$, qui est de dimension m , d'après (d). $\square$

Proposition 1.105. Soient $K \subset E \subset F \subset L$ des extensions de corps, et $K' \subset L$ un sous-corps contenant K . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) K' et F sont K -linéairement disjoints.

(b) K', E sont K -linéairement disjoints, et $K'E, F$ sont E -linéairement disjoints.

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (a) : Soient $y_\bullet := (y_\delta \mid \delta \in \Delta)$ une base du K -espace vectoriel E , et $z_\bullet := (z_\sigma \mid \sigma \in \Sigma)$ une base du E -espace vectoriel F . Alors $y_\bullet z_\bullet := (y_\delta z_\sigma \mid (\delta, \sigma) \in \Delta \times \Sigma)$ est une base du K -espace vectoriel F , et d'après le lemme 1.104, il suffit de montrer que $y_\bullet z_\bullet$ est une famille libre du K' -espace vectoriel $K'F$. Pour cela, soient $\Delta' \subset \Delta$ et $\Sigma' \subset \Sigma$ des parties finies, et $(a_{\delta\sigma} \mid (\delta, \sigma) \in \Delta' \times \Sigma')$ une famille d'éléments de K' telle que $\sum_{\delta \in \Delta'} \sum_{\sigma \in \Sigma'} a_{\delta\sigma} y_\delta z_\sigma = 0$; toujours d'après le lemme 1.104, la famille $z_\bullet$ est libre dans le $K'E$ -espace vectoriel $K'EF$, donc $\sum_{\delta \in \Delta'} a_{\delta\sigma} y_\delta = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma'$. De même, $y_\bullet$ est libre dans le K' -espace vectoriel $K'E$, par suite $a_{\delta\sigma} = 0$ pour tout $(\delta, \sigma) \in \Delta' \times \Sigma'$, d'où l'assertion.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Evidemment (a) implique que K' et E sont K -linéairement disjoints. Ensuite, noter que $K'E$ est le corps des fractions de $E[K']$ (notation de la remarque 1.64(i)); d'après le lemme 1.104, toute base $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ du K -espace vectoriel K' est alors aussi une base du E -espace vectoriel $E[K']$, et il suffit de vérifier que $x_\bullet$ est une famille libre du F -espace vectoriel $K'EF$. Mais toujours avec le lemme 1.104 on voit que $x_\bullet$ est une famille libre du F -espace vectoriel $K'F$, d'où l'assertion. $\square$

Proposition 1.106. Soient $K \subset E$ une extension algébrique de corps de caractéristique $p > 0$, et $\bar{E}$ une clôture algébrique de E (et de K). Alors E est séparable sur $K \Leftrightarrow E$ et $K^{p^{-1}}$ sont K -linéairement disjoints dans $\bar{E}$ (notation de §1.4.1).

Démonstration. Si E est séparable sur K , soit $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie libre du K -espace vectoriel E , et complétons $x_\bullet$ en une base $x_1, \dots, x_m$ du K -espace vectoriel $F := K(x_\bullet)$. Soit $a \in E$; alors $a \in K(a^p)$ (exercice 1.79(iv)), donc on a $a = \sum_{i=0}^d y_i a^{pi}$ pour certains $y_0, \dots, y_d \in K$. Puisque les éléments $1, a, \dots, a^d$ sont des combinaisons K -linéaires de $x_1, \dots, x_m$, il est clair que $1, a^p, \dots, a^{pd}$ sont des combinaisons K^p -linéaires de

$x_1^p, \dots, x_m^p$, et donc a est une combinaison K -linéaire de ces mêmes éléments. Cela achève de montrer que le K -espace vectoriel F est engendré par $x_1^p, \dots, x_m^p$; mais alors cette suite est une base du K -espace vectoriel F , car $\dim_K F = m$. En particulier, $x_1^p, \dots, x_n^p$ est une famille libre du K -espace vectoriel F , et il s'ensuit aisément que $x_\bullet$ est une famille libre du $K^{p^{-1}}$ -espace vectoriel $K^{p^{-1}}E$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Compte tenu du lemme 1.104, on conclut que E et $K^{p^{-1}}$ sont K -linéairement disjoints.

Réciproquement, si E et $K^{p^{-1}}$ sont K -linéairement disjoints, soit encore $a \in E$, et $d := [K(a) : K]$; ainsi $\mathcal{B} := \{1, a, \dots, a^{d-1}\}$ est une base du K -espace vectoriel $K(a)$, donc $\mathcal{B}$ est une famille libre du $K^{p^{-1}}$ -espace vectoriel $K^{p^{-1}}E$ (lemme 1.104). Il s'ensuit aisément que $\mathcal{B}' := \{1, a^p, \dots, a^{p(d-1)}\}$ est une famille libre du K -espace vectoriel KE^p ; mais $\mathcal{B} \subset K(a)$, donc $\mathcal{B}$ est une base du K -espace vectoriel $K(a)$, i.e. $K(a) = K(a^p)$, et par suite a est séparable sur K (exercice 1.79(iv)). $\square$

Exercice 1.107. Soient $K \subset E$ une extension de corps de caractéristique $p > 0$, et $\bar{E}$ une clôture algébrique de E ; noter que $\bar{E}$ contient l'extension $K^{p^{-\infty}}$ de K (voir §1.4.1). On suppose que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (a) L'extension $K \subset E$ est transcendante pure.
- (b) L'extension $K \subset E$ est algébrique et séparable.

Montrer que $K^{p^{-\infty}}$ et E sont K -linéairement disjoints.

Théorème 1.108. (Critère de MacLane) Soient $K \subset E$ une extension de corps de caractéristique $p > 0$, et $\bar{E}$ une clôture algébrique de E . Soit aussi $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Les sous-corps $K^{p^{-\infty}}$ et E de $\bar{E}$ sont K -linéairement disjoints.
- (b) Les sous-corps $K^{p^{-1}}$ et E de $\bar{E}$ sont K -linéairement disjoints.
- (c) Tout $\Sigma \in \mathcal{F}$ contient une base de transcendance séparante $\mathcal{B}$ de $K(\Sigma)$ sur K .
- (d) $K(\Sigma)$ est séparablement engendré sur K , pour tout $\Sigma \in \mathcal{F}$.

Démonstration. Trivialement (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (d).

(b) $\Rightarrow$ (c) : Disons que $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$, et raisonnons par récurrence sur n . Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit donc $n > 0$, et supposons que toute partie $\Sigma' \subset E$ de cardinalité $< n$ contient une base de transcendance séparante de $K(\Sigma')$ sur K . Soit $r := \text{tr.deg}(K(\Sigma) : K)$; quitte à permuter les x_i , on peut supposer que $x_1, \dots, x_r$ soit une base de transcendance de $K(\Sigma)$ sur K (théorème 1.97). Si $r = n$, on peut prendre $\mathcal{B} := \Sigma$. Si $r < n$, soit $P \in K[X_1, \dots, X_{r+1}] \setminus \{0\}$ de degré minimal avec $P(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$. Ainsi, P est irréductible dans $K[X_1, \dots, X_{r+1}]$.

Affirmation 1.109. $P \notin K[X_1^p, \dots, X_{r+1}^p]$.

Preuve : On raisonne par l'absurde : si $P \in K[X_1^p, \dots, X_{r+1}^p]$, il existe une famille finie $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de monômes unitaires de $K[X_1, \dots, X_{r+1}]$ et une famille $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'éléments de $K^\times$ telles que $P = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda M_\lambda^p$. Par suite la famille $(M_\lambda(x_1, \dots, x_{r+1})^p \mid \lambda \in \Lambda)$ est liée dans le K -espace vectoriel E , donc la famille $(M_\lambda(x_1, \dots, x_{r+1}) \mid \lambda \in \Lambda)$ est liée dans le $K^{p^{-1}}$ -espace vectoriel $K^{p^{-1}}E$; d'après la condition (b) et le lemme 1.104, cette même famille est alors déjà liée dans le K -espace vectoriel E , i.e. il existe une famille $(b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'éléments de K telle que $Q := \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda M_\lambda \neq 0$, et $Q(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$. D'autre part, le degré de Q est strictement plus petit que le degré de P , contradiction. $\diamond$

Soit F le corps des fractions de $A := K[X_2, \dots, X_{r+1}]$; d'après l'observation 1.109, il existe $Q \in A[X_1] \setminus A[X_1^p]$, et une permutation σ de $\{1, \dots, r+1\}$ tels que $P = Q(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r+1)})$, d'où $Q(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r+1)}) = 0$. En particulier, $x_{\sigma(1)}$ est algébrique sur $K(x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(r+1)})$, et avec le théorème 1.97, il s'ensuit aussitôt que $\Lambda := \{x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(r+1)}\}$ est une base de transcendance de $K(\Sigma)$ sur K . En outre, Q est un polynôme séparable et irréductible de $F[X_1]$ (problème 1.39(ii)), donc $x_{\sigma(1)}$ est séparable sur $K(\Lambda)$. En dernier lieu, soit $\Sigma' := \Sigma \setminus \{x_{\sigma(1)}\}$; il s'ensuit que $x_{\sigma(1)}$ est séparable sur

$K(\Sigma')$, et par hypothèse de récurrence, Σ' contient une base de transcendance séparante $\mathcal{B}$ de $K(\Sigma')$ sur K . Avec le théorème 1.80(ii) on conclut que $\mathcal{B}$ est aussi une base de transcendance séparante pour $K(\Sigma)$ sur K .

(d) $\Rightarrow$ (a) : Pour $\Sigma \in \mathcal{T}$, soit $\mathcal{B}$ une base de transcendance séparante de $K(\Sigma)$ sur K ; par l'exercice 1.107, $K^{p^{-\infty}}$ et $K(\mathcal{B})$ sont K -linéairement disjoints, et $K(\Sigma)$ et $K(\mathcal{B})^{p^{-\infty}}$ sont $K(\mathcal{B})$ -linéairement disjoints. Mais $K^{p^{-\infty}}K(\mathcal{B}) \subset K(\mathcal{B})^{p^{-\infty}}$, donc $K^{p^{-\infty}}K(\mathcal{B})$ et $K(\Sigma)$ sont $K(\mathcal{B})$ -linéairement disjoints; par la proposition 1.105, $K^{p^{-\infty}}$ et $K(\Sigma)$ sont alors K -linéairement disjoints, pour tout $\Sigma \in \mathcal{T}$, d'où (a). $\square$

Remarque 1.110. (i) On dira qu'une extension de corps $K \subset E$ (de caractéristique arbitraire) est *séparable* (ou que E est *séparable sur* K) si elle vérifie la condition (d) du théorème 1.108. Avec le corollaire 1.111(ii) suivant, et l'exercice 1.107, on voit que si E est séparablement engendré sur K , alors il est séparable sur K .

(ii) Si E est finiment engendré sur K , le théorème 1.108 entraîne alors que E est séparable sur $K \Leftrightarrow E$ est séparablement engendré sur K . Toutefois, si E n'est pas finiment engendré sur K , il est possible que E soit séparable sur K sans que E soit séparablement engendré sur K : par exemple, soit K parfait de caractéristique $p > 0$, et soit $K(X)$ le corps des fractions de l'anneau des polynômes $K[X]$; le corollaire 1.111(iii) suivant montre que l'extension $K(X)^{p^{-\infty}}$ de K est séparable, mais elle n'est pas séparablement engendrée (exercice!).

Corollaire 1.111. *Soient $K \subset E \subset F$ deux extension de corps. Alors :*

- (i) *Si F est séparable sur K , il en est de même pour E .*
- (ii) *Si $K \subset E$ et $E \subset F$ sont séparables, alors $K \subset F$ est séparable.*
- (iii) *Si K est parfait, E est séparable sur K .*

Démonstration. Grâce aux remarques 1.74(ii) et 1.78(i), on peut supposer que la caractéristique de K soit $p > 0$. L'assertion (i) découle trivialement des définitions.

(ii) : D'après le théorème 1.108, les extensions $K^{p^{-1}}$ et E sont K -linéairement disjointes, et les extensions $E^{p^{-1}}$ et F sont E -linéairement disjointes. Par suite, $K^{p^{-1}}E$ et F sont E -linéairement disjointes, et $K^{p^{-1}}$ et F sont K -linéairement disjointes (proposition 1.105); il suffit alors d'invoquer encore le théorème 1.108.

(iii) : On a $K^{p^{-1}} = K$, d'après la proposition 1.75, donc $K^{p^{-1}}$ et E sont trivialement K -linéairement disjointes; l'assertion découle alors du théorème 1.108. $\square$

Corollaire 1.112. *Soient $K \subset E$ une extension de corps, et $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-corps contenant K . On a :*

- (i) *Si $[F_1 : K] < +\infty$, alors $[F_2F_1 : F_2] \leq [F_1 : K]$, avec égalité si et seulement si F_1 et F_2 sont K -linéairement disjoints.*
- (ii) *Si F_1 est galoisien sur K , alors F_1 et F_2 sont K -linéairement disjoints si et seulement si $F_1 \cap F_2 = K$.*

Démonstration. (i) : On a $F_1F_2 = F_2[F_1]$ (proposition 1.65(v)), donc toute base du K -espace vectoriel F_1 engendre le F_2 -espace vectoriel F_1F_2 . L'assertion est alors un cas particulier du lemme 1.104.

(ii) : Evidemment, si F_1 et F_2 sont K -linéairement disjoints, alors $F_1 \cap F_2 = K$. Pour la réciproque, soit $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie libre du K -espace vectoriel F_1 ; d'après le lemme 1.104, il suffit de vérifier que $x_\bullet$ est libre dans le F_2 -espace vectoriel F_1F_2 . Soit $F_3 \subset F_1$ la fermeture galoisienne de $K(x_\bullet)$ sur K (corollaire 1.90); il suffit de montrer que $x_\bullet$ est libre dans le F_2 -espace vectoriel F_3F_2 . Donc, quitte à remplacer F_1 par F_3 , on peut supposer que $[F_1 : K] < +\infty$.

Or, d'après le corollaire 1.93(ii), l'extension $F_2 \subset F_1F_2$ est galoisienne de degré $\leq [F_1 : K]$; en outre, on a un homomorphisme injectif de groupes :

$$\Gamma := \text{Gal}(F_1F_2/F_2) \rightarrow \Gamma' := \text{Gal}(F_1/K) \quad \gamma \mapsto \gamma|_{F_1}$$

dont l'image est $\text{Gal}(F_1/F_1 \cap F_2)$. Par suite, si $F_1 \cap F_2 = K$, il vient $o(\Gamma) = o(\Gamma')$, d'où $[F_1 F_2 : F_2] = [F_1 : K]$ (corollaire 1.92(iii)), et on conclut avec (i). $\square$

1.5. Le langage catégoriel. Bien que la théorie des catégories soit un domaine autonome des mathématiques, avec des théorèmes profonds et sa provision de problèmes ouverts qui alimentent une recherche vive, le but primaire de cette section n'est pas de démontrer des résultats nouveaux, mais plutôt de nous doter d'un langage très souple et pratique, qui apportera des économies importantes pour notre exposition, et nous permettra parfois de déceler des correspondances remarquables entre objets algébriques divers, qui resteraient autrement cachées, faute d'un vocabulaire adéquat pour les exprimer.

1.5.1. Axiomatique ensembliste. Il est bien connu que lorsqu'on essaie de manipuler naïvement des collections "très grosses", par exemple "l'ensemble de tous les ensembles", on frôle inévitablement des paradoxes logiques; pour s'en sortir, les théories axiomatiques des ensembles imposent des bornes à la taille des ensembles que l'on peut former légitimement : certains cadres axiomatiques introduisent une distinction entre *classes* et *ensembles*, et la collection de tous les ensembles est alors une classe (et non pas un ensemble); d'autres encore postulent une hiérarchie croissante d'ensembles "très gros" appelés *univers* : si l'on adopte cette croyance, on imagine toujours travailler à l'intérieur d'un univers fixé, tenant lieu d'ensemble de tous les ensembles, mais qui n'est, à son tour, qu'un élément d'un univers encore plus grand. La théorie des catégories s'intéresse souvent précisément à ce type de collections universelles : on veut pouvoir raisonner sur la catégorie des (tous les) ensembles, sur la catégorie de tous les anneaux, ou de tous les espaces topologiques, etc. C'est pourquoi il convient de prêter ici quelques attentions préliminaires à ces questions de fondements que l'on a plutôt tendance à négliger dans la pratique mathématique ordinaire. Donc, *pour notre cours on adoptera l'axiomatique de Bernays-Gödel*; dans cette variante de la théorie des ensembles il existe un concept primitif de *classe* et une relation primitive binaire *d'appartenance* : pour deux classes données X, Y on écrira comme d'habitude $X \in Y$ pour exprimer que X *appartient* à Y , et dans ce cas on dit aussi que X *est un élément* de Y . On définit ensuite les *ensembles* comme les classes qui sont éléments de quelque (autre) classe : intuitivement, les ensembles sont à considérer comme des *classes petites* : par exemple la classe de tous les ensembles est trop grande pour être un ensemble. En outre, on postule que pour tout prédicat $P(x_1, \dots, x_n)$ d'un nombre fini de variables $x_1, \dots, x_n$ il existe une et une seule classe Y telle que pour toute suite finie de n ensembles $X_1, \dots, X_n$ on a $(X_1, \dots, X_n) \in Y \Leftrightarrow P(X_1, \dots, X_n)$ est vraie.

- Cette digression serait incomplète, sans quelques observations sur *l'axiome du choix* : comme déjà mentionné, cet axiome affirme que toute surjection d'ensembles $f : X \rightarrow Y$ admet une section (voir la section 1.3). Mais l'axiomatique de Bernays-Gödel est aussi compatible avec des formes plus fortes de l'axiome du choix, et en particulier avec *l'axiome du choix global* dont l'une des formulations est l'assertion que toute surjection de *classes* admet une section. Cette forme forte est particulièrement intéressante lorsqu'on souhaite développer la théorie des catégories dans son degré de généralité optimal, et y renoncer priverait cette dernière en bonne partie de sa souplesse naturelle : par exemple, elle intervient dans la preuve que toute équivalence de catégories admet un foncteur quasi-inverse (cette proposition est même équivalente à l'axiome du choix global), dans des questions d'existence de foncteurs adjoints, et même dans l'algèbre homologique, si l'on veut pouvoir disposer d'une théorie des foncteurs des cycles Z_i en toute généralité (voir le §2.5.1). Ainsi, *pour ce cours on acceptera l'axiome du choix global*, que l'on appliquera souvent tacitement, sans autre commentaire.

1.5.2. Catégories. Tout d'abord, une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- une *classe* $\text{Ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets* de $\mathcal{C}$

- pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, un *ensemble* $\mathcal{C}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de X vers Y* ; un morphisme $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ est noté par une flèche

$$f : X \rightarrow Y$$

et on dit que X est la *source* et Y le *but* de f

- pour tout $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, une application, dite *loi de composition* de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \quad (f, g) \mapsto g \circ f.$$

Cette donnée doit remplir les conditions suivantes :

- pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un *morphisme identique* $1_X : X \rightarrow X$ qui est neutre pour la composition, *i.e.* tel que

$$1_X \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ 1_X = g \quad \forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall f \in \mathcal{C}(Y, X), \forall g \in \mathcal{C}(X, Y)$$

(évidemment, ces identités déterminent 1_X parmi les éléments de $\mathcal{C}(X, X)$)

- la composition est *associative*, *i.e.* pour tout $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \forall f : X \rightarrow Y, \forall g : Y \rightarrow Z, \forall h : Z \rightarrow W.$$

Définition 1.113. (i) On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie *finie*, si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble fini, et si $\mathcal{C}(X, Y)$ est un ensemble fini pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

- (ii) On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie *petite* si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Exemple 1.114. Voici quelques exemples de catégories :

(i) La catégorie **Ens** des ensembles a pour objets tous les ensembles, et les morphismes sont les applications ensemblistes. Evidemment, le morphisme identique d'un ensemble X est l'identité usuelle Id_X de X .

- (ii) Les espaces topologiques sont les objets d'une catégorie

Top

dont les morphismes sont les applications continues.

(iii) Les anneaux commutatifs (resp. les groupes) sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les homomorphismes d'anneaux (resp. de groupes).

(iv) Soit A un anneau *associatif et unitaire*. Les A -modules à gauche (resp. les A -algèbres *commutatives*) sont les objets d'une catégorie

$$A - \text{Mod} \quad (\text{resp. } A - \text{Alg})$$

dont les morphismes sont les homomorphismes de A -modules (resp. de A -algèbres). Pour $A = \mathbb{Z}$ on retrouve essentiellement les catégories de (iii), car la donnée d'une $\mathbb{Z}$ -algèbre équivaut à celle d'un anneau (remarque 1.3(i)) ; aussi, un $\mathbb{Z}$ -module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien. Donc dans la suite on notera $\mathbb{Z} - \text{Alg}$ et $\mathbb{Z} - \text{Mod}$ les catégories des anneaux et respectivement des groupes abéliens. On a évidemment aussi une catégorie des A -modules à droite, et avec la discussion du §1.1.4, elle s'identifie naturellement avec la catégorie $A^{\text{op}} - \text{Mod}$ des A^{op} -modules à gauche. En outre, à tout couple d'anneaux A, B associatifs unitaires on associe la catégorie des (A, B) -bimodules et des homomorphismes de (A, B) -bimodules (voir le §1.1.5) :

$$(A, B) - \text{Mod}.$$

- (v) Les ensembles partiellement ordonnés sont les objets d'une catégorie

PoEns

avec les morphismes donnés par la définition 1.30(iv).

(vi) On peut associer à toute classe S une catégorie $\mathcal{C}_S$ dont les objets sont les éléments de S , avec les morphismes définis de la façon suivante. Pour tout $x \in S$, il existe un unique morphisme $x \rightarrow x$ (il doit donc être le morphisme identique 1_x) et si $x, y \in S$ sont deux éléments distincts, on a $\mathcal{C}_S(x, y) = \emptyset$. On voit trivialement que pour tout $x, y, z \in S$ il existe une application unique $\mathcal{C}_S(x, y) \times \mathcal{C}_S(y, z) \rightarrow \mathcal{C}_S(x, z)$, et le système de ces

applications fournit une loi de composition qui fait de $\mathcal{C}_S$ une catégorie. Une catégorie de cette forme est appelée *discrète*. Donc, une catégorie est discrète si et seulement si tous ses morphismes sont identiques.

(vii) On peut associer à toute classe partiellement ordonnée $(E, \leq)$ une catégorie $\mathcal{C}_E$, dont les objets sont les éléments de E , et dont les morphismes sont définis de la façon suivante. Pour tout $x, y \in E$ l'ensemble $\mathcal{C}_E(x, y)$ est vide, sauf si $x \leq y$, auquel cas il contient un unique morphisme $\phi_{x,y} : x \rightarrow y$ (et donc $\phi_{x,x} = \mathbf{1}_x$ pour tout $x \in E$); autrement dit, les morphismes de $\mathcal{C}_E$ sont les couples (x, y) d'éléments de E avec $x \leq y$. Comme dans (vi) ci-dessus, on voit aisément que pour tout $x, y, z \in E$ il existe une unique application $\mathcal{C}_E(x, y) \times \mathcal{C}_E(y, z) \rightarrow \mathcal{C}_E(x, z)$, et le système de ces applications forme une loi de composition pour la catégorie $\mathcal{C}_E$.

(viii) Parfois on notera la catégorie des groupes par Grp .

Remarque 1.115. Un moment de réflexion suffit pour constater que la structure de catégorie est parmi les plus répandues : on pourrait prolonger la liste de l'exemple 1.114 *ad infinitum*, parcourant pratiquement tous les champs des mathématiques. En raison de cette ubiquité, la théorie des catégories a même été proposée comme base d'une nouvelle réorganisation conceptuelle des fondements des mathématiques, alternative à la théorie des ensembles : notablement, les paradoxes auxquels on fait allusion au §1.5.1 disparaissent dans un contexte purement catégorique, essentiellement car la relation “ X est un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ ” n'a pas le même statut logique que la relation “ X est un élément de la classe $\mathcal{C}$ ” : voir [37, Chap.8].

1.5.3. Dualité catégorique. Rappelons qu'à toute classe partiellement ordonnée $(E, \leq)$ on a associé son opposée $(E^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$ (voir la remarque 1.31(ii)); on en déduit une catégorie $\mathcal{C}_{E^{\text{op}}}$ que l'on peut décrire directement à partir de $\mathcal{C}_E$: il s'agit de la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}_E$, mais dont tous les morphismes “changent de direction”. Il s'agit d'un cas particulier d'une construction tout à fait générale : si $\mathcal{C}$ est une catégorie arbitraire, on obtient une *catégorie opposée*

$$\mathcal{C}^{\text{op}}$$

dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$, et avec $\mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$ pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, on peut utiliser la notation X^{op} pour signaler que l'on regarde X comme un élément de $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$; de même, tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ correspond à un morphisme $f^{\text{op}} : Y^{\text{op}} \rightarrow X^{\text{op}}$ de $\mathcal{C}^{\text{op}}$, et la loi de composition de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est déterminée par l'identité :

$$f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}} := (g \circ f)^{\text{op}} \quad \forall f : X \rightarrow Y, \forall g : Y \rightarrow Z \text{ dans } \mathcal{C}.$$

En particulier, noter que $\mathbf{1}_{X^{\text{op}}} = (\mathbf{1}_X)^{\text{op}}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Avec cette terminologie, on voit que $\mathcal{C}_E^{\text{op}} = \mathcal{C}_{E^{\text{op}}}$ pour toute classe partiellement ordonnée $(E, \leq)$.

Définition 1.116. (i) Souvent on sélectionne des objets et/ou des morphismes d'une catégorie donnée $\mathcal{C}$ pour définir une nouvelle catégorie : on dit qu'une catégorie $\mathcal{D}$ est une *sous-catégorie de $\mathcal{C}$* si

$$\text{Ob}(\mathcal{D}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$$

et si la loi de composition de $\mathcal{D}$ est la restriction de celle de $\mathcal{C}$.

(ii) Si de plus on a $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, on dit que $\mathcal{D}$ est une *sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$* .

Exemple 1.117. (i) Evidemment, pour spécifier une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ il suffira d'indiquer la classe de ses objets, et à toute partie de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ correspond une et une seule sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$.

(ii) Un exemple de sous-catégorie non pleine de Ens est la catégorie

$$\text{injEns}$$

dont les objets sont les ensembles, et les morphismes sont les applications injectives.

(iii) Si S est une classe, et si $S' \subset S$ est une partie, évidemment $\mathcal{C}_{S'}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_S$ (notation de l'exemple 1.114(vi)).

(iv) De même, si $(E, \leq)$ est une classe partiellement ordonnée, et si $E' \subset E$ est une partie, on peut munir E' de l'ordre partiel induit par celui de E , et évidemment $\mathcal{C}_{E'}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_E$ (notation de l'exemple 1.114(vii)).

1.5.4. *Isomorphismes, monomorphismes, épimorphismes.* Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$; il est naturel d'appeler f un *isomorphisme de $\mathcal{C}$* , s'il existe des morphismes $g, h : Y \rightarrow X$ tels que

$$(*) \quad g \circ f = \mathbf{1}_X \quad \text{et} \quad f \circ h = \mathbf{1}_Y.$$

Par exemple, évidemment, les isomorphismes de la catégorie **Ens** sont les applications bijectives, et ceux de la catégorie **Top** sont les homéomorphismes. Tout morphisme identique de $\mathcal{C}$ est trivialement un isomorphisme, et en particulier tout morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_S$ de l'exemple 1.114(vi) est trivialement un isomorphisme. De même, en raison de la propriété antisymétrique des relations d'ordre, les seuls isomorphismes de la catégorie $\mathcal{C}_E$ de l'exemple 1.114(vii) sont les morphismes identiques. La notion d'isomorphisme est ainsi le premier exemple d'un concept purement catégorique, car il peut s'exprimer avec le langage des morphismes et des lois de composition, et les propriétés des isomorphismes qui peuvent se déduire à partir des axiomes énoncés ci-dessus pour les lois de composition sont alors vraies dans toute catégorie. Par exemple, montrons que si f est un isomorphisme, on a $g = h$ dans $(*)$; en effet, on peut calculer :

$$g = g \circ \mathbf{1}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathbf{1}_X \circ h = h.$$

Remarquons aussi que dans la catégorie **Ens**, l'existence d'un inverse à gauche g (resp. à droite h) pour f est équivalente à l'injectivité (resp. la surjectivité) de f ; d'autre part, dans la catégorie **Top** il existe des applications injectives qui n'admettent aucun inverse (continu) à gauche. On peut alors se demander si l'injectivité est une propriété catégorique des morphismes de la catégorie **Top**. Autrement dit, est-il possible de caractériser les injections continues d'espaces topologiques avec le langage des morphismes et de la composition de morphismes? La réponse est fournie par la définition suivante.

Définition 1.118. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

(i) On dit que f est un *monomorphisme*, s'il induit une injection

$$\mathcal{C}(Z, X) \rightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \quad (h : Z \rightarrow X) \mapsto (f \circ h : Z \rightarrow Y) \quad \forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

(ii) On dit que f est un *épimorphisme*, s'il induit une injection

$$\mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \quad (g : Y \rightarrow Z) \mapsto (g \circ f : X \rightarrow Z) \quad \forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Exercice 1.119. (i) Avec la notation de la définition 1.118, montrer que si f admet un inverse à gauche (resp. à droite), il est un monomorphisme (resp. un épimorphisme). Dans ce cas, on dira aussi que f est *scindé*.

(ii) Montrer que f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est un monomorphisme scindé et un épimorphisme $\Leftrightarrow f$ est un épimorphisme scindé et un monomorphisme.

(iii) Montrer que les monomorphismes de la catégorie **Ens** (resp. **Top**) sont les injections (resp. les injections continues).

(iv) Montrer que les épimorphismes de la catégorie **Ens** (resp. **Top**) sont les surjections (resp. les surjections continues).

(v) On dit qu'un espace topologique T est *complètement régulier*, s'il est séparé, et si pour toute partie fermée $Z \subset T$ et tout $t \in T \setminus Z$ il existe une fonction continue $f : T \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(Z) = 0$ et $f(t) = 1$. Par exemple, d'après le lemme de Urysohn et l'exercice 1.26(ii.a,v), tout espace compact et séparé, et plus généralement, tout espace normal est complètement régulier. Notons par

la sous-catégorie pleine de **Top** dont les objets sont les espaces topologiques complètement réguliers. Montrer que les épimorphismes de **crTop** sont les applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(X)$ soit une partie dense de Y .

(vi) Soit A un anneau *associatif et unitaire*. Montrer que les monomorphismes de la catégorie $A - \mathbf{Alg}$ (resp. $A - \mathbf{Mod}$) sont les homomorphismes injectifs de A -algèbres (resp. les homomorphismes injectifs de A -modules). Montrer aussi que les épimorphismes de $A - \mathbf{Mod}$ sont les homomorphismes surjectifs de A -modules.

Remarque 1.120. (i) D'autre part, on trouvera dans les leçons suivantes des homomorphismes non surjectifs de A -algèbres qui sont des épimorphismes de $A - \mathbf{Alg}$.

(ii) Noter que tout morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_E$ de l'exemple 1.114(vii) est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

(iii) Noter aussi qu'un morphisme f d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un monomorphisme si et seulement si f^{op} est un épimorphisme de la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$: c'est une illustration d'un principe général de la théorie des catégories : tout concept (et tout théorème) catégorique admet un *dual*, obtenu simplement en renversant les directions des flèches.

(iv) Comme déjà vu pour les isomorphismes, certaines propriétés des monomorphismes et épimorphismes suivent des axiomes catégoriels, et ces propriétés sont alors valables dans toute catégorie. Une telle propriété est donnée par l'exercice 1.119(i) ; un autre exemple est l'observation que la composition de monomorphismes $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ est toujours un monomorphisme $g \circ f$. De même pour la composition d'épimorphismes ; d'ailleurs, l'assertion pour les épimorphismes découle de celle pour les monomorphismes, grâce au principe de dualité signalé en (iii).

1.5.5. Foncteurs. La classe des toutes les petites catégories est elle aussi une catégorie ! Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, un morphisme $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est appelé traditionnellement un *foncteur* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Ce dernier est la donnée de :

- une application $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$
- pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ une application $F_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}'(FX, FY)$ soumise aux conditions suivantes :
- pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a $F_{XX}(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{FX}$
- pour tout $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ on a

$$F_{YZ}(g) \circ F_{XY}(f) = F_{XZ}(g \circ f).$$

On dit que F est *fidèle* (resp. *plein*) si F_{XY} est une injection (resp. une surjection) pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Dans la suite, on omettra généralement l'indice dans la notation F_{XY} , et on écrira plus simplement Ff pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$.

Exemple 1.121. Voici quelques exemples de foncteurs :

(i) Toute catégorie $\mathcal{C}$ admet un *foncteur identique* $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, tel que $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}X := X$ et $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}f := f$ pour tout objet X et tout morphisme f de $\mathcal{C}$. Notons aussi que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ sont deux foncteurs, on obtient une composition

$$G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'' \quad X \mapsto G(FX) \quad (f : X \rightarrow Y) \mapsto (G(Ff) : G(FX) \rightarrow G(FY))$$

et cette loi de composition est évidemment associative. Cela justifie notre assertion ci-dessus sur l'existence de la catégorie des petites catégories.

(ii) Soit A un anneau. À tout ensemble Λ on a associé le A -module libre $A^{(\Lambda)}$ (voir l'exemple 1.12(iv)) ; on peut prolonger cette association en un foncteur fidèle

$$A^{(-)} : \mathbf{Ens} \rightarrow A - \mathbf{Mod} \quad \Lambda \mapsto A^{(\Lambda)}.$$

Pour cela, on doit associer à toute application $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ une application A -linéaire $A^{(\phi)} : A^{(\Lambda)} \rightarrow A^{(\Lambda')}$, de telle façon que $A^{(\mathbf{1}_{\Lambda})} = \mathbf{1}_{A^{(\Lambda)}}$ pour tout ensemble Λ , et $A^{(\phi')} \circ A^{(\phi)} = A^{(\phi' \circ \phi)}$ pour toutes applications $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ et $\phi' : \Lambda' \rightarrow \Lambda''$. Soient $(e_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$

et $(e'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ les bases canoniques de $A^{(\Lambda)}$ et respectivement $A^{(\Lambda')}$; pour définir $A^{(\phi)}$ il suffit d'expliciter les images des e_λ , et on pose

$$A^{(\phi)}(e_\lambda) := e'_{\phi(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Avec cette définition, les conditions requises sont trivialement vérifiées.

(iii) D'autre part, on a aussi associé à chaque ensemble Λ le produit direct A^Λ , mais *on ne peut pas* prolonger fonctoriellement cette association sur la catégorie des ensembles (du moins, il n'y a aucune façon naturelle ou simple pour obtenir un tel prolongement). Toutefois, on peut définir un foncteur fidèle

$$A^- : \text{injEns} \rightarrow A - \text{Mod} \quad \Lambda \mapsto A^\Lambda$$

(notation de l'exemple 1.117(ii)). En effet, à toute application *injective* $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ on associe l'application A -linéaire

$$A^\phi : A^\Lambda \rightarrow A^{\Lambda'} \quad (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto (a'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$$

où $a'_{\phi(\lambda)} := a_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $a'_{\lambda'} := 0$, si $\lambda' \notin \phi(\Lambda)$.

(iv) A toute application de classes $\phi : S \rightarrow S'$ on peut associer un foncteur $\mathcal{C}_\phi : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_{S'}$ (notation de l'exemple 1.114(vi)). Pour cela, on pose $\mathcal{C}_\phi(x) := \phi(x)$ et évidemment $\mathcal{C}(\mathbf{1}_x) := \mathbf{1}_{\phi(x)}$ pour tout $x \in S = \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$.

(v) De même, à tout morphisme $\phi : (E, \leq) \rightarrow (E', \leq)$ de classes partiellement ordonnées on peut associer un foncteur $\mathcal{C}_\phi : \mathcal{C}_E \rightarrow \mathcal{C}_{E'}$ tel que $\mathcal{C}_\phi(x) := \phi(x)$ pour tout $x \in E$, et $\mathcal{C}_\phi(x \rightarrow y) := (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$ pour tout $x, y \in E$ avec $x \leq y$ (notation de l'exemple 1.114(vii)).

(vi) A tout espace topologique T on a associé l'anneau $\mathcal{C}(T)$ des fonctions continues sur T à valeurs réelles, et à toute application continue $f : T \rightarrow T'$ on a associé aussi un homomorphisme d'anneaux, mais dont la direction est renversée, car f^* est plutôt une application $\mathcal{C}(T') \rightarrow \mathcal{C}(T)$: voir l'exercice 1.29. De plus, on vérifie aisément que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ si $f : T \rightarrow T'$ et $g : T' \rightarrow T''$ sont deux applications continues arbitraires. On voit alors que l'on peut interpréter les associations $T \mapsto \mathcal{C}(T)$ et $f \mapsto f^*$ comme la donnée d'un foncteur

$$\text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{R} - \text{Alg}.$$

En général, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, un foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ est aussi appelé un *foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$* . (Noter que décider si un foncteur soit contravariant est surtout une question de perspective : car $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$, donc tout foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ peut se voir comme un foncteur contravariant de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ dans $\mathcal{D}$.)

(vii) Soit csTop la sous-catégorie pleine de Top dont les objets sont les espaces topologiques compacts et séparés. La restriction du foncteur de (vi) est un foncteur

$$\text{csTop}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{R} - \text{Alg}$$

et l'exercice 1.29(ii) nous dit que cette restriction est pleine et fidèle.

(viii) A tout anneau A on a associé l'espace topologique $\text{Spec } A$, et à tout homomorphisme d'anneau $f : A \rightarrow B$ on a associé l'application continue $\text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ (voir §1.3.2); on a donc un foncteur

$$\text{Spec} : \mathbb{Z} - \text{Alg}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}.$$

(ix) D'autre part, on a remarqué que l'association $A \mapsto \text{Max } A$ *n'est pas* fonctorielle sur toute la catégorie des anneaux. Néanmoins, le spectre maximal donne un foncteur contravariant sur :

- la sous-catégorie pleine de $K - \text{Alg}$ dont les objets sont les K -algèbres de type fini, pour tout corps K algébriquement clos (voir l'exercice 1.47(i))
- la sous-catégorie de $\mathbb{Z} - \text{Alg}$ dont les objets sont tous les anneaux, et les morphismes sont les homomorphismes surjectifs d'anneaux (remarque 1.45(iii)).

(x) Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux catégories ; le *produit* $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ est la catégorie avec

$$\text{Ob}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) := \text{Ob}(\mathcal{C}_1) \times \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$$

et dont les morphismes $(X_1, X_2) \rightarrow (Y_1, Y_2)$ sont les éléments de $\mathcal{C}(X_1, Y_1) \times \mathcal{C}(X_2, Y_2)$, pour tout $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$. La loi de composition est définie de la façon évidente : $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) := (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)$ pour tout couple $X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} Z_\bullet$ de morphismes de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. On a deux *foncteurs de projection* évidents $(p_i : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_i \mid i = 1, 2)$, et il est clair que pour toute catégorie $\mathcal{A}$ et tout couple de foncteurs $(F_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_i \mid i = 1, 2)$ il existe un unique foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tel que $F_i = p_i \circ F$ pour $i = 1, 2$: à savoir, $FA := (F_1A, F_2A)$ pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $Ff := (F_1f, F_2f)$ pour tout morphisme f de $\mathcal{A}$. Evidemment, on peut étendre par récurrence cette construction, pour définir le produit $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ d'un nombre fini arbitraire de catégories.

(xi) Dans la situation de (x), soient $(G_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}_i \mid i = 1, 2)$ deux foncteurs, et $(q_i : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_i \mid i = 1, 2)$ les foncteurs de projection ; on a alors un unique foncteur $G_1 \times G_2 : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tel que $p_i \circ (G_1 \times G_2) = G_i \circ q_i$ pour $i = 1, 2$.

Remarque 1.122. (i) Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. Si l'on inverse la direction des flèches de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on obtient le *foncteur opposé*

$$F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}} \quad X^{\text{op}} \mapsto (FX)^{\text{op}}$$

tel que $F^{\text{op}}(f^{\text{op}}) := (Ff)^{\text{op}}$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$.

(ii) Evidemment, F est un isomorphisme de catégories si et seulement si l'application correspondante $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$ est bijective, et si F_{XY} est bijective pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Toutefois, dans de nombreuses situations – surtout quand il s'agit de “grosses” catégories comme **Ens** ou **Top** – cette condition est trop restrictive pour être utile ; la notion vraiment intéressante est son assouplissement suivant :

Définition 1.123. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories.

(i) On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est une *équivalence* s'il est plein et fidèle, et si pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ il existe $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et un isomorphisme $FX \xrightarrow{\sim} X'$.

(ii) On dit que $\mathcal{C}$ est *équivalente* à $\mathcal{C}'$ s'il existe une équivalence $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.

Noter que l'application $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$ correspondante à une équivalence $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ n'est pas forcément injective, ni surjective ; néanmoins, pour plusieurs questions l'existence d'une équivalence de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ rend ces catégories *virtuellement interchangeables* ; par exemple, on a :

Exercice 1.124. (i) Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur plein et fidèle, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Montrer les assertions suivantes :

(a) f est un isomorphisme de $\mathcal{C} \Leftrightarrow Ff$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}'$.

(b) Si en outre F est une équivalence, alors f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement s'il en est de même pour Ff .

(ii) Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ deux équivalences de catégories. Montrer que $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$ est une équivalence.

Exemple 1.125. Soit A un anneau commutatif ; pour tout A -module M , le *dual* de M est le A -module des *formes A-linéaires* $M \rightarrow A$, noté

$$M^\vee := \text{Hom}_A(M, A).$$

Toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ induit un *homomorphisme transposé*

$$f^\vee : N^\vee \rightarrow M^\vee \quad (N \xrightarrow{\phi} A) \mapsto (M \xrightarrow{\phi \circ f} A).$$

Evidemment $(Id_M)^\vee = Id_{M^\vee}$ pour tout A -module M , et $(g \circ f)^\vee = f^\vee \circ g^\vee$ pour tout couple d'applications A -linéaires $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$. On a donc un foncteur contravariant bien défini

$$(-)^\vee : (A - \text{Mod})^{\text{op}} \rightarrow A - \text{Mod}.$$

Notons aussi $A - \mathbf{Modtf}$ la sous-catégorie pleine de $A - \mathbf{Mod}$ dont les objets sont les A -modules libres de type fini. Si L est un A -module libre de rang $r \in \mathbb{N}$, le dual $L^\vee$ est aussi libre de rang r : en effet, toute base $e_1, \dots, e_r$ de L induit une *base duale* $e_1^*, \dots, e_r^*$ de $L^\vee$ telle que $e_i^*(e_i) = 1$ et $e_i^*(e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$ (les vérifications sont laissées aux soins du lecteur) ; i.e. $(-)^\vee$ induit par restriction un foncteur

$$(-)^\vee : (A - \mathbf{Modtf})^{\text{op}} \rightarrow A - \mathbf{Modtf}.$$

Montrons que ce dernier est une équivalence. En effet, évidemment tout A -module libre L de rang fini est isomorphe à $L^\vee$; l'assertion revient donc à voir que pour tous A -modules libres L et L' de rang fini on a une bijection :

$$\text{Hom}_A(L, L') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(L^\vee, L^\vee) \quad f \mapsto f^\vee.$$

Pour cela, fixons des bases $e_1, \dots, e_r$ et $e'_1, \dots, e'_s$ de L et respectivement L' ; la donnée d'une application A -linéaire $f : L \rightarrow L'$ est équivalente à celle de la matrice

$$A := (a_{ji} \mid i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s) \quad \text{telle que} \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^s a_{ji} e'_j \quad \forall i = 1, \dots, r$$

et $f^\vee$ correspond à la *transposée* ${}^t A$ de la matrice A , i.e. :

$$f^\vee(e'^*_j) = \sum_{i=1}^r a_{ji} e_i^* \quad \forall j = 1, \dots, s.$$

L'assertion s'ensuit aussitôt. Dans cet exemple, le foncteur $(-)^\vee$ est donné par une application injective et non surjective $\text{Ob}((A - \mathbf{Modtf})^{\text{op}}) \rightarrow \text{Ob}(A - \mathbf{Modtf})$. Voir aussi l'exemple 1.132.

Exemple 1.126. Soient A un anneau associatif et unitaire, $C(A)$ son quotient commutatif maximal (voir le §1.1.4), et $p : A \rightarrow C(A)$ la projection. On a vu que pour toute A -algèbre commutative $(B, f : A \rightarrow B)$ il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : C(A) \rightarrow B$ tel que $f = \bar{f} \circ p$, de sorte que B est naturellement une $C(A)$ -algèbre, et évidemment, tout homomorphisme de A -algèbres est aussi un homomorphisme de $C(A)$ -algèbres. On obtient ainsi un isomorphisme de catégories :

$$A - \mathbf{Alg} \xrightarrow{\sim} C(A) - \mathbf{Alg} \quad (B, f) \mapsto (B, \bar{f})$$

qui est l'identité sur les morphismes.

1.5.6. *Transformations naturelles.* Si $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ sont deux foncteurs, on appelle *transformation naturelle de F dans G* , notée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ & \Downarrow \omega & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C}' \end{array} \quad \text{ou simplement} \quad \omega : F \rightarrow G$$

la donnée d'un système de morphismes de la catégorie $\mathcal{C}'$

$$\omega_X : FX \rightarrow GX \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

tels que pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\omega_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\omega_Y} & GY. \end{array}$$

Remarque 1.127. (i) Tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ admet une *transformation identique*

$$\mathbf{1}_F : F \rightarrow F \quad X \mapsto \mathbf{1}_{FX} \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

(ii) Les transformations naturelles peuvent être composées : si $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un autre foncteur, et si $\tau : G \rightarrow H$ est une autre transformation naturelle, on définit

$$\tau \circ \omega : F \rightarrow H \quad X \mapsto (\tau_X \circ \omega_X : FX \rightarrow HX).$$

En particulier, si $\mathcal{C}$ est petite, l'ensemble des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est à son tour une catégorie, car on voit aisément que pour tout couple de foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, la classe des transformations naturelles $F \rightarrow G$ est un ensemble.

(iii) Un *isomorphisme de foncteurs* est bien sûr une transformation naturelle ω inversible à gauche et à droite; cela revient à dire que ω_X est un isomorphisme pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$: en effet, dans ce cas on obtient une transformation réciproque

$$\omega^{-1} : G \rightarrow F \quad X \mapsto (\omega_X)^{-1} : GX \rightarrow FX$$

et évidemment $\omega^{-1} \circ \omega = \mathbf{1}_F$, $\omega \circ \omega^{-1} = \mathbf{1}_G$. On notera

$$\text{Cat} \quad \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \quad \text{et} \quad \text{Nat}(F, G)$$

respectivement la catégorie des petites catégories, la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ (pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$ et toute catégorie $\mathcal{C}'$), et l'ensemble des transformations naturelles $F \rightarrow G$ entre foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. Donc, $\text{Nat}(F, G)$ est l'ensemble des morphismes $F \rightarrow G$ dans la catégorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, et si $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \text{Ob}(\text{Cat})$, on a $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') := \text{Ob}(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'))$.

(iv) Noter aussi que si $\omega : F \rightarrow G$ est une transformation naturelle, en renversant la direction des flèches on obtient une *transformation opposée*

$$\omega^{\text{op}} : G^{\text{op}} \rightarrow F^{\text{op}} \quad X^{\text{op}} \mapsto (\omega_X^{\text{op}} : (GX)^{\text{op}} \rightarrow (FX)^{\text{op}}).$$

Si $\mathcal{C}$ est petite, on déduit ainsi un isomorphisme de catégories :

$$\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{C}'^{\text{op}}) \quad F \mapsto F^{\text{op}} \quad \omega \mapsto \omega^{\text{op}}.$$

(v) Dans la situation de l'exemple 1.121(xi), soit $(G'_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}_i \mid i = 1, 2)$ un deuxième couple de foncteurs, et $(\eta_i : G_i \rightarrow G'_i \mid i = 1, 2)$ deux transformations naturelles. Alors on déduit une transformation naturelle $\eta_1 \times \eta_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow G'_1 \times G'_2$ telle que

$$(\eta_1 \times \eta_2)_{(D_1, D_2)} := (\eta_{1, D_1}, \eta_{2, D_2}) \quad \forall (D_1, D_2) \in \text{Ob}(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2).$$

Les vérifications seront laissées aux soins du lecteur.

Exemple 1.128. (i) Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie, et posons

$$E(\mathcal{C}) := \text{Nat}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$$

i.e. l'ensemble des *endomorphismes* du foncteur identique de $\mathcal{C}$. Munissons $E(\mathcal{C})$ de l'opération $E(\mathcal{C}) \times E(\mathcal{C}) \rightarrow E(\mathcal{C})$ donnée par la composition des endomorphismes. Cette opération est associative, et admet un élément neutre : l'endomorphisme identique de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$; de plus, cette opération est *commutative*, car si $\eta, \eta' \in E(\mathcal{C})$, on a par définition $f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$ pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, et avec $f := \eta'_X : X \rightarrow X$ on trouve $\eta' \circ \eta = \eta \circ \eta'$. Donc $(E(\mathcal{C}), \circ)$ est un *monoïde commutatif*. La partie $E(\mathcal{C})^{\times}$ des *automorphismes* de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est un groupe abélien.

(ii) Soient A un anneau *associatif et unitaire*, et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $A - \text{Mod}$; pour tout couple $\eta, \eta' : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ d'endomorphismes de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, on obtient une transformation naturelle $\eta + \eta' : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ en posant :

$$(\eta + \eta')_M := \eta_M + \eta'_M : M \rightarrow M \quad \forall M \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Si $\mathcal{C}$ est petite, on obtient ainsi une loi d'addition sur $E(\mathcal{C})$, et on vérifie aisément que $(E(\mathcal{C}), \circ, +)$ est un anneau commutatif, associatif et unitaire.

(iii) Si en outre $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il existe un isomorphisme canonique d'anneaux

$$\omega^{\mathcal{C}} : Z(A) \xrightarrow{\sim} E(\mathcal{C})$$

(notation de la remarque 1.14(ii)). Donc, le centre de A peut être reconstitué à partir de la catégorie des A -modules. En effet, à tout $a \in Z(A)$ on peut associer

$$\omega_a^{\mathcal{C}} \in E(\mathcal{C}) \quad \text{tel que} \quad \omega_{a, M}^{\mathcal{C}} := a \cdot \text{Id}_M \quad \forall M \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

D'autre part, à tout $a \in A$ on peut associer l'endomorphisme A -linéaire $\mu_a : A \rightarrow A$ tel que $\mu_a(b) = ba$ pour tout $b \in A$. Or, soit $\eta \in E(\mathcal{C})$; il existe un unique $a \in A$ tel que $\eta_A = \mu_a$, et puisque $\mu_b \circ \eta_A = \eta_A \circ \mu_b$, on a $ba = ab$ pour tout $b \in A$, i.e. $a \in Z(A)$. Il suffit alors de montrer que $\eta = \omega_a^{\mathcal{C}}$. Pour cela, soient $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in M$; soit aussi $f : A \rightarrow M$ l'unique application A -linéaire avec $f(1) = x$. On a :

$$\eta_M(x) = \eta_M \circ f(1) = f \circ \eta_A(1) = f(a) = ax.$$

Puisque x est arbitraire, cela montre que $\eta_M = a \cdot \text{Id}_M$, CQFD.

(iv) Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine, la restriction en $\mathcal{C}'$ de tout endomorphisme de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est évidemment un endomorphisme de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$, d'où un *morphisme de monoïdes* $E(\mathcal{C}) \rightarrow E(\mathcal{C}') : \eta \mapsto \eta|_{\mathcal{C}'}$. En particulier, dans la situation de (iii), pour tout couple de sous-catégories pleines et petites $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \subset A - \text{Mod}$ on obtient un homomorphisme d'anneaux $(-)|_{\mathcal{C}'} : (E(\mathcal{C}), \circ, +) \rightarrow (E(\mathcal{C}'), \circ, +)$; si $A \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, il est clair que $(\omega_a^{\mathcal{C}})|_{\mathcal{C}'} = \omega_a^{\mathcal{C}'}$ pour tout $a \in Z(A)$, donc $(-)|_{\mathcal{C}'}$ est un isomorphisme. Dans ce sens, l'isomorphisme $\omega^{\mathcal{C}}$ est indépendant du choix de $\mathcal{C}$, et tout endomorphisme de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ se prolonge en un unique endomorphisme de $\mathbf{1}_{A - \text{Mod}}$. Ainsi, bien que $E(A - \text{Mod})$ ne soit pas un ensemble bien défini dans notre cadre axiomatique, on peut résumer la discussion en disant que, avec un abus terminologique inoffensif, l'anneau des endomorphismes de $\mathbf{1}_{A - \text{Mod}}$ est canoniquement isomorphe à $Z(A)$.

Exercice 1.129. Il existe une deuxième loi de composition pour transformations naturelles, appelée *produit de Godement*, qui s'applique aux diagrammes du type :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & & \xrightarrow{F'} & \mathcal{C}'' \\ & \Downarrow \omega & & \Downarrow \omega' & \\ & \mathcal{C}' & \xrightarrow{G'} & & \mathcal{C}'' \\ & \uparrow G & & \uparrow G' & \end{array}$$

A savoir, on pose

$$(\omega' * \omega)_X := \omega'_{GX} \circ F'(\omega_X) \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Montrer que :

- (i) $(\omega' * \omega)_X = G'(\omega_X) \circ \omega'_{FX}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- (ii) Le système $((\omega' * \omega)_X \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ définit une transformation naturelle

$$\omega' * \omega : F' \circ F \rightarrow G' \circ G.$$

Si $F = G$ et $\omega = \mathbf{1}_F$, on écrit aussi $\omega' * F$ au lieu de $\omega * \mathbf{1}_F$, et de même, si $F' = G'$ et $\omega' = \mathbf{1}_{F'}$, on écrit $F' * \omega$ plutôt que $\mathbf{1}_{F'} * \omega$. Donc :

$$(\omega' * F)_X = \omega'_{FX} \quad \text{et} \quad (F' * \omega)_X = F'(\omega_X) \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

(iii) Les deux lois de composition sont liées de la façon suivante. Considérons un diagramme de six foncteurs et quatre transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & & \xrightarrow{F'} & \mathcal{C}'' \\ & \Downarrow \omega & & \Downarrow \omega' & \\ & \mathcal{C}' & \xrightarrow{G} & \xrightarrow{G'} & \mathcal{C}'' \\ & \Downarrow \tau & & \Downarrow \tau' & \\ & \mathcal{C} & \xrightarrow{H} & \xrightarrow{H'} & \mathcal{C}'' \end{array}$$

Montrer la *relation d'échange* :

$$(\tau' \circ \omega') * (\tau \circ \omega) = (\tau' * \tau) \circ (\omega' * \omega).$$

En particulier, pour $F = G = H$ et $\omega = \tau = \mathbf{1}_F$, on a :

$$(\tau' \circ \omega') * F = (\tau' * F) \circ (\omega' * F).$$

De même, pour $F' = G' = H'$ et $\omega' = \tau' = \mathbf{1}_{F'}$, on a :

$$F' * (\tau \circ \omega) = (F' * \tau) \circ (F' * \omega).$$

Ainsi, si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont petites (resp. if $\mathcal{C}$ est petite), F (resp. F') induit un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Fun}(F, \mathcal{C}'') : \text{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{C}'') &\rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'') & G' &\mapsto G' \circ F & \tau' &\mapsto \tau' * F \\ \text{Fun}(\mathcal{C}, F') : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') &\rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'') & G &\mapsto F' \circ G & \tau &\mapsto F' * \tau \end{aligned}$$

et ω (resp. ω') induit une transformation naturelle :

$$\begin{aligned} \text{Fun}(\omega, \mathcal{C}'') : \text{Fun}(F, \mathcal{C}'') &\rightarrow \text{Fun}(G, \mathcal{C}') & G' &\mapsto G' * \omega \\ \text{Fun}(\mathcal{C}, \omega') : \text{Fun}(\mathcal{C}, F') &\rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, G') & G &\mapsto \omega' * G. \end{aligned}$$

(iv) Montrer aussi que le produit de Godement est *associatif* : si $\mathcal{C}'''$ est une quatrième catégorie, $F'', G'' : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'''$ deux foncteurs, et $\omega'' : F'' \rightarrow G''$ une troisième transformation naturelle, on a :

$$\omega'' * (\omega' * \omega) = (\omega'' * \omega') * \omega.$$

Remarque 1.130. (i) Dans la situation de l'exercice 1.129(iii), si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont petites (resp. si $\mathcal{C}$ est petite), noter les identités :

$$\begin{aligned} \text{Fun}(\tau \circ \omega, \mathcal{C}'') &= \text{Fun}(\tau, \mathcal{C}'') \circ \text{Fun}(\omega, \mathcal{C}'') \\ \text{Fun}(\mathcal{C}, \tau' \circ \omega') &= \text{Fun}(\mathcal{C}, \tau') \circ \text{Fun}(\mathcal{C}, \omega'). \end{aligned}$$

(ii) Soit $\mathcal{C}'''$ une quatrième catégorie ; si $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ sont petites, on a aussi :

$$\begin{aligned} \text{Fun}(F' \circ F, \mathcal{C}''') &= \text{Fun}(F, \mathcal{C}''') \circ \text{Fun}(F', \mathcal{C}''') \\ \text{Fun}(\omega' * \omega, \mathcal{C}''') &= \text{Fun}(\omega, \mathcal{C}''') \circ \text{Fun}(\omega', \mathcal{C}'''). \end{aligned}$$

(iii) En dernier lieu, si $\mathcal{C}'''$ est petite, on a en outre :

$$\begin{aligned} \text{Fun}(\mathcal{C}''', F' \circ F) &= \text{Fun}(\mathcal{C}''', F') \circ \text{Fun}(\mathcal{C}''', F) \\ \text{Fun}(\mathcal{C}''', \omega' * \omega) &= \text{Fun}(\mathcal{C}''', \omega') * \text{Fun}(\mathcal{C}''', \omega). \end{aligned}$$

Problème 1.131. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur.

(i) Montrer que F est une équivalence si et seulement s'il admet un *quasi-inverse*, i.e. un foncteur $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ avec des isomorphismes de foncteurs

$$\varepsilon : G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad \eta : F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$$

vérifiant les *identités triangulaires* (notation de l'exercice 1.129(ii))

$$\eta * F = F * \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon * G = G * \eta.$$

(ii) Dédurre de (i) que la relation “ $\mathcal{C}$ est équivalente à $\mathcal{C}'$ ” est une relation d'équivalence sur la classe des catégories.

Exemple 1.132. Revenons au foncteur $(-)^{\vee} : (A - \text{Mod})^{\text{op}} \rightarrow A - \text{Mod}$ de l'exemple 1.125 ; pour tout A -module M on a une *application canonique de dualité*

$$\beta_M : M \rightarrow (M^{\vee})^{\vee} \quad m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$$

telle que $f^{\vee\vee} \circ \beta_M = \beta_N \circ f$ pour tout $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, i.e.

$$\beta : \mathbf{1}_{A - \text{Mod}} \rightarrow (-)^{\vee\vee}$$

est une transformation naturelle. On voit aisément que si L est un A -module libre de rang $r \in \mathbb{N}$ et si $e_1, \dots, e_r$ est une base de L , l'application β_L est l'isomorphisme tel que $e_i \mapsto e_i^{**}$ pour tout $i = 1, \dots, r$. En particulier, $\beta_{L^{\vee}} : L^{\vee} \xrightarrow{\sim} L^{\vee\vee}$ est l'isomorphisme tel que $e_i^* \mapsto e_i^{***}$ pour $i = 1, \dots, r$; d'autre part, on a :

$$\beta_L^{\vee}(e_i^{***})(e_j) = e_i^{***}(\beta_L(e_j)) = e_i^{***}(e_j^{**}) = e_i^*(e_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, r$$

d'où : $\beta_L^{\vee} = \beta_{L^{\vee}}^{-1}$. Donc β induit des isomorphismes de foncteurs

$$\mathbf{1}_{A - \text{Mod}^{\text{tf}}} \xrightarrow{\sim} (-)^{\vee\text{op}} \circ (-)^{\vee} \quad \mathbf{1}_{(A - \text{Mod}^{\text{tf}})^{\text{op}}} \xrightarrow{\sim} (-)^{\vee} \circ (-)^{\vee\text{op}}$$

vérifiant les identités triangulaires. Compte tenu du problème 1.131(i), on retrouve ainsi que la restriction de $(-)^{\vee}$ est une équivalence sur la sous-catégorie pleine $A - \text{Mod} \text{t}f$, et $(-)^{\vee \text{op}}$ est un quasi-inverse pour $(-)^{\vee}$.

1.6. Solutions aux exercices et problèmes. Cette dernière section contient des solutions pour les problèmes et exercices proposés dans la leçon.

Exercice 1.4 : Si f et g sont de type fini, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et des homomorphismes surjectifs de A -algèbres et respectivement de B -algèbres

$$\phi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B \quad \psi : B[X_{n+1}, \dots, X_{n+m}] \rightarrow C.$$

Soit $\phi' : A[X_1, \dots, X_{n+m}] \rightarrow B[X_{n+1}, \dots, X_{n+m}]$ l'unique homomorphisme de A -algèbres tel que $\phi'(X_i) = \phi(X_i)$ pour $i = 1, \dots, n$, et $\phi'(X_i) = X_i$ pour $i = n+1, \dots, n+m$ (la structure de A -algèbre $A \rightarrow B[X_{n+1}, \dots, X_{n+m}]$ est la composition de f avec l'inclusion $B \subset B[X_{n+1}, \dots, X_{n+m}]$); alors $\psi \circ \phi' : A[X_1, \dots, X_{n+m}] \rightarrow C$ est un homomorphisme surjectif de A -algèbres, pour la structure de A -algèbre sur C donnée par $g \circ f : A \rightarrow C$. Ainsi $g \circ f$ est de type fini. Si f et g sont de présentation finie, on peut supposer que $I := \text{Ker}(\phi)$ et $J := \text{Ker}(\psi)$ soient des idéaux de type fini; soit alors $P_1, \dots, P_k$ (resp. $Q_1, \dots, Q_h$) un système fini de générateurs de I (resp. de J), et pour $i = 1, \dots, h$ choisissons $P_{k+i} \in A[X_1, \dots, X_{n+m}]$ avec $\phi'(P_{k+i}) = Q_i$. Or, si $R \in \text{Ker}(\psi \circ \phi')$, on a $\phi'(R) \in \text{Ker}(\psi)$, donc $\phi'(R) = \sum_{i=1}^h R_i Q_i$ pour certains $R_1, \dots, R_h \in B[X_{n+1}, \dots, X_{n+m}]$; pour $i = 1, \dots, h$, prenons $S_i \in A[X_1, \dots, X_{n+m}]$ avec $\phi'(S_i) = R_i$. Il vient $R - \sum_{i=1}^h S_i P_{k+i} \in \text{Ker}(\phi')$; mais on voit aisément que $\text{Ker}(\phi')$ est engendré par $P_1, \dots, P_k$, et donc $\text{Ker}(\psi \circ \phi')$ est l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_{k+h}$. Par suite $g \circ f$ est de présentation finie.

Exercice 1.8 : Soient $\mathfrak{p} \neq 0$ un idéal premier de A , et $I \subset A$ un idéal contenant $\mathfrak{p}$; par hypothèse il existe $a, b \in A$ tels que $\mathfrak{p} = Aa$ et $I = Ab$. En outre, il existe $x \in A$ tel que $a = bx$. Puisque $\mathfrak{p}$ est premier, on a soit $b \in \mathfrak{p}$, soit $x \in \mathfrak{p}$; si $b \in \mathfrak{p}$, il vient $I = \mathfrak{p}$. Si $x \in \mathfrak{p}$, on a $x = ay$ pour quelque $y \in A$, d'où $a = aby$, i.e. $a(1 - by) = 0$, et cela donne $1 - by = 0$, car A est intègre et $a \neq 0$; mais alors $1 \in I$, i.e. $I = A$.

Exercice 1.11, partie (i) : Montrons d'abord que les inversibles de $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sont les éléments $z := a + b\sqrt{-5}$ tels que $z \cdot \bar{z} = 1$ (avec $\bar{z} := a - b\sqrt{-5}$). En effet, puisque $\bar{z} \in A$, la condition est évidemment suffisante; d'autre part, si $zw = 1$ pour quelque $w \in A$, il vient $z\bar{z}w\bar{w} = 1$, et puisque $z\bar{z}, w\bar{w} \in \mathbb{N}$, on voit que $z\bar{z} = 1$. Or, $z\bar{z} = a^2 + 5b^2$, donc $A^\times = \{1, -1\}$. Montrons ensuite que 2 ne se factorise pas dans $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ comme produit de deux éléments non inversibles. En effet, si $2 = zw$ avec $z, w \in A$, on a $4 = z\bar{z}w\bar{w}$, et on vient de voir que $z\bar{z}, w\bar{w} > 1$, d'où $z\bar{z} = w\bar{w} = 2$; mais l'équation $2 = a^2 + 5b^2$ n'a aucune solution entière. Si A était factoriel, son élément 2 serait donc premier; mais, on a la factorisation

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

et 2 ne divise ni $1 + \sqrt{-5}$ ni $1 - \sqrt{-5}$ dans A , contradiction.

Partie (ii) : Soient $a, b \in A \setminus \{0\}$; on sait déjà que si le ppcm(a, b) existe, il en est de même pour le pgcd(a, b). La réciproque ne tient pas, pour un anneau intègre arbitraire (voir la remarque 1.133), mais supposons que pour tout $x \in A \setminus \{0\}$ le pgcd(x, ab) existe, et il est donc de la forme $d(x) = ab/c(x)$ pour quelque $c(x) \in A$. Or, si x est un multiple de a et de b , alors a divise x et ab , donc a divise $d(x)$, et de même b divise $d(x)$; il s'ensuit aisément que $c(x)$ est dans ce cas un diviseur commun de a et b . Par suite, si aussi le pgcd(a, b) existe, $d(x)$ est un multiple de $ab/\text{pgcd}(a, b)$, donc de même pour x ; ainsi, $ab/\text{pgcd}(a, b)$ est un ppcm(a, b).

Partie (iii) : Pour tout $a \in A$, soit $\mathcal{F}(a)$ l'ensemble des parties $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$ telles que a divise $\prod_{i \in \Lambda} p_i$; on munit $\mathcal{F}(a)$ de l'ordre partiel induit par l'inclusion de parties. Or, soit d un diviseur de $b := \prod_{i=1}^n p_i$, et prenons un élément minimal Λ de $\mathcal{F}(d)$ (voir la remarque 1.31(ii)); on va montrer que $d = u \cdot \prod_{i \in \Lambda} p_i$ pour quelque $u \in A^\times$. On raisonne par récurrence sur la cardinalité c de Λ ; si $c = 0$, alors $\Lambda = \emptyset$ et $\prod_{i \in \Lambda} p_i = 1$, donc d est inversible, d'où l'assertion. Soit donc $c > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout diviseur d' de b et toute partie minimale $\Lambda' \in \mathcal{F}(d')$ de cardinalité $< c$. Soient $e \in A$ tel que $\prod_{i \in \Lambda} p_i = de$, et $i_0 \in \Lambda$; posons $\Lambda' := \Lambda \setminus \{i_0\}$. On a soit $p_{i_0} | e$, soit $p_{i_0} | d$, car p_{i_0} est premier; mais si $p_{i_0} | e$, il vient $\prod_{i \in \Lambda'} p_i = de'$, avec $e' := e/p_{i_0}$, donc $\Lambda' \in \mathcal{F}(d)$, et cela contredit la minimalité de Λ . Ainsi, $d = d'p_{i_0}$ pour quelque $d' \in A$, et alors $\Lambda' \in \mathcal{F}(d')$; en outre, Λ' doit être minimal dans $\mathcal{F}(d')$, car sinon Λ ne serait pas minimal dans $\mathcal{F}(d)$. Par hypothèse de récurrence, on a alors $d' = u \cdot \prod_{i \in \Lambda'} p_i$ avec $u \in A^\times$, d'où l'assertion.

Remarque 1.133. Avec la notation de l'exercice 1.11(i), noter que 2 et $1 + \sqrt{-5}$ divisent 6 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, et le pgcd de 2 et $1 + \sqrt{-5}$ est 1, mais $2 \cdot (1 + \sqrt{-5})$ ne divise pas 6. Compte tenu de la remarque 1.10(iii), il s'ensuit que le ppcm de 2 et $1 + \sqrt{-5}$ n'existe pas dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Exercice 1.16 : On peut supposer que $A \neq 0$, et alors il existe une unique partie finie non vide $S \subset \Gamma$ telle que $1 = \sum_{\gamma \in S} a_\gamma$ avec $a_\gamma \in A_\gamma \setminus \{0\}$ pour tout $\gamma \in S$. Pour tout $\delta \in S$ il vient $a_\delta = a_\delta \cdot 1 = \sum_{\gamma \in S} a_\gamma a_\delta$, et par hypothèse $a_\gamma a_\delta \in A_{\gamma+\delta}$ pour tout $\gamma \in S$; par suite, $a_\gamma a_\delta = 0$ pour tout $\delta \in S$ et $\gamma \in S \setminus \{0\}$; donc $a_\gamma = a_\gamma \cdot \sum_{\delta \in S} a_\delta = 0$ pour tout $\gamma \in S \setminus \{0\}$. Mais alors $S = \{0\}$ et $a_0 = 1$, CQFD.

Exercice 1.18 : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$, notons par a_n l'image de a suivant la projection $A \rightarrow A_n$, et posons $\Delta(a) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$; soient en outre $\delta_1(a) := \max(\Delta(a))$, $\delta_2(a) := \min(\Delta(a))$, et $\delta_3(a) := \delta_1(a) - \delta_2(a) \in \mathbb{N}$. Puisque A est intègre, on a $\delta_j(ab) = \delta_j(a) + \delta_j(b)$ pour tout $a, b \in A \setminus \{0\}$ et $j = 1, 2$. Or, soient $a, b \in A$ avec $ab = x + y$; il vient $\delta_1(a) + \delta_1(b) = i + 1$ et $\delta_2(a) + \delta_2(b) = i$, i.e. $\delta_3(a) + \delta_3(b) = 1$, donc on a soit $\delta_3(a) = 0$, soit $\delta_3(b) = 0$. Disons que $\delta_3(a) = 0$ et posons $j := \delta_1(a)$; cela revient à dire que a est un diviseur de $x + y$, homogène de degré j , donc $x + y = (x' + y')a$ avec $x' \in A_{i-j}$ et $y' \in A_{i+1-j}$. Mais comme $\text{pgcd}(x, y) = 1$, il s'ensuit que $a \in A^\times$. D'autre part, si $z \in A$ et si $z(x + y) = 1$, il vient $\delta_j(z) + \delta_j(x + y) = \delta_j(1) = 0$ pour $j = 1, 2$, i.e. $\delta_1(z) + i + 1 = 0$ et $\delta_2(z) + i = 0$, donc $\delta_1(z) < \delta_2(z)$, contradiction. Cela achève de vérifier que $x + y$ est irréductible.

Exercice 1.21, partie (i) : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si f est continue en tout point de T , soit $U \subset S$ une partie ouverte; pour tout $t \in f^{-1}U$, la partie U est un voisinage de $f(t)$, donc par hypothèse $f^{-1}U$ est un voisinage de t dans T , i.e. t est dans l'intérieur W de $f^{-1}U$. Ainsi $f^{-1}U = W$ est une partie ouverte de T , d'où l'assertion.

Partie (ii) : D'après (i), il suffit de montrer que pour tout $t \in T$ et tout voisinage W de $f(t)$ dans S , la partie $f^{-1}W$ est un voisinage de t dans T ; mais quitte à remplacer W par $W \cap V_t$, on peut supposer que $W \subset V_t$, et donc que W est aussi un voisinage de $f(t)$ dans V_t . Par hypothèse, $f_t^{-1}W$ est alors un voisinage de t dans U_t ; on déduit aisément que $f_t^{-1}W$ est aussi un voisinage de t dans T (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc de même pour $f^{-1}W$.

Partie (iii) : Soient d'abord f une application fermée, et Z une partie fermée de $f^{-1}U_\lambda$, pour quelque $\lambda \in \Lambda$; alors $Z = Z' \cap f^{-1}U_\lambda$ pour une partie fermée Z' de T , et par hypothèse fZ' est une partie fermée de S , donc $fZ = U_\lambda \cap fZ'$ est fermée dans U_λ . Cela achève de vérifier que f_λ est fermée. Réciproquement, si chaque f_λ est fermée, soit Z une partie fermée de T , de sorte que $Z_\lambda := Z \cap f^{-1}U_\lambda$ soit fermée dans $f^{-1}U_\lambda$, pour tout

$\lambda \in \Lambda$; par hypothèse, $f_\lambda Z_\lambda$ est alors une partie fermée de U_λ , i.e. $U_\lambda \setminus fZ = U_\lambda \setminus f_\lambda Z_\lambda$ est ouverte dans U_λ , donc aussi dans S . Mais alors $S \setminus fZ = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \setminus fZ)$ est une partie ouverte de S , i.e. fZ est une partie fermée de S ; cela montre que f est fermée. On prouve de même que f est ouverte $\Leftrightarrow$ il en est de même pour chaque f_λ : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (iv) : La partie $Z' := f^{-1}(\overline{f(Z)})$ contient Z et est fermée dans T , car f est continue; donc $\overline{Z} \subset Z'$, d'où $f(\overline{Z}) \subset f(Z') \subset \overline{f(Z)}$. Si $\overline{Z} = T$, on a $f(\overline{Z}) = f(T) \subset \overline{f(Z)}$, d'où $\overline{f(T)} \subset \overline{f(Z)}$; donc, si $\overline{f(T)} = S$, on a $\overline{f(Z)} = S$.

Exercice 1.22 : Si S est irréductible, soient $U \in \mathcal{U}$, $Z := S \setminus U$, et supposons que $U = Z_1 \cup Z_2$ pour deux parties non vides $Z_1, Z_2 \subset U$ qui sont fermées pour la topologie induite par l'inclusion $U \rightarrow S$; ainsi, pour $i = 1, 2$ il existe une partie fermée Z'_i de S avec $Z_i = U \cap Z'_i$. Il vient $S = (Z \cup Z'_1) \cup Z'_2$, et alors on a soit $Z \cup Z'_1 = S$, soit $S = Z'_2$; dans le premier cas, il vient $U = Z_1$, et dans le deuxième cas on a $U = Z_2$. Cela achève de montrer que U est une partie irréductible de S ; ensuite, si $U, V \in \mathcal{U}$ et si $U \cap V = \emptyset$, il vient $S = (S \setminus U) \cup (S \setminus V)$, donc on a soit $S = S \setminus U$, soit $S = S \setminus V$, i.e. soit $U = \emptyset$, soit $V = \emptyset$, contradiction.

Réciproquement, supposons que le recouvrement $\mathcal{U}$ vérifie les conditions (a) et (b), et que $V \cap V' = \emptyset$ pour deux parties ouvertes $V, V' \subset S$; si $V \neq \emptyset$, prenons $U \in \mathcal{U}$ avec $U \cap V \neq \emptyset$. Pour tout $U' \in \mathcal{U}$ on a par hypothèse $U \cap U' \neq \emptyset$, donc $(U \cap U') \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, car U est irréductible; ainsi, $U' \cap V \neq \emptyset$ pour tout $U' \in \mathcal{U}$, et d'autre part $(U' \cap V) \cap (U' \cap V') = \emptyset$, d'où $U' \cap V' = \emptyset$ pour tout tel U' , i.e. $V' = \emptyset$, et cela achève de montrer que S est irréductible.

Exercice 1.23 : Evidemment, si $f \in \mathcal{C}(T)$ est inversible, on a $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in T$. Pour la réciproque, notons que l'application $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $x \mapsto 1/x$ est continue (pour la topologie de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ induite par l'inclusion dans $\mathbb{R}$); si $f(T) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la composition $i \circ f = 1/f$ est alors continue, et donc $f \in \mathcal{C}(T)^\times$.

Exercice 1.26, partie (i) : Pour toute famille $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de parties fermées et tout $\lambda \in \Lambda$ posons $U_\lambda := T \setminus Z_\lambda$. La condition revient à dire que si $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = T$, alors il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda = T$. Mais cela est précisément la définition d'espace compact.

Partie (ii.a) : Il suffit d'exhiber, pour tout $y \in T \setminus Z$, une partie ouverte U telle que $y \in U$ et $U \cap Z = \emptyset$. Or, puisque T est séparé, pour tout $z \in Z$ il existe des parties ouvertes U_z, V_z avec $y \in U_z$, $z \in V_z$ et $U_z \cap V_z = \emptyset$. Evidemment $\bigcup_{z \in Z} (Z \cap V_z) = Z$, et chaque partie $Z \cap V_z$ est ouverte pour la topologie de Z induite par celle de T ; puisque Z est compact avec cette topologie, on a alors $z_1, \dots, z_k \in Z$ avec $Z \subset V_{z_1} \cup \dots \cup V_{z_k}$, et on peut ainsi choisir $U := U_{z_1} \cap \dots \cap U_{z_k}$.

Partie (ii.b) : Soit $(U_i \mid i \in I)$ une famille de parties ouvertes de T telles que $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$; alors $T = (T \setminus Z) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$, donc il existe une partie finie $J \subset I$ avec $T = (T \setminus Z) \cup \bigcup_{i \in J} U_i$, i.e. $Z \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, d'où l'assertion.

Partie (ii.c) : Soit $(U_i \mid i \in I)$ une famille de parties ouvertes de T' telles que $f(Z) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$; donc $Z \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}U_i$, et par la compacité de Z il existe une partie finie $J \subset I$ avec $Z \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}U_i$, donc $f(Z) \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Soit $V \subset Y$ une partie ouverte compacte; alors V est fermée dans Y , d'après (ii.a), donc $f^{-1}V$ est fermée dans X ; mais alors $f^{-1}V$ est une partie ouverte compacte de X , d'après (ii.b). Ensuite, si f est bijective, soit $U \subset X$ une partie ouverte; il faut montrer que $f(U)$ est ouvert dans Y , i.e. que $Y \setminus f(U) = f(X \setminus U)$ est fermée. Mais $X \setminus U$ est compact dans X , d'après (ii.b), et donc $f(X \setminus U)$ est compact dans Y , par (ii.c). L'assertion suit maintenant de (ii.a).

Partie (iv) : Soit $\Delta := \{(s, s) \mid s \in S\}$, la *diagonale* de $S \times S$, notons par $h : T \rightarrow S \times S$ l'application telle que $h(t) := (f(t), g(t))$ pour tout $t \in T$, et munissons $S \times S$ de la *topologie du produit*, engendrée par $\{U \times V \mid U, V \in \mathcal{T}_S\}$. Pour cette topologie, h est continue, car

$$h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \quad \forall U, V \in \mathcal{T}_S.$$

Evidemment $Z = h^{-1}\Delta$, et on est ramené à montrer que Δ est une partie fermée de $S \times S$. Soit donc $(x, y) \in S \times S$ avec $x \neq y$; puisque S est séparé, il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \emptyset$, de sorte que $U \times V$ est un voisinage de (x, y) avec $\Delta \cap (U \times V) = \emptyset$, d'où l'assertion.

Partie (v) : Soient $Z, Z' \subset T$ deux parties fermées disjointes; on doit exhiber deux parties ouvertes disjointes $U, U' \subset T$ avec $Z \subset U$, $Z' \subset U'$. Soit d'abord $Z = \{t\}$ pour quelque $t \in T$. Par hypothèse, pour tout $z \in Z'$ il existe des voisinages ouverts disjointes U_z de t et U'_z de z ; or, Z' est compact par (ii.b), donc il existe une partie finie $S \subset Z'$ avec $Z' \subset U' := \bigcup_{z \in S} U'_z$ et on prend $U := \bigcap_{z \in S} U_z$. Ensuite, soient Z, Z' arbitraires; par ce qui précède on trouve pour tout $z \in Z$ des parties ouvertes disjointes U_z, U'_z avec $z \in U_z$ et $Z' \subset U'_z$. Puisque Z est compact, on a une partie finie $S \subset Z$ avec $Z \subset U := \bigcup_{z \in S} U_z$ et on prend $U' := \bigcap_{z \in S} U'_z$.

Exercice 1.29, partie (i) : Soit $\mathfrak{m} \in \text{Max } \mathcal{C}(T)$; en vertu du lemme de Stone, $\mathfrak{m} = \text{Ker } \varepsilon_t$ pour un unique $t \in T$, où $\varepsilon_t : \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'homomorphisme d'anneaux tel que $\varepsilon_t(g) := g(t)$ pour tout $g \in \mathcal{C}(T)$. Par suite $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) = \text{Ker}(\varepsilon_t \circ \psi)$. Puisque $\mathbb{R}$ est un corps, pour montrer que $\text{Ker}(\varepsilon_t \circ \psi)$ est maximal, il suffit de vérifier que $\varepsilon_t \circ \psi$ est surjectif. Pour cela, comme $\mathcal{C}(T')$ contient le sous-anneau $\mathbb{R}$ des fonctions constantes, il suffit de vérifier que la restriction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $\varepsilon_t \circ \psi$ est $\text{Id}_{\mathbb{R}}$. Or, évidemment $\lambda(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\lambda(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$; on est alors ramené aisément à montrer que λ est *monotone croissante*, i.e. :

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) \geq \lambda(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mais si $x \geq y$, alors $x - y = a^2$ pour quelque $a \in \mathbb{R}$, donc $\lambda(x) - \lambda(y) = \lambda(a)^2 \geq 0$, d'où l'assertion. Cela montre en outre que pour toute fonction constante $x \in \mathbb{R}$ sur T' , et tout $t \in T$, on a $\varepsilon_t \circ \psi(x) = x$, i.e. $\psi(x)$ est la fonction constante sur T de valeur x ; autrement dit, ψ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres. Pour montrer la continuité de $\text{Max}(\psi)$, il suffit d'observer que $(\text{Max } \psi)^{-1}(D(h)) = D(\psi(h))$ pour tout $h \in \mathcal{C}(T')$. En effet :

$$\mathfrak{m} \in (\text{Max } \psi)^{-1}(D(h)) \Leftrightarrow h \notin (\text{Max } \psi)(\mathfrak{m}) \Leftrightarrow h \notin \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \Leftrightarrow \psi(h) \notin \mathfrak{m} \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in D(\psi(h)).$$

Partie (ii) : Soient $t \in T$, et $\mathfrak{m}_t \in \text{Max } \mathcal{C}(T)$, $\mathfrak{m}_{f(t)} \in \text{Max } \mathcal{C}(T')$ les idéaux maximaux associés à t et $f(t)$, de sorte que $(\text{Max } f^*)(\mathfrak{m}_t) = \text{Ker}(\varepsilon_t \circ f^*)$. Si $\psi = f^*$, la chaîne d'équivalences suivante entraîne la commutativité du diagramme :

$$h \in \text{Ker}(\varepsilon_t \circ f^*) \Leftrightarrow \varepsilon_t \circ f^*(h) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t(h \circ f) = 0 \Leftrightarrow h \circ f(t) = 0 \Leftrightarrow h \in \mathfrak{m}_{f(t)}.$$

Ensuite, soit $\psi' : \mathcal{C}(T') \rightarrow \mathcal{C}(T)$ un deuxième homomorphisme d'anneaux, tel que le diagramme commute avec $\text{Max}(\psi)$ remplacé par $\text{Max}(\psi')$; soient $h \in \mathcal{C}(T')$, $t \in T$, $a := \psi(h)(t)$ et $b := \psi'(h)(t)$. Il vient $\psi(h - a)(t) = 0 = \psi'(h - b)(t)$, car ψ et ψ' sont des homomorphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres, d'après (i). Par suite, $\psi(h - a), \psi'(h - b) \in \mathfrak{m}_t$, et ainsi $h - a, h - b \in \mathfrak{m}_{f(t)}$, d'où $a - b \in \mathfrak{m}_{f(t)}$, et finalement $a = b$. Cela achève de montrer que $\psi(h)(t) = \psi'(h)(t)$ pour tout $t \in T$, i.e. $\psi = \psi'$.

Exercice 1.33 : (a) $\Rightarrow$ (b) : Par hypothèse, la partie $S := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ admet un élément minimal x_n , d'où $x_k = x_n$ pour tout $k \geq n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit par l'absurde $S \subset E$ une partie non vide qui n'admet aucun élément minimal. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $\Sigma_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$, et soit $\Sigma_\infty := \mathbb{N}$; on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des couples (n, ϕ) formés de $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et d'une application $\phi : \Sigma_n \rightarrow S$

avec $\phi(k) > \phi(k+1)$ pour tout $k \in \Sigma_n \setminus \{n\}$. Pour tout $x \in S$, soit $\phi_x : \{0\} \rightarrow S$ l'application avec $\psi_x(0) := x$; trivialement $(0, \psi_x) \in \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Munissons $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel tel que

$$(m, \psi) \leq (n, \phi) \quad \Leftrightarrow \quad m \leq n \quad \text{et} \quad \psi(k) = \phi(k) \quad \forall k \in \Sigma_m \setminus \{m\}.$$

Soient $\{(n(\lambda), \phi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ une partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{F}$, et $N := \sup\{n(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; pour tout $k \in \Sigma_N$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $k \in \Sigma_{n(\lambda)}$, et posons $\psi(k) := \phi_\lambda(k)$. On a ainsi une application bien définie $\psi : \Sigma_N \rightarrow S$, et on voit aussitôt que $(N, \psi) \in \mathcal{F}$ et $(N, \psi) \geq (n(\lambda), \phi_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors un élément maximal (M, β) . Si $M \in \mathbb{N}$, alors $\beta(M) \in S$ par hypothèse n'est pas minimal; soient donc $x \in S$ avec $\beta(M) > x$, et

$$\gamma : \Sigma_{M+1} \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \gamma(k) := \beta(k) \quad \forall k \leq M \quad \text{et} \quad \gamma(M+1) := x.$$

Il vient $(M+1, \gamma) \in \mathcal{F}$ et $(M+1, \gamma) > (M, \beta)$, contradiction. Soit donc $M = \infty$; cela revient à dire que $\beta(0) > \beta(1) > \beta(2) > \dots$ est une chaîne strictement descendante d'éléments de S , et cela contredit (b).

Exercice 1.36 : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $a \in A$ non nul et non inversible qui n'est pas un produit d'éléments premiers. On va construire par récurrence des suites $(a_n, p_n \mid n \in \mathbb{N})$ d'éléments de A , avec p_n premier et $a_n = p_n a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on pose $a_0 := a$ et $p_{-1} := 1$; ensuite, supposons que $n \geq 0$ et a_i et p_{i-1} ont déjà été exhibés pour $i = 0, \dots, n$. On remarque que $a = a_n \cdot \prod_{i=-1}^{n-1} p_i$. Alors a_n n'est ni premier ni inversible, car sinon on aurait une factorisation pour a comme produit de premiers. Donc, il existe un idéal premier $p_n A$ avec $a_n \in p_n A$ (corollaire 1.35(ii)), i.e. $a_n = p_n a_{n+1}$ pour quelque $a_{n+1} \in A$. Par construction, $a_n A \subset a_{n+1} A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n A$ est un idéal de A ; par hypothèse il existe $b \in I$ avec $I = bA$, donc $b \in a_n A$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $a_{n+1} A = a_n A$, i.e. $a_{n+1}^{-1} a_n \in A^\times$, contradiction. Ensuite, soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$; par hypothèse on a $Aa_1 + \dots + Aa_n = Ad$ pour quelque $d \in A$, et par inspection des définitions on voit que $d = \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$.

Problème 1.37, partie (i) : On peut adapter sans peine la preuve des assertions correspondantes pour $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ (avec K un corps) : voir l'exemple 1.2.

Partie (ii) : On considère l'application

$$\|\cdot\| : \mathbb{Z}[i\sqrt{n}] \rightarrow \mathbb{N} \quad z := a + ib\sqrt{n} \mapsto z \cdot \bar{z} = a^2 + nb^2 \quad (n = 1, 2).$$

Or, soient $z := a + ib\sqrt{n}$ et $u := c + id\sqrt{n}$ deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$; il suffit d'exhiber $q, r \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ tels que $z = uq + r$ et $\|r\| < \|u\|$. Pour cela, supposons d'abord que $d = 0$, donc $u = c$ est un entier et on trouve $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a = q_1 c + r_1 \quad b = q_2 c + r_2 \quad -\frac{1}{2}|c| \leq r_1, r_2 \leq \frac{1}{2}|c|$$

où $|\cdot|$ dénote la valeur absolue usuelle de $\mathbb{R}$. On vérifie aisément que $q := q_1 + iq_2\sqrt{n}$ et $r := r_1 + ir_2\sqrt{n}$ conviennent. Pour un u général, ce qui précède montre que :

$$\exists q, r \in \mathbb{Z}[i\sqrt{n}] \quad \text{tels que} \quad z\bar{u} = qu\bar{u} + r' \quad \text{avec} \quad \|r'\| < \|u\bar{u}\| = \|u\| \cdot \|\bar{u}\|.$$

On pose $r := z - qu$ et on trouve $\|r\| = \|r'\|/\|\bar{u}\| = \|r'\|/\|u\| < \|u\|$, comme souhaité.

Partie (iii) : La cardinalité du groupe abélien $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est $p-1$, donc $\bar{y}^{p-1} = 1$ pour toute classe $\bar{y} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, et $\bar{z} := \bar{y}^{(p-1)/2}$ satisfait l'équation $\bar{z}^2 = 1$; mais puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, cette équation n'admet que les solutions 1 et -1 . Si $\bar{y}^{(p-1)/2} = 1$ pour tout $\bar{y} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, le polynôme $X^{(p-1)/2} - 1$ aurait $p-1$ racines distinctes dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Donc il existe $\bar{y}$ tel que $\bar{y}^{(p-1)/2} = -1$; noter que $(p-1)/2$ est un entier pair par hypothèse, donc $\bar{x} := \bar{y}^{(p-1)/4}$ satisfait l'équation $\bar{x}^2 = -1$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Soit $p \equiv 1 \pmod{4}$; d'après (iii), on sait déjà qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $p \mid x^2 + 1$. Mais $x^2 + 1 = (x + i) \cdot (x - i)$, et p ne divise aucun des facteurs de cette décomposition, donc p n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$. On a alors $p = (a + ib) \cdot (d + ie)$ pour des éléments non inversibles $a + ib, d + ie$ de $\mathbb{Z}[i]$. On déduit $p^2 = (a^2 + b^2) \cdot (d^2 + e^2)$, d'où $a^2 + b^2 \in \{1, p, p^2\}$. Mais $a^2 + b^2 \neq 1$, car $a + ib$ n'est pas inversible. Si $a^2 + b^2 = p^2$, on aurait $d^2 + e^2 = 1$; c'est absurde, car $d + ie$ n'est pas inversible. Donc $a^2 + b^2 = p$. Réciproquement, si p est un entier impair qui s'écrit sous la forme $p = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, l'un des a, b doit être pair, et l'autre doit être impair. Disons que a est impair et b est pair; il vient $p \equiv a^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Problème 1.39, partie (i) : Il suffit de montrer que si un premier p de A divise $P \cdot Q$, alors p divise P ou Q . Mais l'identification $A[X]/pA[X] = (A/p)[X]$ montre que p est premier dans $A[X]$, donc l'assertion est claire.

Partie (ii) : Soit P primitif dans $A[X]$, et soit $P = Q_1 \cdots Q_k$ une factorisation de P par des polynômes irréductibles de $K[X]$. Pour chaque $i = 1, \dots, k$, on trouve $a_i \in K^\times$ tel que $R_i := a_i Q_i$ soit primitif dans $A[X]$ (détails laissés au lecteur), et on pose $a := a_1 \cdots a_k$; d'après (i), $aP = R_1 \cdots R_k$ est encore primitif dans $A[X]$, d'où $a \in A^\times$. Donc, $P = a^{-1} R_1 \cdots R_k$ est une factorisation de P par des polynômes primitifs dans $A[X]$ et irréductibles dans $K[X]$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (iii) : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on se ramène aisément au cas $n = 1$. La preuve de (ii) montre que tout $P \in A[X]$ se factorise comme un produit d'éléments premiers de A et de polynômes qui sont à la fois primitifs dans $A[X]$ et irréductibles dans $K[X]$. Or, si $p \in A$ est premier, la preuve de (i) montre que p est encore premier dans $A[X]$; il reste à vérifier que si P est primitif dans $A[X]$ et irréductible dans $K[X]$, alors il est premier dans $A[X]$. Soient donc $Q_1, Q_2 \in A[X]$ primitifs et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que P divise $b \cdot Q_1 \cdot Q_2$ dans $A[X]$; on sait déjà que $K[X]$ est factoriel, donc P divise un des facteurs Q_1, Q_2 dans l'anneau $K[X]$. Soit $R \in K[X]$ avec $P \cdot R = Q_1$; on trouve $a \in K^\times$ tel que aR soit un polynôme primitif de $A[X]$, et par (i) il s'ensuit que $aQ_1 \in A[X]$ est encore primitif, donc $a \in A^\times$ et finalement $R \in A[X]$, i.e. P divise Q_1 dans l'anneau $A[X]$, comme souhaité.

Exercice 1.41 : Soient $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que $D_K(f), D_K(g) \neq \emptyset$; évidemment, il suffit de montrer que $D_K(f) \cap D_K(g) \neq \emptyset$. Pour cela, choisissons $a \in D_K(f)$, $b \in D_K(g)$, et soit $\phi : K \rightarrow K^n$ l'unique application affine telle que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$; donc ϕ est donnée par une suite $(\phi_1(T), \dots, \phi_n(T))$ d'éléments de $K[T]$ de degré ≤ 1 . Posons $P := f \circ \phi$ et $Q := g \circ \phi$; on a $P, Q \in K[T]$ et $0 \in D_K(P)$, $1 \in D_K(Q)$ et on est ramené à exhiber $x \in K$ tel que $f(\phi(x)), g(\phi(x)) \neq 0$, i.e. $x \in D_K(P) \cap D_K(Q)$. Mais l'existence de x est évidente, car P et Q n'ont qu'un nombre fini de zéros, alors que K est infini.

Exercice 1.43 : Munissons l'ensemble $\mathbb{N}$ de sa topologie discrète (voir l'exemple 1.20(v)). Evidemment, $\mathbb{N}$ n'est pas compact avec cette topologie, et toute fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\delta_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $\delta_n(n) = 1$ et $\delta_n(k) = 0$ pour tout $k \neq n$. On voit aisément que l'idéal maximal $\phi_{\mathbb{N}}(n)$ est engendré par $1 - \delta_n$. En particulier, $\phi_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \text{Max } \mathcal{C}(\mathbb{N})$ est injective. En outre, la topologie de $\mathbb{N}$ est induite par la topologie de Zariski de $\text{Max } \mathcal{C}(\mathbb{N})$ via $\phi_{\mathbb{N}}$: car on a $\phi_{\mathbb{N}}^{-1} D(\delta_n) = \{n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique aussitôt que $\phi_{\mathbb{N}}$ ne peut pas être surjective, car on sait que $\text{Max } \mathcal{C}(\mathbb{N})$ est compact (proposition 1.42).

Problème 1.44 : On va montrer que $A := \mathcal{C}([0, 1])$ admet des idéaux premiers non maximaux, mais la preuve ne sera pas tout à fait constructive. Avant d'aborder la preuve,

il est utile de faire quelques considérations préliminaires : on pose

$$V(f) := f^{-1}(0) \subset [0, 1] \quad \forall f \in A$$

et pour tout idéal $I \subset A$ on définit $\mathcal{Z}(I) := \{V(f) \mid f \in I\}$. On voit que :

- si $1 \notin I$, on a $V(f) \neq \emptyset$ pour tout $f \in I$, car si $V(f) = \emptyset$, f serait inversible, ce qui est absurde ; donc $\emptyset \notin \mathcal{Z}(I)$.
- si $f \in I$ et $Z' \subset [0, 1]$ est une partie fermée contenant $V(f)$, on a $Z' \in \mathcal{Z}(I)$; en fait, on peut trouver une fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $V(g) = Z'$, d'où $V(fg) = Z'$, et évidemment $fg \in I$. (Si $Z' \neq \emptyset$, une telle g s'obtient par $g(t) := \text{dist}(t, Z') := \min(|t - z| \mid z \in Z')$ pour tout $t \in [0, 1]$).
- Si $Z, Z' \in \mathcal{Z}(I)$, on a aussi $Z \cap Z' \in \mathcal{Z}(I)$. En fait, si $Z = V(f)$ et $Z' = V(g)$, avec $f, g \in I$, on a $V(f^2 + g^2) = Z \cap Z'$.

On va étudier un peu plus systématiquement les familles avec ces propriétés ; tout d'abord, la définition suivante extrait leurs propriétés caractéristiques :

Définition 1.134. Soit T un espace topologique ; un *filtre* de T est une famille $\mathcal{F}$ de parties fermées de T soumise aux conditions suivantes :

- (a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $T \in \mathcal{F}$
- (b) Si $Z \subset Z'$ sont des parties fermées de T avec $Z \in \mathcal{F}$, on a aussi $Z' \in \mathcal{F}$
- (c) Si $Z, Z' \in \mathcal{F}$, on a aussi $Z \cap Z' \in \mathcal{F}$.

L'ensemble E des filtres de T est partiellement ordonné par l'inclusion de filtres. Un *ultrafiltre* de T est un élément maximal de E . On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ de T est *premier*, s'il remplit aussi la condition suivante :

- (d) Si $Z, Z' \subset T$ sont des parties fermées et $Z, Z' \notin \mathcal{F}$, on a $Z \cup Z' \notin \mathcal{F}$.

Lemme 1.135. Soient T un espace topologique, et $\mathcal{F}$ un filtre de T . Alors il existe un ultrafiltre de T qui contient $\mathcal{F}$.

Démonstration. L'ensemble E des filtres de T contenant $\mathcal{F}$ est partiellement ordonné par inclusion. Si $(\mathcal{F}_i \mid i \in I)$ est une famille non vide totalement ordonnée d'éléments de E , la réunion $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est un élément de E . Par le lemme de Zorn, E admet alors un élément maximal, qui est évidemment un ultrafiltre. $\square$

Exemple 1.136. Soit T un espace topologique, $t \in T$ un point.

(i) La famille des parties fermées contenant t est trivialement un ultrafiltre $\mathcal{F}_t$. Les ultrafiltres de ce type sont appelés *ultrafiltres principaux*.

(ii) Soit $\mathcal{G}$ une famille de parties fermées de T qui satisfait la condition suivante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $Z_1, \dots, Z_k \in \mathcal{G}$ on a $Z_1 \cap \dots \cap Z_k \neq \emptyset$. Alors, l'ensemble des filtres de T contenant $\mathcal{G}$ n'est pas vide, et il admet un élément minimal $\mathcal{F}$. En fait, soit d'abord $\mathcal{G}'$ la famille des intersections finies d'éléments de $\mathcal{G}$; la condition sur $\mathcal{G}$ implique que $\mathcal{G}'$ satisfait aux conditions (a) et (c) de la définition 1.134, et $\mathcal{F}$ est la famille des parties fermées de T contenant un élément de $\mathcal{G}'$. On appelle $\mathcal{F}$ le *filtre de T engendré par $\mathcal{G}$* .

(iii) Soient T' un autre espace topologique, $f : T' \rightarrow T$ une application continue, et $\mathcal{F}$ un filtre de T . On pose $\mathcal{G} := \{\overline{f(Z)} \mid Z \in \mathcal{F}\}$, où $\overline{f(Z)}$ dénote l'adhérence de $f(Z)$ dans T . Evidemment $\overline{f(Z_1 \cap Z_2)} \subset \overline{f(Z_1)} \cap \overline{f(Z_2)}$ pour tout $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$, donc la famille $\mathcal{G}$ satisfait la condition de (ii), et $\mathcal{G}$ engendre un filtre de T qu'on appellera *l'image directe de $\mathcal{F}$ suivant f* , et on notera

$$f_*\mathcal{F}.$$

(iv) Montrons que si $\mathcal{F}$ est un filtre premier de T' , le filtre $f_*\mathcal{F}$ est aussi premier. Pour cela, soit $X \in f_*\mathcal{F}$ tel que $X = Y \cup Z$, avec Y, Z deux parties fermées de T ; il faut vérifier que l'une des deux est dans $f_*\mathcal{F}$. Par définition, X contient une intersection finie $\overline{f(Z_1)} \cap \dots \cap \overline{f(Z_k)}$ avec $Z_1, \dots, Z_k \in \mathcal{F}$; posons $W := Z_1 \cap \dots \cap Z_k$, de sorte que $W \in \mathcal{F}$ et $\overline{f(W)} \subset \overline{f(Z_1)} \cap \dots \cap \overline{f(Z_k)}$. Il suffit de montrer que l'une des parties $Y' := \overline{f(W)} \cap Y$ ou $Z' := \overline{f(W)} \cap Z$ est dans $f_*\mathcal{F}$. Or, on a $W \subset f^{-1}(X)$, donc $(W \cap f^{-1}Y) \cup (W \cap f^{-1}Z) =$

$W \cap f^{-1}(X) = W$. Puisque $\mathcal{F}$ est premier, soit $W \cap f^{-1}(Y) \in \mathcal{F}$, soit $W \cap f^{-1}(Z) \in \mathcal{F}$. Disons que $W \cap f^{-1}(Y) \in \mathcal{F}$; il vient $f(W \cap f^{-1}Y) = Y' \in f_*\mathcal{F}$, CQFD.

Proposition 1.137. *Soit T un espace topologique. On a :*

- (i) *T est compact si et seulement si tout ultrafiltre de T est principal.*
- (ii) *Tout ultrafiltre de T est premier.*

Démonstration. (i) : Si T est compact et si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, évidemment $X := \bigcap_{Z \in \mathcal{F}} Z$ est une partie fermée de T . En outre, X est non vide, car sinon on aurait $\emptyset = \bigcup_{Z \in \mathcal{F}'} Z$ pour une partie finie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ (exercice 1.26(i)); or, toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$; mais $\emptyset \notin \mathcal{F}$, contradiction. Soit donc $x \in X$; évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_x$, et donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$, car par hypothèse $\mathcal{F}$ est maximal. Réciproquement, si tout ultrafiltre de T est principal, soit $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille de parties ouvertes de T avec $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = T$. On doit exhiber une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda = T$. Supposons pour l'absurde qu'une telle partie Λ' n'existe pas, et posons $Z_\lambda := T \setminus U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; par suite la famille $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ satisfait la condition de l'exemple 1.136(ii), et donc elle engendre un filtre $\mathcal{F}$. Par le lemme 1.135 on trouve un ultrafiltre $\mathcal{F}'$ contenant $\mathcal{F}$, et par hypothèse $\mathcal{F}'$ est principal; mais $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda = \emptyset$, contradiction.

(ii) : Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre, et supposons par l'absurde qu'il existe des parties fermées Z, Z' de T avec $Z \cup Z' \in \mathcal{F}$ mais $Z, Z' \notin \mathcal{F}$. Posons $\mathcal{F}' := \{Z \cap X \mid X \in \mathcal{F}\}$; on voit aisément que la famille $\mathcal{F}'$ satisfait la condition (c) de la définition 1.134. Montrons que aussi la condition (a) est satisfaite : car sinon il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $X \cap Z = \emptyset$, d'où $Z' \cap X = (Z \cup Z') \cap X \in \mathcal{F}$, mais alors $Z' \in \mathcal{F}$, contradiction. Donc, soit $\mathcal{F}''$ le filtre engendré par $\mathcal{F}'$; évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}''$, et par maximalité de $\mathcal{F}$, on déduit que $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}$, en particulier $Z \in \mathcal{F}$, contradiction. $\square$

Soient maintenant T un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre de T et J un idéal propre de $\mathcal{C}(T)$ (i.e. $1 \notin J$); on pose :

$$I(\mathcal{F}) := \{f \in \mathcal{C}(T) \mid f^{-1}(0) \in \mathcal{F}\} \quad \mathcal{Z}(J) := \{f^{-1}(0) \mid f \in J\}.$$

Lemme 1.138. *Avec la notation ci-dessus, soit T métrisable. Alors on a :*

- (i) *$I(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{Z}(J)$ est un filtre de T .*
- (ii) *$\mathcal{F}$ est un filtre premier si et seulement si $I(\mathcal{F})$ est un idéal premier.*
- (iii) *Si J est un idéal premier, $\mathcal{Z}(J)$ est un filtre premier.*
- (iv) *$\mathcal{F} = \mathcal{Z}(I(\mathcal{F}))$.*

Démonstration. (i) : On voit aisément que $I(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{C}(T)$, et l'assertion concernant $\mathcal{Z}(J)$ a déjà été remarquée ci-dessus, du moins pour $T = [0, 1]$, mais on voit aisément que l'argument s'applique plus généralement si T est métrisable.

(ii) : Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ soit premier, et montrons que $I(\mathcal{F})$ est un idéal premier. En effet, soient $f, g \in \mathcal{C}(T)$ tels que $f \cdot g \in I(\mathcal{F})$; cela veut dire que $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = (f \cdot g)^{-1}(0) \in \mathcal{F}$. Or, si $f \notin I(\mathcal{F})$, i.e. $f^{-1}(0) \notin \mathcal{F}$, on doit avoir $g^{-1}(0) \in \mathcal{F}$, d'où $g \in I(\mathcal{F})$. Réciproquement, supposons que $I(\mathcal{F})$ soit premier, et soient $Z, Z' \subset T$ deux parties fermées non vides avec $Z \cup Z' \in \mathcal{F}$; on pose

$$f(t) := \text{dist}(t, Z) \quad g(t) := \text{dist}(t, Z') \quad \forall t \in T.$$

Evidemment $f, g \in \mathcal{C}(T)$ et $f \cdot g \in I(\mathcal{F})$, d'où $f \in I(\mathcal{F})$ ou $g \in I(\mathcal{F})$; dans le premier cas on déduit $Z = f^{-1}(0) \in \mathcal{F}$, et dans le deuxième cas on a $Z' \in \mathcal{F}$, ce qui achève de montrer que $\mathcal{F}$ est premier.

(iii) : Soient $k \in J$ et $X, Y \subset T$ deux parties fermées avec $X \cup Y = k^{-1}(0)$. Puisque $|k|^2 = k^2$ et comme J est premier, on a aussi $|k| \in J$, on peut donc supposer $k \geq 0$. Choisissons $f, g \in \mathcal{C}(T)$ avec $X = f^{-1}(0)$ et $Y = g^{-1}(0)$; on peut de même supposer que $f(t), g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Puisque

$$\max(f - g, 0) \cdot \min(f - g, 0) = 0 \in J$$

on a soit $h := \max(f - g, 0) \in J$, soit $l := \min(f - g, 0) \in J$. Si $h \in J$, noter que :

$$f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (h + f \cdot g)(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (h + k)(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Mais $h + k \in J$, donc $X \in \mathcal{Z}(J)$. On montrerait de même $Y \in \mathcal{Z}(J)$ si $l \in J$.

(iv) : Evidemment $\mathcal{Z}(I(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$. D'autre part, si $Z \in \mathcal{F}$, la fonction $t \mapsto \text{dist}(t, Z)$ est continue et son lieu de zéros est Z , d'où l'inclusion opposée. $\square$

Pour résoudre notre problème, il suffira d'exhiber un filtre premier non principal de l'espace topologique $[0, 1]$. Or, fixons $t \in [0, 1]$, notons $T' := [0, 1] \setminus \{t\}$, $j_t : T' \rightarrow [0, 1]$ l'inclusion, et soit $\mathcal{U}$ la famille de tous les voisinages de t dans $[0, 1]$; posons

$$\mathcal{G} := \{\bar{U} \cap T' \mid U \in \mathcal{U}\}$$

(où $\bar{U}$ dénote l'adhérence de U dans $[0, 1]$). On voit aisément que la famille $\mathcal{G}$ satisfait les conditions (a) et (c) de la définition 1.134 : en effet, si U, V sont deux voisinages de t dans $[0, 1]$, aussi $\bar{U} \cap \bar{V}$ est un voisinage de t , et on a

$$(\bar{U} \cap T') \cap (\bar{V} \cap T') = (\bar{U} \cap \bar{V}) \cap T' \in \mathcal{G}.$$

Soit donc $\mathcal{G}'$ le filtre de T' engendré par $\mathcal{G}$; par le lemme 1.135, il existe un ultrafiltre $\mathcal{G}''$ de T' contenant $\mathcal{G}'$. La proposition 1.137(ii) et l'exemple 1.136(iv) nous fournissent le filtre premier $\mathcal{F} := j_{t*}\mathcal{G}''$ de $[0, 1]$. Pour conclure, on est ainsi ramené à montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas principal; mais, d'un côté, pour tout $t' \in [0, 1]$ avec $t' \neq t$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $t' \notin \bar{U}$, et évidemment $\bar{U} \in \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ était principal, il serait donc égal à $\mathcal{F}_t$. Mais de l'autre côté, on voit aussi que pour tout élément $W \in \mathcal{F}$ il existe $Z \in \mathcal{G}''$ tel que $Z \subset W$; en particulier, $W \cap T' \neq \emptyset$, donc la partie fermée $\{t\}$ ne peut pas appartenir à $\mathcal{F}$, CQFD.

Remarque 1.139. (i) On exhibera plus tard des idéaux premiers de $\mathcal{C}([0, 1])$ (ou plus généralement, de $\mathcal{C}(T)$, pour T compact et séparé) qui ne sont pas de la forme $I(\mathcal{F})$ comme ci-dessus. En outre, il existe des chaînes strictement décroissantes de longueur infinie de filtres premiers de $[0, 1]$: voir l'exemple 1.54, et surtout §8.2.

(ii) Si l'on est prêt à se servir de l'*analyse non standard*, on peut donner une construction très agréable d'un idéal premier non maximal de $\mathcal{C}([0, 1])$, comme suit. Rappelons que l'analyse non standard plonge le corps réel $\mathbb{R}$ dans un corps ordonné ${}^*\mathbb{R}$ de *nombre hyper-réels*, qui contient des *infinitésimaux*, i.e. des éléments $\varepsilon > 0$ qui sont plus petits que tout nombre réel strictement positif. De plus, toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ admet un prolongement canonique

$${}^*f : {}^*[0, 1] := \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow {}^*\mathbb{R}.$$

Si f est continue, son prolongement ${}^*f$ l'est aussi, au sens que pour tout $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ dont la distance est infinitésimale, la distance entre ${}^*f(x)$ et ${}^*f(y)$ l'est aussi. Or, fixons un nombre hyper-réel infinitésimal $\varepsilon > 0$; on voit aisément que la partie $\mathfrak{p} := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid {}^*f(\varepsilon) = 0\}$ est un idéal premier de $\mathcal{C}([0, 1])$. Pour $f \in \mathfrak{p}$, le nombre réel $f(0)$ est infinitésimalement proche à ${}^*f(\varepsilon) = 0$, donc $f(0) = 0$, i.e. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_0$. D'autre part, ${}^*Id_{[0, 1]} = Id_{*}[0, 1]$; en particulier $Id_{[0, 1]} \in \mathfrak{m}_0 \setminus \mathfrak{p}$. Noter que la construction des hyper-réels s'effectue à l'aide de certains ultrafiltres; cette description hyper-réelle de l'idéal $\mathfrak{p}$ a en fait inspiré nos constructions par ultrafiltres.

Exercice 1.46, partie (i) : On sait que $\mathbb{Z}$ est principal (exemple 1.2(i)), et un idéal $n\mathbb{Z}$ avec $n > 0$ est premier si et seulement si n est un nombre premier; en outre, si p est un nombre premier, l'idéal $p\mathbb{Z}$ est maximal (exercice 1.8). Donc, $\text{Max } \mathbb{Z}$ est en bijection naturelle avec les nombres premiers (positifs), et $\text{Spec } \mathbb{Z} = \text{Max } \mathbb{Z} \cup \{\{0\}\}$. La topologie de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est engendrée par les parties $D(n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$: si $p_1, \dots, p_k$ sont les diviseurs premiers de n , on a $D(n) = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{p_1\mathbb{Z}, \dots, p_k\mathbb{Z}\}$. En conclusion, les parties fermées de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ sont $\text{Spec } \mathbb{Z}$ et les parties finies de $\text{Max } \mathbb{Z}$.

Partie (ii) : En vertu de l'exemple 1.2(ii), la même discussion s'applique, *mutatis mutandis*, à l'anneau $K[T]$, pour K un corps quelconque. A savoir, $\text{Spec } K[T] = \text{Max } K[T] \cup \{\{0\}\}$ et $\text{Max } K[T]$ est en bijection naturelle avec les polynômes irréductibles unitaires de $K[T]$. Les parties fermées sont $\text{Spec } K[T]$ et les parties finies de $\text{Max } K[T]$. Si, de plus, K est algébriquement clos, les polynômes irréductibles unitaires sont exactement ceux de la forme $T - a$, avec $a \in K$ un élément arbitraire. Donc, dans ce cas, l'application $K \rightarrow \text{Max } K[T] : a \mapsto (T - a) \cdot K[T]$ est une bijection naturelle. Cela donne un cas élémentaire du Nullstellensatz.

Partie (iii) : Si K est parfait, la clôture algébrique K^{alg} de K est une extension galoisienne de K , donc soit $G := \text{Gal}(K^{\text{alg}}/K)$ (le groupe de Galois des K -automorphismes de K^{alg}) ; les polynômes irréductibles unitaires de $K[T]$ sont en bijection naturelle avec K^{alg}/G (l'ensemble des orbites de l'action de G sur K^{alg}). Donc, $\text{Spec } K[T]$ s'identifie naturellement à $\{\{0\}\} \cup (K^{\text{alg}}/G)$, avec la topologie expliquée ci-dessus. Par exemple, on a une identification naturelle

$$\text{Max } \mathbb{R}[T] \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$$

du spectre maximal de $\mathbb{R}[T]$ avec le demi-plan supérieur complexe.

Partie (iv) : Soient $p > 0$ la caractéristique de K , et $P(T) \in E[T]$; puisque E est purement inséparable sur K , il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $P(T)^{p^k} \in K[T]$; notons donc

$$n(P) := \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid P^n \in K[T]\}.$$

Or, si P est irréductible dans $E[T]$, le polynôme $P^{n(P)}$ est irréductible dans $K[T]$: en effet, supposons que $P^{n(P)} = Q_1 \cdot Q_2$, avec Q_1, Q_2 deux polynômes de $K[T]$ de degrés > 0 ; par suite $Q_1 = P^r$ et $Q_2 = P^s$ pour des entiers $r, s > 0$ avec $r + s = n(P)$. En particulier, $P^r \in K[T]$ et $r < n(P)$, contradiction. Or, l'idéal $\mathfrak{m}_P := P \cdot E[T]$ est maximal dans $E[T]$ et $P^{n(P)} \in \mathfrak{m}_P \cap K[T]$, d'où $\mathfrak{m}_P \cap K[T] = \mathfrak{m}_{P^{n(P)}} := P^{n(P)} \cdot K[T]$. Cela donne une description explicite de l'application $\text{Spec } i$. On déduit aussitôt l'injectivité de $\text{Spec } i$. Ensuite, soit $Q \in K[T]$ irréductible et unitaire ; alors il existe un unique polynôme unitaire irréductible P de $E[T]$ tel que $P^{n(P)} = Q$. En effet, soit P un facteur irréductible unitaire de Q dans $E[T]$. Evidemment $P^{n(P)}$ divise $Q^{n(P)}$ dans $K[T]$; mais on a vu que $P^{n(P)}$ est irréductible dans $K[T]$, donc $P^{n(P)}$ divise Q , et puisque Q est irréductible, on déduit que $Q = P^{n(P)}$. Cela montre que $\text{Spec } i$ est une bijection. La description des topologies de $\text{Spec } K[T]$ et $\text{Spec } E[T]$ obtenue ci-dessus implique aisément que $\text{Spec } i$ est même un homéomorphisme.

Exercice 1.47 : On admettra le Nullstellensatz, qui nous dit que tout idéal maximal de $K[Y_1, \dots, Y_m]$ est de la forme $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$, pour quelque $\underline{a} := (a_1, \dots, a_m) \in K^m$. Cela acquis, on peut raisonner comme pour l'exercice 1.29 : en effet, $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$ est le noyau de l'homomorphisme d'évaluation au point $\underline{a}$, i.e. l'homomorphisme de K -algèbres

$$\varepsilon_{\underline{a}} : K[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow K \quad P \mapsto P(\underline{a}).$$

D'où, $\text{Spec } f(\mathfrak{m}_{\underline{a}}) = f^{-1}(\mathfrak{m}_{\underline{a}}) = \text{Ker}(\varepsilon_{\underline{a}} \circ f)$. Mais si $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\underline{a}} \circ f(Q) &= \varepsilon_{\underline{a}}(Q(f(X_1), \dots, f(X_n))) = \varepsilon_{\underline{a}}(Q(P_1, \dots, P_n)) \\ &= Q(P_1(\underline{a}), \dots, P_n(\underline{a})) = \varepsilon_{\phi(\underline{a})}(Q) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{\phi(\underline{a})} : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K$ est l'homomorphisme analogue de K -algèbres qui évalue tout $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ au point $\phi(\underline{a}) \in K^n$. Mais $\text{Ker}(\varepsilon_{\phi(\underline{a})}) = \mathfrak{m}_{\phi(\underline{a})}$, ce qui implique toutes les assertions de l'exercice.

Exercice 1.52, partie (i.a) : Supposons que $a_0 \in A^\times$ et $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{N}(A)$; dans ce cas, $b := a_0^{-1} \cdot (a_1 T + \dots + a_k T^k) \in \mathcal{N}(A[T]) \subset \mathcal{J}(A[T])$, d'où $1 + b \in A[T]^\times$, par le théorème 1.50(i), et donc $P = a_0 \cdot (1 + b)$ est inversible dans $A[T]$.

Réciproquement, supposons $P \in A[T]^\times$, et pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, notons

$$\pi_{\mathfrak{p}} : A[T] \rightarrow A[T]/\mathfrak{p}A[T] = (A/\mathfrak{p})[T]$$

la projection canonique; il vient $\pi_{\mathfrak{p}}(P) \in (A/\mathfrak{p})[T]^\times$. Puisque $A/\mathfrak{p}$ est intègre, cela veut dire que $\pi_{\mathfrak{p}}(P)$ est un polynôme constant non nul, i.e. $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{p}$ et $a_0 \notin \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A ; par le théorème 1.50(ii) il s'ensuit que $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{N}(A)$, et $a_0 \in A^\times$, par le corollaire 1.35(ii).

Partie (i.b) : On choisit $g \in A[T] \setminus \{0\}$ de degré minimal avec $P \cdot g = 0$; disons $g = b_m T^m + \dots + b_0$ avec $b_m \neq 0$. L'hypothèse implique que $a_k b_m = 0$, donc $\deg(a_k g) < \deg g$; d'autre part, on a $P \cdot (a_k g) = 0$. Par minimalité de $\deg g$, on déduit que $a_k g = 0$. Ensuite, le coefficient de $P \cdot g$ en degré $n + m - 1$ est $a_k b_{m-1} + a_{k-1} b_m = a_{k-1} b_m$, d'où $a_{k-1} b_m = 0$, et en raisonnant comme ci-dessus on déduit que $a_{k-1} g = 0$. En procédant ainsi de suite, on voit inductivement que $a_{k-i} b_m = 0$ et donc $a_{k-i} g = 0$ pour $i = 0, \dots, k$. En particulier, $a_{k-i} b_m = 0$ pour $i = 0, \dots, k$, i.e. $b_m \cdot P = 0$.

Partie (ii) : En raisonnant par récurrence sur n , et en écrivant

$$A[T_1, \dots, T_n] = A[T_1, \dots, T_{n-1}][T_n]$$

on est ramené au cas $n = 1$. Evidemment $\mathcal{N}(A)[T] \subset \mathcal{N}(A[T]) \subset \mathcal{J}(A[T])$. D'autre part, soit $P := a_0 + a_1 T + \dots + a_k T^k \in \mathcal{J}(A[T])$; par le théorème 1.50(i), il vient $1 + TP \in A[T]^\times$, d'où $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{N}(A)$ par (i.a), i.e. $P \in \mathcal{N}(A)[T]$.

Partie (iii) : En écrivant $A[[T_1, \dots, T_n]] = A[[T_1, \dots, T_{n-1}]][[T_n]]$, une simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ nous ramène aisément à montrer les deux assertions pour le cas $n = 1$. Or, montrons d'abord que $A[[T]]^\times$ est formé des séries formelles $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n$ avec $a_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 \in A^\times$. En effet, soit $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n T^n$ avec $b_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $g \cdot f = 1$; cela revient aux identités :

$$a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = 0 \quad \forall n > 0$$

que l'on peut résoudre par récurrence sur n si et seulement si $a_0 \in A^\times$: il vient $b_0 = a_0^{-1}$ et $b_n = -a_0^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i}$ pour tout $n > 0$. En particulier, $1 + Th \in A[[T]]^\times$ pour tout $h \in A[[T]]$ i.e. $T \in \mathcal{J}(A[[T]])$ (théorème 1.50(i)). De même, $1 + ah \in A[[T]]^\times$ pour tout $a \in \mathcal{J}(A)$ et tout $h \in A[[T]]$, i.e. $\mathcal{J}(A) \subset \mathcal{J}(A[[T]])$. Réciproquement, si $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n$ et si $1 + fh \in A[[T]]^\times$ pour tout $h \in A[[T]]$, il vient $1 + a_0 b \in A^\times$ pour tout $b \in A$, d'où $a_0 \in \mathcal{J}(A)$. Cela achève de vérifier que $\mathcal{J}(A[[T]]) = \mathcal{J}(A) \cdot A[[T]] + TA[[T]]$. Ensuite, soit $\mathfrak{n} \in \text{Max } A[[T]]$, et notons par

$$A \xrightarrow{i} A[[T]] \xrightarrow{\pi} A$$

l'inclusion et la projection naturelles. On vient de voir que $TA[[T]] = \text{Ker } \pi \subset \mathfrak{n}$; par suite $\mathfrak{m} := i^{-1}(\mathfrak{n}) = \pi(\mathfrak{n}) \in \text{Max } A$, et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \text{Ker } \pi$.

Exercice 1.57 : Si A est intègre, l'idéal $0 \subset A$ est premier, donc $V(0) = \text{Spec } A$ est irréductible, d'après la remarque 1.56(iii). Réciproquement, soit A réduit, avec $\text{Spec } A$ irréductible, et $a, b \in A$ tels que $ab = 0$; il vient aussitôt $V(a) \cup V(b) = \text{Spec } A$, donc on a soit $V(a) = \text{Spec } A$, soit $V(b) = \text{Spec } A$. Disons que $V(a) = \text{Spec } A$; d'après le théorème 1.50(ii), on a alors $a \in \mathcal{N}(A) = 0$; ainsi, A est intègre.

Exercice 1.59 : On adapte la preuve de la proposition 1.58 : on peut supposer que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ pour tout $i \neq j$, et on raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$ et si $x \notin \mathfrak{p}_1$, on prend $y := 0$; si $x \in \mathfrak{p}_1$, on doit avoir $I \not\subseteq \mathfrak{p}_1$, et tout $y \in I \setminus \mathfrak{p}_1$ convient. Soit alors $n > 1$, et supposons que l'on ait déjà exhibé $z \in I$ tel que $x + z \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{p}_i$; si $I \subset \mathfrak{p}_n$, on doit avoir $x \notin \mathfrak{p}_n$, et alors $y := z$ convient. De même, si $x + z \notin \mathfrak{p}_n$, on peut prendre $y := z$. Si $I \not\subseteq \mathfrak{p}_n$ et si $x + z \in \mathfrak{p}_n$, prenons $a \in I \setminus \mathfrak{p}_n$, et soit $z_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_n$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$; puisque $\mathfrak{p}_n$ est un idéal premier, on a $b := az_1 \cdots z_{n-1} \in (I \cap \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{n-1}) \setminus \mathfrak{p}_n$, et

$y := z + b$ convient.

Exercice 1.61 : Il suffit de montrer (ii). Or, munissons $E := \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ de l'ordre partiel tel que $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}' \Leftrightarrow \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in E$, et soit $(\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une partie de E totalement ordonnée par inclusion, avec $\Lambda \neq \emptyset$; par le lemme de Zorn il suffit de montrer que $\mathfrak{p}_0 := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ est un idéal premier. Soient donc $x, y \in A$ avec $xy \in \mathfrak{p}_0$; si $y \notin \mathfrak{p}_0$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $y \notin \mathfrak{p}_\lambda$, d'où $x \in \mathfrak{p}_\mu$ pour tout $\mathfrak{p}_\mu \subset \mathfrak{p}_\lambda$ (et donc $x \in \mathfrak{p}_\mu$ pour tout $\mu \in \Lambda$), i.e. $x \in \mathfrak{p}_0$, CQFD.

Exercice 1.63 : Soit $(x_i \mid i \in I)$ (resp. $(y_j \mid j \in J)$) une base du K -espace vectoriel K' (resp. du K' -espace vectoriel K''); on vérifie aisément que $(x_i y_j \mid (i, j) \in I \times J)$ est une base du K -espace vectoriel K'' .

Exercice 1.68, partie (i) : On raisonne par récurrence sur $d := \deg_X(P)$. Si $d = 1$, on prend $E := K$; soit alors $d > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout polynôme de degré $< d$ et tout corps K . Soit $Q \in K[X]$ un facteur irréductible de P ; si $e := \deg_X(Q) < d$, par récurrence Q admet un corps de décomposition F tel que $[F : K]$ soit un diviseur de $e!$, et $P/Q \in F[X]$ admet un corps de décomposition E tel que $[E : F]$ soit un diviseur de $(d - e)!$, par suite E est un corps de décomposition de P et avec l'exercice 1.63 on voit que $[E : K] = [E : F] \cdot [F : K]$ est un diviseur de $e! \cdot (d - e)!$, qui divise $d!$, comme souhaité. Si $e = d$, d'après l'exercice 1.8, Q engendre un idéal maximal de $K[X]$, donc $F := K[X]/(Q)$ est une extension finie de K . Notons par $\xi \in F$ la classe de X . Par construction, $Q(\xi) = 0$ dans F , donc $X - \xi$ divise P dans $F[X]$; posons $R := P/(X - \xi) \in F[X]$. Par hypothèse de récurrence, R admet un corps de décomposition E tel que $[E : F]$ divise $(d - 1)!$; l'extension composée $K \subset F \subset E$ est un corps de décomposition pour P , et on a $[F : K] = d$, donc $[E : K] = [E : F] \cdot [F : K]$ divise $d!$, comme souhaité.

Partie (ii) : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si la condition est vérifiée, soit $Q \in E[X] \setminus E$ irréductible dans $E[X]$. Par (i), Q admet un corps de décomposition F , et l'extension composée $K \subset F$ est encore algébrique (remarque 1.66(i)); soient $a \in F$ une racine de Q , et $P \in K[X]$ le polynôme minimal de a sur K . Ainsi, $X - a$ divise P et Q dans $F[X]$, et donc le pgcd de P et Q dans $E[X]$ n'est pas 1 (exercice 1.36); puisque Q est irréductible dans $E[X]$, il s'ensuit que Q divise P dans $E[X]$. Mais par hypothèse, P admet un corps de décomposition contenu dans E , et alors E est aussi un corps de décomposition pour Q .

Exercice 1.73 : Rappelons que pour tout $P, Q \in E[X]$ on a $(PQ)' = P'Q + PQ'$. Or, soit $a \in E$ une racine de P de multiplicité $d > 1$; on a $P = (X - a)^d \cdot Q$ pour un polynôme $Q \in E[X]$, et par hypothèse

$$P' = d(X - a)^{d-1}Q + (X - a)^d \cdot Q' = (X - a)^{d-1} \cdot (dQ + (X - a)Q') \neq 0$$

donc $X - a$ divise P et P' dans $E[X]$. Si maintenant le plus grand commun diviseur de P et P' dans $K[X]$ était 1, on aurait $Q_1, Q_2 \in K[X]$ tels que $PQ_1 + P'Q_2 = 1$ dans $K[X]$ (exercice 1.36), donc aussi dans $E[X]$, contradiction.

Réciproquement, si chaque racine de P a multiplicité 1, on a $a_1, \dots, a_n \in E$ avec $a_i \neq a_j$ pour tout $i \neq j$, et $b \in K^\times$ tels que $P = b(X - a_1) \cdots (X - a_n)$. Posons

$$Q_i := P/(X - a_i) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Il vient $P' = b \sum_{i=1}^n Q_i$, et noter que $Q_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $P'(a_j) = bQ_j(a_j) \neq 0$ pour $j = 1, \dots, n$. Ainsi P et P' n'ont aucun facteur en commun dans $E[X]$, donc pas non plus dans $K[X]$.

Exercice 1.76 : Soient E un corps de décomposition de P , et $Q \in K[X]$ un diviseur de P irréductible dans $K[X]$. L'unique racine $y \in E$ de P est aussi l'unique racine de Q dans E . Soit $e \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $Q \in K[X^{p^e}] \subset K[X]$; ainsi, $Q = R(X^{p^e})$ pour $R \in K[X]$, et puisque $R \notin K[X^p]$, on a $R' \neq 0$. D'autre part, puisque Q est irréductible dans $K[X]$, il en est de même pour R ; ainsi, $\text{pgcd}(R, R') = 1$. Donc R est séparable (exercice 1.73); mais évidemment $b := y^{p^e}$ est l'unique racine de R , d'où $\deg_X R = 1$, $b \in K$, et $Q = X^{p^e} - b$. Ainsi $a = y^{p^n} = b^{p^{n-e}}$, et puisque $a \notin K^p$, il vient $n = e$, d'où $P = Q$.

Exercice 1.79, partie (i) : Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , et $P \in K[X]$ le polynôme minimal de x ; d'après la remarque 1.64(ii) on a un isomorphisme de K -algèbres $K(x) \xrightarrow{\sim} K[X]/(P)$, induisant une identification naturelle de $K - \text{Alg}(K(x), \overline{K})$ avec l'ensemble $K - \text{Alg}(K[X]/(P), \overline{K})$. À son tour, la donnée d'un homomorphisme de K -algèbres $K[X]/(P) \rightarrow \overline{K}$ équivaut à celle d'un homomorphisme $\phi : K[X] \rightarrow \overline{K}$ de K -algèbres tel que $P(\phi(X)) = 0$, et ϕ est évidemment déterminé par $\phi(X)$. On obtient ainsi une bijection entre $K - \text{Alg}(K(x), \overline{K})$ et l'ensemble Σ des racines de P dans $\overline{K}$; donc $[K(x) : K]_s$ est la cardinalité de Σ , et on a en outre $[K(x) : K]_s \leq \deg_X P = [K(x) : K]$, avec égalité si et seulement si x est séparable sur K .

Partie (ii) : Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K' (et de K). Soient en outre Λ l'ensemble des homomorphismes de K -algèbres $K' \rightarrow \overline{K}$, et Λ' l'ensemble des homomorphismes de K' -algèbres $K'' \rightarrow \overline{K}$. Tout $f \in \Lambda$ est la composition d'un isomorphisme de K -algèbres $f' : K' \xrightarrow{\sim} f(K')$ avec l'inclusion $i : f(K') \rightarrow \overline{K}$; soit aussi $f'' : f(K') \rightarrow \overline{K}$ la composition de f'^{-1} avec l'inclusion $K' \rightarrow \overline{K}$. D'après le théorème 1.71(ii), il existe un homomorphisme de $f(K')$ -algèbres

$$\overline{f} : (\overline{K}, i) \rightarrow (\overline{K}, f'')$$

i.e. on a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont les inclusions :

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{f'} & f(K') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{K} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{K} \end{array}$$

et $\overline{f}$ est un isomorphisme, d'après le théorème 1.71(iv). Fixons alors pour tout $f \in \Lambda$ un tel isomorphisme $\overline{f}$; il suffit ainsi de vérifier que tout homomorphisme de K -algèbres $K'' \rightarrow \overline{K}$ est de la forme $\overline{f} \circ g$ pour un unique couple $(f, g) \in \Lambda \times \Lambda'$. Mais noter que la restriction de $\overline{f} \circ g$ au sous-corps K' coïncide avec f ; par suite, si $\overline{f}_1 \circ g_1 = \overline{f}_2 \circ g_2$ pour $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \Lambda \times \Lambda'$, il vient $f_1 = f_2$, d'où $\overline{f}_1 = \overline{f}_2$, et ainsi $g_1 = g_2$, car $\overline{f}_1$ est un isomorphisme. En dernier lieu, soit $h : K'' \rightarrow \overline{K}$ un homomorphisme de K -algèbres, et k sa restriction à K' ; alors $l := \overline{k}^{-1} \circ h : K'' \rightarrow \overline{K}$ est un homomorphisme de K' -algèbres, et $h = \overline{k} \circ l$.

Partie (iii) : Soit $E = K(x_1, \dots, x_n)$, et posons $E_0 := K$ et $E_i := K(x_1, \dots, x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$; au vu de (ii) et de l'exercice 1.63, il suffit de vérifier que $0 < [E_{i+1} : E_i]_s \leq [E_{i+1} : E_i]$ pour $i = 0, \dots, n-1$. On est donc ramené au cas où $n = 1$, pour lequel les inégalités ont déjà été remarquées lors de la solution de (i).

Partie (iv) : Soit $F := K(x^p)$, de sorte que $F(x) = K(x)$ et $F(x)^p \subset F$; si $x \notin F$, le polynôme minimal de x sur F est $X^p - x^p$ (exercice 1.76), donc $[K(x) : F]_s < [K(x) : F]$ d'après (i) et (iii). Par suite :

$$[K(x) : K]_s = [K(x) : F]_s \cdot [F : K]_s < [K(x) : F] \cdot [F : K] = [K(x) : K]$$

et donc x n'est pas séparable sur K , toujours d'après (i). Si $x \in F$, soit $P \in K[X]$ tel que $a = P(x^p)$, et posons $Q := X - P(X^p)$; il vient $Q(a) = 0$, et $Q' = 1$. D'après l'exercice

1.73, cela entraîne que x est séparable sur K .

Problème 1.83, partie (i) : Soit $G \subset K^\times$ un sous-groupe fini. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les éléments de $K^\times$ dont l'ordre divise n sont les racines du polynôme $X^n - 1$; donc G contient au plus n éléments d'ordre n , pour tout tel n . D'autre part, il existe des entiers $d_1, d_2, \dots, d_k$ tels que d_i divise d_{i+1} pour tout $i = 1, \dots, k-1$, et un isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$. Avec cette notation, l'ordre de tout élément de G divise d_k ; par suite $k = 1$, i.e. G est cyclique.

Partie (ii) : Soient $E = K(a_1, \dots, a_n)$ et $F = E(b)$; on raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit ensuite $E = K(a)$, et notons par P et Q les polynômes minimaux de a et b sur K ; soient $y_1, \dots, y_r$ (resp. $z_1, \dots, z_s$) les racines distinctes de P (resp. de Q) dans un corps de décomposition F' de $P \cdot Q$, avec $y_1 = a$ et $z_1 = b$. Puisque K est infini, il existe $c \in K$ tel que

$$z_i + cy_j \neq d := b + ca \quad \forall i = 1, \dots, s \quad \forall j = 2, \dots, r.$$

Evidemment $K(d) \subset K(a, b)$; d'autre part, posons $R(X) := Q(d - cX) \in K(d)[X]$: par construction, $P(a) = 0 = R(a)$, donc $X - a$ divise à la fois P et R dans $F'[X]$. Mais pour tout $j = 2, \dots, r$ on a $P(y_j) = 0$ et $R(y_j) \neq 0$, et rappelons que a est une racine de multiplicité 1 de P , car P est séparable; donc $X - a$ est le plus grand commun diviseur de P et R dans $F'[X]$. Par suite, $X - a$ est aussi le plus grand commun diviseur de P et R dans $K(d)[X]$, et en particulier, les coefficients de $X - a$ sont dans $K(d)$, i.e. $a \in K(d)$, et finalement $K(a, b) = K(d)$.

Ensuite, soit $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout corps infini K et toute extension séparable de K engendrée par $n - 1$ éléments; posons $K' := K(a_1, \dots, a_{n-1})$. Alors $E = K'(a_n)$, et par ce qui précède on trouve $d \in F$ tel que $F = K'(d)$; puis, par hypothèse de récurrence, on a $d' \in F$ avec $F = K(d')$.

Partie (iii) : Si K est un corps infini, l'assertion est un cas particulier de (ii). Si K est un corps fini, il en est de même pour E , et d'après (i) le groupe $E^\times$ est alors cyclique; si x est un générateur de $E^\times$, évidemment $E = K(x)$.

Exercice 1.94, partie (i) : Soit ϕ l'automorphisme de Frobenius de $\overline{\mathbb{F}}_p$ (voir §1.4.1); pour tout entier $n > 0$, la partie

$$\mathbb{F}_{p^n} := \{x \in \overline{\mathbb{F}}_p \mid \phi^n(x) = x\}$$

est évidemment un sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Mais $\phi^n(x) = x^{p^n}$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{F}}_p$, donc $\mathbb{F}_{p^n}$ est formé des racines dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $P_n := X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Puisque $P'_n = 1$, la cardinalité de $\mathbb{F}_{p^n}$ est p^n (exercice 1.73). Soit ensuite $E \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ un sous-corps de cardinalité p^n ; alors $E^\times$ est un groupe cyclique de cardinalité $p^n - 1$ (problème 1.73(i)), i.e. tout élément de $E^\times$ est racine du polynôme $X^{p^n-1} - 1$, et ainsi $E = \mathbb{F}_{p^n}$.

Parties (ii) et (iii) : Pour tout entier $n > 0$, soit ϕ_n l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_{p^n}$; par construction, ϕ_n engendre un groupe cyclique $\Gamma \subset \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ d'ordre $o(\Gamma) \leq n$, et $\mathbb{F}_{p^n}^\Gamma = \mathbb{F}_p$; mais $[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p] = n$ (car la cardinalité d'un $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension d est évidemment p^d , pour tout $d \in \mathbb{N}$). D'après le théorème 1.91, on a alors $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$, $o(\Gamma) = n$, et l'extension $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^n}$ est galoisienne, pour tout $n > 0$. D'après le corollaire 1.92, les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ correspondent alors bijectivement aux sous-groupes de Γ , qui à leur tour correspondent bijectivement aux diviseurs entiers de n : car, pour tout diviseur m il existe un unique sous-groupe $\Delta \subset \Gamma$ d'ordre n/m , et on a $[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_{p^n}^\Delta] = n/m$; si la cardinalité de $\mathbb{F}_{p^n}^\Delta$ est p^r , celle de $\mathbb{F}_{p^n}$ doit alors être $p^{rn/m}$, i.e. $r = m$, et cela achève la preuve de (ii). En dernier lieu, soit $x \in \overline{\mathbb{F}}_p$; alors $d := [\mathbb{F}_p(x) : \mathbb{F}_p] < +\infty$, donc $\mathbb{F}_p(x) = \mathbb{F}_{p^d}$, d'où (iii).

Exercice 1.96, partie (i) : L'axiome (a) de la définition 1.95(i) donne $u \triangleleft U'$ pour tout $u \in U$; l'assertion découle alors de l'axiome (c) de la définition 1.95(i).

Partie (ii) : Soit $u \in U$; par hypothèse, $u \not\triangleleft U' \setminus \{u\}$, d'où $u \not\triangleleft U \setminus \{u\}$, par (i).

Partie (iii) : Soit $a \not\triangleleft U$, et supposons par l'absurde que $U' := U \cup \{a\}$ soit $\mathcal{D}$ -liée; alors il existe $b \in U'$ tel que $b \triangleleft U' \setminus \{b\}$, et noter que $b \neq a$, car $a \not\triangleleft U$. Ainsi, $b \in U$, donc $b \not\triangleleft U \setminus \{b\}$, car U est $\mathcal{D}$ -libre; appliquons l'axiome (d) de la définition 1.95(i) avec $T := U' \setminus \{b\}$, $s := b$, et $t := a$: il vient $b \triangleleft (U' \setminus \{b, a\}) \cup \{b\} = U$, contradiction. Réciproquement, si $a \triangleleft U$, alors U' est évidemment $\mathcal{D}$ -liée, car $U = U' \setminus \{a\}$.

Exercice 1.99, partie (i) : L'axiome (a) de la définition 1.95(i) est trivialement vérifié pour $\mathcal{D}_{E/K}$. Pour montrer l'axiome (b), soient $x \in E$ et $T \subset E$ tels que x est algébrique sur $F := K(T)$; alors il existe $P \in F[X]$ tel que $P(x) = 0$, et évidemment on peut trouver une partie finie $T' \subset T$ telle que $P \in K(T')[X]$, de sorte que x est déjà algébrique sur $K(T')$. Ensuite, soient $x \in E$, et $U, T \subset E$ deux parties telles que x soit algébrique sur $K(T)$, et chaque $y \in T$ soit algébrique sur $K(U)$; notons par F la fermeture algébrique de $K(U)$ dans E . Ainsi, $T \subset F$, donc $K(T) \subset F$, et alors $x \in F$ (proposition 1.65(iv)), i.e. x est algébrique sur $K(U)$; cela achève de vérifier l'axiome (c). En dernier lieu, soient $x \in E$, $T \subset E$, et $y \in T$; on pose $T' := T \setminus \{y\}$ et on suppose que x soit algébrique sur $F := K(T)$ et transcendant sur $F' := K(T')$. Puisque x est algébrique sur $F'(y)$, il existe $P(X, Y) \in F'[X, Y] \setminus \{0\}$ avec $P(x, y) = 0$; disons que

$$P(X, Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$$

pour certains $a_0(X), \dots, a_n(X) \in F'[X]$ avec $a_0(X) \neq 0$; alors $a_n(x) \neq 0$, car x est transcendant sur F' . Par suite $Q(Y) := P(x, Y) \in F'(x)[Y] \setminus \{0\}$ et $Q(y) = 0$, i.e. y est algébrique sur $F'(x)$, et cela vérifie l'axiome (d).

Partie (ii) : Soit $T \subset E$; on voit aussitôt que si T est une base de transcendance de E sur K , alors T est une $\mathcal{D}_{E/K}$ -base de E . Réciproquement, si T est une $\mathcal{D}_{E/K}$ -base, il est clair que E est une extension algébrique de $K(T)$, et on vérifiera plus précisément que T est une famille algébriquement libre sur K si et seulement si T est $\mathcal{D}_{E/K}$ -libre. Pour cela, noter que T est une $\mathcal{D}_{E/K}$ -base (resp. une famille algébriquement libre sur K) si et seulement s'il en est de même pour toute partie finie de T (voir l'exercice 1.96(ii)); on peut ainsi supposer que T soit une partie finie $\{t_1, \dots, t_n\}$. Supposons que T soit algébriquement libre sur K , et soit $t \in T$; quitte à permuter les t_i , on peut supposer que $t = t_n$, et on doit vérifier que $t_n \not\triangleleft \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$. Or, par hypothèse l'inclusion $K \subset E$ se prolonge en une extension de corps $K(X_1, \dots, X_n) \rightarrow E$ avec $X_i \mapsto t_i$ pour $i = 1, \dots, n$, induisant par restriction un homomorphisme injectif de K -algèbres $K(X_1, \dots, X_{n-1})[X_n] \rightarrow E$; ce dernier se restreint à son tour en un isomorphisme de corps $K(X_1, \dots, X_{n-1}) \xrightarrow{\sim} F := K(t_1, \dots, t_{n-1})$, d'où finalement un homomorphisme injectif de F -algèbres $g : F[X_n] \rightarrow E$ avec $g(X_n) = t_n$, i.e. t_n est transcendant sur F , comme souhaité. Ensuite, si T n'est pas une famille algébriquement libre sur K , vérifions que T est $\mathcal{D}_{E/K}$ -liée. Pour cela, on peut supposer que T soit *minimale*, i.e. que toute partie $T' \subsetneq T$ soit algébriquement libre sur K . Si $T = \emptyset$, il n'y a rien à montrer; soit donc $n > 0$. Par hypothèse, il existe $P \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ tel que $P(t_1, \dots, t_n) = 0$, et écrivons

$$P = \sum_{i=0}^m P_i(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^{m-i}$$

pour certains $m \in \mathbb{N}$ et $P_0, \dots, P_m \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$, avec $P_0 \neq 0$. Par minimalité de T , on a $P_0(t_1, \dots, t_{n-1}) \neq 0$; posons alors $Q(X) := \sum_{i=0}^m P_i(t_1, \dots, t_{n-1})X^{m-i} \in K(t_1, \dots, t_n)[X]$. Ainsi, $Q \neq 0$, et $Q(t_n) = 0$, d'où $t_n \triangleleft \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Exercice 1.102, partie (i) : Noter que $\text{tr.deg}(E/K) < +\infty$, car par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme surjectif $g : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ de K -algèbres, donc $\{g(X_1), \dots, g(X_n)\}$ est évidemment une partie $\mathcal{D}_{E/K}$ -génératrice de E , qui doit par suite

contenir une base de transcendance de E sur K (théorème 1.97(i)), d'où $\text{tr.deg}(E/K) \leq n$. De même on voit que $k := \text{tr.deg}(F/K) < +\infty$. Soit alors $b_1, \dots, b_k$ une base de transcendance de F sur K formée d'éléments de B , et choisissons $a_1, \dots, a_k \in A$ avec $f(a_1) = b_1, \dots, f(a_k) = b_k$. Soit $h : K[X_1, \dots, X_k] \rightarrow A$ l'unique homomorphisme de K -algèbres avec $h(X_i) = a_i$ pour $i = 1, \dots, k$; par hypothèse, $f \circ h$ est injectif, donc de même pour h , et cela revient à dire que $a_\bullet$ est une famille algébriquement libre sur K . D'après le théorème 1.97(i), il existe alors une base de transcendance de E sur K contenant $a_\bullet$; en particulier, $\text{tr.deg}(E/K) \geq k$.

(ii) : Soient $a_\bullet$ et $b_\bullet$ comme ci-dessus; si $\text{tr.deg}(E/K) = k$, alors $a_\bullet$ est une base de transcendance de E sur K . Or, soit $x \in A \setminus \{0\}$; par hypothèse il existe $P \in K[Y_1, \dots, Y_k, X] \setminus \{0\}$ avec $P(a_\bullet, x) = 0$. Écrivons $P = \sum_{i=0}^r P_i(Y_1, \dots, Y_k)X^i$ pour certains $P_0, \dots, P_r \in K[Y_1, \dots, Y_k]$; on peut supposer que $P_0 \neq 0$, et il vient

$$0 = f(P(a_\bullet, x)) = \sum_{i=0}^r P_i(b_\bullet) \cdot f(x)^i.$$

Mais $P_0(b_\bullet) \neq 0$, car la famille $b_\bullet$ est algébriquement indépendante sur K ; par suite $f(x) \neq 0$, d'où l'assertion.

Exercice 1.107 : Il suffit de prouver que $K^{p^{-m}}$ et E sont K -linéairement disjoints pour tout $m \in \mathbb{N}$. Supposons d'abord que la condition (a) soit vérifiée, et soit $\Lambda \subset E$ une base de transcendance avec $E = K(\Lambda)$; alors la K -sous-algèbre $K[\Lambda] \subset E$ est naturellement identifiée à l'anneau des polynômes $K[X_\bullet] := K[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ sur les indéterminées $X_\bullet := (X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, et $E = \text{Frac } K[\Lambda]$. De même, la $K^{p^{-m}}$ -algèbre de polynômes $K^{p^{-m}}[X_\bullet]$ est naturellement identifiée avec la $K^{p^{-m}}$ -sous-algèbre de $K^{p^{-m}}E$ engendrée par Λ . En outre, l'ensemble $\mathcal{B}$ des monômes unitaires des indéterminées $X_\bullet$ est évidemment une base du K -espace vectoriel $K[X_\bullet]$. D'après le lemme 1.104, il suffit alors de remarquer que $\mathcal{B}$ est une famille libre du $K^{p^{-m}}$ -espace vectoriel $K^{p^{-m}}[X_\bullet]$. Ensuite, supposons que la condition (b) soit vérifiée; on raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Pour $m = 0$, il n'y a rien à montrer, et le cas $m = 1$ est fourni par la proposition 1.106. Soit donc $m > 1$, et supposons que $F := K^{p^{1-m}}$ et E soient K -linéairement disjoints; l'extension $F \subset FE$ est séparable (théorème 1.80(iii.a)), et $F^{p^{-1}} = K^{p^{-m}}$, donc $K^{p^{-m}}$ et FE sont F -linéairement disjoints. D'après la proposition 1.105, $K^{p^{-m}}$ et E sont alors K -linéairement disjoints.

Exercice 1.119, partie (i) : En effet, soit $g : Y \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = \mathbf{1}_X$, et $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$ deux morphismes avec $f \circ h_1 = f \circ h_2$; par suite

$$h_1 = \mathbf{1}_X \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_1 = g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2) = (g \circ f) \circ h_2 = \mathbf{1}_X \circ h_2 = h_2.$$

Le cas où f admet un inverse à droite est analogue.

Partie (ii) : Évidemment, si f est un isomorphisme, il est à la fois un épimorphisme scindé et un monomorphisme scindé. Réciproquement, soit $f : X \rightarrow Y$ un monomorphisme scindé; donc il existe $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ tel que $g \circ f = \mathbf{1}_X$, et il vient : $f \circ g \circ f = f = \mathbf{1}_Y \circ f$, d'où $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, si f est aussi un épimorphisme, et dans ce cas, f est alors un isomorphisme. Le cas où f est à la fois un épimorphisme scindé et un monomorphisme est analogue, et sera laissé au lecteur.

Partie (iii) : On considère d'abord la catégorie Ens : si $f : X \rightarrow Y$ est une application injective d'ensembles, on sait que f admet un inverse à gauche, donc f est un monomorphisme, par (i). Réciproquement, si f est un monomorphisme, supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in X$ avec $f(x_1) = f(x_2)$; soit aussi Z un ensemble qui a un seul élément z , et on considère les applications $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$ telles que $h_i(z) := x_i$ pour $i = 1, 2$. Évidemment $f \circ h_1 = f \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$, et donc $x_1 = x_2$, i.e. f est injective. Le cas de la catégorie Top est analogue : si f est une application continue injective d'espace topologiques $X \rightarrow Y$, il est clair que f est un monomorphisme, car f est même

un monomorphisme pour la catégorie des ensembles, par ce qui précède. Si f est un monomorphisme de $\mathbf{Top}$ et si $f(x_1) = f(x_2)$ pour des points $x_1, x_2 \in X$, soient Z et h_1, h_2 comme ci-dessus ; évidemment il existe une topologie unique sur Z , et h_1 et h_2 sont trivialement des applications continues telles que $f \circ h_1 = f \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$, d'où à nouveau l'injectivité de f .

Partie (iv) : On considère d'abord la catégorie $\mathbf{Ens}$: si f est surjective, f admet un inverse à droite, donc f est un épimorphisme, grâce à (i). Réciproquement, si f est un épimorphisme, notons $g_1 : Y \rightarrow \{0, 1\}$ l'application telle que $g_1(y) = 1$ pour tout $y \in Y$, et $g_2 : Y \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de $f(X)$, i.e. $g_2(y) = 1$ si $y \in f(X)$ et $g_2(y) = 0$ sinon. Evidemment $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, d'où $g_1 = g_2$, i.e. f est surjective. Pour le cas de la catégorie $\mathbf{Top}$, on voit immédiatement que si f est surjective, alors f est un épimorphisme, car f est déjà un épimorphisme dans la catégorie $\mathbf{Ens}$. Réciproquement, si f est un épimorphisme de $\mathbf{Top}$, on munit $\{0, 1\}$ de la topologie telle que $\emptyset$ et $\{0, 1\}$ soient les seules parties ouvertes ; évidemment les applications $g_1, g_2 : Y \rightarrow \{0, 1\}$ définies ci-dessus sont continues pour cette topologie, et on déduit à nouveau que $g_1 = g_2$, donc f est surjective.

Partie (v) : Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g, h : Y \rightarrow Z$ des applications continues d'espaces complètement réguliers, avec $g \circ f = h \circ f$, et supposons que $f(X)$ soit une partie dense de Y . Par l'exercice 1.26(iv) il s'ensuit que $Y' := \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$ est une partie dense et fermée de Y , i.e. $Y' = Y$, d'où $g = h$, et donc f est un épimorphisme. De l'autre côté, si $f(X)$ n'est pas une partie dense de Y , soit Y' l'adhérence de $f(X)$ dans Y , et choisissons $y_0 \in Y \setminus Y'$; par hypothèse, on trouve une fonction continue $g : Y \rightarrow [0, 1]$ telle que $g(Y') = 0$ et $g(y_0) = 1$. Soit $h : Y \rightarrow [0, 1]$ l'application continue telle que $h(y) = 0$ pour tout $y \in Y$; évidemment $g \circ f = h \circ f$, mais $g \neq h$, donc f n'est pas un épimorphisme.

Partie (vi) : On considère d'abord la catégorie $A - \mathbf{Alg}$: si $f : B \rightarrow B'$ est un homomorphisme injectif de A -algèbres, alors f est un monomorphisme, car f est déjà un monomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Ens}$. Réciproquement, si f est un monomorphisme et $b_1, b_2 \in B$ sont des éléments tels que $f(b_1) = f(b_2)$, on considère la A -algèbre $A[X]$, et les uniques homomorphismes de A -algèbres $h_1, h_2 : A[X] \rightarrow B$ tels que $h_i(X) := b_i$ pour $i = 1, 2$. Evidemment $f \circ h_1 = f \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$, donc f est injectif. Le cas de la catégorie $A - \mathbf{Mod}$ est analogue : on voit comme d'habitude que si $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme injectif de A -modules, alors f est un monomorphisme. Réciproquement, supposons que f soit un monomorphisme et $f(x_1) = f(x_2)$ pour certains $x_1, x_2 \in M$; on considère les uniques homomorphismes de A -modules $h_1, h_2 : A \rightarrow M$ tels que $h_i(1) := x_i$ pour $i = 1, 2$. On a $f \circ h_1 = f \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$, ce qui montre que f est injectif.

Il reste à montrer que les épimorphismes de $A - \mathbf{Mod}$ sont les surjections A -linéaires. Mais on voit aisément que toute surjection A -linéaire est un épimorphisme. Pour la réciproque, soit $f : M \rightarrow N$ un épimorphisme de $A - \mathbf{Mod}$, et on pose $C := \text{Coker } f$. On dénote $\pi_1 : N \rightarrow C$ la projection canonique, et $\pi_2 : N \rightarrow C$ l'application nulle (avec $\pi_2(x) := 0$ pour tout $x \in N$). Evidemment $\pi_1 \circ f = \pi_2 \circ f$, d'où $\pi_1 = \pi_2$ et donc $C = 0$, i.e. f est bien surjective.

Exercice 1.124, partie (i.a) : Si f est un isomorphisme, il en est de même pour Ff , pour tout foncteur F , car si $g \circ f = \mathbf{1}_X$ et $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, on a $Fg \circ Ff = F\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{FX}$ et $Ff \circ Fg = \mathbf{1}_{FY}$. Soient F plein et fidèle et Ff un isomorphisme ; alors il existe

$$g' : FY \rightarrow FX \quad \text{tel que} \quad g' \circ Ff = \mathbf{1}_{FX} \quad \text{et} \quad Ff \circ g' = \mathbf{1}_{FY}.$$

On a $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ avec $Fg = g'$, car F est plein ; d'où $F(g \circ f) = F\mathbf{1}_X$ et $F(f \circ g) = F\mathbf{1}_Y$. Donc $g \circ f = \mathbf{1}_X$ et $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, car F est fidèle ; ainsi f est un isomorphisme.

Partie (i.b) : Supposons que f soit un monomorphisme, et soit $Z' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; soient aussi $h'_1, h'_2 : Z' \rightarrow FX$ tels que $Ff \circ h'_1 = Ff \circ h'_2$. Par hypothèse, il existe $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ avec un isomorphisme $t : FZ \xrightarrow{\sim} Z'$, et comme F est plein, on trouve $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$ tels

que $Fh_i = h'_i \circ t$ pour $i = 1, 2$. Par suite

$$F(f \circ h_1) = Ff \circ Fh_1 = Ff \circ h'_1 \circ t = Ff \circ h'_2 \circ t = Ff \circ Fh_2 = F(f \circ h_2).$$

Mais F est fidèle, donc $f \circ h_1 = f \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$, car f est un monomorphisme. Ainsi $h'_1 \circ t = h'_2 \circ t$, et finalement $h'_1 = h'_2$, car t est un isomorphisme. Cela achève de montrer que Ff est un monomorphisme. Réciproquement, supposons que Ff soit un monomorphisme, et soit $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$ deux morphismes tels que $f \circ h_1 = f \circ h_2$; par suite $Ff \circ Fh_1 = Ff \circ Fh_2$, d'où $Fh_1 = Fh_2$, et donc $h_1 = h_2$, car F est fidèle. Donc, f est un monomorphisme.

L'assertion concernant les épimorphismes peut s'établir directement par des raisonnements analogues; alternativement, on applique le principe de dualité de la façon suivante. D'abord, on vérifie aisément que F est une équivalence si et seulement si F^{op} est une équivalence (notation de la remarque 1.122(i)). Par ce qui précède, un morphisme f^{op} est un monomorphisme de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ si et seulement si $F^{\text{op}}(f^{\text{op}})$ est un monomorphisme de $\mathcal{C}'^{\text{op}}$; mais on a déjà observé que les monomorphismes de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ sont les épimorphismes de $\mathcal{C}$ (et de même pour $\mathcal{C}'$), d'où l'assertion.

Partie (ii) : Evidemment, une composition de foncteurs fidèles (resp. pleins) est fidèle (resp. plein). Ensuite, soit $Z'' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'')$; par hypothèse il existe $Z' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ et un isomorphisme $f' : Z'' \xrightarrow{\sim} GZ'$, ainsi qu'un objet Z de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $f : Z' \xrightarrow{\sim} FZ$. D'où un isomorphisme $Gf \circ f' : Z'' \xrightarrow{\sim} GFZ$.

Exercice 1.129, partie (i) : Pour tout morphisme $f' : Y' \rightarrow GX$ de $\mathcal{C}'$ on a $\omega'_{GX} \circ F'f' = G'f' \circ \omega'_Y$. L'identité souhaitée suit pour $f' := \omega_X : FX \rightarrow GX$.

Partie (ii) : Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} F'FX & \xrightarrow{F'(\omega_X)} & F'GX & \xrightarrow{\omega'_{GX}} & G'GX \\ F'Ff \downarrow & & \downarrow F'Gf & & \downarrow G'Gf \\ F'FY & \xrightarrow{F'(\omega_Y)} & F'GY & \xrightarrow{\omega'_{GY}} & G'GY \end{array}$$

dont les deux carrés sont évidemment commutatifs; l'assertion en découle aussitôt.

Partie (iii) : C'est un calcul direct : pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a

$$\begin{aligned} ((\tau' \circ \omega') * (\tau \circ \omega))_X &= (\tau'_{HX} \circ \omega'_{HX}) \circ F'(\tau_X \circ \omega_X) \\ &= \tau'_{HX} \circ \omega'_{HX} \circ F'(\tau_X) \circ F'(\omega_X) \\ &= \tau'_{HX} \circ G'(\tau_X) \circ \omega'_{GX} \circ F'(\omega_X) = (\tau' * \tau)_X \circ (\omega' * \omega)_X \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de l'identité de (i).

Partie (iv) : C'est un calcul direct; en effet, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a

$$\begin{aligned} (\omega'' * (\omega' * \omega))_X &= \omega''_{G'GX} \circ F''(\omega'_{GX} \circ F'\omega_X) = \omega''_{G'GX} \circ F''(\omega'_{GX}) \circ F''F'(\omega'_X) \\ &= (\omega'' * \omega')_{GX} \circ F''F'(\omega'_X) \\ &= ((\omega'' * \omega') * \omega)_X. \end{aligned}$$

Problème 1.131, partie (i) : Soit F une équivalence; alors, pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ on trouve $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ avec un isomorphisme $\eta_{X'} : FX \xrightarrow{\sim} X'$ et on pose $GX' := X$. Or, soit $f' : X' \rightarrow Y'$ un morphisme de $\mathcal{C}'$; puisque F est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $f : GX' \rightarrow GY'$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FGX' & \xrightarrow{Ff} & FGY' \\ \eta_{X'} \downarrow & & \downarrow \eta_{Y'} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

et on pose $Gf' := f$. Pour vérifier que $G\mathbf{1}_{X'} = \mathbf{1}_{GX'}$, il suffit alors de montrer que

$$\eta_{X'} \circ F\mathbf{1}_{GX'} = \mathbf{1}_{X'} \circ \eta_{X'}.$$

Mais cette identité est claire, car $F\mathbf{1}_{GX'} = \mathbf{1}_{FGX'}$. De même, pour tous morphismes $f : X' \rightarrow Y'$ et $g' : Y' \rightarrow Z'$ de $\mathcal{C}'$ il faut vérifier que $G(g' \circ f') = Gg' \circ Gf'$, et par la propriété d'unicité de $G(g' \circ f')$, cela revient à montrer que

$$\eta_{Z'} \circ F(Gg' \circ Gf') = g' \circ f' \circ \eta_{X'}.$$

C'est un calcul direct : $\eta_{Z'} \circ F(Gg' \circ Gf') = \eta_{Z'} \circ FGg' \circ FGf' = g' \circ \eta_{Y'} \circ FGf' = g' \circ f' \circ \eta_{X'}$. On a donc obtenu un foncteur $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, et il est clair que le système $(\eta_{X'} \mid X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'))$ définit un isomorphisme de foncteurs $\eta : FG \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$. Il reste à définir un isomorphisme $\varepsilon : GF \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ vérifiant les identités triangulaires. Pour cela, on remarque que pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un unique morphisme $\varepsilon_X : GFX \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$ tel que $F(\varepsilon_X) = \eta_{FX} : FGF X \xrightarrow{\sim} FX$, car F est plein et fidèle ; de plus, on sait que ε_X est un isomorphisme, grâce à l'exercice 1.124(i). Pour montrer que ε est une transformation naturelle, on doit vérifier que $f \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ GF(f)$ pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$; d'autre part, on a

$$F(f \circ \varepsilon_X) = Ff \circ F(\varepsilon_X) = Ff \circ \eta_{FX} = \eta_{FY} \circ FGFf = F(\varepsilon_Y) \circ FGFf = F(\varepsilon_Y \circ GFf)$$

d'où l'assertion, car F est fidèle. La première identité triangulaire découle aussitôt de la construction de ε . Il reste à vérifier que $\varepsilon_{GX'} = G\eta_{X'}$ pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, et comme F est fidèle, il suffit de montrer que $F\varepsilon_{GX'} = FG\eta_{X'}$, ou de façon équivalente, que $\eta_{FGX'} = FG\eta_{X'}$. Mais pas définition, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} FG(FGX') & \xrightarrow{\eta_{FGX'}} & FGX' \\ FG(\eta_{X'}) \downarrow & & \downarrow \eta_{X'} \\ FGX' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & X' \end{array}$$

d'où l'assertion, car $\eta_{X'}$ est un isomorphisme.

Réciproquement, supposons qu'il existe un foncteur G et des isomorphismes de foncteurs ε et η comme dans (i). En particulier, pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ on a l'isomorphisme $\eta_{X'} : FGX' \xrightarrow{\sim} X'$. Montrons ensuite que F est fidèle : en effet, si $f, f' : X \rightarrow Y$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ avec $Ff = Ff'$, on déduit

$$f = \varepsilon_Y \circ GFf \circ \varepsilon_X^{-1} = \varepsilon_Y \circ GFf' \circ \varepsilon_X^{-1} = f'.$$

Pour montrer que F est plein, soit $g \in \mathcal{C}'(FX, FY)$; il suffit de remarquer que :

$$g = \eta_{FY} \circ FGg \circ \eta_{FX}^{-1} = F\varepsilon_Y \circ FGg \circ (F\varepsilon_X)^{-1} = F(\varepsilon_Y \circ Gg \circ \varepsilon_X^{-1}).$$

Partie (ii) : Cette relation est réflexive, et par l'exercice 1.124(ii) elle est transitive. Pour montrer que la relation est symétrique, soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ une équivalence, et choisissons un foncteur $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ vérifiant la condition de (i) ci-dessus ; notons que si dans la condition de (i) on échange les rôles de F et G , on obtient encore la même condition. Donc, G est elle aussi une équivalence, d'où l'assertion.



LE thème catégoriel amorcé par la section 1.5 atteint dans cette leçon son apothéose. On ouvre avec le *lemme de Yoneda* au début de la première section, dont le but principal est d'introduire l'important concept de *foncteur représentable*, et celui voisin de *couple de foncteurs adjoints* ; le message sous-jacent est un paradigme de l'algèbre et la géométrie modernes : un objet algébrique ou géométrique est intéressant ou utile s'il représente un foncteur intéressant, et les propriétés *algébriques ou géométriques* de l'objet en question correspondent aux propriétés *catégoriques* du foncteur qu'il représente ; cette interaction mutuelle illumine les deux à la fois, et permet d'étudier l'un par le biais de l'autre.

Les sections 2.2 et 2.3 sont presque entièrement consacrées à la notion de *limite d'un foncteur* (et à la notion duale de *colimite*), un sujet majeur de la théorie des catégories, et un outil efficace dans des nombreuses questions d'algèbre et géométrie, dont on fera à vrai dire, dans ce cours, un usage plutôt modéré : les limites projectives sont certainement d'importance cruciale pour l'étude des complétions adiques des anneaux et des modules, et les limites directes (filtrantes) interviennent, entre autres, dans la caractérisation des modules plats, mais ces exemples et les autres que l'on rencontrera par la suite ne justifieraient pas, en soi, le déploiement d'un arsenal catégoriel sophistiqué. Néanmoins, j'ai choisi de présenter une version assez générale et abstraite de cette théorie, confiant en la tolérance du lecteur, et dans l'espoir, peut-être, de sa future reconnaissance. En guise de remerciement, je peux offrir d'ores et déjà au moins un résultat intéressant : le théorème 2.77, qui montre que la classe d'isomorphisme d'un anneau (commutatif) est complètement déterminée par la classe d'équivalence de sa catégorie de modules.

La section 2.4 présente les *catégories additives* et les *catégories abéliennes*, des abstractions qui capturent les principales propriétés structurelles des catégories des modules sur un anneau et qui, depuis leur introduction par Grothendieck au milieu des années 50, fournissent le cadre standard pour le développement de l'algèbre homologique. On est ainsi adéquatement équipé pour entamer la dernière section 2.5, point de départ de nos petites incursions intermittentes dans l'algèbre homologique : on y rencontre des nouvelles créatures algébriques, telles que les *suites exactes* et les *complexes* d'une catégorie abélienne, et les premiers outils permettant de les manipuler, en particulier le *lemme du serpent*, et la *suite exacte longue d'homologie*. On trouvera aussi dans les exercices quelques applications du lemme du serpent, mais pour apprécier pleinement sa signification il faudra attendre nos prochaines explorations de l'algèbre homologique.

2.1. Le lemme de Yoneda. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur ; à tout objet X de $\mathcal{C}$ on peut associer un foncteur

$$h_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens} \quad Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$$

qui fait correspondre à tout morphisme $f : Y \rightarrow Y'$ de $\mathcal{C}$ l'application

$$\mathbf{h}_X(f) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y') \quad g \mapsto f \circ g.$$

En outre, à tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $a \in FX$ on associe l'application

$$\omega_{a,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow FY \quad g \mapsto F(g)(a).$$

Proposition 2.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. On a :

(i) Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $a \in FX$, le système $(\omega_{a,Y} \mid Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ est une transformation naturelle $\omega_a : \mathbf{h}_X \rightarrow F$.

(ii) (Lemme de Yoneda) Pour toute transformation naturelle $\eta : \mathbf{h}_X \rightarrow F$ il existe un unique $a \in FX$ tel que $\eta = \omega_a$.

(iii) En particulier, si $\mathcal{C}$ est petite, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a une bijection :

$$FX \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(\mathbf{h}_X, F). \quad a \mapsto \omega_a.$$

Démonstration. (i) : Il faut vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{\omega_{a,Y}} & FY \\ \mathbf{h}_X(f) \downarrow & & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}(X, Y') & \xrightarrow{\omega_{a,Y'}} & FY' \end{array} \quad \forall Y, Y' \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall f \in \mathcal{C}(Y, Y')$$

Mais si $g : X \rightarrow Y$ est un élément de $\mathcal{C}(X, Y)$, on calcule

$$Ff(\omega_{a,Y}(g)) = Ff(F(g)(a)) = F(f \circ g)(a) = \omega_{a,Y'}(f \circ g) = \omega_{a,Y'}(\mathbf{h}_X(f)(g)).$$

(ii,iii) : Pour l'injectivité, noter que $\omega_{a,X}(\mathbf{1}_X) = F\mathbf{1}_X(a) = \mathbf{1}_{FX}(a) = a$ pour tout $a \in FX$. Ensuite, soit $\eta : \mathbf{h}_X \rightarrow F$ une transformation naturelle ; on pose

$$a(\eta) := \eta_X(\mathbf{1}_X).$$

Montrons que $\eta = \omega_{a(\eta)}$. En effet, soit $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; pour tout $g \in \mathbf{h}_X(Y)$ on a

$$\eta_Y(g) = \eta_Y(g \circ \mathbf{1}_X) = \eta_Y \circ \mathbf{h}_X(g)(\mathbf{1}_X) = Fg \circ \eta_X(\mathbf{1}_X) = F(g)(a(\eta)) = \omega_{a(\eta),Y}(g)$$

d'où l'assertion. $\square$

Exemple 2.2. (i) Soit $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; si dans la proposition 2.1(ii) on prend $F := \mathbf{h}_Y$, on trouve que pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ il existe une unique transformation naturelle $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_X \rightarrow \mathbf{h}_Y$ telle que $\mathbf{h}_{f,X}(\mathbf{1}_X) = f$, et pour toute transformation naturelle $\eta : \mathbf{h}_X \rightarrow \mathbf{h}_Y$ on a $\eta = \mathbf{h}_f$ avec $f := \eta_X(\mathbf{1}_X)$. Si $\mathcal{C}$ est petite, il vient une bijection :

$$\mathcal{C}(Y, X) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(\mathbf{h}_X, \mathbf{h}_Y) \quad (f : Y \rightarrow X) \mapsto (\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_X \rightarrow \mathbf{h}_Y).$$

Explicitement : $\mathbf{h}_{f,Z}(g) = g \circ f$ pour tout $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $g \in \mathbf{h}_X(Z) = \mathcal{C}(X, Z)$.

(ii) Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow Y$ deux morphismes de $\mathcal{C}$; il vient

$$\mathbf{h}_g \circ \mathbf{h}_f = \mathbf{h}_{f \circ g}$$

car $\mathbf{h}_g \circ \mathbf{h}_f(\mathbf{1}_X) = \mathbf{h}_g(f) = f \circ g = \mathbf{h}_{f \circ g}(\mathbf{1}_X)$. Evidemment $\mathbf{h}_{\mathbf{1}_X} = \mathbf{1}_{\mathbf{h}_X}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C}$ est petite, on a donc un *foncteur de Yoneda plein et fidèle* :

$$\mathbf{h}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ens}) \quad X^{\text{op}} \mapsto \mathbf{h}_X \quad (f^{\text{op}} : X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}) \mapsto \mathbf{h}_f.$$

Définition 2.3. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ est dit *représentable*, s'il est isomorphe à $\mathbf{h}_X$, pour un objet X de $\mathcal{C}$. Dans ce cas, on dit aussi que X *représente* F .

2.1.1. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable, l'objet X de $\mathcal{C}$ représentant F n'est pas, en général, unique, mais il est *unique à isomorphisme près*. Plus précisément, la donnée $\eta : h_X \xrightarrow{\sim} F$ d'un isomorphisme de foncteurs détermine X à *isomorphisme canonique près*. En effet, soient X' un autre objet représentant F , et $\eta' : h_{X'} \xrightarrow{\sim} F$ un autre isomorphisme; par l'exemple 2.2(i), il existe $f \in \mathcal{C}(X', X)$ et $g \in \mathcal{C}(X, X')$ de $\mathcal{C}$ tels que $h_g = \eta^{-1} \circ \eta' : h_{X'} \xrightarrow{\sim} h_X$ et $h_f = h_g^{-1} : h_X \xrightarrow{\sim} h_{X'}$, donc $h_{f \circ g} = 1_{h_X} = h_{1_X}$, d'où $f \circ g = 1_X$, d'après l'exemple 2.2(ii), et de même on voit que $g \circ f = 1_{X'}$, donc g est un isomorphisme. De plus, par le lemme de Yoneda, η équivaut aussi à la donnée de l'élément $a := \eta_X(1_X) \in FX$; en résumé, montrer la représentabilité de F équivaut à exhiber un *couple universel* (X, a) formé d'un objet X de $\mathcal{C}$ et un *élément universel* $a \in FX$, jouissant de la *propriété universelle* suivante :

Pour tout $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $b \in FY$, il existe un unique $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ avec $b = Ff(a)$.

Au couple universel (X, a) correspond alors l'isomorphisme $\omega_a : h_X \xrightarrow{\sim} F$.

Lemme 2.4. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur, (X, a) un couple universel pour F .

(i) Soit aussi (X', a') un autre couple avec $X' \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et $a' \in FX'$. Alors (X', a') est universel pour F si et seulement s'il existe un isomorphisme $g : X \xrightarrow{\sim} X'$ (forcément unique) tel que $Fg(a) = a'$.

(ii) Soient $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un autre foncteur, et $\eta : F \xrightarrow{\sim} G$ un isomorphisme de foncteurs. Alors le couple $(X, \eta_X(a))$ est universel pour le foncteur G .

Démonstration. (i) : L'existence et l'unicité de g suivent formellement de la discussion précédente; on peut aussi les déduire directement des propriétés universelles : en effet, la propriété universelle de (X, a) implique qu'il existe un morphisme unique $g : X \rightarrow X'$ tel que $Fg(a) = a'$, et celle de (X', a') implique qu'il existe un morphisme unique $g' : X' \rightarrow X$ tel que $Fg'(a') = a$. Il vient :

$$F(g' \circ g)(a) = Fg' \circ Fg(a) = a \quad \text{et} \quad F(g \circ g')(a') = Fg \circ Fg'(a') = a'.$$

De l'autre côté, $F(1_X)(a) = a$ et $F(1_{X'})(a') = a'$; mais alors, les propriétés universelles impliquent que $g' \circ g = 1_X$ et $g \circ g' = 1_{X'}$, i.e. g est un isomorphisme.

Réciproquement, supposons que l'unique morphisme $g : X \rightarrow X'$ avec $Fg(a) = a'$ soit un isomorphisme; soit aussi $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et $b \in FY$, et notons par $f : X \rightarrow Y$ l'unique morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $Ff(a) = b$. Alors $h := f \circ g^{-1} : X' \rightarrow Y$ est l'unique morphisme tel que $Fh(a') = b$, d'où l'universalité du couple (X', a') .

(ii) : Soit $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et $c \in GY$; il existe un unique $b \in FY$ tel que $\eta_Y(b) = c$, et un unique morphisme $g : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ tel que $Fg(a) = b$; alors g est aussi l'unique morphisme tel que $Gg(\eta_X(a)) = c$. $\square$

Ces considérations assez abstraites sont à la base d'une méthode générale pour la construction d'objets algébriques, qui nous permettra de vérifier de façon uniforme l'unicité (toujours à isomorphisme canonique près) de ces objets, et de démontrer rapidement leurs propriétés remarquables.

Exemple 2.5. Soient Λ un ensemble, A un anneau associatif unitaire. Le foncteur

$$(-)^\Lambda : A - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ens} \quad M \mapsto M^\Lambda := \mathbf{Ens}(\Lambda, M)$$

associe à tout A -module M l'ensemble des applications ensemblistes $\Lambda \rightarrow M$, et à tout homomorphisme $f : M \rightarrow N$ de A -modules l'application

$$M^\Lambda \rightarrow N^\Lambda \quad (\phi : \Lambda \rightarrow M) \mapsto (f \circ \phi : \Lambda \rightarrow N).$$

Montrons que le A -module libre $A^{(\Lambda)}$ représente ce foncteur. En effet, si $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est la base canonique de $A^{(\Lambda)}$ (voir l'exemple 1.12(iv)), on a une bijection naturelle

$$\eta_M : \mathbf{Hom}_A(A^{(\Lambda)}, M) \xrightarrow{\sim} M^\Lambda \quad \forall M \in \mathbf{Ob}(A - \mathbf{Mod})$$

qui associe à tout homomorphisme de A -modules $f : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$ l'application

$$\eta_M(f) : \Lambda \rightarrow M \quad \lambda \mapsto f(e_\lambda).$$

On voit aisément que la donnée $(\eta_M \mid M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}))$ définit un isomorphisme de foncteurs $\eta : \mathbf{h}_{A^{(\Lambda)}} \xrightarrow{\sim} (-)^\Lambda$. L'élément universel correspondant à η est l'application

$$e_\Lambda := \eta_{A^{(\Lambda)}}(\mathbf{1}_{A^{(\Lambda)}}) : \Lambda \rightarrow A^{(\Lambda)} \quad \text{telle que} \quad e_\Lambda(\lambda) = e_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Donc, pour toute application $\phi : \Lambda \rightarrow M$ il existe un unique homomorphisme de A -modules $g_\phi : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$ tel que $g_\phi \circ e_\Lambda = \phi$, i.e. $g_\phi(e_\lambda) = \phi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Par ce qui précède, le couple $(A^{(\Lambda)}, e_\Lambda)$ est déterminé par ces conditions : si (L, l) est un couple formé d'un A -module L et une application universelle $l : \Lambda \rightarrow L$, il existe un unique isomorphisme de A -modules $g : A^{(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} L$ tel que $g \circ e_\Lambda = l$, i.e. tel que $g(e_\lambda) = l(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Exemple 2.6. Si dans l'exemple 2.5, l'on remplace la catégorie $A - \text{Mod}$ par $A - \text{Alg}$ on obtient un deuxième foncteur représentable :

$$[-]^\Lambda : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens} \quad B \mapsto B^\Lambda.$$

Avant de voir la construction, rappelons que $A - \text{Alg}$ est naturellement isomorphe à la catégorie $C(A) - \text{Alg}$ (voir l'exemple 1.126), donc il suffit de représenter le foncteur $[-]^\Lambda : C(A) - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ correspondant. Ainsi, dans la suite on peut remplacer A par $C(A)$ et supposer que A soit commutatif.

• Or, soient d'abord $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda = \{1, \dots, n\}$, de sorte que $B^\Lambda = B^n$ pour toute A -algèbre B ; la remarque 1.3(ii) fournit une bijection naturelle

$$\eta_B : A - \text{Alg}(A[X_1, \dots, X_n], B) \xrightarrow{\sim} B^n \quad f \mapsto (f(X_1), \dots, f(X_n)).$$

On voit aisément que le système $(\eta_B \mid B \in \text{Ob}(A - \text{Alg}))$ définit un isomorphisme de foncteurs $\eta : \mathbf{h}_{A[X_1, \dots, X_n]} \xrightarrow{\sim} [-]^n$, i.e. le foncteur $[-]^n : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ est représenté par la A -algèbre de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$.

• Ensuite, si Λ est un ensemble *fini* de cardinalité $n \in \mathbb{N}$, évidemment le foncteur $[-]^n$ est isomorphe à $[-]^\Lambda$, et donc $A[X_1, \dots, X_n]$ représente aussi ce dernier ; plus précisément, toute bijection $\omega : \Lambda \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ induit un isomorphisme de foncteurs $\omega^* : [-]^n \xrightarrow{\sim} [-]^\Lambda$ défini par :

$$\omega_B^* : B^n \xrightarrow{\sim} B^\Lambda \quad (\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow B) \mapsto (\phi \circ \omega : \Lambda \rightarrow B) \quad \forall B \in \text{Ob}(A - \text{Alg})$$

d'où un isomorphisme de foncteurs $\omega^* \circ \eta : \mathbf{h}_{A[X_1, \dots, X_n]} \xrightarrow{\sim} [-]^\Lambda$. L'élément universel associé à cet isomorphisme est l'application

$$X_\omega : \Lambda \rightarrow A[X_1, \dots, X_n] \quad \lambda \mapsto X_{\omega^{-1}(i)}.$$

On peut se passer du choix de ω à l'aide de la description plus intrinsèque suivante. On indexe les indéterminées directement par les éléments de Λ ; donc, pour tout $\lambda \in \Lambda$ on notera X_λ l'indéterminée correspondante, et on considère l'algèbre de polynômes $A[X_\Lambda] := A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$: il s'agit du A -module libre $A^{(\Sigma)}$, où Σ est l'ensemble des monômes de la forme $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^{\nu(\lambda)}$, pour toute application $\nu : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$, et on multiplie ces monômes de la façon évidente, par addition des exposants. Evidemment, la bijection ω induit aussi un isomorphisme de A -algèbres

$$g : A[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} A[X_\Lambda] \quad X_i \mapsto X_{\omega^{-1}(i)}.$$

Par le lemme 2.4(i), le couple $(A[X_\Lambda], \chi_\Lambda)$ avec

$$\chi_\Lambda := g \circ X_\omega : \Lambda \rightarrow A[X_\Lambda] \quad \lambda \mapsto X_\lambda$$

est aussi universel pour $[-]^\Lambda$, et noter que ce nouveau couple ne dépend plus de ω .

• Soit maintenant Λ un ensemble arbitraire, et notons par $\mathcal{F}$ l'ensembles des parties *finies* de Λ . Pour tout $\Lambda' \in \mathcal{F}$, on a construit la A -algèbre $A[X_{\Lambda'}]$, avec son application

universelle $\chi_{\Lambda'} : \Lambda' \rightarrow A[X_{\Lambda'}]$; notons que si $\Lambda'' \subset \Lambda'$, on a $A[X_{\Lambda''}] \subset A[X_{\Lambda'}]$, et $\chi_{\Lambda''}$ est alors la restriction de $\chi_{\Lambda'}$. On peut donc poser

$$A[X_{\Lambda}] := \bigcup_{\Lambda' \in \mathcal{F}} A[X_{\Lambda'}]$$

et il existe une unique application $\chi_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow A[X_{\Lambda}]$ dont la restriction à $A[X_{\Lambda'}]$ coïncide avec $\chi_{\Lambda'}$, pour tout $\Lambda' \in \mathcal{F}$. De plus, il existe une unique structure de A -algèbre sur $A[X_{\Lambda}]$ telle que l'inclusion $A[X_{\Lambda'}] \rightarrow A[X_{\Lambda}]$ soit un homomorphisme de A -algèbres pour tout $\Lambda' \in \mathcal{F}$: en effet, si $P, Q \in A[X_{\Lambda}]$, il existe $\Lambda', \Lambda'' \in \mathcal{F}$ tels que $P \in A[X_{\Lambda'}]$, $Q \in A[X_{\Lambda''}]$, et donc $P + Q$ et $P \cdot Q$ sont bien définis dans $A[X_{\Lambda' \cup \Lambda''}]$. Vérifions que le couple $(A[X_{\Lambda}], \chi_{\Lambda})$ est universel pour le foncteur $[-]^{\Lambda}$. En effet, soit B une A -algèbre, et $\phi : \Lambda \rightarrow B$ une application; on a vu que pour tout $\Lambda' \in \mathcal{F}$, il existe un homomorphisme unique $g_{\Lambda'} : A[X_{\Lambda'}] \rightarrow B$ de A -algèbres tel que $g_{\Lambda'} \circ \chi_{\Lambda'} = \phi|_{\Lambda'}$. Par suite, la restriction de $g_{\Lambda'}$ à la sous-algèbre $A[X_{\Lambda''}]$ doit coïncider avec $g_{\Lambda''}$, pour tout $\Lambda'' \subset \Lambda'$. Il existe donc un homomorphisme unique de A -algèbres $g : A[X_{\Lambda}] \rightarrow B$ dont la restriction à $A[X_{\Lambda'}]$ coïncide avec $g_{\Lambda'}$, pour tout $\Lambda' \in \mathcal{F}$, et évidemment $g \circ \chi_{\Lambda} = \phi$.

Exercice 2.7. (Sous-foncteurs) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ deux foncteurs; on dit que F est un *sous-foncteur* de F' si l'on a :

- $FX \subset F'X$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- $Ff : FX \rightarrow FY$ est la restriction de $F'f : F'X \rightarrow F'Y$, pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$.

(i) Soient $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ un sous-foncteur de $\mathbf{h}_X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$. Montrer que F est représentable $\Leftrightarrow$ il existe un épimorphisme $f : X \rightarrow X'$ tel que, pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, la partie FY est l'ensemble des morphismes $g : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ qui se factorisent à travers f (i.e. tels qu'il existe $h : X' \rightarrow Y$ avec $g = h \circ f$; noter qu'il existe au plus une telle factorisation, car f est un épimorphisme). Dans ce cas, (X', f) est un couple universel pour F .

(ii) Soient (X', f) un couple universel pour F , et $f' : X \rightarrow X''$ un épimorphisme; on dit que f est *équivalent* à f' s'il existe un isomorphisme (forcément unique) $g : X' \xrightarrow{\sim} X''$ tel que $g \circ f = f'$. Montrer que le couple (X'', f') est universel pour le foncteur F si et seulement si f est équivalent à f' .

(iii) Par exemple, soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection canonique; on considère le sous-foncteur F de $\mathbf{h}_A : \mathbb{Z} - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ défini par :

$$FB := \{g : A \rightarrow B \mid g(I) = 0\} \subset \mathbb{Z} - \text{Alg}(A, B).$$

Montrer que F est représentable, et que $(A/I, \pi)$ est un couple universel pour F .

(iv) Voici un exemple contravariant : on considère un espace topologique $(T, \mathcal{T})$, et une partie $S \subset T$. L'objet T^{op} de la catégorie opposée Top^{op} induit un foncteur

$$\mathbf{h}_{T^{\text{op}}} : \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens} \quad X^{\text{op}} \mapsto \text{Top}(X, T)$$

qui associe à toute application continue $f : X' \rightarrow X$ l'application ensembliste

$$\mathbf{h}_{T^{\text{op}}}(f^{\text{op}}) : \text{Top}(X, T) \rightarrow \text{Top}(X', T) \quad g \mapsto g \circ f.$$

Pour tout espace topologique X , posons maintenant

$$F_S(X) := \{g \in \text{Top}(X, T) \mid g(X) \subset S\}.$$

Evidemment, si $g \in F_S(X)$, on a $g \circ f \in F_S(X')$ pour tout espace topologique X' et toute application continue $f : X' \rightarrow X$, i.e. F_S est un sous-foncteur de $\mathbf{h}_{T^{\text{op}}}$. Montrer que F_S est représentable, et exhiber un couple universel pour F_S .

Définition 2.8. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; avec la terminologie de l'exercice 2.7(ii), un *quotient* de X est la classe d'équivalence d'un épimorphisme $X \rightarrow Y$. Dualelement, un *sous-objet* de X est la classe d'équivalence d'un épimorphisme $X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$, i.e. d'un monomorphisme $Y \rightarrow X$.

(ii) On dénote par $\text{Sub}(X)$ (resp. $\text{Quot}(X)$) la classe dont les éléments sont les sous-objets (resp. les quotients) de X .

Remarque 2.9. (i) En résumant, l'exercice 2.7(ii) nous dit que *les sous-foncteurs représentables de $\mathbf{h}_X$ (resp. de $\mathbf{h}_{X_{\text{op}}}$) sont en correspondance bijective avec les quotients de X (resp. avec les sous-objets de X)*. La classe des sous-foncteurs de $\mathbf{h}_X$ est munie d'un ordre partiel, donné par inclusion de sous-foncteurs, *i.e.* :

$$F \leq G \quad \Leftrightarrow \quad FY \subset GY \quad \forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Cela induit un ordre partiel sur $\text{Quot}(X)$ et sur $\text{Sub}(X)$: par inspection des définitions, on voit que pour deux quotients Q_1, Q_2 représentés par des épimorphismes $(p_i : X \rightarrow Y_i \mid i = 1, 2)$ on a $Q_1 \leq Q_2$ si et seulement si p_1 se factorise à travers p_2 (et la factorisation est alors unique). De même, pour deux sous-objets S_1, S_2 représentés par des monomorphismes $(j_i : Z_i \rightarrow X \mid i = 1, 2)$, on a $S_1 \leq S_2$ si et seulement si j_1 se factorise par j_2 ; pour les sous-objets, on utilise souvent la notation plus suggestive $S_1 \subset S_2$ au lieu de $S_1 \leq S_2$. Aussi, on écrira $S_1 \subsetneq S_2$ si l'on a à la fois $S_1 \subset S_2$ et $S_2 \not\subset S_1$, et dans ce cas on dira que S_1 est un *sous-objet propre* de S_2 .

(ii) La définition des classes $\text{Sub}(X)$ et $\text{Quot}(X)$ pose un problème de nature logique, car les classes d'équivalence de monomorphismes (resp. d'épimorphismes) ne sont pas forcément des ensembles, et donc on ne peut pas toujours construire légitimement une classe dont elles seraient les éléments. On contourne cette difficulté à l'aide d'une astuce due au logicien Dana Scott, dont on va esquisser l'idée. D'abord, rappelons que tout ensemble S peut être muni d'au moins un *bon ordre total* (voir l'exercice 1.33) ; par définition, les *ordinaux* sont les classes d'isomorphisme des ensembles totalement bien ordonnés. On pourrait penser que l'on ait la même difficulté logique, si l'on cherche à former une classe de tous les ordinaux ; mais en fait, *tout ordinal admet un représentant canonique* (dans la théorie de Bernays-Gödel, et dans les autres variantes des théories axiomatiques des ensembles d'usage courant), donc la classe $\mathcal{O}$ des ordinaux sera formée de ces représentants ; *cette classe est elle-même totalement bien ordonnée*, avec la relation d'ordre telle que $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Par suite, pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$, le segment initial $\mathcal{O}(\alpha) := \{\beta \in \mathcal{O} \mid \beta \leq \alpha\}$ est un *ensemble*. On déduit aussi que pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$ la partie $\{\beta \in \mathcal{O} \mid \alpha < \beta\}$ admet un élément minimal, appelé le *successeur* de α , et noté $\alpha + 1$; on dit que α est un *ordinal limite*, s'il n'est pas le successeur d'un ordinal. Suivant Von Neumann, on associe à chaque $\alpha \in \mathcal{O}$ un ensemble défini par récurrence transfinie comme suit : $V_\emptyset := \emptyset$, $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$, l'ensemble des parties de V_α , et $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ si α est un ordinal limite. Avec cette notation, l'axiome de fondation (inclus dans le système axiomatique de Bernays-Gödel) entraîne que *tout ensemble appartient à quelque V_α* . Par suite, pour tout ensemble S il existe un $\alpha \in \mathcal{O}$ minimal avec $S \in V_\alpha$, que l'on appelle le *rang* de S . Soit $\mathcal{U}$ la classe de tous les ensembles ; on obtient ainsi une application de rang :

$$r : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$$

et noter que $r^{-1}(\alpha)$ est un ensemble, pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Or, soit C une classe d'équivalence de monomorphismes ; la partie $r(C)$ n'est pas forcément un ensemble, mais elle admet encore un élément minimal β_C , car si $\alpha \in r(C)$, l'élément minimal de $\mathcal{O}(\alpha) \cap r(C)$ sera aussi minimal pour $r(C)$. L'astuce de Scott consiste alors à remplacer C par l'ensemble $C \cap r^{-1}(\beta_C)$, donc $\text{Sub}(X)$ sera la classe dont les éléments sont ces ensembles, et de même on construit la classe $\text{Quot}(X)$. (Pour les généralités sur les ordinaux et les cardinaux, voir *e.g.* le chapitre II de [17]).

Problème 2.10. (Foncteurs adjoints) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories, $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, et supposons que tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ induise un foncteur représentable

$$\mathbf{h}_X \circ F : \mathcal{C}' \rightarrow \text{Ens} \quad X' \mapsto \mathcal{C}(X, FX').$$

(i) Montrer qu'il existe un foncteur $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, avec une *adjonction* pour le couple (G, F) , i.e. un système d'isomorphismes de foncteurs

$$\omega^X : h_X \circ F \xrightarrow{\sim} h_{GX} \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

qui font commuter les diagrammes de transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc} h_Y \circ F & \xrightarrow{\omega^Y} & h_{GY} \\ h_f * F \downarrow & & \downarrow h_{Gf} \\ h_X \circ F & \xrightarrow{\omega^X} & h_{GX} \end{array}$$

pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ (ici h_f est la transformation naturelle associée à f comme dans l'exemple 2.2, et $h_f * F$ est le produit de Godement de l'exercice 1.129). Autrement dit, on a un système de bijections

$$\boxed{\omega_{X'}^X : \mathcal{C}(X, FX') \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'(GX, X') \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')} \quad \square$$

qui est naturel par rapport aux deux variables X, X' , i.e.

$$\omega_{Y'}^X(Fh \circ g \circ f) = h \circ \omega_{X'}^Y(g) \circ Gf \quad \forall g : Y \rightarrow FX', \forall f : X \rightarrow Y, \forall h : X' \rightarrow Y'.$$

On dit que G est *adjoint à gauche* de F , ou que F est *adjoint à droite* de G .

(ii) Par exemple, soit A un anneau associatif unitaire ; on a un *foncteur d'oubli*

$$F : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$$

qui associe à tout A -module M l'ensemble sous-jacent M (ainsi, F “oublie” la structure de module de M), et à tout homomorphisme $f : M \rightarrow M'$ de A -modules, la même application f de l'ensemble M dans l'ensemble M' . Montrer que F admet un adjoint à gauche, et décrire explicitement un tel foncteur adjoint.

(iii) De même, soit $F' : A\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli qui associe à toute A -algèbre commutative B son ensemble B sous-jacent. Montrer que F' admet un adjoint à gauche, et en donner une construction explicite.

(iv) On a aussi un foncteur d'oubli

$$\text{Ob} : \text{Cat} \rightarrow \text{Ens} \quad \mathcal{C} \mapsto \text{Ob}(\mathcal{C})$$

qui associe à toute petite catégorie l'ensemble de ses objets, et à tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ l'application sous-jacente $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}') : X \mapsto FX$. Montrer que Ob admet un adjoint à gauche et en donner une description explicite.

Exercice 2.11. (i) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tout couple $(X^{\text{op}}, Y), (X'^{\text{op}}, Y')$ d'objets de la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$, et tout morphisme $(f^{\text{op}}, g) : (X^{\text{op}}, Y) \rightarrow (X'^{\text{op}}, Y')$ de $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ on considère l'application

$$\mathcal{C}(f, g) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y') \quad (h : X \rightarrow Y) \mapsto (g \circ h \circ f : X' \rightarrow Y').$$

Montrer que les associations $(X^{\text{op}}, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ et $(f^{\text{op}}, g) \mapsto \mathcal{C}(f, g)$ définissent un foncteur

$$\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}.$$

(ii) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories, et $(G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C})$ un couple de foncteurs adjoints. On définit :

$$\mathcal{C}(-, F) := \mathcal{C}(-, -) \circ (\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \times F) \quad \mathcal{C}'(G, -) := \mathcal{C}'(-, -) \circ (G^{\text{op}} \times \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}).$$

Montrer que la donnée d'une adjonction pour le couple (G, F) équivaut à celle d'un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\mathcal{C}(-, F)} & \text{Ens} \\ & \Downarrow \vartheta & \\ & \xrightarrow{\mathcal{C}'(G, -)} & \end{array}$$

Remarque 2.12. (i) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont petites, on peut interpréter l'adjonction ω du problème 2.10 par un deuxième isomorphisme de foncteurs. Pour cela, notons que les associations : $X \mapsto \mathbf{h}_{GX}$ et $(f : X \rightarrow Y) \mapsto \mathbf{h}_{Gf}$ définissent le foncteur

$$\mathbf{h}^{\mathcal{C}'} \circ G^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}', \text{Ens})$$

(notation de l'exemple 2.2(ii)). Ensuite, notons que F induit un foncteur

$$F^* : \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ens}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}', \text{Ens}) \quad (H : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}) \mapsto H \circ F \quad (\eta : H \rightarrow H') \mapsto \eta * F.$$

Avec cette notation, le foncteur

$$F^* \circ \mathbf{h}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}', \text{Ens})$$

est défini par les associations : $X \mapsto \mathbf{h}_X \circ F$ et $(f : X \rightarrow Y) \mapsto \mathbf{h}_f * F$, et finalement, la donnée $(\omega^X \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ est un isomorphisme de foncteurs

$$\omega : F^* \circ \mathbf{h}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{h}^{\mathcal{C}'} \circ G^{\text{op}}.$$

(ii) On peut en outre interpréter l'adjonction ω comme un isomorphisme de catégories. Pour cela, associons à tout foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ la catégorie

$$F\mathcal{A}/\mathcal{B}$$

telle que $\text{Ob}(F\mathcal{A}/\mathcal{B}) := \{(A, B, f) \mid A \in \text{Ob}(\mathcal{A}), B \in \text{Ob}(\mathcal{B}), f \in \mathcal{B}(FA, B)\}$; les morphismes $(A, B, f) \rightarrow (A', B', f')$ sont les couples (g, h) où $g \in \mathcal{A}(A, A')$, $h \in \mathcal{B}(B, B')$ tels que $h \circ f = f' \circ Fg$, avec la loi de composition évidente :

$$(g', h') \circ (g, h) := (g' \circ g, h' \circ h) \quad \forall (A, B, f) \xrightarrow{(g, h)} (A', B', f') \xrightarrow{(g', h')} (A'', B'', f'').$$

On a deux foncteurs évidents de *source* et *but* :

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\mathbf{s}^F} F\mathcal{A}/\mathcal{B} \xrightarrow{\mathbf{b}^F} \mathcal{B} \quad A \mapsto (A, B, f) \mapsto B \quad g \mapsto (g, h) \mapsto h.$$

Posons aussi

$$\mathcal{B}/F\mathcal{A} := (F^{\text{op}}\mathcal{A}^{\text{op}}/\mathcal{B}^{\text{op}})^{\text{op}} \quad \mathbf{s}_F := (\mathbf{b}^{F^{\text{op}}})^{\text{op}} \quad \mathbf{b}_F := (\mathbf{s}^{F^{\text{op}}})^{\text{op}}$$

de sorte que les objets de $\mathcal{B}/F\mathcal{A}$ sont les données (B, A, f) avec $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, $f \in \mathcal{B}(B, FA)$, et $\mathbf{s}_F : \mathcal{B}/F\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (resp. $\mathbf{b}_F : \mathcal{B}/F\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$) est le foncteur de *source* (resp. de *but*) évident. On appelle $F\mathcal{A}/\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}/F\mathcal{B}$) la *catégorie des flèches à droite* (resp. à gauche) de F . Avec cette notation, la donnée d'une adjonction pour le couple de foncteurs (G, F) comme dans le problème 2.10(i) équivaut à celle d'un isomorphisme de catégories

$$\widehat{\omega} : \mathcal{C}/F\mathcal{C}' \xrightarrow{\sim} G\mathcal{C}/\mathcal{C}' \quad \text{tel que} \quad \mathbf{b}^G \circ \widehat{\omega} = \mathbf{b}_F \quad \text{et} \quad \mathbf{s}^G \circ \widehat{\omega} = \mathbf{s}_F.$$

A savoir, ω et $\widehat{\omega}$ se déterminent l'un l'autre, par : $\widehat{\omega}(X, X', f) = (X, X', \omega_{X'}^X(f))$ pour tout $(X, X', f) \in \text{Ob}(\mathcal{C}/F\mathcal{C}')$ et $\widehat{\omega}(g, h) = (g, h)$ pour tout morphisme (g, h) de $\mathcal{C}/F\mathcal{C}'$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(iii) Il est aussi utile parfois de considérer les sous-catégories :

$$F\mathcal{A}/B \subset F\mathcal{A}/\mathcal{B} \quad B/F\mathcal{A} \subset \mathcal{B}/F\mathcal{A} \quad \forall B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$$

dont les objets sont les $X \in \text{Ob}(F\mathcal{A}/\mathcal{B})$ (resp. les $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B}/F\mathcal{A})$) avec $\mathbf{b}^F(X) = B$ (resp. avec $\mathbf{s}_F(Y) = B$) et les morphismes sont les morphismes ϕ de $F\mathcal{A}/\mathcal{B}$ (resp. ψ de $\mathcal{B}/F\mathcal{A}$) tels que $\mathbf{b}^F(\phi) = \mathbf{1}_B$ (resp. tels que $\mathbf{s}_F(\psi) = \mathbf{1}_B$). Autrement dit, X est la donnée d'un couple (A, f) avec $f \in \mathcal{B}(FA, B)$, et $\phi : (A, f) \rightarrow (A', f')$ est un morphisme $\phi \in \mathcal{A}(A, A')$ tel que $f' \circ F\phi = f$, et de même pour Y et ψ . On dit que $F\mathcal{A}/B$ (resp. $B/F\mathcal{A}$) est la *tranche de F au-dessus de B* (resp. *au-dessous de B*).

Problème 2.13. (Unité et coïunité d'une adjonction) Soient $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur adjoint à gauche de F , et ω une adjonction pour le couple (G, F) . Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ on pose

$$\eta_X := \omega_{GX}^{-1}(\mathbf{1}_{GX}) : X \rightarrow FGX \quad \varepsilon_{X'} := \omega_{X'F}^{FX'}(\mathbf{1}_{FX'}) : GFX' \rightarrow X'.$$

(i) Montrer que les systèmes $(\eta_X \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ et $(\varepsilon_{X'} \mid X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'))$ définissent des transformations naturelles

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow F \circ G \quad \varepsilon : G \circ F \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}.$$

(ii) On appelle η l'*unité* et ε la *coïunité* de l'adjonction ω . Montrer que η et ε sont reliées par les *identités triangulaires* exprimées par les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta * F} & FGF \\ & \searrow \mathbf{1}_F & \downarrow F * \varepsilon \\ & & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{G * \eta} & GFG \\ & \searrow \mathbf{1}_G & \downarrow \varepsilon * G \\ & & G. \end{array}$$

(iii) Réciproquement, soient $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs, et $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow F \circ G$, $\varepsilon : G \circ F \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ deux transformations naturelles satisfaisant les identités triangulaires de (ii). Montrer que η et ε sont respectivement l'unité et la coïunité d'une et une seule adjonction ω pour le couple (G, F) . Explicitement :

$$\omega_{X'}^X(f) = \varepsilon_{X'} \circ G(f) \quad \omega_{X'}^{X'}(g) = F(g) \circ \eta_X \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, FX'), \forall g \in \mathcal{C}'(GX, X').$$

(iv) Pour chacune des adjonctions obtenues dans les parties (ii), (iii) et (iv) du problème 2.10, écrire les unités et coïunités correspondantes.

Exercice 2.14. (i) Avec la notation de l'exercice 2.11(ii), montrer que l'adjonction ϑ détermine l'adjoint à gauche G de F à isomorphisme unique près : à savoir, soit $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un deuxième foncteur avec une adjonction $\omega : \mathcal{C}(-, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'(H, -)$. Alors il existe un isomorphisme de foncteurs unique $\phi : G \xrightarrow{\sim} H$ tel que

$$\vartheta = \mathcal{C}'(\phi, -) \circ \omega \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}'(\phi, -) := \mathcal{C}'(-, -) * (\phi^{\text{op}} \times i_{\mathcal{C}'})$$

où $i_{\mathcal{C}'}$ dénote l'endomorphisme identique du foncteur $\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$, et $\phi^{\text{op}} \times i_{\mathcal{C}'} : H^{\text{op}} \times \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\sim} G^{\text{op}} \times \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ est le produit de transformations naturelles de la remarque 1.127(v).

(ii) Dans la situation de (i), soient $(\eta^{\vartheta}, \varepsilon^{\vartheta})$ et $(\eta^{\omega}, \varepsilon^{\omega})$ les unités et coïunités de l'adjonction ϑ , respectivement ω . En déduire que :

$$\eta_X^{\vartheta} = F(\phi_X^{-1}) \circ \eta_X^{\omega} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{X'}^{\vartheta} = \varepsilon_{X'}^{\omega} \circ \phi_{FX'} \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}').$$

(iii) Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ notons

$$(\omega^{\text{op}})_X^{X'} := (\omega_{X'}^X)^{-1} : \mathcal{C}'^{\text{op}}(X', G^{\text{op}}X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\text{op}}(F^{\text{op}}X', X).$$

Montrer que ω^{op} est une adjonction pour le couple $(F^{\text{op}}, G^{\text{op}})$. Compte tenu de (i), on conclut que les composantes F et G d'un couple de foncteurs adjoints se déterminent l'une l'autre à isomorphisme près.

Remarque 2.15. (i) Avec la notation du problème 2.13, noter que

$$(\eta * F)^{\text{op}} = \eta^{\text{op}} * F^{\text{op}} \quad \text{et} \quad (F * \varepsilon)^{\text{op}} = F^{\text{op}} * \varepsilon^{\text{op}}$$

et de même pour $(G * \eta)^{\text{op}}$ et $(\varepsilon * G)^{\text{op}}$. On en déduit les identités :

$$(\eta^{\text{op}} * F^{\text{op}}) \circ (F^{\text{op}} * \varepsilon^{\text{op}}) = \mathbf{1}_{F^{\text{op}}} \quad (G^{\text{op}} * \eta^{\text{op}}) \circ (\varepsilon^{\text{op}} * G^{\text{op}}) = \mathbf{1}_{G^{\text{op}}}.$$

Grâce à la partie (iii) du problème 2.13, il s'ensuit qu'il existe une adjonction unique pour le couple $(F^{\text{op}}, G^{\text{op}})$ dont l'unité et la coïunité sont respectivement ε^{op} et η^{op} . Il s'agit évidemment de l'adjonction ω^{op} de l'exercice 2.14(iii).

(ii) Soit en outre $\mathcal{C}''$ une troisième catégorie ; avec la remarque 1.130(i,iii) et le problème 2.13(iii), on voit que si $\mathcal{C}''$ est petite, $\text{Fun}(\mathcal{C}'', \eta)$ et $\text{Fun}(\mathcal{C}'', \varepsilon)$ sont respectivement l'unité et la coïunité d'une unique adjonction pour le couple $(\text{Fun}(\mathcal{C}'', G), \text{Fun}(\mathcal{C}'', F))$.

Aussi, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont petites, $\text{Fun}(\varepsilon, \mathcal{C}'')$ et $\text{Fun}(\eta, \mathcal{C}'')$ sont respectivement l'unité et la coïunité d'une unique adjonction pour le couple $(\text{Fun}(F, \mathcal{C}''), \text{Fun}(G, \mathcal{C}''))$, d'après la remarque 1.130(i,ii).

(iii) Soit $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ une équivalence de catégories et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un quasi-inverse pour F . Compte tenu des problèmes 1.131(i) et 2.13(iii), on voit que G est à la fois adjoint à gauche et à droite de F : détails laissés au lecteur.

Proposition 2.16. *Dans la situation du problème 2.13, on a :*

(i) *F est fidèle (resp. plein) si et seulement si $\varepsilon_{X'}$ est un épimorphisme (resp. un monomorphisme scindé) pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$. (Voir l'exercice 1.119(i).)*

(ii) *G est fidèle (resp. plein) si et seulement si η_X est un monomorphisme (resp. un épimorphisme scindé) pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.*

(iii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *F (resp. G) est plein et fidèle*

(b) *ε (resp. η) est un isomorphisme de foncteurs*

(c) *Il existe un isomorphisme de foncteurs $\varepsilon' : GF \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ (resp. $\eta' : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} FG$).*

En outre, si (c) est vérifiée, ε' (resp. η') est la coïunité (resp. l'unité) d'une unique adjonction pour le couple (G, F) .

(iv) *Si en outre F admet aussi un adjoint à droite $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, alors G est plein et fidèle si et seulement s'il en est de même pour H .*

Démonstration. On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii), en vertu de la remarque 2.15(i), et pour la preuve de (iii), il suffit de vérifier les assertions concernant F , ε et ε' .

(i) : Si $\varepsilon_{X'}$ est un épimorphisme pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}'(X', Y')$ tels que $Ff_1 = Ff_2$; il vient :

$$f_1 \circ \varepsilon_{X'} = \varepsilon_{Y'} \circ GFf_1 = \varepsilon_{Y'} \circ GFf_2 = f_2 \circ \varepsilon_{X'}$$

d'où $f_1 = f_2$, ce qui montre que F est fidèle. Réciproquement, si F est fidèle, supposons que $f_1 \circ \varepsilon_{X'} = f_2 \circ \varepsilon_{X'}$; grâce aux identités triangulaires on déduit :

$$Ff_i = F(\varepsilon_{Y'}) \circ FGF(f_i) \circ \eta_{FX'} = F(\varepsilon_{Y'} \circ GFf_i) \circ \eta_{FX'} = F(f_i \circ \varepsilon_{X'}) \circ \eta_{FX'}$$

d'où $Ff_1 = Ff_2$, et finalement $f_1 = f_2$. Cela montre que $\varepsilon_{X'}$ est un épimorphisme.

Ensuite, soit $\varepsilon_{X'}$ un monomorphisme scindé pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, et choisissons un inverse à gauche $s_{X'}$ de $\varepsilon_{X'}$ pour tout tel X' ; pour $f \in \mathcal{C}(FX', FY')$, posons $g := \varepsilon_{Y'} \circ Gf \circ s_{X'} : X' \rightarrow Y'$. Il vient :

$$\omega_{Y'}^{FX'}(Fg) = \varepsilon_{Y'} \circ GFg = g \circ \varepsilon_{X'} = \varepsilon_{Y'} \circ Gf \circ s_{X'} \circ \varepsilon_{X'} = \varepsilon_{Y'} \circ Gf = \omega_{Y'}^{FX'}(f)$$

d'où $f = Fg$, et cela montre que F est plein. Réciproquement, si F est plein, pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ il existe $t_{X'} \in \mathcal{C}'(X', GFX')$ tel que $Ft_{X'} = \eta_{FX'} : FX' \rightarrow FGFX'$; avec les identités triangulaires, il vient :

$$\omega_{GFEX'}^{FX'}(t_{X'} \circ \varepsilon_{X'}) = F(t_{X'} \circ \varepsilon_{X'}) \circ \eta_{FX'} = Ft_{X'} \circ F(\varepsilon_{X'}) \circ \eta_{FX'} = \eta_{FX'}$$

mais $\eta_{FX'} = \omega_{GFEX'}^{FX'}(\mathbf{1}_{GFEX'})$, d'où $t_{X'} \circ \varepsilon_{X'} = \mathbf{1}_{GFEX'}$.

Avec (i), (ii) et l'exercice 1.119(ii) il vient (iii.a) $\Leftrightarrow$ (iii.b) $\Rightarrow$ (iii.c).

(iii.c) $\Rightarrow$ (iii.a) : Pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ on obtient une bijection

$$\xi_{X,Y} : \mathcal{C}'(X, Y) \xrightarrow{\phi_{X,Y}} \mathcal{C}'(GFX, Y) \xrightarrow{\omega_Y^{FX} - 1} \mathcal{C}(FX, FY)$$

avec $\phi_{X,Y}(f) := f \circ \varepsilon'_X$ pour tout $f \in \mathcal{C}'(X, Y)$. Vérifions que $\xi_{X,Y}$ est naturel en X et Y : en effet, pour tout $g \in \mathcal{C}'(X', X)$ et $h \in \mathcal{C}'(Y, Y')$ on a :

$$\begin{aligned} \xi_{X',Y'}(h \circ f \circ g) &= Fh \circ \omega_Y^{FX'}(f \circ g \circ \varepsilon'_{X'}) \\ &= Fh \circ \omega_Y^{FX'}(f \circ \varepsilon'_X \circ GFg) \\ &= Fh \circ \xi_{X,Y}(f) \circ Fg \end{aligned}$$

d'où l'assertion. En particulier, pour tout $f \in \mathcal{C}'(X, Y)$ il vient :

$$\xi_{Y,Y}(\mathbf{1}_Y) \circ Ff = \xi_{X,Y}(f) = \xi_{X,Y}(f \circ \mathbf{1}_X) = Ff \circ \xi_{X,X}(\mathbf{1}_X).$$

Pour $X = Y$, et avec f tel que $\xi_{X,X}(f) = \mathbf{1}_{FX}$, on déduit que $\xi_{X,X}(\mathbf{1}_X)$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$. Puisque $\xi_{X,Y}(f) = Ff \circ \xi_{X,Y}(\mathbf{1}_X)$, on conclut que l'association $f \mapsto Ff$ est une bijection $\mathcal{C}'(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(FX, FY)$ pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, d'où (iii.a). Montrons ensuite que ε' est la coïunité d'une unique adjonction pour (G, F) . Pour cela, posons $\vartheta := \varepsilon' \circ \varepsilon^{-1} : \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ et $\eta' := (F * \vartheta^{-1} * G) \circ \eta$. On calcule :

$$\begin{aligned} (F * \varepsilon') \circ (\eta' * F) &= (F * \vartheta) \circ (F * \varepsilon) \circ (F * \vartheta^{-1} * GF) \circ (\eta * F) \\ &= (F * \vartheta) \circ (F * \vartheta^{-1}) \circ (F * \varepsilon) \circ (\eta * F) \\ &= \mathbf{1}_F. \end{aligned}$$

De même on vérifie que $(\varepsilon' * G) \circ (G * \eta') = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. L'assertion découle alors du problème 2.13(iii).

(iv) : Soient $\eta' : \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \rightarrow HF$ et $\varepsilon' : FH \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$, l'unité et la coïunité d'une adjonction pour le couple (F, H) ; au vu de (iii) et de la remarque 2.15(i), il suffit de prouver que si ε' est un isomorphisme, il en est de même pour η . Pour cela, montrons plus précisément que l'inverse de η est la composition

$$\gamma : FG \xrightarrow{(FG)*\varepsilon'^{-1}} FGFH \xrightarrow{F*\varepsilon*H} FH \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}.$$

D'un côté, il vient : $\gamma \circ \eta = \varepsilon' \circ (F * \varepsilon * H) \circ (\eta * FH) \circ \varepsilon'^{-1} = \varepsilon' \circ \varepsilon'^{-1} = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ en vertu de la naturalité de η et des identités triangulaires pour (η, ε) . De l'autre côté :

$$\begin{aligned} \eta \circ \gamma &= (\varepsilon' * FG) \circ (FH * \eta) \circ (F * \varepsilon * H) \circ (FG * \varepsilon'^{-1}) \\ &= (\varepsilon' * FG) \circ (F * \varepsilon * HFG) \circ (FGFH * \eta) \circ (FG * \varepsilon'^{-1}) \\ &= (\varepsilon' * FG) \circ (F * \varepsilon * HFG) \circ (FG * \varepsilon'^{-1} * FG) \circ (FG * \eta) \\ &= (\varepsilon' * FG) \circ (F * \varepsilon * HFG) \circ (FGF * \eta' * G) \circ (FG * \eta) \\ &= (\varepsilon' * FG) \circ (F * \eta' * G) \circ (F * \varepsilon * G) \circ (FG * \eta) \\ &= (\mathbf{1}_F * G) \circ (F * \mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_{FG}. \end{aligned}$$

où la première et la troisième égalités suivent de la naturalité de ε' , la deuxième et la cinquième suivent de la naturalité de ε , et la quatrième et la sixième découlent des identités triangulaires pour (η', ε') et (η, ε) . $\square$

Exercice 2.17. (i) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ trois catégories, et $(G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C})$, $(G' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'', F' : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}')$ deux couples de foncteurs adjoints. Montrer que $(G' \circ G, F \circ F')$ est un couple de foncteurs adjoints.

(ii) Soient $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur ayant des adjoints à gauche G et à droite H pleins et fidèles, et soit (η, ε) (resp. (η', ε')) l'unité et la coïunité d'une adjonction pour le couple (G, F) (resp. (F, H)). Montrer qu'il existe une unique transformation naturelle $\beta : G \rightarrow H$ telle que $\beta * F = \eta' * \varepsilon$. Montrer en outre que $F * \beta = (\varepsilon' * \eta)^{-1}$.

2.2. Limites et colimites. Soient I et $\mathcal{C}$ deux catégories, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ un objet. Le foncteur constant sur I de valeur X est le foncteur $c_X : I \rightarrow \mathcal{C}$ avec

$$c_X(i) = X \quad \text{et} \quad c_X(\phi) = \mathbf{1}_X \quad \text{pour tout } i \in \text{Ob}(I) \text{ et tout morphisme } \phi \text{ de } I.$$

Tout morphisme $f : X \rightarrow X'$ de $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle évidente

$$c_f : c_X \rightarrow c_{X'} \quad i \mapsto f \quad \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Définition 2.18. Dans la situation ci-dessus, soit aussi $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

(i) Un *cône de sommet* X et base F est une transformation naturelle $c_X : X \rightarrow F$. Il s'agit donc d'un système $(\eta_i : X \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ de morphismes de $\mathcal{C}$ avec :

$$\begin{array}{ccc} & \eta_i & \\ X & \searrow & Fi \\ & \eta_j & \\ & & Fj \end{array} \quad \eta_j = F\phi \circ \eta_i \quad \forall i, j \in \text{Ob}(I), \forall \phi \in I(i, j)$$

(ii) Un cône $\eta : c_L \rightarrow F$ est *universel* si pour tout cône $\psi := (\psi_i : X \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ il existe un unique morphisme $f : X \rightarrow L$ de $\mathcal{C}$ tel que $\psi = \eta \circ c_f$, i.e. $\psi_i = \eta_i \circ f$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. On dit alors que l'objet L est une *limite* de F .

(iii) Si I est une petite catégorie, on appelle *foncteur limite* de F le foncteur

$$\lim_I F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens} \quad X^{\text{op}} \mapsto \text{Nat}(c_X, F)$$

(voir la remarque 1.127(iii)) associant à tout $f \in \mathcal{C}(X, X')$ l'application

$$\lim_I F(f) : \text{Nat}(c_{X'}, F) \rightarrow \text{Nat}(c_X, F) \quad (\eta : c_{X'} \rightarrow F) \mapsto (\eta \circ c_f : c_X \rightarrow F).$$

Remarque 2.19. (i) Si I est petite, tout cône $\eta : c_L \rightarrow F$ induit des applications :

$$\omega_X : \mathcal{C}(X, L) \rightarrow \text{Nat}(c_X, F) \quad f \mapsto \eta \circ c_f \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

et on voit aisément que $(\omega_X \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ est une transformation naturelle

$$\omega : \mathbf{h}_{L^{\text{op}}} \rightarrow \lim_I F.$$

En outre η est universel $\Leftrightarrow \omega$ est un isomorphisme. Donc, un couple universel (L, η) pour $\lim_I F$ est la donnée d'un objet limite L de F et d'un cône universel η . On écrira parfois $\lim_I F$ pour désigner un objet limite de L , même si I n'est pas petite.

(ii) Tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ n'admet pas d'objet limite, mais si une telle limite existe, elle est unique à isomorphisme près : en effet, si I est petite, cela découle de (i) et du lemme 2.4(i). Dans le cas général, on peut encore raisonner comme dans la preuve de *loc.cit.* : soient L et L' deux limites de F , et $\eta : c_L \rightarrow F$, $\eta' : c_{L'} \rightarrow F$ les cônes universels respectifs ; ainsi, il existe des morphismes uniques $f : L' \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow L'$ avec $\eta' = \eta \circ c_f$ et $\eta = \eta' \circ c_g$, donc $\eta = \eta \circ c_f \circ c_g = \eta \circ c_{f \circ g}$, d'où $f \circ g = \mathbf{1}_L$, par l'universalité de η , et de même on voit que $g \circ f = \mathbf{1}_{L'}$, CQFD.

La notion catégorique abstraite de limite englobe plusieurs concepts plus familiers, incarnés par des objets mathématiques “concrets” différents, suivant les catégories particulières où on les considère. Voici quelques exemples :

Exemple 2.20. (i) D'abord, soit I une catégorie discrète (voir l'exemple 1.114(vi)). Dans ce cas, I est complètement déterminée par la classe des ses objets, et peut être identifiée avec cette dernière par un abus inoffensif de notation. Alors, un foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ n'est rien d'autre que la donnée d'une *famille* $(F_i \mid i \in I)$ d'*objets* de $\mathcal{C}$ indexée par les éléments de I . De même, un cône $\psi : c_X \rightarrow F$ est la donnée d'une famille arbitraire de morphismes $(\psi_i : X \rightarrow F_i \mid i \in I)$. La limite de F est appelée aussi le *produit* de la famille $(F_i \mid i \in I)$, et elle est souvent notée

$$\prod_{i \in I} F_i.$$

Si I est une petite catégorie (i.e. la catégorie discrète associée à un ensemble), on dira que $(F_i \mid i \in I)$ est une *petite famille d'objets* de $\mathcal{C}$.

(ii) Pour justifier cette terminologie, montrons que pour $\mathcal{C} = \text{Ens}$, le produit -- tel qu'il a été défini en (i) -- d'une petite famille d'ensembles $(S_i \mid i \in I)$ est représentable par le produit cartésien standard $S := \prod_{i \in I} S_i$ et le cône universel correspondant est le système des projections canoniques $(\pi_i : S \rightarrow S_i \mid i \in I)$. En effet, si X est un ensemble quelconque, et $(\psi_i : X \rightarrow S_i \mid i \in I)$ un système arbitraire d'applications ensemblistes, il

existe une unique application $\psi : X \rightarrow S$ telle que $\pi_i \circ \psi = \psi_i$ pour tout $i \in I$: bien sûr, il s'agit de l'application telle que $\psi(x) := (\psi_i(x) \mid i \in I) \in S$ pour tout $x \in X$.

(iii) Considérons ensuite le cas où $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, et montrons que le produit de toute petite famille $T_\bullet := ((T_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I)$ d'espaces topologiques est représentable. En effet, notons $T := \prod_{i \in I} T_i$, le produit (cartésien) des ensembles T_i ; on dit qu'une partie $U \subset T$ est un *ouvert fondamental*, s'il existe une partie finie J de I et pour tout $j \in J$ une partie ouverte $U_j \in \mathcal{T}_j$ telles que

$$U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} T_i.$$

Soit $\mathcal{T}_T$ la topologie sur T engendrée par les ouverts fondamentaux. Alors $(T, \mathcal{T}_T)$ est un produit de la famille $T_\bullet$, avec pour cône universel le système des projections canoniques $(T \rightarrow T_i \mid i \in I)$: les vérifications seront laissées aux soins du lecteur.

(iv) Soit A un anneau associatif unitaire. On voit aisément que le produit catégorique d'une petite famille $(M_i \mid i \in I)$ de A -modules est représentable dans $A - \mathbf{Mod}$ par le produit direct $M := \prod_{i \in I} M_i$ de l'exemple 1.12(i) (et les projections canoniques $M \rightarrow M_i$ donnent un cône universel). De même, le produit d'une petite famille

$$((B_i, j_i : A \rightarrow B_i) \mid i \in I)$$

de A -algèbres commutatives est représentable dans $A - \mathbf{Alg}$ par le produit cartésien $B := \prod_{i \in I} B_i$ muni des lois d'addition et multiplication "terme à terme", *i.e.* telles que

$$b_\bullet + b'_\bullet := (b_i + b'_i \mid i \in I) \quad b_\bullet \cdot b'_\bullet := (b_i b'_i \mid i \in I)$$

pour tous $b_\bullet := (b_i \mid i \in I), b'_\bullet := (b'_i \mid i \in I) \in B$. L'homomorphisme structurel est :

$$j : A \rightarrow B \quad a \mapsto (j_i(a) \mid i \in I).$$

Encore une fois, le cône universel est donné par les projections canoniques $B \rightarrow B_i$.

(v) On raisonne de même pour vérifier que le produit de toute petite famille de groupes est représentable par le produit cartésien des ensembles sous-jacents, muni de la loi de composition terme à terme : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(vi) Aussi le produit de toute petite famille $\mathcal{C}_\bullet := (\mathcal{C}_i \mid i \in I)$ de petites catégories est représentable dans la catégorie $\mathbf{Cat}$! En effet, notons par $\mathcal{C}$ la catégorie avec

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) := \prod_{i \in I} \mathbf{Ob}(\mathcal{C}_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(X_\bullet, Y_\bullet) := \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i(X_i, Y_i) \quad \forall X_\bullet, Y_\bullet \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}).$$

La loi de composition de $\mathcal{C}$ est "terme à terme" : si $f_\bullet := (f_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in I)$ et $g_\bullet := (g_i : Y_i \rightarrow Z_i \mid i \in I)$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}(X_\bullet, Y_\bullet)$ et $\mathcal{C}(Y_\bullet, Z_\bullet)$, on pose $g_\bullet \circ f_\bullet := (g_i \circ f_i : X_i \rightarrow Z_i \mid i \in I)$. On a des foncteurs de projection évidents $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in I$, qui constituent un cône universel pour le produit de la famille $\mathcal{C}_\bullet$: les vérifications détaillées seront laissées en exercice au lecteur. Ce produit généralise la construction de l'exemple 1.121(x), mais à la différence de celle-ci, il n'est disponible que si chaque $\mathcal{C}_i$ est une petite catégorie.

Exercice 2.21. Montrer qu'un espace topologique $(T, \mathcal{T})$ est séparé $\Leftrightarrow$ la *diagonale* $\Delta_T := \{(t, t) \mid t \in T\}$ est une partie fermée du produit $(T, \mathcal{T}) \times (T, \mathcal{T})$.

Exemple 2.22. Soit I une *petite* catégorie arbitraire.

(i) Montrons que la limite de tout foncteur

$$S_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Ens} \quad i \mapsto S_i \quad (\phi : i \rightarrow j) \mapsto (S_\phi : S_i \rightarrow S_j)$$

est représentable. En effet, on a le représentant canonique suivant : soit $L \subset S := \prod_{i \in \mathbf{Ob}(I)} S_i$ la partie des *suites cohérentes*, *i.e.* des $(x_i \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ avec $x_j = S_\phi(x_i)$ pour tout morphisme $\phi : i \rightarrow j$ de I . Pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$, la projection $p_i : S \rightarrow S_i$ se restreint en une application $v_i : L \rightarrow S_i$ et la construction entraîne aussitôt que $S_\phi \circ v_i = v_j$ pour tout ϕ comme ci-dessus. On a donc un cône $v_\bullet : L \rightarrow S_\bullet$ de sommet L et base $S_\bullet$. Or, soit X un ensemble et $h_\bullet := (h_i : X \rightarrow S_i \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ une famille d'applications; on déduit une application unique $h : X \rightarrow S$ telle que $p_i \circ h = h_i$ pour

tout $\lambda \in \Lambda$, et on voit aisément que $h(X) \subset L \Leftrightarrow h_\bullet$ est un cône de base $S_\bullet$ et sommet X . Ainsi, le cône $v_\bullet$ est bien universel.

(ii) De même, pour tout anneau A associatif unitaire, la limite de tout foncteur $M_\bullet : I \rightarrow A - \text{Mod}$ est représentable. En effet, soit $L \subset M := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} M_i$ la partie des suites cohérentes comme en (i); on voit aisément que L est un sous-module de M , et pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, la restriction $v_i : L \rightarrow M_i$ de la projection $M \rightarrow M_i$ est une application A -linéaire. On a donc un cône $v_\bullet : L \rightarrow M_\bullet$ de sommet L et base $M_\bullet$, et en raisonnant comme en (i) on voit aisément que $v_\bullet$ est universel.

(iii) En outre, pour tout foncteur $B_\bullet : I \rightarrow A - \text{Alg}$, soit $B := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} B_i$ le produit de la famille de A -algèbres commutatives $(B_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ (avec la structure de A -algèbre donnée par l'exemple 2.20(iv)); notons à nouveau $p_i : B \rightarrow B_i$ la projection canonique pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et $L \subset B$ la partie des suites cohérentes. On voit aisément que L est une A -sous-algèbre de B . Si C est une A -algèbre et $(h_i : C \rightarrow B_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet C et base $B_\bullet$, on a un unique homomorphisme de A -algèbres $h : C \rightarrow B$ tel que $p_i \circ h = h_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et comme dans (ii), on voit aussitôt que $h(C) \subset L$. Ainsi L représente la limite de $B_\bullet$, avec cône universel donné par les restrictions $L \rightarrow B_i$ des projections p_i .

(iv) Dans la situation de (ii) (resp. de (iii)), soient $F : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ (resp. $G : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$) le foncteur d'oubli, et $\tau_\bullet := (N \rightarrow M_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet N et base $M_\bullet$ (resp. $\eta_\bullet := (D \rightarrow B_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet D et base $B_\bullet$). Par inspection directe, et par la remarque 2.19(ii), on voit que $\tau_\bullet$ est universel si et seulement s'il en est de même pour $F \circ \tau_\bullet$, de sommet l'ensemble sous-jacent à N , et base $F \circ M_\bullet : I \rightarrow \text{Ens}$. De même, $\eta_\bullet$ est universel si et seulement s'il en est de même pour $G \circ \eta_\bullet$, de sommet l'ensemble GD et base $G \circ B_\bullet : I \rightarrow \text{Ens}$.

Exemple 2.23. (i) Un autre cas intéressant pour de nombreuses applications s'obtient en prenant $I := \mathcal{C}_\Lambda$, la catégorie associée à une classe partiellement ordonnée $(\Lambda, \leq)$ (voir l'exemple 1.114(vii)). Pour toute catégorie $\mathcal{B}$, un foncteur $\mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{B}$ est un *système d'objets de $\mathcal{B}$ indexé par Λ* , i.e. une donnée

$$(X_\bullet, f_{\bullet\bullet}) := (X_\lambda, f_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu)$$

consistant en :

- un objet X_λ de $\mathcal{B}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$
- un morphisme de $\mathcal{B}$, dit *morphisme de transition*

$$f_{\lambda\mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ tels que } \lambda \leq \mu$$

vérifiant les identités : $f_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda}$ et $f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$ pour tous $\lambda \leq \mu \leq \nu$.

(Noter que cette situation inclut comme cas particulier celle de l'exemple 2.20 : en effet, il suffit de faire $\Lambda := E$, muni de l'ordre trivial tel que pour tout $x, y \in E$ on a $x \leq y$ si et seulement si $x = y$.) La limite d'un tel foncteur est aussi appelée *limite inverse* du système $X_\bullet$, et elle est plus souvent notée

$$\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

Si $(X'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$ est un deuxième système d'objets de $\mathcal{B}$ indexé par Λ , un *morphisme de systèmes indexés* $\omega_\bullet : (X_\bullet, f_{\bullet\bullet}) \rightarrow (X'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$ est une transformation naturelle entre les foncteurs correspondants $\mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{B}$, i.e. une famille $(\omega_\lambda : X_\lambda \rightarrow X'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de morphismes de $\mathcal{B}$ tels que $f'_{\lambda\mu} \circ \omega_\lambda = \omega_\mu \circ f_{\lambda\mu}$ pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$.

(ii) Le cas particulier suivant de (i) est souvent utile. On considère l'ensemble partiellement ordonné $(\Lambda, \leq)$ tel que $\Lambda = \{a, b, c\}$ et avec $a > b, c$ mais $b \not\leq c$ et $c \not\leq b$. Un foncteur $F : \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{B}$ est alors la donnée d'objets X, Y, Z de $\mathcal{B}$ et d'un couple de morphismes $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} Z$. La limite de F est appelée le *produit fibré de Y et Z sur X* , et notée :

$$Y \times_{(f,g)} Z$$

ou simplement $Y \times_X Z$, si la notation n'est pas ambiguë. Un cône universel pour F est la donnée d'un objet L de $\mathcal{B}$ et de deux morphismes $p : L \rightarrow Y$, $q : L \rightarrow Z$ tels que $f \circ p = g \circ q$, et vérifiant la condition suivante. Pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ et tout couple de morphismes $h : T \rightarrow Y$, $k : T \rightarrow Z$ de $\mathcal{B}$ tels que $f \circ h = g \circ k$, il existe un morphisme unique $t : T \rightarrow L$ de $\mathcal{B}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T & & \xrightarrow{h} & & Y \\ & \searrow t & & \searrow p & \\ & L & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \downarrow q & & \downarrow f \\ & Z & \xrightarrow{g} & & X. \end{array}$$

Dans cette situation, on dit aussi que le carré de sommets L, Y, Z, X est *cartésien*, et on appelle p, q les *projections canoniques* du produit fibré L .

(iii) Dans la situation de (ii), si f est un monomorphisme, il en est de même pour q . Car, soient $t, t' : T \rightarrow L$ deux morphismes avec $q \circ t = q \circ t'$; ainsi $f \circ p \circ t = g \circ q \circ t = g \circ q \circ t' = f \circ p \circ t'$, d'où $p \circ t = p \circ t'$, comme f est un monomorphisme. La propriété universelle du produit fibré donne alors $t = t'$, d'où l'assertion.

(iv) Pour $\mathcal{B} = \text{Ens}$, l'exemple 2.22(i) nous dit que $Y \times_X Z$ est représentable par la partie $\{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\}$, avec le cône universel donné par les restrictions des projections canoniques $Y \leftarrow Y \times Z \rightarrow Z$. Pour les produits fibrés de $A - \text{Mod}$ (resp. de $A - \text{Alg}$) on a la même description, d'après l'exemple 2.22(ii,iii), et $Y \times_X Z$ est un sous-module de $Y \oplus Z$ (resp. une sous-algèbre de $Y \times Z$).

(v) De même, si $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ sont trois petites catégories, et si $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}'' \xleftarrow{G} \mathcal{A}'$ sont deux foncteurs, le produit fibré $\mathcal{A} \times_{(F,G)} \mathcal{A}'$ est représentable dans Cat . En effet, même si ces catégories ne sont pas petites, on peut considérer la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ telle que $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{A}) \times_{(F,G)} \text{Ob}(\mathcal{A}')$; i.e. les objets de $\mathcal{C}$ sont les couples (A, A') avec $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}), A' \in \text{Ob}(\mathcal{A}')$, et $FA = GA'$ (le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ est alors celui de l'exemple 1.121(x)). Si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont petites, cette construction représente le produit fibré souhaité, avec cône universel donné par les restrictions $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}'$ des projections canoniques. Les vérifications détaillées sont laissées aux soins du lecteur.

Remarque 2.24. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{h} Z'$ trois morphismes de $\mathcal{C}$; supposons que les produits fibrés $Z' \times_Z X$ et $Z' \times_Z Y$ soient représentables dans $\mathcal{C}$, et notons les projections canoniques respectives par

$$Z' \xleftarrow{q_X} Z' \times_Z X \xrightarrow{p_X} X \quad \text{et} \quad Z' \xleftarrow{q_Y} Z' \times_Z Y \xrightarrow{p_Y} Y.$$

Puisque $g \circ (f \circ p_X) = h \circ q_X$, il existe un unique morphisme

$$Z' \times_Z f : Z' \times_Z X \rightarrow Z' \times_Z Y$$

de $\mathcal{C}$, tel que $p_Y \circ (Z' \times_Z f) = f \circ p_X$ et $q_Y \circ (Z' \times_Z f) = q_X$. En outre, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z' \times_Z X & \xrightarrow{p_X} & X \\ Z' \times_Z f \downarrow & & \downarrow f \\ Z' \times_Z Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

est cartésien dans $\mathcal{C}$. En effet, soient $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $X \xleftarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} Z' \times_Z Y$ deux morphismes de $\mathcal{C}$ avec $f \circ \alpha = p_Y \circ \beta$. Il vient $g \circ f \circ \alpha = g \circ p_Y \circ \beta = h \circ q_Y \circ \beta$, donc il existe un unique morphisme $\gamma : T \rightarrow Z' \times_Z X$ tel que $q_X \circ \gamma = q_Y \circ \beta$ et $p_X \circ \gamma = \alpha$. Mais alors $q_Y \circ \beta = q_Y \circ (Z' \times_Z f) \circ \gamma$ et $p_Y \circ \beta = f \circ p_X \circ \gamma = p_Y \circ (Z' \times_Z f) \circ \gamma$, et ainsi $\beta = (Z' \times_Z f) \circ \gamma$, par la propriété universelle de $Z' \times_Z Y$. D'autre part, si $\gamma' : T \rightarrow Z' \times_Z X$ vérifie $p_X \circ \gamma' = \alpha$ et $(Z' \times_Z f) \circ \gamma' = \beta$, alors $q_X \circ \gamma' = q_Y \circ (Z' \times_Z f) \circ \gamma' = q_X \circ \beta$, et

par suite $\gamma = \gamma'$, d'où l'assertion. On appelle $Z' \times_Z f$ le *morphisme déduit de f après le changement de base h* .

(ii) Soit en outre $e : T \rightarrow X$ un quatrième morphisme de $\mathcal{C}$; alors on a :

$$(Z' \times_Z f) \circ (Z' \times_Z e) = Z' \times_Z (f \circ e).$$

En effet, soient $T \xleftarrow{p_T} Z' \times_Z T \xrightarrow{q_T} Z'$ les projections canoniques; il vient : $p_Y \circ (Z' \times_Z f) \circ (Z' \times_Z e) = f \circ p_X \circ (Z' \times_Z e) = f \circ e \circ p_T$, et $q_Y \circ (Z' \times_Z f) \circ (Z' \times_Z e) = q_X \circ (Z' \times_Z e) = q_T$, d'où l'assertion.

Problème 2.25. (i) Soit $(T_i \mid i \in I)$ une petite famille d'espaces topologiques non vides; on pose $T := \prod_{i \in I} T_i$ et pour tout $i \in I$ on dénote par $p_i : T \rightarrow T_i$ la projection canonique. Soit aussi $\mathcal{F}$ un ultrafiltre de T ; montrer que $\mathcal{F}$ est principal si et seulement si pour tout $i \in I$ le filtre $p_{i*}\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre principal (voir la définition 1.134 et l'exemple 1.136(i,iii)).

(ii) Dédurre de (i) le *théorème de Tychonoff* : T est compact si et seulement si T_i est compact pour tout $i \in I$.

(iii) Soient I une petite catégorie, et $T_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Top}$ un foncteur. Montrer que :

(a) La limite de $T_\bullet$ est représentable par un espace topologique L .

(b) Si T_i est de type T_0 (resp. séparé, resp. compact et séparé) pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$, alors L est de type T_0 (resp. séparé, resp. compact et séparé).

2.2.1. *Colimites.* La notion duale est aussi utile : si $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur et si $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, on appelle *co-cône* de base F et sommet X la donnée d'un cône

$$\eta^{\text{op}} : c_{X^{\text{op}}} \rightarrow F^{\text{op}}$$

de base $F^{\text{op}} : I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ et sommet $X^{\text{op}} \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$; il s'agit donc d'une transformation naturelle $\eta : F \rightarrow c_X$, i.e. un système de morphismes $(\eta_i : Fi \rightarrow X \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ de $\mathcal{C}$ tels que $\eta_j \circ F_\phi = \eta_i$ pour tout morphisme $\phi : i \rightarrow j$ de I . Un *co-cône universel* pour F est la donnée d'un cône universel pour F^{op} , et on appelle *objet colimite* de F tout objet limite de F^{op} . Un tel co-cône est caractérisé évidemment par une propriété universelle que le lecteur est invité à énoncer. De même, si I est une petite catégorie, le *foncteur colimite* de F est le foncteur

$$\text{colim}_I F := \lim_{I^{\text{op}}} F^{\text{op}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

qui associe à tout $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, l'ensemble $\text{colim}_I F(X)$ des co-cônes de base F et sommet X , et à tout morphisme $f : X \rightarrow X'$ de $\mathcal{C}$, l'application

$$\text{colim}_I F(X) \rightarrow \text{colim}_I F(X') \quad (\eta : F \rightarrow c_X) \mapsto (c_{f'} \circ \eta : F \rightarrow c_{X'}).$$

Exemple 2.26. Revenons au cas où I est une catégorie discrète; $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ est alors une famille d'objets $F_\bullet := (F_i \mid i \in I)$ de $\mathcal{C}$, et la colimite de F est aussi appelée la *somme directe* (ou le *coproduit*) de la famille $F_\bullet$, et elle est notée

$$\coprod_{i \in I} F_i.$$

(i) Par exemple, si $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, la somme directe d'une petite famille $(S_i \mid i \in I)$ d'ensembles est représentable par la *réunion disjointe*

$$S := \bigsqcup_{i \in I} S_i := \bigcup_{i \in I} S_i \times \{i\}$$

et le co-cône universel est donné par les inclusions $j_i : S_i \rightarrow S : x \mapsto (x, i)$. En effet, si $(\psi_i : S_i \rightarrow X)$ est un système arbitraire d'applications d'ensembles, il existe une application unique $\psi : S \rightarrow X$ avec $\psi \circ j_i = \psi_i$ pour tout $i \in I$: il s'agit évidemment de l'application telle que $\psi(x, i) := \psi_i(x)$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in X_i$.

(ii) Si $\mathcal{C} = A\text{-Mod}$ pour A un anneau associatif unitaire, la remarque 1.14(iv) entraîne aisément que la somme directe d'une petite famille $(M_i \mid i \in I)$ de A -modules est représentée par la somme directe usuelle $M := \bigoplus_{i \in I} M_i$ (voir l'exemple 1.12(ii)), et son co-cône universel est formé par les injections canoniques $M_i \rightarrow M$.

(iii) Plus généralement, soit $(\Lambda, \leq)$ une classe partiellement ordonnée, $(X_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ un système d'objets de $\mathcal{C}$ indexé par Λ . La colimite d'un tel foncteur est aussi appelée *limite directe* de $(X_\bullet, f_{\bullet\bullet})$, généralement notée

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \lambda \in \Lambda}} X_\lambda.$$

(iv) Soit $\mathcal{C}_\Lambda$ comme dans l'exemple 2.23(ii), et $\mathcal{B}$ une catégorie quelconque ; un foncteur $F : \mathcal{C}_\Lambda^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ est donc la donnée d'objets X, Y, Z de $\mathcal{B}$ et de morphismes $Z \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{B}$. La colimite de F est le produit fibré $Y^{\text{op}} \times_{(f^{\text{op}}, g^{\text{op}})} Z^{\text{op}}$ de $\mathcal{B}^{\text{op}}$, et s'appelle la *somme amalgamée de Y et Z le long de X* , notée :

$$Y \sqcup_{(f,g)} Z$$

ou simplement $Y \sqcup_X Z$, si la notation n'est pas ambiguë. Un co-cône universel est la donnée d'un objet L de $\mathcal{B}$ et de deux morphismes $i : Y \rightarrow L$, $j : Z \rightarrow L$ tels que $i \circ f = j \circ g$, et vérifiant la condition suivante. Pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ et tout couple de morphismes $h : Y \rightarrow T$, $k : Z \rightarrow T$ de $\mathcal{B}$ avec $h \circ f = k \circ g$, il existe un unique morphisme $t : L \rightarrow T$ de $\mathcal{B}$ tel que $h = t \circ i$ et $k = t \circ j$. Dans cette situation, on dit aussi que le carré de sommets X, Y, Z, L et côtés f, g, i, j est *cocartésien* :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ Z & \xrightarrow{j} & L \end{array}$$

et on appelle i et j les *injections canoniques* de la somme amalgamée L .

(v) Dans la situation de (iv), évidemment on a l'assertion duale de l'exemple 2.23(iii) : si g est un épimorphisme, il en est de même pour i .

(vi) Soit M un A -module, $M_\bullet := (M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ la famille de ses A -sous-modules de type fini, partiellement ordonnée par inclusion : $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow M_\lambda \subset M_\mu$ pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, et on note $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow M$ l'inclusion, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors, M est une limite directe du système $M_\bullet$, et $(i_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est le co-cône universel correspondant. En effet, si N est un A -module, un co-cône de sommet N et base $M_\bullet$ est un système d'applications A -linéaires $(g_\lambda : M_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ telles que $(g_\mu)_{|M_\lambda} = g_\lambda$ pour tout $M_\lambda \subset M_\mu$; évidemment, un tel système induit une application A -linéaire unique $g : M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow N$ telle que $g_{|M_\lambda} = g_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'où l'assertion.

Remarque 2.27. (i) Avec la notation de l'exemple 2.26, prenons pour I la catégorie discrète $\mathcal{C}_\emptyset$ (notation de l'exemple 1.114(vi)) ; dans ce cas $F_\bullet$ est une famille vide d'objets de $\mathcal{C}$, et pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un unique co-cône $F \rightarrow c_X$, i.e. le co-cône vide. La colimite de F est alors le *coproduit vide*, i.e. l'unique foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que : $X \mapsto \{\emptyset\}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Un objet C de $\mathcal{C}$ représente cette colimite si et seulement si pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un unique morphisme $C \rightarrow X$ dans $\mathcal{C}$; tout C vérifiant cette condition est appelé un *objet initial* de $\mathcal{C}$.

(ii) Dualement, le *produit vide*, i.e. le produit de la même famille vide est représenté par tout *objet final* de $\mathcal{C}$, i.e. tout $L \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tel que pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un morphisme unique $X \rightarrow C$.

(iii) Noter aussi que si C et C' sont deux objets initiaux, les morphismes uniques $\phi : C \rightarrow C'$ et $\psi : C' \rightarrow C$ sont des isomorphismes, car $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ doivent être respectivement $1_{C'}$ et 1_C . De même pour les objets finaux de $\mathcal{C}$; d'ailleurs, évidemment les objets finaux de $\mathcal{C}$ sont les objets initiaux de $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

(iv) Pour tout anneau associatif unitaire A , le A -module nul 0 est un objet à la fois initial et final de $A - \mathbf{Mod}$. Dans la catégorie $A - \mathbf{Mod}$, les objets initiaux et finaux sont isomorphes, mais dans une catégorie générale, ce n'est pas forcément le cas : par exemple, l'objet initial de la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles est l'ensemble vide $\emptyset$, alors que tout ensemble de cardinalité un est un objet final (un choix naturel est l'ensemble $\{\emptyset\}$).

De même, on voit que la catégorie discrète $\mathcal{C}_\emptyset$ est un objet initial de $\mathbf{Cat}$ (voir l'exemple 1.114(vi)), alors que $\mathcal{C}_{\{\emptyset\}}$ est un objet final.

Proposition 2.28. *Soit A un anneau associatif unitaire, $(\Lambda, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné, $(M_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ et $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$ des systèmes de A -modules et respectivement de A -algèbres commutatives, indexés par Λ . Alors :*

- (i) *La limite directe de $(M_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ est représentable dans la catégorie $A - \mathbf{Mod}$.*
- (ii) *La limite directe de $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$ est représentable dans la catégorie $A - \mathbf{Alg}$.*

Démonstration. (i) : Soit $P := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, et pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda < \mu$ notons

$$Q_{\lambda\mu} := \{(x_\nu \mid \nu \in \Lambda) \in P \mid x_\nu = 0 \quad \forall \nu \neq \lambda, \mu \quad \text{et} \quad x_\mu = -f_{\lambda\mu}(x_\lambda)\}.$$

Soit aussi Q le A -sous-module de P engendré par $\bigcup_{\lambda < \mu} Q_{\lambda\mu}$, et on pose $L := P/Q$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la composition de l'inclusion naturelle $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow P$ avec la projection $P \rightarrow L$ est un homomorphisme de A -modules $u_\lambda : M_\lambda \rightarrow L$. On a

$$u_\mu \circ f_{\lambda\mu}(x) = u_\lambda(x) \quad \forall \lambda < \mu, \forall x \in M_\lambda$$

donc le système $(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône de base $(M_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ et sommet L . Soit maintenant N un A -module, et $(g_\lambda : M_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ un autre co-cône de sommet N . On déduit une unique application A -linéaire $g' : P \rightarrow N$ telle que $g' \circ i_\lambda = g_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et il reste à montrer que g' se factorise à travers L . Pour cela, il suffit de noter que pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda < \mu$ et tout $x \in M_\lambda$ on a

$$g'(i_\mu \circ f_{\lambda\mu}(x) - i_\lambda(x)) = g_\mu \circ f_{\lambda\mu}(x) - g_\lambda(x) = 0.$$

(ii) : Soit $C(A)$ le quotient commutatif maximal de A (voir le §1.1.4) ; pour tout $\lambda \in \Lambda$, on choisit une famille de générateurs $(b_{\lambda,i} \mid i \in I_\lambda)$ de la A -algèbre B_λ , de sorte que l'on a un homomorphisme surjectif de $C(A)$ -algèbres

$$\pi_\lambda : E_\lambda := C(A)[X_{\lambda,i} \mid i \in I_\lambda] \rightarrow B_\lambda \quad X_{\lambda,i} \mapsto b_{\lambda,i} \quad \forall i \in I_\lambda$$

et on pose $J_\lambda := \text{Ker } \pi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit aussi $E := C(A)[X_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda, i \in I_\lambda]$; pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ avec $\lambda' > \lambda$, on choisit un homomorphisme de A -algèbres $\phi_{\lambda\lambda'} : E_\lambda \rightarrow E_{\lambda'}$ qui relève $g_{\lambda\lambda'}$, *i.e.* qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda & \xrightarrow{\phi_{\lambda\lambda'}} & E_{\lambda'} \\ \pi_\lambda \downarrow & & \downarrow \pi_{\lambda'} \\ B_\lambda & \xrightarrow{g_{\lambda\lambda'}} & B_{\lambda'} \end{array}$$

et on dénote par $J_{\lambda\lambda'} \subset E$ l'idéal engendré par le système $(X_{\lambda,i} - \phi_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda,i}) \mid i \in I_\lambda)$. Soit aussi $J \subset E$ le plus petit idéal contenant tous les idéaux J_λ et $J_{\lambda\lambda'}$, pour chaque $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ avec $\lambda' > \lambda$, et posons $D := E/J$. On voit aisément que l'application naturelle $\psi_\lambda : E_\lambda \rightarrow E \rightarrow D$ se factorise à travers un homomorphisme unique $u_\lambda : B_\lambda \rightarrow D$ de A -algèbres, pour tout $\lambda \in \Lambda$. De même, par construction on a

$$\psi_\lambda = \psi_{\lambda'} \circ \phi_{\lambda\lambda'} \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda \text{ avec } \lambda' \geq \lambda$$

d'où $u_\lambda = u_{\lambda'} \circ g_{\lambda\lambda'}$ pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ avec $\lambda' \geq \lambda$; *i.e.* le système $(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône de sommet D et base $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$. Or, si $(k_\lambda : B_\lambda \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda)$ est un autre co-cône de base $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$, on a d'abord l'homomorphisme de A -algèbres

$$k : E \rightarrow C \quad X_{\lambda,i} \mapsto k_\lambda \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall i \in I_\lambda.$$

Par construction, la restriction de k à E_λ se factorise à travers B_λ , donc $J_\lambda \subset \text{Ker } k$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. De même, pour $\lambda' > \lambda$ et tout $i \in I_\lambda$, on a

$$\begin{aligned} k(X_{\lambda,i} - \phi_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda,i})) &= k_\lambda \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) - k_{\lambda'} \circ \pi_{\lambda'} \circ \phi_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda,i}) \\ &= k_\lambda \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) - k_{\lambda'} \circ g_{\lambda\lambda'} \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) \\ &= k_\lambda \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) - k_\lambda \circ \pi_\lambda(X_{\lambda,i}) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $J_{\lambda\lambda'} \subset \text{Ker } k$. On conclut que k se factorise à travers un homomorphisme unique $\bar{k} : D \rightarrow C$ de A -algèbres. Evidemment $\bar{k} \circ u_\lambda = k_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et comme $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda(B_\lambda)$ engendre la A -algèbre D , il est clair que $\bar{k}$ est l'unique homomorphisme satisfaisant cette condition. Cela achève de montrer que D est une limite directe de $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$, avec le co-cône universel $(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. $\square$

Remarque 2.29. (i) Soient $F : I \rightarrow \mathcal{C}$, $F' : I' \rightarrow \mathcal{C}$ et $\phi : I \rightarrow I'$ trois foncteurs, et

$$\omega : F \rightarrow F' \circ \phi$$

une transformation naturelle. Soient aussi $\eta : F \rightarrow c_C$ et $\eta' : F' \rightarrow c_{C'}$ des co-cônes universels pour les colimites de F et respectivement F' . On déduit une transformation naturelle $(\eta' * \phi) \circ \omega : F \rightarrow c_{C'} \circ \phi$ (notation de l'exercice 1.129). Mais $c_{C'} \circ \phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ est évidemment le foncteur constant sur I de valeur C' . Par la propriété universelle de (C, η) , il existe alors un morphisme unique $f : C \rightarrow C'$ de $\mathcal{C}$ tel que $c_f \circ \eta = (\eta' * \phi) \circ \omega$. On appelle f la *colimite de ω* , et on le dénote

$$\text{colim}_\phi \omega : \text{colim}_I F \rightarrow \text{colim}_{I'} F'.$$

(Noter le petit abus de notation : ici $\text{colim}_I F$ dénote l'objet C de $\mathcal{C}$ qui représente la colimite de F , et non pas le foncteur colimite, et de même pour $\text{colim}_{I'} F'$.) Explicitement, il s'agit de l'unique morphisme $f : C \rightarrow C'$ tel que

$$f \circ \eta_i = \eta'_{\phi(i)} \circ \omega_i \quad \forall i \in \text{Ob}(I).$$

(ii) De même, si $\mu : c_L \rightarrow F$ et $\mu' : c_{L'} \rightarrow F'$ sont des cônes universels, et si $\omega : F' \circ \phi \rightarrow F$ est une transformation naturelle, on a un morphisme *limite de ω*

$$\lim_\phi \omega : \lim_I F' \rightarrow \lim_{I'} F$$

(avec le même abus de notation : $\lim_I F$ dénote L et $\lim_{I'} F'$ dénote L'). Il s'agit de l'unique morphisme $g : L \rightarrow L'$ tel que $\mu_i \circ g = \omega_i \circ \mu'_{\phi(i)}$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Si $I = I'$ et $\phi = \mathbf{1}_I$, on écrira plus simplement $\lim_I \omega$ et $\text{colim}_I \omega$ pour la limite et respectivement la colimite de ω .

(iii) Par exemple, soient $(\Lambda, \leq)$ une classe partiellement ordonnée, $\mathcal{B}$ une catégorie, $(X_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ et $(X'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$ deux systèmes d'objets de $\mathcal{B}$ indexés par Λ , et $\omega_\bullet : (X_\bullet, f_{\bullet\bullet}) \rightarrow (X'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$ un morphisme de systèmes indexés (voir l'exemple 2.23(i)). On obtient alors des morphismes naturels :

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda : \lim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \lim_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda \quad \lim_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda : \lim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \lim_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$$

caractérisés comme dans (i) et (ii), pourvu que ces limites directes et inverses soient représentables dans $\mathcal{B}$.

(iv) Notamment, avec $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, si I est une petite catégorie, et si $\omega_\bullet : S_\bullet \rightarrow S'_\bullet$ est une transformation naturelle de foncteurs $S_\bullet, S'_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Ens}$, on a vu que les limites de $S_\bullet$ et $S'_\bullet$ sont représentables par les parties des suites cohérentes $L \subset S := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} S_i$ et $L' \subset S' := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} S'_i$, et les cônes universels respectifs sont donnés par les restrictions $L \rightarrow S_i$ et $L' \rightarrow S'_i$ des projections canoniques (exemple 2.22(i)) ; avec ces représentants, $\lim_I \omega_\bullet : L \rightarrow L'$ est la restriction de l'application :

$$S \rightarrow S' \quad (x_i \mid i \in \text{Ob}(I)) \mapsto (\omega_i(x_i) \mid i \in \text{Ob}(I)).$$

Si $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, $\mathcal{C} = A\text{-Mod}$ ou $\mathcal{C} = A\text{-Alg}$ (pour A associatif unitaire), on a la même description du morphisme limite, par l'exemple 2.22(ii,iii) et le problème 2.25(iii.a).

(v) De même, si $(\mathcal{C}_i \mid i \in I)$ et $(\mathcal{C}'_i \mid i \in I)$ sont deux petites familles de petites catégories, toute famille de foncteurs $(F_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}'_i \mid i \in I)$ induit un foncteur

$$F := \prod_{i \in I} F_i : \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}'_i \quad \text{tel que } p'_j \circ F = F_j \circ p_j \quad \forall j \in I$$

où $p_j : \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_j$ et $p'_j : \prod_{i \in I} \mathcal{C}'_i \rightarrow \mathcal{C}'_j$ sont les projections, pour tout $j \in I$.

(vi) Dans la situation générale de (i), comme d'habitude, le morphisme colimite $f : C \rightarrow C'$ de ω dépend des choix des objets C et C' représentant les colimites de F et F' , ainsi que des choix des co-cônes universels η et η' pour ces objets. D'autre part, f est indépendant à *isomorphisme unique près* de tous ces choix : car, si $\nu : c_D \rightarrow F$ et $\nu' : c_{D'} \rightarrow F'$ sont des autres choix de cônes universels, la remarque 2.19(ii) nous dit qu'il existe des isomorphismes uniques de $\mathcal{B}$:

$$h : C \xrightarrow{\sim} D \quad h' : C' \xrightarrow{\sim} D' \quad \text{tels que} \quad c_h \circ \eta = \nu \quad c_{h'} \circ \eta' = \nu'.$$

Or, si $g : D \rightarrow D'$ est l'unique colimite de ω correspondant aux cônes ν et ν' , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ D & \xrightarrow{g} & D'. \end{array}$$

En effet, g est caractérisé par la condition : $c_g \circ \nu = (\nu' * \phi) \circ \omega$, donc

$$\begin{aligned} c_{g \circ h} \circ \eta &= c_g \circ c_h \circ \eta = c_g \circ \nu = (\nu' * \phi) \circ \omega = ((c_{h'} \circ \eta') * \phi) \circ \omega \\ &= (c_{h'} * \phi) \circ (\eta' * \phi) \circ \omega \\ &= (c_{h'} * \phi) \circ c_f \circ \eta = c_{h' \circ f} \circ \eta \end{aligned}$$

d'où $g \circ h = h' \circ f$, par l'universalité de η . En particulier, les propriétés catégoriques de la limite de ω sont *intrinsèques*, i.e. elles sont déterminées uniquement par ω (et ne dépendent pas des cônes universels choisis) ; par exemple, f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) si et seulement si g satisfait la même condition. Par dualité, des considérations analogues sont valables pour le morphisme limite de ω , dans la situation de (ii).

2.2.2. Catégories filtrantes et cofiltrantes. La construction de la colimite d'un système de A -algèbres fournie par la proposition 2.28(ii) n'est pas très maniable, et il est difficile d'en extraire des renseignements utiles. On peut faire mieux si l'on impose des restrictions sur l'ensemble d'indices Λ . C'est notamment le cas si Λ est *filtrant*, i.e. si $\Lambda \neq \emptyset$ et si pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ il existe $\lambda'' \in \Lambda$ avec $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$. Pour plusieurs questions, il est utile de disposer de la notion plus générale suivante :

Définition 2.30. (i) On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est *filtrante*, si elle vérifie :

- (a) Pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{C}(X, Z), \mathcal{C}(Y, Z) \neq \emptyset$
- (b) Pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tous $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ il existe $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ avec $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ tel que $h \circ f = h \circ g$.

(ii) On dit que $\mathcal{C}$ est *cofiltrante*, si $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est filtrante.

Evidemment, si $\mathcal{C}$ est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(\Lambda, \leq)$, alors $\mathcal{C}$ est filtrante si et seulement si $(\Lambda, \leq)$ est un ensemble filtrant.

Exercice 2.31. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie filtrante, et A un anneau associatif unitaire.

(i) Soient aussi $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur, et S la réunion disjointe de la famille $(F\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ (voir l'exemple 2.26(i)). Pour $(x, \lambda), (x', \lambda') \in S$ on écrira

$$(x, \lambda) \sim (x', \lambda')$$

s'il existe $\lambda'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(\lambda, \lambda'')$, $g \in \mathcal{C}(\lambda', \lambda'')$ avec $Ff(x) = Fg(x')$. Montrer que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence $\sim$ sur S .

(ii) Posons $C := S/\sim$, et notons par $[x, \lambda] \in C$ la classe d'équivalence de tout $(x, \lambda) \in S$. Pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on considère aussi l'application

$$j_\lambda : F\lambda \rightarrow C \quad x \mapsto [x, \lambda].$$

Montrer que C est une colimite de F , avec le co-cône universel $(j_\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$.

(iii) Soit $M : \mathcal{C} \rightarrow A - \text{Mod}$ un foncteur, et notons par L la colimite – construite comme dans (ii) – du foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$, composition de M avec le foncteur d'oubli $A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ associant à tout A -module son ensemble sous-jacent. Soit aussi $(u_\lambda : M(\lambda) \rightarrow L \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel. Exhiber une structure unique de A -module sur L telle que chaque u_λ soit une application A -linéaire; L est alors une colimite de M , avec le co-cône universel $(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$.

(iv) Soient $B : \mathcal{C} \rightarrow A - \text{Alg}$ un foncteur, et C la colimite du foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$, composition de B avec le foncteur d'oubli $A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ associant à toute A -algèbre commutative son ensemble sous-jacent. Soit aussi $(u_\lambda : B(\lambda) \rightarrow C \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ le co-cône universel. Exhiber une structure unique de A -algèbre commutative sur C telle que chaque u_λ soit un homomorphisme de A -algèbres; C est alors la colimite de B , avec co-cône universel donné par les u_λ .

Problème 2.32. Soit $(\Lambda, \leq)$ un ensemble *cofiltrant*, i.e. tel que $(\Lambda, \leq)^{\text{op}}$ est filtrant.

(i) Soient aussi $(T_\lambda, f_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu)$ un système d'espaces topologiques compacts et séparés, indexé par Λ , et L la limite de $(T_\bullet, f_{\bullet\bullet})$. Montrer que :

$$L \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad T_\lambda \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

(ii) Soient $(T'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$ un deuxième système d'espaces topologiques compacts et séparés, indexé par Λ , et $\phi_\bullet := (\phi_\lambda : T_\lambda \rightarrow T'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un morphisme de systèmes indexés d'espaces topologiques. Notons aussi par L' la limite de $(T'_\bullet, f'_{\bullet\bullet})$, et par $\phi : L \rightarrow L'$ la limite inverse de $\phi_\bullet$, définie par la remarque 2.29(ii). Montrer que si ϕ_λ est surjective pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors ϕ est surjective.

Remarque 2.33. (i) On appelle *système filtrant* (resp. *cofiltrant*) d'une catégorie $\mathcal{C}$, tout système d'objets de $\mathcal{C}$, indexé par un ensemble filtrant (resp. cofiltrant).

(ii) Soit S la limite inverse d'un système $(S_\bullet, g_{\bullet\bullet})$ d'ensembles *finis et non vides*, indexé par un ensemble cofiltrant $(\Lambda, \leq)$. Si l'on munit chaque S_λ de la topologie discrète $\mathcal{T}_\lambda$, on obtient un système $((S_\bullet, \mathcal{T}_\bullet), g_{\bullet\bullet})$ d'espaces topologiques compacts et séparés (noter que $g_{\lambda\mu} : (S_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \rightarrow (S_\mu, \mathcal{T}_\mu)$ est continue, pour tout $\lambda \leq \mu$). En outre, il existe une topologie $\mathcal{T}$ sur S telle que $(S, \mathcal{T})$ soit la limite du système $((S_\bullet, \mathcal{T}_\bullet), g_{\bullet\bullet})$ (voir la solution du problème 2.25(iii)). D'après le problème 2.32(i), il vient alors $S \neq \emptyset$. De même, si $(S'_\bullet, g'_{\bullet\bullet})$ est un deuxième système d'ensembles finis indexé par Λ , de limite S' , et si $g_\bullet := (g_\lambda : S_\lambda \rightarrow S'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un morphisme de systèmes indexés, composé d'applications surjectives, alors la limite $g : S \rightarrow S'$ de $g_\bullet$ est surjective.

(iii) Signalons que les assertions (i) et (ii) du problème 2.32 peuvent faillir pour des systèmes d'espaces non séparés, ou non compacts, ou si Λ n'est pas cofiltrant. De même, les conclusions de (ii) ne sont plus assurées si les ensembles S_λ sont infinis ou si Λ n'est pas cofiltrant. De l'autre côté, on a les résultats généraux suivants :

Exercice 2.34. Soient $I, \mathcal{C}$ deux catégories, $F, F' : I \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs, et $\omega : F \rightarrow F'$ une transformation naturelle. Montrer les assertions suivantes :

(i) Supposons que les limites de F et F' soient représentables par des objets L et L' de $\mathcal{C}$, de sorte que la limite $g : L \rightarrow L'$ de ω est définie (voir la remarque 2.29(ii)). Supposons de plus que $\omega_i : F_i \rightarrow F'_i$ soit un monomorphisme pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Alors g est un monomorphisme.

(ii) Dualelement, supposons que les colimites de F et F' soient représentables par $C, C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et soit $f : C \rightarrow C'$ la colimite de ω . Supposons de plus que ω_i soit un épimorphisme pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Alors f est un épimorphisme.

Exercice 2.35. (Parties cofinales) Soient $(\Lambda, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné, et $\Lambda' \subset \Lambda$ une partie. On dit que Λ' est *cofinale dans* $(\Lambda, \leq)$ si pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $\lambda' \in \Lambda'$ tel que $\lambda' \geq \lambda$. On dit que Λ' est *finale dans* $(\Lambda, \leq)$ si elle est cofinale dans $(\Lambda^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$, i.e. si pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $\lambda' \in \Lambda'$ tel que $\lambda' \leq \lambda$.

(i) Soit Λ' une partie cofinale de $(\Lambda, \leq)$, et munissons Λ' de l'ordre partiel induit par Λ . Montrer que $(\Lambda, \leq)$ est filtrant si et seulement si $(\Lambda', \leq)$ est filtrant.

(ii) Soient $(\Lambda, \leq)$ filtrant, et Λ' cofinale dans $(\Lambda, \leq)$. Notons $\mathcal{C}_\Lambda$ et $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ les catégories associées à $(\Lambda, \leq)$ et $(\Lambda', \leq)$. Soient aussi $\mathcal{B}$ une catégorie, $F : \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur, et $F' : \mathcal{C}_{\Lambda'} \rightarrow \mathcal{B}$ sa restriction à la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_{\Lambda'}$. Montrer que la colimite de F est représentable $\Leftrightarrow$ la colimite de F' est représentable.

(iii) Plus précisément, dans la situation de (ii), soit $g_\bullet := (g_\lambda : F\lambda \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône de base F ; par restriction on a un co-cône $g'_\bullet := (g'_\lambda : F'\lambda \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda')$ de base F' , et $g_\bullet$ est universel si et seulement s'il en est de même pour $g'_\bullet$.

(iv) Dualement, soit Λ' finale dans Λ ; alors $(\Lambda, \leq)$ est cofiltrant si et seulement si $(\Lambda', \leq)$ est cofiltrant, et si $(\Lambda, \leq)$ est cofiltrant, alors la limite de tout F comme dans (ii) est isomorphe à la limite de sa restriction F' , et tout cône universel pour F induit, par restriction comme dans (iii), un cône universel pour F' .

2.3. Foncteurs exacts. Soient $I, \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ trois catégories, $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs, et $\eta := (\eta_i : L \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel. On dit que F commute avec la limite de ϕ , si le cône $F*\eta$ est universel. Rappelons que $(F*\eta)_i = F(\eta_i) : FL \rightarrow F \circ \phi(i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ (exercice 1.129(ii)). Ainsi, FL est une limite de $F \circ \phi$, et avec un petit abus de notation on peut donc écrire :

$$F(\lim_I \phi) = \lim_I F \circ \phi.$$

De même, si τ est un co-cône universel pour ϕ , on dit que F commute avec la colimite de ϕ , si $F*\tau$ est un co-cône universel pour $F \circ \phi$, auquel cas on aura :

$$F(\text{colim}_I \phi) = \text{colim}_I F \circ \phi.$$

Remarque 2.36. La commutativité de F avec la limite de ϕ est une propriété *intrinsèque* de F , i.e. elle ne dépend pas du choix du cône universel η : si $\eta' : c_{L'} \rightarrow \phi$ est un deuxième cône universel, alors $F*\eta$ est un cône universel si et seulement s'il en est de même pour le couple $F*\eta'$. En effet, en vertu de la remarque 2.19(ii) il existe un isomorphisme unique $\omega : L \xrightarrow{\sim} L'$ tel que $c_\omega \circ \eta' = \eta$, d'où $c_{F(\omega)} \circ (F*\eta') = F*\eta$. Mais $F(\omega)$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}'$, d'où l'assertion. De même on montre que la commutativité de F avec la colimite de ϕ est une propriété intrinsèque de F .

Exemple 2.37. (i) Soit Δ_1 la catégorie avec $\text{Ob}(\Delta_1) = \{0, 1\}$ et dont les morphismes sont donnés par le graphe suivant (qui omet les identités 1_0 et 1_1) :

$$0 \xrightarrow[a]{a} 1.$$

Donc, un foncteur $\phi : \Delta_1 \rightarrow \mathcal{C}$ n'est rien d'autre que la donnée d'un couple $(\phi(0), \phi(1))$ d'objets de $\mathcal{C}$ et d'un couple de morphismes $(\phi(a), \phi(b) : \phi(0) \rightarrow \phi(1))$. Un cône de base ϕ est la donnée d'un objet X de $\mathcal{C}$ et de morphismes $f_i : X \rightarrow \phi(i)$ ($i = 0, 1$) de $\mathcal{C}$ tels que $\phi(a) \circ f_0 = f_1 \circ \phi(b)$; autrement dit, c'est la donnée d'un morphisme $f : X \rightarrow \phi(0)$ tel que $\phi(a) \circ f = \phi(b) \circ f$. Un cône universel pour ϕ est aussi appelé un *égaliseur* des morphismes $\phi(a)$ et $\phi(b)$.

De même, un co-cône de base ϕ est la donnée d'un objet Y de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $g : \phi(1) \rightarrow Y$ tel que $g \circ \phi(a) = g \circ \phi(b)$. Un co-cône universel pour ϕ est aussi appelé un *coégaliseur* de $\phi(a)$ et $\phi(b)$. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur qui commute avec la limite (resp. la colimite) de ϕ , on dira brièvement que F commute avec l'égaliseur (resp. avec le coégaliseur) de $\phi(a)$ et $\phi(b)$.

(ii) Par exemple, prenons $\mathcal{C} := A - \text{Mod}$, pour un anneau associatif unitaire A , et soient $h, k : M \rightarrow N$ deux homomorphismes de A -modules. On pose $E := \text{Ker}(h - k)$, et on dénote par $i : E \rightarrow M$ l'inclusion; montrons que (E, i) est un égaliseur de h et k . En effet, l'assertion revient à dire que si $t : Q \rightarrow M$ est un homomorphisme de A -modules avec $h \circ t = k \circ t$, il existe une unique application A -linéaire $s : Q \rightarrow E$ telle

que $t = i \circ s$; mais comme $(h - k) \circ t = 0$, cela est clair. En particulier, on voit que pour toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$, le A -module $\text{Ker } h$ est un égaliseur de h et de l'application nulle $0_{M,N} : M \rightarrow N$.

(iii) De même, dans la situation de (ii), le coégaliseur de h et k est représenté par $\text{Coker}(h - k)$; ainsi, pour toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$, le A -module $\text{Coker } h$ est un coégaliseur de h et $0_{M,N}$ (les détails sont laissés au lecteur).

- (iv) Soient B un autre anneau, et $F : A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}$ un foncteur tel que :
- F commute avec les égaliseurs, i.e. avec la limite de tout $\phi : \Delta_1 \rightarrow A - \text{Mod}$
 - F préserve les homomorphismes nuls, i.e.

$$(*) \quad F(0_{M,N}) = 0_{FM, FN} \quad \forall M, N \in \text{Ob}(A - \text{Mod}).$$

Dans ce cas, il suit de (ii) que F commute avec les noyaux, i.e. pour toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$ il existe un isomorphisme de B -modules

$$\omega_h : F(\text{Ker } h) \xrightarrow{\sim} \text{Ker } Fh.$$

Plus précisément, soient $i_h : \text{Ker } h \rightarrow M$ et $i_{Fh} : \text{Ker } Fh \rightarrow FM$ les inclusions; par hypothèse, $(F(\text{Ker } h), F i_h)$ est un égaliseur de Fh et $0_{FM, FN}$, et la remarque 2.19(ii) nous fournit un isomorphisme unique ω_h tel que $i_{Fh} \circ \omega_h = F i_h$. De plus, tout diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ M' & \xrightarrow{h'} & N' \end{array}$$

induit un diagramme commutatif de B -modules

$$\begin{array}{ccc} F(\text{Ker } h) & \xrightarrow{\omega_h} & \text{Ker } Fh \\ Ft \downarrow & & \downarrow s \\ F(\text{Ker } h') & \xrightarrow{\omega_{h'}} & \text{Ker } Fh' \end{array}$$

où $t : \text{Ker } h \rightarrow \text{Ker } h'$ est la restriction de f , et s est la restriction de Ff . En effet, on a les identités évidentes $i_{h'} \circ t = f \circ i_h$ et $i_{Fh'} \circ s = Ff \circ i_{Fh}$, par suite :

$$\begin{aligned} i_{Fh'} \circ \omega_{h'} \circ Ft &= F i_{h'} \circ Ft = F(i_{h'} \circ t) = F(f \circ i_h) = Ff \circ F i_h \\ &= Ff \circ i_{Fh} \circ \omega_h \\ &= i_{Fh'} \circ s \circ \omega_h. \end{aligned}$$

Par l'universalité du cône $(\text{Ker } Fh', i_{Fh'})$ (ou plus simplement, car $i_{Fh'}$ est un monomorphisme), il vient $\omega_{h'} \circ Ft = s \circ \omega_h$, comme souhaité.

(v) De même, si F commute avec les coégaliseurs et préserve les homomorphismes nuls, alors F commute avec les conoyaux, i.e. pour toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$ on a un isomorphisme naturel

$$F(\text{Coker } h) \xrightarrow{\sim} \text{Coker } Fh$$

caractérisé comme dans (iv) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(vi) Examinons la condition $(*)$ de (iv) d'un point de vue catégorique :

- Notons d'abord que $0_{M,N}$ est caractérisé comme l'unique homomorphisme $M \rightarrow N$ qui se factorise à travers 0, le A -module nul (et en fait, cette factorisation est unique), et d'après la remarque 2.27(iv) le module nul est caractérisé à isomorphisme près à son tour comme l'objet initial et final de $A - \text{Mod}$.

- Ensuite, notons que F préserve les homomorphismes nuls si et seulement si $F(0) = 0$, i.e. si et seulement si F préserve les objets initiaux (ou les objets finaux). En effet, la condition est évidemment suffisante; de l'autre côté, si F préserve les homomorphismes nuls, on a en particulier $F(0_{0,0}) = 0_{F0, F0}$, mais aussi $0_{0,0} = \mathbf{1}_0$, d'où $F(0_{0,0}) = \mathbf{1}_{F0}$, et l'identité $0_{F0, F0} = \mathbf{1}_{F0}$ implique évidemment que $F(0) = 0$.

• En résumé, F vérifie la condition $(*)$ de (iv) $\Leftrightarrow F$ commute avec le produit vide. Par suite, si F commute avec les égaliseurs et avec le produit vide, alors il commute aussi avec les noyaux ; dualement, si F commute avec les coégaliseurs et avec le coproduit vide, alors il commute aussi avec les conoyaux. La définition suivante fournit un cadre général pour l'étude des foncteurs vérifiant ces conditions.

Définition 2.38. (i) Soient I et $\mathcal{C}$ deux catégories ; on dit que $\mathcal{C}$ est *I -complète*, si la limite de tout foncteur $I \rightarrow \mathcal{C}$ est représentable dans $\mathcal{C}$. Dualement, on dit que $\mathcal{C}$ est *I -cocomplète*, si $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est I^{op} -complète, i.e. si la colimite de tout foncteur $I \rightarrow \mathcal{C}$ est représentable dans $\mathcal{C}$.

(ii) Soient $I, \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ trois catégories, et $\mathcal{C}$ soit I -cocomplète (resp. I -complète). On dit qu'un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ commute avec les I -colimites (resp. avec les I -limites), s'il commute avec la colimite (resp. avec la limite) de tout foncteur $I \rightarrow \mathcal{C}$.

(iii) On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ est *finiment complète* (resp. *complète*) si elle est I -complète pour toute catégorie finie I (resp. pour toute petite catégorie I). Dualement, $\mathcal{C}$ est *finiment cocomplète* (resp. *cocomplète*), si elle est I -cocomplète pour toute catégorie finie I (resp. pour toute petite catégorie I).

(iv) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories finiment complètes (resp. finiment cocomplètes), et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur ; on dit que F est *exact à gauche* (resp. *exact à droite*), si F commute avec les *limites finies* (resp. avec les *colimites finies*), i.e. avec la limite (resp. colimite) de tout foncteur $I \rightarrow \mathcal{C}$ avec I catégorie finie arbitraire. On dit que F est *exact*, s'il est exact à la fois à gauche et à droite.

(v) On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ commute avec les *limites cofiltrantes* (resp. avec les *colimites filtrantes*) si $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}_\Lambda$ -complète (resp. $\mathcal{C}_\Lambda$ -cocomplète) et si F commute avec les $\mathcal{C}_\Lambda$ -limites (resp. les $\mathcal{C}_\Lambda$ -colimites), pour tout ensemble cofiltrant (resp. filtrant) $(\Lambda, \leq)$ (voir l'exemple 2.23(i) et la remarque 2.33(i)).

(vi) On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ commute avec les *petites limites* (resp. avec les *petites colimites*) si $\mathcal{A}$ est complète (resp. cocomplète) et si F commute avec les I -limites (resp. les I -colimites), pour toute petite catégorie I .

Exemple 2.39. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, I une petite catégorie, $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, et $\tau_\bullet := (\tau_i : L \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet $L \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et base F . Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, soit aussi $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur représenté par X (voir la définition 2.3) ; rappelons que la limite de $h_X \circ F : I \rightarrow \text{Ens}$ est représentée par la partie $S_X \subset \prod_{i \in \text{Ob}(I)} \mathcal{C}(X, Fi)$ des suites cohérentes $\eta_\bullet := (\eta_i : X \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ (voir l'exemple 2.22(i)). Par définition, on a $\eta_j = F\phi \circ \eta_i$ pour toute telle $\eta_\bullet$ et tout morphisme $\phi : i \rightarrow j$ de I ; autrement dit, $S_X = \text{Nat}(c_X, F)$. En outre, on déduit de $\tau_\bullet$ un cône $h_X * \tau_\bullet = (\mathcal{C}(X, \tau_i) : \mathcal{C}(X, L) \rightarrow \mathcal{C}(X, Fi) \mid i \in \text{Ob}(I))$ de sommet $\mathcal{C}(X, L)$ et base $h_X \circ F$, et le cône $h_X * \tau_\bullet$ est universel si et seulement s'il induit une bijection $\mathcal{C}(X, L) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(c_X, F) : f \mapsto (\tau_i \circ f : X \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$. Par suite, $\tau_\bullet$ est universel $\Leftrightarrow h_X * \tau_\bullet$ est universel pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

(ii) En particulier, h_X commute avec les petites limites, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Avant de pouvoir employer ces concepts, il nous faudra évidemment des critères pour, d'un côté, reconnaître les catégories complètes ou finiment complètes, et de l'autre côté, vérifier l'exactitude à gauche ou à droite des foncteurs. Concernant la première question, on a le résultat suivant :

Proposition 2.40. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que :

- (a) l'égaliseur de tout couple de morphismes est représentable dans $\mathcal{C}$
- (b) le produit de toute petite famille (resp. famille finie) est représentable dans $\mathcal{C}$.

Alors $\mathcal{C}$ est complète (resp. finiment complète). Dualement, si tous les coégaliseurs et la somme directe de toute petite famille (resp. famille finie) sont représentables dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ est cocomplète (resp. finiment cocomplète).

Démonstration. Soit I une petite catégorie (resp. une catégorie finie), $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur ; on dénote par M l'ensemble des morphismes de I , i.e. les éléments de M sont les données (i, j, f) avec $i, j \in \text{Ob}(I)$ et $f \in I(i, j)$ (noter que M est un ensemble fini, si I est finie). On considère les familles d'objets de $\mathcal{C}$:

$$(P_i := \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I)) \quad (Q_{(i,j,f)} := \phi(j) \mid (i, j, f) \in M).$$

Par hypothèse, les produits de ces familles sont représentables dans $\mathcal{C}$ par des objets P , respectivement Q , et choisissons des cônes universels $(\pi_i^P : P \rightarrow P_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ et $(\pi_{(i,j,f)}^Q : Q \rightarrow Q_{(i,j,f)} \mid (i, j, f) \in M)$ pour ces produits. Il existe alors deux morphismes uniques $\alpha, \beta : P \rightarrow Q$ tels que

$$\pi_{(i,j,f)}^Q \circ \alpha = \pi_j^P \quad \pi_{(i,j,f)}^Q \circ \beta = \phi(f) \circ \pi_i^P \quad \forall (i, j, f) \in M.$$

Soit ensuite $(E, \varepsilon : E \rightarrow P)$ un égaliseur de α et β , et vérifions que E représente la limite de ϕ . En effet, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, la donnée d'un morphisme $X \rightarrow E$ équivaut à celle d'un morphisme $\gamma : X \rightarrow P$ tel que $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$, et si l'on pose $\gamma_i := \pi_i^P \circ \gamma$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, cette dernière condition se traduit par les identités

$$\gamma_j = \pi_{(i,j,f)}^Q \circ \alpha \circ \gamma = \pi_{(i,j,f)}^Q \circ \beta \circ \gamma = \phi(f) \circ \pi_i^P \circ \gamma = \phi(f) \circ \gamma_i \quad \forall (i, j, f) \in M.$$

En résumé, on a ainsi établi une bijection naturelle entre $\mathcal{C}(X, E)$ et l'ensemble des cônes $c_X \rightarrow \phi$ de base ϕ et sommet X , qui associe à tout $h \in \mathcal{C}(X, E)$ le cône $\gamma_\bullet^h := (\pi_i^P \circ \varepsilon \circ h : X \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$; i.e. le cône $(\pi_i^P \circ \varepsilon : E \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ est universel. Cela achève de montrer que $\mathcal{C}$ est complète (resp. finiment complète). L'assertion duale s'ensuit aussitôt, en considérant la catégorie duale $\mathcal{C}^{\text{op}}$. $\square$

Exercice 2.41. Montrer que dans la proposition 2.40, on peut remplacer (a) par :

(c) l'égaliseur de tout *couple de monomorphismes* est représentable dans $\mathcal{C}$.

Dualement, si toutes les sommes directes (resp. les sommes directes finies) et le coégaliseur de tout *couple d'épimorphismes* sont représentables dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ est cocomplète (resp. finiment cocomplète).

Exercice 2.42. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie finiment complète, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur ; déduire de la proposition 2.40 que F est exact à gauche s'il commute avec les égaliseurs et avec les *produits finis*, i.e. si pour toute famille $X_\bullet := (X_i \mid i \in I)$ indexée par un ensemble fini I quelconque, on a un isomorphisme

$$\omega : F\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} F X_i \quad \text{tel que} \quad p'_j \circ \omega = F p_j \quad \forall j \in I$$

où l'on a noté $(p_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \mid j \in I)$ et $(p'_j : \prod_{i \in I} F X_i \rightarrow F X_j \mid j \in I)$ les cônes universels. De même, si $\mathcal{C}$ est finiment cocomplète, alors F est exact à droite s'il commute avec les coégaliseurs et les *sommes directes finies*, i.e. si pour $X_\bullet$ comme ci-dessus on a un isomorphisme

$$\omega' : F\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} F X_i \quad \text{tel que} \quad \omega' \circ F e_j = e'_j \quad \forall j \in I$$

où l'on a noté $(e_j : X_j \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \mid j \in I)$ et $(e'_j : F X_j \rightarrow \prod_{i \in I} F X_i \mid j \in I)$ les co-cônes universels.

Exercice 2.43. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie finiment cocomplète et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact à droite. Montrer que la tranche $F\mathcal{A}/B$ de F est une catégorie filtrante, pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. (Voir la remarque 2.12(iii) et la définition 2.30(i).)

Exemple 2.44. (i) Prenons $\mathcal{C} := A - \text{Mod}$ et $\mathcal{C}' := B - \text{Mod}$ pour deux anneaux associatifs unitaires A et B ; d'après l'exemple 2.22(ii), $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont complètes, et la proposition 2.40 et l'exemple 2.37(iii) entraînent qu'elles sont cocomplètes. Au vu de l'exercice 2.42, un foncteur $F : A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}$ sera alors exact à gauche (resp. à droite) $\Leftrightarrow F$ commute avec les égaliseurs (resp. les coégaliseurs) de $A - \text{Mod}$, et avec le produit (resp. la somme directe) de toute famille finie $M_\bullet := (M_i \mid i \in I)$ de A -modules ;

évidemment le produit et la somme directe de $M_\bullet$ sont le même A -module ; seulement changent les caractérisations des isomorphismes ω et ω' fournis par l'exercice 2.42 : en termes des projections canoniques pour ce premier, et des injections canoniques pour le deuxième. En dernier lieu, la discussion de l'exemple 2.37 nous dit que si F est exact à gauche (resp. à droite), alors F commute avec le noyau (resp. le conoyau) de toute application A -linéaire.

(ii) D'après l'exemple 2.22(iii), la catégorie $A - \mathbf{Alg}$ est complète ; elle est aussi cocomplète : en effet, on sait déjà que les sommes directes sont représentables dans $A - \mathbf{Alg}$ (proposition 2.28(ii)), donc d'après la proposition 2.40 il suffit de vérifier qu'il en est de même pour les coégaliseurs de tout couple $f, g : B \rightarrow C$ d'homomorphismes de A -algèbres commutatives. Pour cela, soit $I \subset C$ l'idéal engendré par $\{f(b) - g(b) \mid b \in B\}$; on vérifie aisément que la A -algèbre C/I représente le coégaliseur de f et g ; le co-cône universel est la projection $C \rightarrow C/I$. De même, on voit aussitôt que $E := \{b \in B \mid f(b) = f(c)\}$ est une A -sous-algèbre de B représentant l'égaliseur de f et g ; le cône universel est l'inclusion $E \rightarrow B$.

(iii) Grâce à l'exemple 2.20(v), et en raisonnant comme dans l'exemple 2.22(ii), on voit que la catégorie $\mathbf{Grp}$ est complète. On peut vérifier qu'elle est aussi cocomplète : le point essentiel est la construction, pour tout ensemble S d'un *groupe libre sur S* , qui donne un adjoint à gauche du foncteur d'oubli évident $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$. On n'utilisera pas cette construction dans la suite.

Problème 2.45. (i) Soit $(\Lambda, \leq)$ un ensemble filtrant de cardinalité α infinie. Montrer qu'il existe un ensemble totalement bien ordonné $(\Sigma, \leq)$ (voir la remarque 2.9(ii)) et une famille $(\Lambda_\beta \mid \beta \in \Sigma)$ de parties de Λ de cardinalités $< \alpha$, telles que :

- (a) Λ_β est un ensemble filtrant, avec l'ordre hérité de Λ , pour tout $\beta \in \Sigma$
- (b) $\Lambda_\beta \subset \Lambda_\gamma$ pour tout $\beta, \gamma \in \Sigma$ avec $\beta \leq \gamma$, et $\Lambda = \bigcup_{\beta \in \Sigma} \Lambda_\beta$.

(ii) On suppose que $\mathcal{A}$ soit $\mathcal{C}_\Sigma$ -cocomplète, pour tout ensemble totalement bien ordonné $(\Sigma, \leq)$. Montrer que $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}_\Lambda$ -cocomplète, pour tout ensemble filtrant Λ .

(iii) Soient $\mathcal{A}$ comme dans (ii), et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur qui *commute avec les colimites totalement bien ordonnées*, i.e. avec les $\mathcal{C}_\Sigma$ -colimites, pour tout ensemble totalement bien ordonné Σ . Montrer que F commute avec les colimites filtrantes.

Remarque 2.46. Malgré le problème 2.45, il existe des ensembles filtrants qui ne contiennent aucune partie cofinale totalement ordonnée. Par exemple, soit X un ensemble de cardinalité non dénombrable, et munissons l'ensemble Σ des parties finies de X de l'ordre partiel $\leq$ donné par inclusion de parties finies. On voit aisément que toute partie totalement ordonnée de $(\Sigma, \leq)$ est soit finie, soit dénombrable, et puisque X est non dénombrable, une telle partie ne peut pas être cofinale.

2.3.1. Intersection et réunion de sous-objets. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$. On a vu que les sous-objets de X sont en bijection naturelle avec les sous-foncteurs du foncteur représentable $\mathbf{h}_{X^{\mathrm{op}}}$ (voir la remarque 2.9), et que l'inclusion de sous-foncteurs correspond par cela à une notion bien définie d'inclusion de sous-objets, qui munit d'une relation d'ordre partiel la classe $\mathbf{Sub}(X)$ des sous-objets de X . Soit alors $S_\bullet := (S_i \mid i \in I)$ une famille quelconque de sous-objets de X , et pour tout $i \in I$ soit $F_i \subset \mathbf{h}_{X^{\mathrm{op}}}$ le sous-foncteur correspondant à S_i ; il est naturel de définir l'*intersection* $\bigcap_{i \in I} S_i$ de la famille $S_\bullet$ comme le plus grand sous-objet $Y \subset X$ tel que $Y \subset S_i$ pour tout $i \in I$, et de même, la *réunion* $\bigcup_{i \in I} S_i$ de la famille $S_\bullet$ sera le plus petit sous-objet $Z \subset X$ tel que $S_i \subset Z$ pour tout $i \in I$. Évidemment, Y devrait correspondre au plus grand sous-foncteur représentable $F \subset \mathbf{h}_{X^{\mathrm{op}}}$ tel que $F \subset \bigcap_{i \in I} F_i$; où l'intersection de sous-foncteurs est définie de la façon évidente ; de même Z devrait correspondre au plus petit sous-foncteur représentable G tel que $\bigcup_{i \in I} F_i \subset G$. Dans cette généralité, on ne peut pas assurer l'existence ni de l'intersection ni de la réunion de la famille $S_\bullet$. Observons toutefois :

Lemme 2.47. *Dans la situation du §2.3.1, on a :*

- (i) Si $\text{Sub}(X)$ est un ensemble, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- (a) L'intersection de toute petite famille de sous-objets de X existe dans $\mathcal{C}$.
 - (b) La réunion de toute petite famille de sous-objets de X existe dans $\mathcal{C}$.
- (ii) Si $F, G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ sont deux sous-foncteurs de $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$, représentables par des monomorphismes $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$, alors $F \cap G$ est représentable si et seulement si le produit fibré $Y \times_X Z$ est représentable dans $\mathcal{C}$, et dans ce cas le morphisme naturel $Y \times_X Z \rightarrow X$ représente $F \cap G$.
- (iii) Dualelement, si $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ sont deux sous-foncteurs de $\mathbf{h}_X$, représentables par des épimorphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, alors $F \cap G$ est représentable si et seulement si la somme amalgamée $Y \sqcup_X Z$ est représentable dans $\mathcal{C}$, et dans ce cas le morphisme naturel $X \rightarrow Y \sqcup_X Z$ représente $F \cap G$.
- (iv) Si $\mathcal{C}$ est complète, alors l'intersection de toute petite famille $S_\bullet := (S_i \mid i \in I)$ de sous-objets de X existe dans $\mathcal{C}$, et si en outre $\text{Sub}(X)$ est un ensemble, aussi la réunion de toute telle $S_\bullet$ existe dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. (i) : En effet, on voit aussitôt que l'intersection de la famille $S_\bullet$ est aussi la réunion de la famille $\bigcap_{i \in I} \{T \subset X \mid T \subset S_i\}$, et dualement, la réunion de $S_\bullet$ est aussi l'intersection de la famille $\bigcap_{i \in I} \{T \subset X \mid S_i \subset T\}$.

(ii) : Pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, la donnée d'un morphisme $h : T \rightarrow Y \times_X Z$ de $\mathcal{C}$ équivaut à celle d'un couple $(h' : T \rightarrow Y, h'' : T \rightarrow Z)$ de morphismes de $\mathcal{C}$ avec $f \circ h' = g \circ h''$; à son tour, (h', h'') correspond à un couple (s', s'') avec $s' \in FT, s'' \in GT$, dont les images coïncident dans $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}}(T)$, i.e. $s := s' = s''$, et ainsi $s \in (F \cap G)(T)$. L'assertion en découle aussitôt.

(iii) : Cela se déduit de (ii) par dualité, comme d'habitude.

(iv) : Par hypothèse, I est un ensemble, et chaque S_i correspond à un sous-foncteur $F_i \subset \mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$, représenté par un monomorphisme $f_i : Y_i \rightarrow X$; on considère alors la petite catégorie J déterminée par les conditions suivantes : (a) $\text{Ob}(J) := I \sqcup \{i_0\}$, (b) l'objet i_0 est final dans J , et (c) la sous-catégorie pleine J' de J avec $\text{Ob}(J') = I$ est discrète. Pour tout $i \in I$, notons alors par $\phi_i : i \rightarrow i_0$ l'unique élément de $J(i, i_0)$; on a un foncteur $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ avec $F_i := Y_i$ pour tout $i \in I$ et $F_{i_0} := X$, tel que $F\phi_i := f_i$ pour tout $i \in I$. Soit $(g_j : L \rightarrow Y_j \mid j \in \text{Ob}(J))$ un cône universel pour F ; en raisonnant comme dans la preuve de (ii), on vérifie aisément que le morphisme $g_{i_0} : L \rightarrow X$ représente le sous-foncteur $\bigcap_{i \in I} F_i$ de $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$, i.e. $L = \bigcap_{i \in I} S_i$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Si $\text{Sub}(X)$ est un ensemble, l'existence de $\bigcup_{i \in I} S_i$ suit alors aussitôt, au vu de (i). $\square$

Remarque 2.48. (i) Le lemme 2.47(ii) admet la variante suivante. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un sous-foncteur de $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$ représenté par le monomorphisme $g : Z \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$; on a le sous-foncteur $\mathbf{h}_{f^{\text{op}}}^{-1}F$ de $\mathbf{h}_{Y^{\text{op}}}$ tel que

$$(\mathbf{h}_{f^{\text{op}}}^{-1}F)(T) := \mathbf{h}_{f^{\text{op}}, T}^{-1}(FT) = \{g \in \mathcal{C}(T, Y) \mid f \circ g \in FT\} \quad \forall T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

(notation de l'exemple 2.2(i)). Alors $\mathbf{h}_{f^{\text{op}}}^{-1}F$ est représentable $\Leftrightarrow Y \times_X Z$ est représentable dans $\mathcal{C}$, et dans ce cas la projection canonique $Y \times_X Z \rightarrow Y$ représente $\mathbf{h}_{f^{\text{op}}}^{-1}F$. La preuve est analogue à celle de *loc.cit.*, et sera laissée en exercice au lecteur.

(ii) Dualelement, soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un sous-foncteur de $\mathbf{h}_X$ représenté par l'épimorphisme $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$; alors le sous-foncteur $\mathbf{h}_f^{-1}F$ de $\mathbf{h}_Y$ tel que (notation de l'exemple 2.2(i))

$$(\mathbf{h}_f^{-1}F)(T) := \mathbf{h}_{f, T}^{-1}(FT) = \{g \in \mathcal{C}(Y, T) \mid g \circ f \in FT\} \quad \forall T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

est représentable $\Leftrightarrow Y \sqcup_X Z$ est représentable dans $\mathcal{C}$, et dans ce cas l'injection canonique $Y \rightarrow Y \sqcup_X Z$ représente $\mathbf{h}_f^{-1}F$.

(iii) En particulier, si $\mathcal{C}$ est finiment complète, alors tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$ induit une application

$$\text{Sub}(f) : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(Y) \quad (Z \rightarrow X) \mapsto (Y \times_X Z \rightarrow Y).$$

Dualement, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a $\text{Quot}(X) := \text{Sub}(X^{\text{op}})$ (définition 2.8(ii)); si $\mathcal{C}$ est finiment cocomplète, tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ induit alors l'application

$$\text{Quot}(f) := \text{Sub}(f^{\text{op}}) : \text{Quot}(X) \rightarrow \text{Quot}(Y) \quad (X \rightarrow Z) \mapsto (Y \rightarrow Y \sqcup_X Z).$$

2.3.2. Limites et foncteurs adjoints. L'exercice 2.42 est souvent utile pour vérifier l'exactitude à gauche ou à droite d'un foncteur; un autre critère important est expliqué par la proposition suivante :

Proposition 2.49. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur qui admet un adjoint à gauche $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ (voir le problème 2.10). Alors on a :*

- (i) *F commute avec toute limite représentable de $\mathcal{C}$.*
- (ii) *Dualement, G commute avec toute colimite représentable de $\mathcal{C}'$.*

Démonstration. Par dualité, il suffit de montrer (i). Pour cela, fixons une adjonction ϑ pour le couple (G, F) . Soient I une catégorie, $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ et $g_{\bullet} := (g_i : X \rightarrow F\phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet X et base $F \circ \phi : I \rightarrow \mathcal{C}'$; on en déduit un morphisme $\vartheta_{\phi(i)}^X(g_i) : GX \rightarrow \phi(i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et on a

$$\phi(f) \circ \vartheta_{\phi(i)}^X(g_i) = \vartheta_{\phi(j)}^X(F\phi(f) \circ g_i) = \vartheta_{\phi(j)}^X(g_j) \quad \forall i, j \in \text{Ob}(I), \forall f \in I(i, j)$$

i.e. la donnée $\vartheta_{\phi}^X(g_{\bullet}) := (\vartheta_{\phi(i)}^X(g_i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un cône de sommet GX et base ϕ . Supposons maintenant que la limite de ϕ soit représentable par un objet L de $\mathcal{C}$, et soit $(\eta_i : L \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel; on a alors un morphisme unique $h : GX \rightarrow L$ tel que $\eta_i \circ h = \vartheta_{\phi(i)}^X(g_i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Posons $k := \vartheta_L^{X^{-1}}(h) : X \rightarrow FL$; il vient

$$F(\eta_i) \circ k = \vartheta_{\phi(i)}^{X^{-1}}(\eta_i \circ h) = g_i \quad \forall i \in \text{Ob}(I).$$

De l'autre côté, si $k' : X \rightarrow FL$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$ tel que $F(\eta_i) \circ k' = g_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, il s'ensuit que $\eta_i \circ \vartheta_L^X(k') = \vartheta_{\phi(i)}^X(F(\eta_i) \circ k') = \vartheta_L^X(g_i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, d'où $\vartheta_L^X(k') = h$. Cela achève de montrer que FL représente la limite de $F \circ \phi$, et $(F\eta_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un cône universel, comme souhaité. $\square$

Exemple 2.50. Soit A un anneau associatif unitaire; on sait déjà que le foncteur d'oubli $A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ (resp. $A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$) admet un adjoint à gauche (problème 2.10(ii,iii)). Au vu de la proposition 2.49(i), il commute alors avec toute limite de $A - \text{Mod}$ (resp. de $A - \text{Alg}$). Ce foncteur ne commute pas avec toutes les colimites (par exemple, il ne commute pas avec les sommes directes finies); toutefois, l'exercice 2.31 montre qu'il commute avec les colimites filtrantes.

Problème 2.51. (i) Les catégories **Ens** et **Top** sont complètes, d'après l'exemple 2.22(i) et le problème 2.25(iii.a). Montrer qu'elles sont aussi cocomplètes. Montrer ensuite que le foncteur d'oubli

$$\text{Ou} : \text{Top} \rightarrow \text{Ens} \quad (X, \mathcal{T}) \mapsto X$$

admet des adjoints à gauche et à droite, et en donner des descriptions explicites. Par la proposition 2.49, le foncteur d'oubli commute alors avec toute limite et colimite, *i.e.* si $\phi : I \rightarrow \text{Top} : i \mapsto (\phi(i), \mathcal{T}_i)$ est un foncteur, et si $(T, \mathcal{T}_T)$ représente la limite (resp. la colimite) de ϕ , alors l'ensemble sous-jacent T représente aussi la limite (resp. la colimite) du foncteur $I \rightarrow \text{Ens} : i \mapsto \phi(i)$. Pour le cas des limites, cela était déjà évident par inspection des constructions proposées dans l'exemple 2.22(i) et le problème 2.25(iii.a); nous avons donc étendu ce constat aux colimites de tout foncteur ϕ , et nous en avons fourni une explication catégorique.

(ii) Montrer que le foncteur $\text{Spec} : \mathbb{Z} - \text{Alg}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ commute avec les limites cofiltrantes (voir l'exemple 1.121(viii)). Noter que la limite inverse d'un système $(A_\lambda^{\text{op}} \mid \lambda \in \Lambda)$ d'objets de $\mathbb{Z} - \text{Alg}^{\text{op}}$ est représentable par la limite directe du système d'anneaux $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ indexé par $(\Lambda, \leq)^{\text{op}}$, donc, si $(\Lambda, \leq)$ est cofiltrant, on obtiendra un homéomorphisme naturel :

$$\text{Spec} \left(\varinjlim_{\lambda \in \Lambda^{\text{op}}} A_\lambda \right) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} \text{Spec } A_\lambda.$$

Le critère suivant est aussi parfois utile :

Lemme 2.52. Soient I et $\mathcal{C}$ deux catégories, $\mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, et $F : I \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur. Notons par $i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'inclusion, et supposons que la limite de $i \circ F$ soit représentable par un objet L de $\mathcal{C}$. On a :

- (i) Si $L \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, alors L représente aussi la limite de F .
- (ii) Si i admet un adjoint à gauche $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, alors gL représente la limite de F .
- (iii) Dans les deux cas (i) et (ii), le foncteur i commute avec la limite de F .

Démonstration. (Evidemment, $i(X) := X$ et $i(f) := f$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ et tout morphisme f de $\mathcal{B}$.) Soit $(\tau_j : L \rightarrow Fj \mid j \in \text{Ob}(I))$ un cône universel.

(i) : Comme $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie pleine, chaque τ_j est un morphisme de $\mathcal{B}$, et on voit aussitôt que $\tau_\bullet$ est un cône universel pour la limite de F .

(ii) : Soient $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow i \circ g$ et $\varepsilon : g \circ i \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ l'unité et la coïunité d'une adjonction pour le couple (g, i) . Pour tout $j \in \text{Ob}(I)$ posons $\tau_j^* := \varepsilon_{Fj} \circ g(\tau_j) : gL \rightarrow Fj$; on voit aisément que $(\tau_j^* \mid j \in \text{Ob}(I))$ est un cône $\tau^* : c_{gL} \rightarrow F$. On déduit un cône $i * \tau^* : c_{igL} \rightarrow i \circ F$, et par l'universalité de τ , il existe alors un unique morphisme $f : igL \rightarrow L$ de $\mathcal{C}$ tel que $\tau_j \circ f = i(\tau_j^*)$ pour tout $j \in \text{Ob}(I)$. On calcule :

$$\tau_j \circ f \circ \eta_L = i(\varepsilon_{Fj}) \circ ig(\tau_j) \circ \eta_L = i(\varepsilon_{Fj}) \circ \eta_{i(Fj)} \circ \tau_j = \tau_j \quad \forall j \in \text{Ob}(I)$$

où la dernière égalité suit des identités triangulaires (problème 2.13(ii)). Par l'universalité de τ , il vient ainsi $f \circ \eta_L = \mathbf{1}_L$. D'autre part, comme $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, il existe $h \in \mathcal{B}(gL, gL)$ tel que $i(h) = \eta_L \circ f$; d'après le problème 2.13(iii), l'adjonction pour (g, i) associe à h le morphisme $i(h) \circ \eta_L = \eta_L \circ f \circ \eta_L = \eta_L = i(\mathbf{1}_{gL}) \circ \eta_L$, d'où $h = \mathbf{1}_{gL}$. Cela montre que f est un isomorphisme, et donc igL représente la limite de $i \circ F$; l'assertion suit alors de (i).

(iii) : Cela suit par inspection directe de la preuve de (i) et (ii). $\square$

Exercice 2.53. On dit qu'un foncteur $\phi : J \rightarrow I$ est *final*, si pour toute catégorie $\mathcal{C}$, tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$, et tout cône universel $\tau := (\tau_i : L \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$, le cône $\tau * \phi$ est universel. Dualelement, on dit que ϕ est *cofinal*, si ϕ^{op} est final.

- (i) Montrer que si $\phi : J \rightarrow I$ admet un adjoint à droite, il est final.
 - (ii) Dualelement, si ϕ admet un adjoint à gauche, il est cofinal.
 - (iii) Soient i_0 un objet final (resp. initial) de I , et $J \subset I$ l'unique sous-catégorie avec $\text{Ob}(J) = \{i_0\}$. Montrer que l'inclusion $J \rightarrow I$ est un foncteur cofinal (resp. final).
 - (iv) Soient $(\Lambda, \leq)$ un ensemble cofiltrant (resp. filtrant), et $\Lambda' \subset \Lambda$ une partie finale (resp. cofinale : voir l'exercice 2.35). Montrer que l'inclusion des catégories associées $\mathcal{C}_{\Lambda'} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ est un foncteur final (resp. cofinal).
- (Voir [53, §IX.3] pour une caractérisation complète des foncteurs finaux.)

2.3.3. Permutation de limites et extensions de Kan. Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{C}$ une catégorie I -complète; on a un foncteur évident

$$c_I : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \quad X \mapsto c_X \quad (f : X \rightarrow Y) \mapsto (c_f : c_X \rightarrow c_Y)$$

(où $c_X : I \rightarrow \mathcal{C}$ dénote le foncteur constant de valeur X : notation de 2.2). Pour tout foncteur $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ fixons un objet L^ϕ de $\mathcal{C}$ représentant $\lim_I \phi$, ainsi qu'un cône universel $(\varepsilon_i^\phi : L^\phi \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$. Soit $\phi' : I \rightarrow \mathcal{C}$ un autre foncteur; suivant la

remarque 2.29(ii), toute transformation naturelle $\omega : \phi \rightarrow \phi'$ induit un morphisme limite $\lim_I \omega : L^\phi \rightarrow L^{\phi'}$ caractérisé par les identités : $\varepsilon_i^{\phi'} \circ \lim_I \omega = \omega_i \circ \varepsilon_i^\phi$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Il s'ensuit aisément que $\lim_I \mathbf{1}_\phi = \mathbf{1}_{L^\phi}$ pour tout foncteur $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$, et si $\omega' : \phi' \rightarrow \phi''$ est une deuxième transformation naturelle, on a

$$\lim_I(\omega' \circ \omega) = (\lim_I \omega') \circ (\lim_I \omega)$$

car $\varepsilon_i^{\phi''} \circ (\lim_I \omega') \circ (\lim_I \omega) = \omega'_i \circ \varepsilon_i^{\phi'} \circ (\lim_I \omega) = \omega'_i \circ \omega_i \circ \varepsilon_i^\phi$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Les associations $\phi \mapsto L^\phi$ et $(\omega : \phi \rightarrow \phi') \mapsto \lim_I \omega$ définissent donc un foncteur

$$\text{Lim}_I : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

qui est *adjoint à droite* de c_I : en effet, on a des bijections naturelles

$$\vartheta_\phi^X : \mathcal{C}(X, L^\phi) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(c_X, \phi) \quad f \mapsto \varepsilon^\phi \circ c_f \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall \phi : I \rightarrow \mathcal{C}$$

et on voit aisément que $\vartheta_{\phi'}^Y((\lim_I \omega) \circ f \circ g) = \omega \circ \vartheta_\phi^X(f) \circ c_g$ pour toute transformation naturelle $\omega : \phi \rightarrow \phi'$ et tout morphisme $g : Y \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$, d'où l'assertion.

Remarque 2.54. (i) Compte tenu de la proposition 2.49(i), il s'ensuit que le foncteur Lim_I commute avec toute limite représentable de $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$.

(ii) La discussion ci-dessus montre plus précisément que le foncteur constant c_I admet un adjoint à droite *si et seulement si* $\mathcal{C}$ est I -complète ; en effet, si $L : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est n'importe quel adjoint à droite de c_I , et $\tilde{\vartheta}$ est une adjonction arbitraire pour le couple (c_I, L) , alors $L\phi$ représente $\lim_I \phi$, pour tout $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$, et la coïunité $\tilde{\varepsilon}^\phi : c_{L\phi} \rightarrow \phi$ de $\tilde{\vartheta}$ est un cône universel. Remarquons maintenant :

Lemme 2.55. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et I, J deux petites catégories. On a :*

(i) *Il existe des isomorphismes de catégories :*

$$\text{Fun}(I, \text{Fun}(J, \mathcal{C})) \xleftarrow{\sim} \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(J, \text{Fun}(I, \mathcal{C})) \quad F' \mapsto F \mapsto F''.$$

(ii) *Si $\mathcal{C}$ est J -complète, alors $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est J -complète, et le foncteur constant $c_J'' : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \text{Fun}(I, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C})$ admet l'adjoint à droite*

$$\text{Lim}'' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \quad F \mapsto \text{Lim}_J \circ F' \quad (\omega : F \rightarrow G) \mapsto \text{Lim}_J * \omega'$$

(iii) *De même, si $\mathcal{C}$ est I -complète, $\text{Fun}(J, \mathcal{C})$ est I -complète, et le foncteur constant $c_I' : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \text{Fun}(J, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C})$ admet l'adjoint à droite*

$$\text{Lim}' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \quad F \mapsto \text{Lim}_I \circ F'' \quad (\omega : F \rightarrow G) \mapsto \text{Lim}_I * \omega''$$

(ici, $\omega' : F' \rightarrow G'$ et $\omega'' : F'' \rightarrow G''$ sont les transformations naturelles déduites, grâce à (i), d'une transformation naturelle $\omega : F \rightarrow G$ entre $F, G : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$).

Démonstration. (i) : Soit $F : K := I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur ; rappelons que $\text{Ob}(K) = \text{Ob}(I) \times \text{Ob}(J)$, et $K((i, j), (i', j')) = I(i, i') \times J(j, j')$ pour tout $(i, j), (i', j') \in \text{Ob}(K)$ (exemple 2.20(vi)). Pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ on obtient alors un foncteur $F'(i) : J \rightarrow \mathcal{C}$ par

$$F'(i)(j) := F(i, j) \quad F'(i)(g) := F(\mathbf{1}_i, g) \quad \forall j, j' \in \text{Ob}(J), \forall g \in J(j, j').$$

De plus, tout morphisme $f : i \rightarrow i'$ de I induit une transformation naturelle $F'(f) : F'(i) \rightarrow F'(i')$ avec $F'(f)_j := F(f, \mathbf{1}_j)$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$ (détails laissés aux soins du lecteur) ; donc, les associations $i \mapsto F'(i)$ et $f \mapsto F'(f)$ définissent un foncteur $F' : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$. Ensuite, à toute transformation naturelle $\omega : F \rightarrow G$ de foncteurs $F, G : K \rightarrow \mathcal{C}$ et tout $i \in \text{Ob}(I)$ on associe une transformation naturelle $\omega'_i : F'i \rightarrow G'i$ en posant $\omega'_{i,j} := \omega_{(i,j)}$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$; on voit aisément que $G'f \circ \omega'_i = \omega'_{i'} \circ F'f$ pour tout morphisme $f : i \rightarrow i'$ de I , donc l'association $i \mapsto \omega'_i$ fournit une transformation naturelle $\omega' : F' \rightarrow G'$ bien définie. En dernier lieu, si $H : K \rightarrow \mathcal{C}$ est un troisième foncteur, et $\tau : G \rightarrow H$ une deuxième transformation naturelle, on voit sans peine que $(\tau \circ \omega)' = \tau' \circ \omega'$; cela achève la construction du foncteur souhaité $\text{Fun}(K, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \text{Fun}(J, \mathcal{C}))$.

Réciproquement, si $F' : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$ est un foncteur donné, on obtient un foncteur $F : K \rightarrow \mathcal{C}$ en posant $F(i, j) := F'(i)(j)$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(K)$ et $F(f, g) := F'(i')(g) \circ F'(f)_j$ pour tout $(f, g) \in K((i, j), (i', j'))$; de même, si $\omega' : F' \rightarrow G'$ est une transformation naturelle de foncteurs $F', G' : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$, on obtient une transformation naturelle $\omega : F \rightarrow G$ en posant $\omega_{(i, j)} := \omega'_{i, j}$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(K)$: les vérifications détaillées seront confiées au lecteur. On voit aisément que l'association $F' \mapsto F$ définit un foncteur $\text{Fun}(I, \text{Fun}(J, \mathcal{C})) \rightarrow \text{Fun}(K, \mathcal{C})$ qui est évidemment l'inverse du foncteur précédent. En échangeant les rôles de I et J on obtient de même l'isomorphisme $\text{Fun}(K, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(J, \text{Fun}(I, \mathcal{C}))$.

(ii) : Soit $F'' : J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ un foncteur; suivant (i), on associe à F'' le foncteur $F' : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$ tel que $F''(j)(i) = F'(i)(j)$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$. Comme $\mathcal{C}$ est J -complète, le foncteur $\text{Lim}_J : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est bien défini; on pose

$$L := \text{Lim}_J \circ F' : I \rightarrow \mathcal{C}.$$

Par construction on a un cône universel $(\varepsilon_j^{F'i} : Li \rightarrow F'(i)(j) \mid j \in \text{Ob}(J))$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et pour tout morphisme $f : i \rightarrow i'$ de I , le morphisme $Lf : Li \rightarrow Li'$ est caractérisé par les identités

$$\varepsilon_j^{F'i'} \circ Lf = F'(f)_j \circ \varepsilon_j^{F'i} \quad \forall j \in \text{Ob}(J).$$

Comme $F'(f)_j = F''(j)(f)$, ces identités nous disent que le système de morphismes $(\varepsilon_j^{F'i} : Li \rightarrow F''(j)(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ est une transformation naturelle $\varepsilon_j^{F'} : L \rightarrow F''(j)$, pour tout $j \in \text{Ob}(J)$, d'où un cône bien défini

$$\varepsilon^{F'} := (\varepsilon_j^{F'} : L \rightarrow F''(j) \mid j \in \text{Ob}(J)).$$

Montrons que L représente la limite de F'' et que $\varepsilon^{F'}$ est un cône universel. En effet, soient $G : I \rightarrow \mathcal{C}$ un autre foncteur, et $(\tau_j : G \rightarrow F''(j) \mid j \in \text{Ob}(J))$ un cône de sommet G et base F'' ; on en déduit un cône $\tau_{\bullet, i} := (\tau_{j, i} : Gi \rightarrow F'(i)(j) \mid j \in \text{Ob}(J))$ de base $F'(i)$ et sommet Gi , pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. L'adjonction ϑ exhibée ci-dessus pour le couple (c_J, Lim_J) associe à $\tau_{\bullet, i}$ un morphisme $t_i := \vartheta_{F'(i)}^{Gi-1}(\tau_{\bullet, i}) : Gi \rightarrow Li$ tel que $\varepsilon_j^{F'i} \circ t_i = \tau_{j, i}$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$. De plus, une inspection directe montre que tout morphisme $f : i \rightarrow i'$ de I induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} c_{Gi} & \xrightarrow{\tau_{\bullet, i}} & F'(i) \\ c_{Gf} \downarrow & & \downarrow F'(f) \\ c_{Gi'} & \xrightarrow{\tau_{\bullet, i'}} & F'(i') \end{array}$$

d'où $t_{i'} \circ Gf = \vartheta_{F'(i')}^{Gi-1}(\tau_{\bullet, i'} \circ c_{Gf}) = \vartheta_{F'(i')}^{Gi-1}(F'(f) \circ \tau_{\bullet, i}) = L(f) \circ t_i$. Autrement dit, le système $(t_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ est une transformation naturelle $t : G \rightarrow L$ telle que $\varepsilon_j^{F'} \circ t = \tau_j$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$. L'universalité des cônes $\varepsilon_{\bullet}^{F'i}$ entraîne l'unicité d'une telle t vérifiant ces identités, d'où l'assertion.

En dernier lieu, compte tenu l'universalité de $\varepsilon^{F'}$, on voit déjà que c_J'' admet un adjoint à droite $\text{Lim}_J'' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(J, \text{Fun}(I, \mathcal{C})) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ tel que :

— $\text{Lim}_J''(F) = \text{Lim}_J \circ F'$ pour tout foncteur $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$

— pour toute transformation naturelle $\omega : F \rightarrow G$ entre foncteurs $F, G : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$, la transformation $\text{Lim}_J''(\omega) : \text{Lim}_J''(F) \rightarrow \text{Lim}_J''(G)$ est caractérisée par les identités : $\varepsilon_j^{G'} \circ \text{Lim}_J''(\omega) = \omega_j' \circ \varepsilon_j^{F'}$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$.

D'autre part, on a $(\text{Lim}_J * \omega')_i = \text{Lim}_J(\omega'_i)$ et $\omega'_{j, i} = \omega'_{i, j}$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ et tout $j \in \text{Ob}(J)$, donc pour conclure il suffit de remarquer les identités évidentes : $\varepsilon_j^{G'i} \circ \text{Lim}_J(\omega'_i) = \omega'_{i, j} \circ \varepsilon_j^{F'i}$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$.

(iii) : Evidemment, cela se vérifie comme pour (ii). □

Remarque 2.56. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et I, J deux petites catégories; pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ on a un foncteur d'évaluation

$$\text{ev}_i : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \quad F \mapsto Fi \quad (\psi : F \rightarrow G) \mapsto (\psi_i : Fi \rightarrow Gi)$$

et avec une simple inspection on constate que la preuve du lemme 2.55(ii) montre aussi le résultat suivant : si $\mathcal{C}$ est J -complète, chaque foncteur ev_i commute avec la limite de tout foncteur $J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$. Autrement dit, *les limites de la catégorie $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ se calculent terme à terme.*

Soient maintenant I, J deux petites catégories, et $\mathcal{C}$ une catégorie à la fois I -complète et J -complète, de sorte que l'on a des foncteurs bien définis

$$\text{Lim}_I : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{Lim}_J : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}.$$

De plus, en vertu du lemme 2.55(ii), aussi $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ et $\text{Fun}(J, \mathcal{C})$ sont respectivement J -complète et I -complète, donc les foncteurs limites correspondants

$$\text{Lim}'_I : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \quad \text{Lim}''_J : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$$

son bien définis à leur tour. On peut ainsi énoncer :

Proposition 2.57. *Dans la situation ci-dessus, on a :*

(i) *la catégorie $\mathcal{C}$ est $(I \times J)$ -complète, et on a des isomorphismes de foncteurs :*

$$\text{Lim}_I \circ \text{Lim}''_J \xleftarrow{\sim} \text{Lim}_{I \times J} \xrightarrow{\sim} \text{Lim}_J \circ \text{Lim}'_I.$$

(ii) *En particulier, pour tout $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ on a des isomorphismes naturels*

$$\lim_I (\lim_J F'') \xleftarrow{\sim} \lim_{I \times J} F \xrightarrow{\sim} \lim_J (\lim_I F').$$

Démonstration. Evidemment, (ii) suit aussitôt de (i). Or, Lim_I et Lim_J sont adjoints à droite des foncteurs constants $c_I : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ et $c_J : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$, et de même Lim'_I et Lim''_J sont adjoints à droite des foncteurs constants

$$c'_I : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad c''_J : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}).$$

De plus, $c'_I \circ c_J = c_{I \times J} = c''_J \circ c_I$, avec $c_{I \times J} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C})$ le foncteur constant. L'assertion suit alors des exercices 2.14(i) et 2.17(i), et de la remarque 2.54(ii). $\square$

Remarque 2.58. (i) Dualemnt, si $\mathcal{C}$ est une catégorie I -cocomplète, le foncteur constant $c_I : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche

$$\text{Colim}_I : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}.$$

Compte tenu de l'isomorphisme naturel

$$\text{Fun}(I^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(I, \mathcal{C})^{\text{op}} \quad (F : I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}) \mapsto (F^{\text{op}} : I \rightarrow \mathcal{C})$$

(qui associe à toute transformation naturelle $\omega : F \rightarrow G$ la transformation opposée $\omega^{\text{op}} : G^{\text{op}} \rightarrow F^{\text{op}}$; voir la remarque 1.127(iv)), on peut le définir en posant

$$\text{Colim}_I := (\text{Lim}_{I^{\text{op}}})^{\text{op}}.$$

(ii) En particulier, l'objet $\text{Colim}_I F$ représente la colimite de tout $F : I \rightarrow \mathcal{C}$. De plus, si $\mathcal{C}$ est J -cocomplète, on voit de même que $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est J -cocomplète, et les foncteurs ev_i de la remarque 2.56 commutent aussi avec la colimite de tout foncteur $J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$; *i.e. les colimites de $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ se calculent terme à terme.*

(iii) La proposition 2.57 se dualise elle aussi : si $\mathcal{C}$ est I -cocomplète et J -cocomplète, on obtient des isomorphismes de permutation des colimites

$$\text{Colim}_I \circ \text{Colim}''_J \xleftarrow{\sim} \text{Colim}_{I \times J} \xrightarrow{\sim} \text{Colim}_J \circ \text{Colim}'_I$$

avec $\text{Colim}'_I : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$ et $\text{Colim}''_J : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ définis de manière analogue aux foncteurs limites correspondants ci-dessus : les détails sont laissés au lecteur.

(iv) D'autre part, en général les limites ne commutent pas avec les colimites ; toutefois, on a les résultats suivants :

Problème 2.59. (i) Avec la notation ci-dessus, soient $\eta^\bullet$ l'unité d'une adjonction choisie pour le couple (Colim_J, c_J) et $\varepsilon^\bullet$ la coïunité d'une adjonction pour (c_I, Lim_I) ; soient de même $\tilde{\eta}^\bullet$ l'unité d'une adjonction pour (Colim''_J, c'_J) et $\tilde{\varepsilon}^\bullet$ la coïunité d'une adjonction pour (c'_I, Lim'_I) . Exhiber une transformation naturelle :

$$\tau : \text{Colim}_J \circ \text{Lim}'_I \rightarrow \text{Lim}_I \circ \text{Colim}''_J$$

caractérisée, pour tout $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$, par les identités :

$$\varepsilon_i^{\text{Colim}''_J F} \circ \tau_F \circ \eta_j^{\text{Lim}'_I F} = \tilde{\eta}_{ji}^F \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F \quad \forall (i, j) \in \text{Ob}(I \times J).$$

(ii) Prenons pour $\mathcal{C}$ l'une des catégories Ens , $A - \text{Mod}$ ou $A - \text{Alg}$ (avec A un anneau quelconque), et supposons vérifiées les deux conditions suivantes :

- I est une catégorie finie
- J est une catégorie *filtrante* (voir la définition 2.30(i)).

Montrer que dans ce cas la transformation naturelle de (i) est un isomorphisme.

Exercice 2.60. Soient $I, J, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des catégories, $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, et supposons que I et J soient petites, et que $\mathcal{B}$ soit J -complète (resp. J -cocomplète). On considère le foncteur

$$\text{Fun}(I, F) : \text{Fun}(I, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \quad (G : I \rightarrow \mathcal{B}) \mapsto (F \circ G : I \rightarrow \mathcal{C})$$

associant à toute transformation naturelle $\omega : G \rightarrow G'$ de foncteurs $G, G' : I \rightarrow \mathcal{B}$, la transformation $F * G : F \circ G \rightarrow F \circ G'$ (voir l'exercice 1.129). Montrer que si F commute avec les J -limites (resp. les J -colimites), il en est de même pour $\text{Fun}(I, F)$.

Exercice 2.61. Soient I, J, K trois petites catégories, $\mathcal{C}$ une catégorie I -complète, $F_\bullet : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$ et $G : K \rightarrow J$ deux foncteurs. Supposons que la limite de G soit représentable dans J , et que $F_i : J \rightarrow \mathcal{C}$ commute avec la limite de G , pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Montrer qu'alors $L := \text{Lim}_I F : J \rightarrow \mathcal{C}$ commute avec la limite de G .

Les foncteurs Lim_I et Colim_I admettent les généralisations suivantes :

Théorème 2.62. (i) Soient I, J des petites catégories, $\phi : I \rightarrow J$ un foncteur, et $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $\mathcal{C}$ est complète, le foncteur $\text{Fun}(\phi, \mathcal{C}) : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite

$$\int_\phi : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \quad F \mapsto \int_\phi F.$$

(ii) Duale, si $\mathcal{C}$ est cocomplète, $\text{Fun}(\phi, \mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche

$$\int^\phi : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \quad F \mapsto \int^\phi F.$$

On appelle $\int_\phi F$ (resp. $\int^\phi F$) l'extension de Kan de F à droite (resp. à gauche).

Démonstration. (i) : Soit $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, et pour tout $j \in \text{Ob}(J)$, soient $j/\phi I$ la tranche de ϕ au-dessous de j , et $b_j : j/\phi I \rightarrow I$ la restriction du foncteur de but $b_\phi : J/\phi I \rightarrow I$ (voir la remarque 2.12(ii,iii)) ; on fixe un cône universel

$$\varepsilon^{F,j} := (\varepsilon_{(i,f)}^{F,j} : L^{F,j} \rightarrow F i \mid (i, f : j \rightarrow \phi i) \in \text{Ob}(j/\phi I))$$

de base $F \circ b_j : j/\phi I \rightarrow \mathcal{C}$, et on pose

$$\int_\phi F(j) := L^{F,j}.$$

Tout morphisme $l : j \rightarrow j'$ de J induit un foncteur

$$l/\phi I : j'/\phi I \rightarrow j/\phi I \quad (i, f) \mapsto (i, f \circ l)$$

qui associe à tout morphisme $h : (i, f) \rightarrow (i', f')$ de $j'/\phi I$ le morphisme $h : (i, f \circ l) \rightarrow (i', f' \circ l)$ de $j/\phi I$. Noter que $\mathbf{b}_{j'} = \mathbf{b}_j \circ l/\phi I$; la remarque 2.29(ii) nous fournit alors le morphisme de $\mathcal{C}$

$$\int_{\phi} F(l) := \lim_{l/\phi I} \mathbf{1}_{F \circ \mathbf{b}_{j'}} : \int_{\phi} F(j) \rightarrow \int_{\phi} F(j').$$

Explicitement, il s'agit de l'unique morphisme $\int_{\phi} F(l) : L^{F,j} \rightarrow L^{F,j'}$ tel que

$$\varepsilon_{(i,f)}^{F,j'} \circ \int_{\phi} F(l) = \varepsilon_{(i,f \circ l)}^{F,j} \quad \forall (i, f) \in \text{Ob}(j'/\phi I).$$

On voit alors aisément que les associations $j \mapsto \int_{\phi} F(j)$ et $l \mapsto \int_{\phi} F(l)$ définissent un foncteur $\int_{\phi} F : J \rightarrow \mathcal{C}$. Ensuite, soit $\beta : F \rightarrow G$ une transformation naturelle de foncteurs $F, G : I \rightarrow \mathcal{C}$; toujours avec la remarque 2.29(ii) on obtient le morphisme

$$(\int_{\phi} \beta)_j := \lim_{j/\phi I} \beta * \mathbf{b}_j : \int_{\phi} F(j) \rightarrow \int_{\phi} G(j) \quad \forall j \in \text{Ob}(J).$$

Explicitement, il s'agit de l'unique morphisme $(\int_{\phi} \beta)_j : L^{F,j} \rightarrow L^{G,j}$ de $\mathcal{C}$ tel que

$$\varepsilon_{(i,f)}^{G,j} \circ (\int_{\phi} \beta)_j = \beta_i \circ \varepsilon_{(i,f)}^{F,j} \quad \forall (i, f) \in \text{Ob}(J).$$

Montrons que les associations $j \mapsto (\int_{\phi} \beta)_j$ définissent une transformation naturelle $\int_{\phi} \beta : \int_{\phi} F \rightarrow \int_{\phi} G$; en effet, pour tout $l \in J(j, j')$ et tout $(i, f) \in \text{Ob}(j'/\phi I)$ on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i,f)}^{G,j'} \circ \int_{\phi} G(l) \circ (\int_{\phi} \beta)_j &= \varepsilon_{(i,f \circ l)}^{G,j} \circ (\int_{\phi} \beta)_j = \beta_i \circ \varepsilon_{(i,f \circ l)}^{F,j} \\ &= \beta_i \circ \varepsilon_{(i,f)}^{F,j'} \circ \int_{\phi} F(l) \\ &= \varepsilon_{(i,f)}^{G,j'} \circ (\int_{\phi} \beta)_{j'} \circ \int_{\phi} F(l) \end{aligned}$$

d'où l'assertion, en vertu de l'universalité du cône $\varepsilon^{G,j'}$. De même, on voit aisément que si $\gamma : G \rightarrow H$ est une autre transformation naturelle, alors $\int_{\phi} (\gamma \circ \beta) = (\int_{\phi} \gamma) \circ (\int_{\phi} \beta)$: les détails sont laissés au lecteur. Cela achève la construction du foncteur $\int_{\phi}$. Or, noter que la catégorie $\phi(i)/\phi I$ admet l'objet distingué $u(i) := (i, \mathbf{1}_{\phi(i)})$, pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, d'où un morphisme $\tilde{\varepsilon}_{F,i} := \varepsilon_{u(i)}^{F,\phi(i)} : L^{F,\phi(i)} \rightarrow Fi$, pour tout tel i , et une simple inspection des définitions montre que les associations $i \mapsto \tilde{\varepsilon}_{F,i}$ définissent un morphisme de $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$

$$\tilde{\varepsilon}_F : (\int_{\phi} F) \circ \phi \rightarrow F$$

et en outre, que les associations $F \mapsto \tilde{\varepsilon}_F$ définissent une transformation naturelle

$$\tilde{\varepsilon} : \text{Fun}(\phi, \mathcal{C}) \circ \int_{\phi} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\text{Fun}(I, \mathcal{C})}.$$

Ensuite, soit $G : J \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur; tout $j \in \text{Ob}(J)$ induit un cône $(Gf : Gj \rightarrow G\phi(i) \mid (i, f) \in \text{Ob}(j/\phi I))$ de base $G \circ \phi \circ \mathbf{b}_j$, d'où un unique morphisme

$$\tilde{\eta}_{G,j} : Gj \rightarrow \int_{\phi} (G \circ \phi)(j) \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_{(i,f)}^{G \circ \phi, j} \circ \tilde{\eta}_{G,j} = Gf \quad \forall (i, f) \in \text{Ob}(j/\phi I).$$

Montrons que les associations $j \mapsto \tilde{\eta}_{G,j}$ définissent une transformation naturelle $\tilde{\eta}_G : G \rightarrow \int_{\phi} (G \circ \phi)$; en effet, pour tout $l \in J(j, j')$ et tout $(i, f) \in \text{Ob}(j'/\phi I)$ on a :

$$\varepsilon_{(i,f)}^{G \circ \phi, j'} \circ \int_{\phi} (G \circ \phi)(l) \circ \tilde{\eta}_{G,j} = \varepsilon_{(i,f \circ l)}^{G \circ \phi, j'} \circ \tilde{\eta}_{G,j} = G(f \circ l) = Gf \circ Gl = \varepsilon_{(i,f)}^{G \circ \phi, j'} \circ \tilde{\eta}_{G,j} \circ Gl$$

d'où l'assertion, en vertu de l'universalité du cône $\varepsilon^{G \circ \phi, j'}$. De même on vérifie aisément que les associations $G \mapsto \tilde{\eta}_G$ définissent une transformation naturelle

$$\tilde{\eta} : \mathbf{1}_{\text{Fun}(J, \mathcal{C})} \rightarrow \int_{\phi} \circ \text{Fun}(\phi, \mathcal{C})$$

et une inspection directe des définitions montre l'identité

$$(*) \quad (\tilde{\varepsilon} * \text{Fun}(\phi, \mathcal{C})) \circ (\text{Fun}(\phi, \mathcal{C}) * \tilde{\eta}) = \mathbf{1}_{\text{Fun}(\phi, \mathcal{C})}.$$

En dernier lieu, vérifions l'identité :

$$(**) \quad (\int_{\phi} * \tilde{\varepsilon}) \circ (\tilde{\eta} * \int_{\phi}) = \mathbf{1}_{\int_{\phi}}.$$

En effet, soient $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, $j \in \text{Ob}(J)$, et $(i, f) \in \text{Ob}(j/\phi I)$; il vient :

$$\varepsilon_{(i,f)}^{F,j} \circ (\int_{\phi} \tilde{\varepsilon}_F)_j \circ \tilde{\eta}_{\int_{\phi} F,j} = \tilde{\varepsilon}_{F,i} \circ \varepsilon_{(i,f)}^{(\int_{\phi} F)^{\circ \phi, j}} \circ \tilde{\eta}_{\int_{\phi} F,j} = \tilde{\varepsilon}_{F,i} \circ \int_{\phi} F(f) = \varepsilon_{(i,f)}^{F,j}$$

d'où l'assertion, en vertu de l'universalité du cône $\varepsilon^{F,j}$. D'après le problème 2.13(iii), (*) et (**) montrent que $(\tilde{\eta}; \tilde{\varepsilon})$ sont l'unité et la coïunité d'une unique adjonction pour le couple $(\text{Fun}(\phi, \mathcal{C}), \int_{\phi})$, comme souhaité.

(ii) : Cela découle de (i), de la remarque 1.127(iv), et de l'exercice 2.14(iii). $\square$

Remarque 2.63. (i) Soient I, J deux petites catégories, et $\phi : I \times J \rightarrow J$ la projection canonique ; noter que $\text{Fun}(\phi, \mathcal{C})$ coïncide avec le foncteur constant $\mathbf{c}'_J$ du lemme 2.55(iii). D'après le théorème 2.62(i) et l'exercice 2.14(i), on a alors un isomorphisme de foncteurs $\omega : \text{Lim}'_I \xrightarrow{\sim} \int_{\phi}$. Or, rappelons que pour tout foncteur $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ et tout $j \in \text{Ob}(J)$, l'objet $\text{Lim}'_I F(j)$ représente la limite du foncteur $F \circ \mathbf{e}_j : I \rightarrow \mathcal{C}$, où $\mathbf{e}_j : I \rightarrow I \times J$ est le foncteur tel que $\mathbf{e}_j(i) := (i, j)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et $\mathbf{e}_j(l) := (l, \mathbf{1}_j)$ pour tout morphisme l de I . D'autre part, $\int_{\phi} F(j)$ représente la limite de $F \circ \mathbf{b}_j : j/\phi(I \times J) \rightarrow \mathcal{C}$, où $\mathbf{b}_j : j/\phi(I \times J) \rightarrow I \times J$ désigne le foncteur de but. Mais noter que $\mathbf{e}_j$ est la composition de $\mathbf{b}_j$ avec le foncteur $\mathbf{f}_j : I \rightarrow j/\phi(I \times J)$ tel que $\mathbf{f}_j(i) := ((i, j), \mathbf{1}_j)$ pour tout $i \in I$ et $\mathbf{f}_j(l) := (l, \mathbf{1}_j)$ pour tout morphisme l de I . Ce foncteur $\mathbf{f}_j$ admet un adjoint à droite $\mathbf{g}_j : j/\phi(I \times J) \rightarrow I$ tel que $\mathbf{g}_j((i, k), f : j \rightarrow k) := i$ pour tout $((i, k), f : j \rightarrow k) \in \text{Ob}(j/\phi(I \times J))$ et $\mathbf{g}_j(s, t) := s$ pour tout morphisme (s, t) de $j/\phi(I \times J)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Par suite, $\mathbf{f}_j$ est final, et donc $\int_{\phi} F(j)$ représente aussi la limite de $F \circ \mathbf{e}_j : I \rightarrow \mathcal{C}$, d'après l'exercice 2.53(i) : cela explique l'existence de l'isomorphisme ω .

(ii) Evidemment, il vient de même un isomorphisme de foncteurs $\text{Colim}'_I \xrightarrow{\sim} \int^{\phi}$, dont l'existence admet une justification analogue.

Exercice 2.64. (i) Dans la situation du théorème 2.62, soient ϕ plein et fidèle, et $\mathcal{C}$ complète (resp. cocomplète). Montrer que $\int_{\phi}$ (resp. $\int^{\phi}$) est plein et fidèle.

(ii) Soient ϕ plein et fidèle, $\mathcal{C}$ complète et cocomplète, et notons par $(\eta_{(\phi)}, \varepsilon_{(\phi)})$ (resp. $\eta^{(\phi)}, \varepsilon^{(\phi)}$) les unités et coïunités canoniques pour le couple $(\text{Fun}(\phi, \mathcal{C}), \int_{\phi})$ (resp. $(\int^{\phi}, \text{Fun}(\phi, \mathcal{C}))$), exhibées lors de la preuve du théorème 2.62. Dédurre de (i) qu'il existe une unique transformation naturelle

$$\beta : \int^{\phi} \rightarrow \int_{\phi} \quad \text{avec} \quad \beta * \text{Fun}(\phi, \mathcal{C}) = \eta_{(\phi)} * \varepsilon^{(\phi)} \quad \text{et} \quad \text{Fun}(\phi, \mathcal{C}) * \beta = (\varepsilon_{(\phi)} * \eta^{(\phi)})^{-1}.$$

Problème 2.65. Dans la situation du théorème 2.62, prenons $\mathcal{C} := \text{Ens}$.

(i) Montrer que le diagramme de catégories :

$$\begin{array}{ccc} I^{\text{op}} & \xrightarrow{h^I} & \text{Fun}(I, \text{Ens}) \\ \phi^{\text{op}} \downarrow & & \downarrow \int^{\phi} \\ J^{\text{op}} & \xrightarrow{h^J} & \text{Fun}(J, \text{Ens}) \end{array}$$

est essentiellement commutatif, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\int^{\phi} \circ h^I \xrightarrow{\sim} h^J \circ \phi^{\text{op}}$$

où h^I et h^J désignent les foncteurs de Yoneda de l'exemple 2.2(ii). En déduire que ϕ est plein et fidèle $\Leftrightarrow \int_{\phi}$ est plein et fidèle $\Leftrightarrow \int^{\phi}$ est plein et fidèle.

(ii) Montrer en outre que si I est finiment cocomplète, et si ϕ est exact à droite, alors $\int^\phi$ est exact.

Exercice 2.66. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie finiment complète, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et considérons le produit fibré $Y \times_{(f,f)} Y$ avec son cône universel $Y \xleftarrow{p_1} Y \times_{(f,f)} Y \xrightarrow{p_2} Y$ (voir l'exemple 2.23(ii)); on a un unique *morphisme diagonal*

$$\Delta_{Y/X} : Y \rightarrow Y \times_{(f,f)} Y \quad \text{tel que} \quad p_i \circ \Delta_{Y/X} = 1_Y \quad \forall i = 1, 2.$$

Montrer que f est un monomorphisme $\Leftrightarrow \Delta_{Y/X}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$.

(ii) Soient $\mathcal{C}$ comme dans (i), $f : Y \rightarrow X$ un monomorphisme de $\mathcal{C}$, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur exact à gauche. Montrer que Ff est un monomorphisme de $\mathcal{C}'$.

(iii) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie finiment cocomplète, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$; on considère la somme amalgamée $Y \sqcup_{(f,f)} Y$ et son co-cône universel $Y \xrightarrow{e_1} Y \sqcup_{(f,f)} Y \xleftarrow{e_2} Y$ (voir l'exemple 2.26(iv)). Il existe un unique *morphisme codiagonal*

$$\nabla_{X/Y} : Y \sqcup_{(f,f)} Y \rightarrow Y \quad \text{tel que} \quad \nabla_{X/Y} \circ e_i = 1_Y \quad \forall i = 1, 2.$$

Montrer que f est un épimorphisme $\Leftrightarrow \nabla_{X/Y}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$.

(iv) Soient $\mathcal{C}$ comme dans (iii), $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur exact à droite, et $f : Y \rightarrow X$ un épimorphisme de $\mathcal{C}$. Montrer que Ff est un épimorphisme de $\mathcal{C}'$.

(v) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie finiment complète (resp. finiment cocomplète), I une petite catégorie, $F, G : I \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs, $\beta : F \rightarrow G$ une transformation naturelle. Montrer que β est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ si et seulement si $\beta_i : Fi \rightarrow Gi$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\mathcal{C}$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$.

Remarque 2.67. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un objet final $0_{\mathcal{C}}$, et pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ notons par 0_X l'unique morphisme $X \rightarrow 0_{\mathcal{C}}$. Pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ le produit fibré $X \times_{0_{\mathcal{C}}} Y = X \times_{(0_X, 0_Y)} Y$ n'est rien d'autre que le produit $X \times Y$, et sous cette identification, la diagonale $\Delta_{X/0_{\mathcal{C}}}$ correspond à l'unique morphisme $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ tel que $p_i \circ \Delta_X = 1_X$ pour $i = 1, 2$, où $(p_i : X \times X \rightarrow X \mid i = 1, 2)$ sont les projections canoniques. Dualelement, si $\mathcal{C}$ a un objet initial $0'_{\mathcal{C}}$, la somme amalgamée $X \sqcup_{0'_{\mathcal{C}}} Y$ représente le coproduit $X \sqcup Y$, et la codiagonale $\nabla_{0'_{\mathcal{C}}/Y}$ s'identifie à l'unique morphisme $\nabla_Y : Y \sqcup Y \rightarrow Y$ tel que $\nabla_Y \circ e_i = 1_Y$ pour $i = 1, 2$, où $(e_i : Y \rightarrow Y \sqcup Y \mid i = 1, 2)$ sont les injections canoniques.

2.4. Catégories abéliennes. Soient A un anneau associatif unitaire, et I une petite catégorie. Les sections précédentes ont mis en évidence certaines propriétés structurelles de $A - \text{Mod}$ qui sont héritées par la catégorie $\text{Fun}(I, A - \text{Mod})$; en particulier, cette dernière est complète et cocomplète, et son objet initial est le foncteur constant $0 := c_0 : I \rightarrow A - \text{Mod}$ de valeur le A -module trivial. Remarquons de plus que 0 est aussi un objet final de $\text{Fun}(I, A - \text{Mod})$.

- Pour une catégorie $\mathcal{C}$ arbitraire, on appelle *objet zéro* de $\mathcal{C}$ un objet, noté par $0_{\mathcal{C}}$ ou simplement par 0 , qui est à la fois initial et final dans $\mathcal{C}$; toute catégorie n'admet pas d'objet zéro, mais si un tel objet existe, il est évidemment unique à isomorphisme unique près. Si $0_{\mathcal{C}} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est un objet zéro, pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il existe un morphisme unique $0_{XY} : X \rightarrow Y$ qui se factorise à travers $0_{\mathcal{C}}$, et l'unicité à isomorphisme près de $0_{\mathcal{C}}$ entraîne aisément que 0_{XY} est indépendant de l'objet zéro choisi; on appelle 0_{XY} le *morphisme zéro* (ou *morphisme nul*) de X vers Y . Noter que $g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$ et $0_{XY} \circ h = 0_{ZY}$ pour tout $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, tout $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ et tout $h \in \mathcal{C}(Z, X)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

- L'exemple 2.37(ii) se généralise aussitôt à ce cadre : soit $f \in \mathcal{C}(X, Y)$; le *noyau* $\text{Ker } f$ (resp. le *conoyau* $\text{Coker } f$) de f sera l'égaliseur (resp. le coégaliseur) du couple $(f, 0_{XY})$, pourvu que ce dernier soit représentable dans $\mathcal{C}$, et le cône et co-cône universels reviennent à la donnée de morphismes de $\mathcal{C}$

$$\iota_f : \text{Ker } f \rightarrow X \quad \text{et} \quad \pi_f : Y \rightarrow \text{Coker } f$$

correspondant aux sous-foncteurs de $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$ et respectivement $\mathbf{h}_Y$ suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Ens} & Z^{\text{op}} &\mapsto \{g \in \mathcal{C}(Z, X) \mid f \circ g = 0_{Z_Y}\} \\ \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{Ens} & Z &\mapsto \{g \in \mathcal{C}(Y, Z) \mid g \circ f = 0_{X_Z}\}.\end{aligned}$$

En particulier, ι_f est un monomorphisme, et π_f un épimorphisme (exercice 2.7(i)). Souvent on ne distinguera pas entre le monomorphisme ι_f et sa classe d'équivalence, et de même pour π_f ; ainsi, la notation $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Coker } f$) fait référence plus précisément à un sous-objet (resp. un quotient) de X , suivant la définition 2.8(i).

• Comme les limites et colimites de $\text{Fun}(I, A - \mathbf{Mod})$ se calculent terme à terme (remarques 2.56 et 2.58(ii)), il en est de même pour les noyaux et conoyaux : si $\phi : F \rightarrow G$ est une transformation naturelle de foncteurs $F, G : I \rightarrow A - \mathbf{Mod}$, on a

$$(\text{Ker } \phi)(i) = \text{Ker } \phi_i \quad (\text{Coker } \phi)(i) = \text{Coker } \phi_i \quad \forall i \in \text{Ob}(I)$$

et les cônes et co-cônes universels $\text{Ker } \phi \rightarrow F$ et $G \rightarrow \text{Coker } \phi$ sont donnés terme à terme par les inclusions et projections canoniques $\iota_i : \text{Ker } \phi_i \rightarrow Fi$ et $\pi_i : Gi \rightarrow \text{Coker } \phi_i$, pour chaque $i \in \text{Ob}(I)$. Par suite, pour tout morphisme $f : i \rightarrow j$ de I , le morphisme correspondant $(\text{Ker } \phi)(f) : \text{Ker } \phi_i \rightarrow \text{Ker } \phi_j$ est la restriction de $Ff : Fi \rightarrow Fj$; de même, le morphisme $(\text{Coker } \phi)(f) : \text{Coker } \phi_i \rightarrow \text{Coker } \phi_j$ est caractérisé par l'identité :

$$(\text{Coker } \phi)(f) \circ \pi_i = \pi_j \circ Gf.$$

• Dans le même esprit, on peut essayer de fournir une construction catégorique de *l'image* d'une application A -linéaire $g : M \rightarrow N$. Il se trouve que l'on peut procéder de deux façons différentes : on peut poser $\text{Im } g := \text{Ker } (\pi_g : N \rightarrow \text{Coker } g)$, et d'autre part on peut aussi définir $\text{Im } g := \text{Coker } (\iota_g : \text{Ker } g \rightarrow M)$. Dans les deux cas, on voit qu'il s'agit d'une opération hybride, faisant intervenir des limites et des colimites à la fois ; or, si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec un objet zéro, et dont les noyaux et conoyaux sont représentables, on définira de même, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ *l'image* et la *coimage* de f , respectivement par :

$$\text{Im } f := \text{Ker } (\pi_f : Y \rightarrow \text{Coker } f) \quad \text{Coim } f := \text{Coker } (\iota_f : \text{Ker } f \rightarrow X).$$

Ainsi, $\text{Im } f$ est un *sous-objet* de Y , alors que $\text{Coim } f$ est un *quotient* de X . Comme $\pi_f \circ f$ est le morphisme nul, il existe un morphisme unique $\bar{f} : X \rightarrow \text{Im } f$ tel que $\iota_{\pi_f} \circ \bar{f} = f$; par suite $\iota_{\pi_f} \circ \bar{f} \circ \iota_f = f \circ \iota_f$ est le morphisme nul. Comme ι_{π_f} est un monomorphisme, on déduit que $\bar{f} \circ \iota_f$ est déjà nul, et donc il existe un morphisme unique $\beta_f : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ tel que f s'écrit comme la composition :

$$\boxed{X \xrightarrow{\iota_f} \text{Coim } f \xrightarrow{\beta_f} \text{Im } f \xrightarrow{\iota_{\pi_f}} Y.}$$

Définition 2.68. On dit que f est un morphisme *strict* si β_f est un isomorphisme.

• Les morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$ générale (soumise aux conditions ci-dessus), ne sont pas toujours stricts (voir, *e.g.* la remarque 9.7(ii)). Mais, bien entendu, cela est le cas pour $\mathcal{C} = A - \mathbf{Mod}$, *i.e.* toute application A -linéaire f est stricte. Par suite, tout morphisme $\phi : F \rightarrow G$ de $\text{Fun}(I, A - \mathbf{Mod})$ est strict, car évidemment *l'image* et la *coimage* de ϕ , ainsi que β_ϕ se calculent, à leur tour, terme à terme.

Remarque 2.69. (i) On peut prolonger fonctoriellement les opérations Ker et Coker , de la façon suivante. Munissons l'ensemble $\{0, 1\}$ de la relation d'ordre telle que $0 < 1$, et soit $\mathcal{C}_{\{0,1\}}$ la catégorie associée à cet ensemble ordonné ; pour toute catégorie $\mathcal{B}$ on définit la *catégorie des morphismes de $\mathcal{B}$*

$$\text{Morph}(\mathcal{B}) := \text{Fun}(\mathcal{C}_{\{0,1\}}, \mathcal{B}).$$

Noter qu'un objet de $\text{Morph}(\mathcal{B})$ équivaut à une donnée (X_0, X_1, f) avec $X_0, X_1 \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ et $f \in \mathcal{B}(X_0, X_1)$; les morphismes $h_\bullet : (X_0, X_1, f) \rightarrow (Y_0, Y_1, g)$ de $\text{Morph}(\mathcal{B})$ sont les

diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f} & X_1 \\ h_0 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ Y_0 & \xrightarrow{g} & Y_1. \end{array}$$

Noter que $\mathcal{C}_{\{0,1\}}$ est une sous-catégorie de la catégorie Δ_1 de l'exemple 2.37(i); si $\mathcal{B}$ a un objet zéro, on a un foncteur évident :

$$\tau : \text{Morph}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Fun}(\Delta_1, \mathcal{B}) \quad (X_0 \xrightarrow{f} X_1) \mapsto (X_0 \xrightarrow[\underset{0}{\Rightarrow}]{f} X_1).$$

Or, si les noyaux de $\mathcal{B}$ sont représentables, le *foncteur noyau* est la composition

$$\text{Ker} : \text{Morph}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tau} \text{Fun}(\Delta_1, \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{Lim}_{\Delta_1}} \mathcal{B}.$$

De même, si les conoyaux de $\mathcal{B}$ sont représentables, on a le *foncteur conoyau*

$$\text{Coker} : \text{Morph}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tau} \text{Fun}(\Delta_1, \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{Colim}_{\Delta_1}} \mathcal{B}.$$

(ii) Si les noyaux et les conoyaux de $\mathcal{B}$ sont représentables, on peut bien sûr aussi prolonger fonctoriellement les opérations Im et Coim : on laisse les détails aux soins du lecteur. En particulier, la fonctorialité de Ker et Coker entraîne aisément la *naturalité* du morphisme canonique β_f : tout morphisme $h_\bullet$ de $\text{Morph}(\mathcal{B})$ comme dans (i) induit un diagramme commutatif d'images et coimages :

$$\begin{array}{ccc} \text{Coim}(f) & \xrightarrow{\beta_f} & \text{Im}(f) \\ \text{Coim}(h_\bullet) \downarrow & & \downarrow \text{Im}(h_\bullet) \\ \text{Coim}(g) & \xrightarrow{\beta_g} & \text{Im}(g) \end{array}$$

où $\text{Coim}(h_\bullet)$ (resp. $\text{Im}(h_\bullet)$) est l'unique morphisme de $\mathcal{B}$ tel que $\text{Coim}(h_\bullet) \circ \pi_{\iota_f} = \pi_{\iota_g} \circ h_0$ (resp. tel que $\iota_{\pi_g} \circ \text{Im}(h_\bullet) = h_1 \circ \iota_{\pi_f}$). Pour vérifier la commutativité du diagramme, il suffit de montrer que $\iota_{\pi_g} \circ \text{Im}(h_\bullet) \circ \beta_f \circ \pi_{\iota_f} = \iota_{\pi_g} \circ \beta_g \circ \text{Coim}(h_\bullet) \circ \pi_{\iota_f}$, car ι_{π_g} est un monomorphisme et π_{ι_f} est un épimorphisme. Mais on voit aussitôt que les deux côtés de cette identité sont respectivement $h_1 \circ f$ et $g \circ h_0$.

(iii) En dernier lieu, noter que les constructions Ker et Coker (resp. Im et Coim) sont duales, *i.e.* pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{B}$ on a :

$$\text{Ker}(f^{\text{op}}) = (\text{Coker } f)^{\text{op}} \quad \text{Im}(f^{\text{op}}) = (\text{Coim } f)^{\text{op}}$$

et en outre : $\iota_{f^{\text{op}}} = (\iota_f)^{\text{op}}$, $\pi_{f^{\text{op}}} = (\pi_f)^{\text{op}}$, et $\beta_{f^{\text{op}}} = (\beta_f)^{\text{op}}$: les vérifications détaillées sont laissées aux soins du lecteur.

Exercice 2.70. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec objet zéro, I et J deux petites catégories, $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, et $f : i \rightarrow i'$ un morphisme de I tel que $(F''j)(f) : F(i, j) \rightarrow F(i', j)$ soit le morphisme nul pour tout $j \in \text{Ob}(J)$ (où $F'' : J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est le foncteur déduit de F : voir le lemme 2.55). Supposons que $L : I \rightarrow \mathcal{C}$ représente $\lim_J F''$ (resp. $\text{colim}_J F''$). Montrer que $Lf = 0_{L i, L i'}$.

(ii) Dédurre de (i) que, dans la situation de la remarque 2.69(i), le foncteur Ker (resp. Coker) commute avec toute limite (resp. colimite) représentable de $\text{Morph}(\mathcal{B})$.

(iii) Soit A un anneau. Montrer que le foncteur $\text{Ker} : \text{Morph}(A - \text{Mod}) \rightarrow A - \text{Mod}$ commute avec toute colimite filtrante.

• Une dernière propriété importante de la catégorie $A - \text{Mod}$ qui est héritée par $\text{Fun}(I, A - \text{Mod})$ est la *structure de groupe abélien sur les ensembles des morphismes* : si $F, G : I \rightarrow A - \text{Mod}$ sont deux foncteurs, et si $\phi, \phi' : F \rightarrow G$ sont deux transformations naturelles, on vérifie aussitôt que l'association : $i \mapsto (\phi + \phi')_i := \phi_i + \phi'_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, définit une transformation naturelle $\phi + \phi' : F \rightarrow G$. On obtient ainsi une

structure naturelle de groupe abélien sur l'ensemble $\text{Nat}(F, G)$, et si $H : I \rightarrow A - \text{Mod}$ est un troisième foncteur, la loi de composition

$$\text{Nat}(F, G) \times \text{Nat}(G, H) \rightarrow \text{Nat}(F, H) \quad (\phi, \psi) \mapsto \psi \circ \phi$$

est évidemment bilinéaire. Ces considérations nous amènent à la définition suivante :

Définition 2.71. (i) Une *catégorie pré-additive* est la donnée d'une catégorie $\mathcal{A}$, et d'une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}(A, B)$, pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, soumise à la condition suivante. pour tous $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, la loi de composition

$$\mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) \rightarrow \mathcal{A}(A, C) \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

est une application bilinéaire.

(ii) On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre catégories pré-additives est *additif*, s'il induit des homomorphismes de groupes abéliens :

$$\mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(FA, FA') \quad f \mapsto Ff \quad \forall A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A}).$$

(iii) Pour $\mathcal{A}$ pré-additive et petite, et toute catégorie pré-additive $\mathcal{B}$ on notera

$$\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

la sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dont les objets sont les foncteurs additifs.

Remarque 2.72. (i) Si $\mathcal{A}$ est une catégorie pré-additive, les lois de groupe sur les ensembles $\mathcal{A}^{\text{op}}(B^{\text{op}}, A^{\text{op}}) = \mathcal{A}(A, B)$, pour tous $B^{\text{op}}, A^{\text{op}} \in \text{Ob}(\mathcal{A}^{\text{op}})$, munissent $\mathcal{A}^{\text{op}}$ d'une structure évidente de catégorie pré-additive, et si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif, évidemment il en est de même pour son dual $F^{\text{op}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$.

(ii) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive, et pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ notons par 0_{AB} l'élément neutre du groupe abélien $\mathcal{A}(A, B)$. Supposons que $\mathcal{A}$ admet un objet initial X ; évidemment on a alors $0_{XX} = \mathbf{1}_X$, et pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $f \in \mathcal{A}(A, X)$ il vient $f = \mathbf{1}_X \circ f = 0_{XX} \circ f = 0_{AX}$, par bilinéarité de la loi de composition de $\mathcal{A}$; i.e. X est un objet final. Dualelement, tout objet final de $\mathcal{A}$ est initial ; donc *tout objet initial et tout objet final de $\mathcal{A}$ sont un objet zéro*. En outre, il est clair que 0_{AB} est l'unique morphisme $A \rightarrow B$ qui se factorise à travers l'objet zéro de $\mathcal{A}$ (si $\mathcal{A}$ admet un tel objet), i.e. 0_{AB} est bien le morphisme nul défini précédemment pour toute catégorie ayant un objet zéro.

Proposition 2.73. (i) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive, et $A_1, A_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Le produit $A_1 \times A_2$ est représentable dans $\mathcal{A}$.

(b) Le coproduit $A_1 \sqcup A_2$ est représentable dans $\mathcal{A}$.

(c) Il existe $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et des morphismes $(A_i \xrightarrow{e_i} B \xrightarrow{p_j} A_j \mid i, j = 1, 2)$ avec :

$$p_i \circ e_i = \mathbf{1}_{A_i} \quad \forall i = 1, 2 \quad p_j \circ e_i = 0_{A_i A_j} \quad \text{pour } j \neq i \quad e_1 \circ p_1 + e_2 \circ p_2 = \mathbf{1}_B.$$

(ii) Si (c) est vérifiée, la donnée (e_1, e_2) est un co-cône universel, et la donnée (p_1, p_2) est un cône universel. Ainsi, B représente à la fois le produit et le coproduit de A_1 et A_2 . On dira que B est un biproduit de A_1 et A_2 , et on le notera :

$$A_1 \oplus A_2.$$

On appellera (e_1, e_2) et (p_1, p_2) les injections et projections canoniques de $A_1 \oplus A_2$.

Démonstration. (i) : Si (a) est vérifiée, notons par $(p_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i \mid i = 1, 2)$ les projections canoniques. Alors pour $i = 1, 2$ il existe un unique morphisme $e_i : A_i \rightarrow A_1 \times A_2$ de $\mathcal{A}$ tel que $p_i \circ e_i = \mathbf{1}_{A_i}$ et $p_j \circ e_i = 0_{A_i A_j}$ pour $j \neq i$. Noter que :

$$(*) \quad e_1 \circ p_1 + e_2 \circ p_2 = \mathbf{1}_{A_1 \times A_2}.$$

En effet, on a : $p_1 \circ (e_1 \circ p_1 + e_2 \circ p_2) = (p_1 \circ e_1 \circ p_1) + (p_1 \circ e_2 \circ p_2) = p_1 + 0_{A_2 A_1} \circ p_2 = p_1 = p_1 \circ \mathbf{1}_{A_1 \times A_2}$ et de même $p_2 \circ (e_1 \circ p_1 + e_2 \circ p_2) = p_2 \circ \mathbf{1}_{A_1 \times A_2}$, d'où l'assertion,

par l'universalité des projections canoniques. Il s'ensuit que $A_1 \times A_2$ représente aussi le coproduit $A_1 \sqcup A_2$, et le couple de morphismes $(e_i : A_i \rightarrow A_1 \times A_2 \mid i = 1, 2)$ est un co-cône universel. En effet, soient $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $(f_i : A_i \rightarrow X \mid i = 1, 2)$ un couple de morphismes, et posons $f := f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow X$; il vient aisément $f \circ e_i = f_i$ pour $i = 1, 2$, et f – en vertu de $(*)$ – est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ vérifiant ces identités. Cela montre que (a) $\Rightarrow$ (b),(c). Noter aussi que la condition (c) est auto-duale : avec $e'_i := p_i^{\text{op}}$ et $p'_i := e_i^{\text{op}}$ pour $i = 1, 2$, on a les identités $p'_i \circ e'_i = \mathbf{1}_{A_i^{\text{op}}}$ pour $i = 1, 2$, $p'_j \circ e'_i = 0_{A_i^{\text{op}} A_j^{\text{op}}}$ pour $j \neq i$, et $e'_1 \circ p'_1 + e'_2 \circ p'_2 = \mathbf{1}_{B^{\text{op}}}$ dans $\mathcal{A}^{\text{op}}$; au vu de la remarque 2.72(i), on déduit aussitôt que (b) $\Rightarrow$ (a),(c).

En dernier lieu, si (c) est vérifiée, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout couple de morphismes $(f_i : X \rightarrow A_i \mid i = 1, 2)$, posons $f := e_1 \circ f_1 + e_2 \circ f_2$; il vient aussitôt $p_i \circ f = f_i$ pour $i = 1, 2$, et on voit comme ci-dessus que f est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ vérifiant ces identités. Donc B représente $A_1 \times A_2$, avec cône universel (p_1, p_2) ; par dualité, on voit de même que B représente $A_1 \sqcup A_2$ avec co-cône universel (e_1, e_2) , et cela achève la preuve. $\square$

Remarque 2.74. (i) Avec la notation de la proposition 2.73, on voit aussitôt que $(A_1 \oplus A_2)^{\text{op}}$ représente le biproduit $A_1^{\text{op}} \oplus A_2^{\text{op}}$, avec les projections canoniques $(e_i^{\text{op}} \mid i = 1, 2)$, et les injections canoniques $(p_i^{\text{op}} \mid i = 1, 2)$.

(ii) Soient B_1, B_2 deux autres objets de $\mathcal{A}$ tels que $B_1 \oplus B_2$ soit représentable dans $\mathcal{A}$, et $(f_i : A_i \rightarrow B_i \mid i = 1, 2)$ un couple de morphismes de $\mathcal{A}$. Alors il existe un unique morphisme $f_1 \oplus f_2 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \oplus B_2$ tel que :

$$p_{B,i} \circ (f_1 \oplus f_2) \circ e_{A,i} = f_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{et} \quad p_{B,j} \circ (f_1 \oplus f_2) \circ e_{A,i} = 0_{A_i B_j} \quad \forall i \neq j$$

(on a désigné ici par $(e_{A,i}, p_{A,i} \mid i = 1, 2)$ et $(e_{B,i}, p_{B,i} \mid i = 1, 2)$ les injections et projections canoniques pour les biproduits respectifs).

Lemme 2.75. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive avec objet zéro $0_{\mathcal{A}}$, et $f : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}$. On a :

- (i) f est un monomorphisme $\Leftrightarrow \text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$.
- (ii) f est un épimorphisme $\Leftrightarrow \text{Coker } f = 0_{\mathcal{A}}$.
- (iii) $f = 0_{AB} \Leftrightarrow$ le co-cône universel $\pi_f : B \rightarrow \text{Coker}(f)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ le cône universel $\iota_f : \text{Ker}(f) \rightarrow A$ est un isomorphisme.
- (iv) Si en outre les noyaux et les conoyaux de $\mathcal{A}$ sont représentables, alors :
 - (a) f est un monomorphisme $\Leftrightarrow \pi_{\iota_f} : A \rightarrow \text{Coim}(f)$ est un isomorphisme.
 - (b) f est un épimorphisme $\Leftrightarrow \iota_{\pi_f} : \text{Im}(f) \rightarrow B$ est un isomorphisme.
 - (c) f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est strict et $\text{Ker } f = \text{Coker } f = 0_{\mathcal{A}}$.

Démonstration. (i) : La donnée d'un morphisme $X \rightarrow \text{Ker } f$ équivaut à celle d'un morphisme $g : X \rightarrow A$ tel que $f \circ g = 0_{XB} = f \circ 0_{XA}$, d'où $g = 0_{XA}$, si f est un monomorphisme; dans ce cas, on a ainsi $\mathcal{A}(X, \text{Ker } f) = \{0_{X, \text{Ker}(f)}\}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, d'où $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$. Réciproquement, si $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$, considérons deux morphismes $g, h : X \rightarrow A$ tels que $f \circ g = f \circ h$; alors $f \circ (g - h) = 0_{XB}$, et par suite il existe $l : X \rightarrow \text{Ker } f$ avec $\iota_f \circ l = g - h$. Mais $\iota_f \circ l = 0_{XA}$, d'où $g = h$, et cela montre que f est un monomorphisme.

(ii) : Cela découle de (i) par dualité, au vu de la remarque 2.72(i).

(iii) : La donnée d'un morphisme $\text{Coker } f \rightarrow X$ de $\mathcal{A}$ équivaut à celle de $g \in \mathcal{A}(B, X)$ tel que $g \circ f = 0_{AX}$. Mais si $f = 0_{AB}$, tout $g \in \mathcal{A}(B, X)$ vérifie cette identité; donc, $B = \text{Coker } f$, à isomorphisme près, et $\pi_f = \mathbf{1}_B$. Réciproquement, si π_f est un isomorphisme, $\mathbf{1}_B$ se factorise à travers π_f , et alors $f = \mathbf{1}_B \circ f = 0_{AX}$. Par dualité, on voit de même que $f = 0_{AB}$ si et seulement si ι_f est un isomorphisme.

(iv.a) (resp. (iv.b)) découle aussitôt de (i) et (iii) (resp. de (ii) et (iii)), et (iv.c) découle de (iv.a) et (iv.b). $\square$

Problème 2.76. (i) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories pré-additives, $0_{\mathcal{A}}$ un objet zéro pour $\mathcal{A}$, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur vérifiant l'une des conditions suivantes :

- (a) F est additif.
- (b) F commute avec les produits finis représentables de $\mathcal{A}$.
- (c) F commute avec les coproduits finis représentables de $\mathcal{A}$.

Montrer qu'alors $F0_{\mathcal{A}}$ est un objet zéro de $\mathcal{B}$, et que F commute avec les biproduits représentables de $\mathcal{A}$, i.e. avec les produits et les coproduits représentables.

(ii) Supposons en outre que tous les biproduits de $\mathcal{A}$ soient représentables, et que F vérifie la condition (b) (ou (c)) de (i). Montrer qu'alors F est additif. En particulier, sous cette hypothèse, la loi de groupe abélien sur $\mathcal{A}(A, B)$ est *intrinsèque*, i.e. elle est déterminée par la structure de la catégorie $\mathcal{A}$, pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

On va illustrer ces considérations par le théorème suivant, qui – conjoint avec l'exemple 1.128 – montre que l'on peut reconstruire (à isomorphisme près) un anneau à partir de la classe d'équivalence de sa catégorie de modules :

Théorème 2.77. *Soient A et B deux anneaux commutatifs. Alors A est isomorphe à B si et seulement si les catégories $A - \text{Mod}$ et $B - \text{Mod}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Si $f : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme d'anneaux, à tout B -module M on associe le A -module $M_{[f]}$ dont l'ensemble sous-jacent est M , et dont la multiplication $A \times M \rightarrow M$ est donnée par restriction des scalaires : $a \cdot m := f(a) \cdot m$. Evidemment, toute application B -linéaire $M \rightarrow M'$ induit une application A -linéaire $M_{[f]} \rightarrow M'_{[f]}$, donc on obtient ainsi un isomorphisme de catégories

$$(-)_{[f]} : B - \text{Mod} \xrightarrow{\sim} A - \text{Mod}.$$

Pour la réciproque, considérons d'abord plus généralement une petite catégorie $\mathcal{C}$ arbitraire, et soit $(E(\mathcal{C}), \circ)$ le monoïde commutatif associé à $\mathcal{C}$ comme dans l'exemple 1.128 ; soit aussi $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur qui admet un adjoint à gauche plein et fidèle $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, et $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \rightarrow F \circ G$, $\varepsilon : G \circ F \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ l'unité et la coïunité d'une adjonction pour le couple (G, F) , de sorte que η est un isomorphisme, en vertu de la proposition 2.16(iii). Compte tenu de la relation d'échange de l'exercice 1.129(iii), on voit aisément que l'application

$$\Phi : E(\mathcal{C}) \rightarrow E(\mathcal{C}') \quad \omega \mapsto \eta^{-1} \circ (F * \omega * G) \circ \eta$$

est un *morphisme de monoïdes*, i.e. $\Phi(\omega \circ \omega') = \Phi(\omega) \circ \Phi(\omega')$ pour tous $\omega, \omega' \in E(\mathcal{C})$. En particulier, les hypothèses sont remplies si F est une équivalence de catégories, car dans ce cas F admet un foncteur quasi-inverse $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ qui est à la fois une équivalence et un adjoint à gauche (et à droite) de F (voir la remarque 2.15(iii)).

Affirmation 2.78. Si F est une équivalence, Φ est un isomorphisme de monoïdes.

Preuve : Si F et G sont des équivalences, ε est un isomorphisme de foncteurs, encore par la proposition 2.16(iii), d'où aussi de manière analogue le morphisme de monoïdes

$$\Psi : E(\mathcal{C}') \rightarrow E(\mathcal{C}) \quad \tau \mapsto \varepsilon \circ (G * \tau * F) \circ \varepsilon^{-1}.$$

On va montrer plus précisément que $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{E(\mathcal{C})}$ et $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{E(\mathcal{C}')}$. En effet, pour tout $\omega \in E(\mathcal{C})$ on a

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\omega) &= \varepsilon \circ (G * \eta^{-1} * F) \circ (GF * \omega * GF) \circ (G * \eta * F) \circ \varepsilon^{-1} \\ &= \varepsilon \circ (GF * \varepsilon) \circ (GF * \omega * GF) \circ (GF * \varepsilon^{-1}) \circ \varepsilon^{-1} \\ &= \varepsilon \circ (GF * \mathbf{1}_{\mathcal{C}} * \varepsilon) \circ (GF * \omega * GF) \circ (GF * \mathbf{1}_{\mathcal{C}} * \varepsilon^{-1}) \circ \varepsilon^{-1} \\ &= \varepsilon \circ (GF * \omega * (\varepsilon \circ \varepsilon^{-1})) \circ \varepsilon^{-1} = \varepsilon \circ (GF * \omega) \circ \varepsilon^{-1} \\ &= (\varepsilon * \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \circ (GF * \omega) \circ (\varepsilon^{-1} * \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = (\varepsilon \circ \varepsilon^{-1}) * \omega = \omega \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle des identités triangulaires (problème 2.13(ii)), et les autres égalités suivent par plusieurs applications de la relation d'échange. La preuve de l'autre identité est analogue. $\diamond$

Soit maintenant $F : A - \mathbf{Mod} \rightarrow B - \mathbf{Mod}$ une équivalence, et choisissons un quasi-inverse $G : B - \mathbf{Mod} \rightarrow A - \mathbf{Mod}$ pour F , ainsi qu'une adjonction pour le couple (G, F) ; on construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une suite $(C_n \mid n \in \mathbb{N})$ de parties de $\mathbf{Ob}(A - \mathbf{Mod})$ comme suit. D'abord soit $C_0 := \{(GF)^k A \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la partie C_n a déjà été exhibée; on pose $C_{n+1} := C_n \cup \{(GF)^k(M \oplus N) \mid M, N \in C_n, k \in \mathbb{N}\}$. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $A - \mathbf{Mod}$ avec $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, et notons par $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}$ les sous-catégories pleines de $B - \mathbf{Mod}$ avec $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}') = \{FM \mid M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\}$ et $\mathbf{Ob}(\mathcal{D}) = \mathbf{Ob}(\mathcal{C}') \cup \{B\}$. Noter que l'inclusion $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence de catégories, car $\eta_B : B \rightarrow FGB$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'$. Evidemment $\mathcal{C}$ est une catégorie pré-additive avec objet zéro, et dont les biproduits sont représentables; F et G induisent par restriction des foncteurs $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, et les restrictions de η et ε sont l'unité et la coïté d'une adjonction pour le couple (G', F') . En outre F' est une équivalence, et G' est un foncteur quasi-inverse de F' ; par suite $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}$ sont de même pré-additives avec objet zéro et biproduits représentables, et $i \circ F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est également une équivalence : les détails sont laissés au lecteur.

Par ce qui précède, il vient un isomorphisme $\Phi : E(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} E(\mathcal{D})$ de monoïdes. Dans l'exemple 1.128(ii,iii) on a muni $E(\mathcal{C})$ d'une structure naturelle d'anneau, et on a exhibé un isomorphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\sim} E(\mathcal{C})$, et de même on a un isomorphisme d'anneaux $B \xrightarrow{\sim} E(\mathcal{D})$; compte tenu de l'observation 2.78, on est donc ramené à montrer que Φ est un homomorphisme d'anneaux, *i.e.* que $\Phi(\omega + \tau) = \Phi(\omega) + \Phi(\tau)$ pour tous $\omega, \tau \in E(\mathcal{C})$. Cela revient aux identités

$$F'(\omega_{GM} + \tau_{GM}) = F'(\omega_{GM}) + F'(\tau_{GM}) \quad \forall M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}).$$

Or, d'après la proposition 2.49, le foncteur F' est exact; pour conclure il suffit alors d'invoquer le problème 2.76(ii). $\square$

Remarque 2.79. Un des aspects les plus intéressants du théorème 2.77 est qu'il devient *faux* pour des anneaux non commutatifs. On obtient ainsi une relation d'équivalence $\sim$ non triviale sur l'ensemble des (classes d'isomorphisme des) anneaux associatifs et unitaires, en posant :

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad A - \mathbf{Mod} \text{ est équivalente à } B - \mathbf{Mod}.$$

L'étude de cette relation est l'objet de la *théorie de Morita* : voir, *e.g.* [63, Chap.9].

Le problème 2.76(ii) suggère la définition suivante :

Définition 2.80. (i) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{A}$ est *additive* si $\mathcal{A}$ est pré-additive, munie d'un objet zéro, et si tous les biproduits de $\mathcal{A}$ sont représentables.

(ii) On dit que $\mathcal{A}$ est *abélienne*, si $\mathcal{A}$ est additive, et si en outre :

- (a) tous les noyaux et tous les conoyaux sont représentables dans $\mathcal{A}$
- (b) tout morphisme de $\mathcal{A}$ est strict (voir la définition 2.68).

Remarque 2.81. (i) Les catégories abéliennes furent isolées et baptisées par Grothendieck dans son article fondateur [34], où il explique qu'elles fournissent un cadre adéquat pour le développement de l'algèbre homologique. Notamment, cette classe inclut les catégories des faisceaux abéliens que l'on rencontre lors de l'étude de la géométrie algébrique et différentielle; en même temps, les catégories abéliennes ressemblent à bien des égards aux catégories des modules sur les anneaux (qui en sont des cas spéciaux) : cela est précisé par le remarquable *théorème de Freyd-Mitchell* que l'on démontrera plus tard. Avec ce résultat, les méthodes et les calculs de l'algèbre linéaire peuvent être récupérés et généralisés pour une large mesure aux catégories abéliennes arbitraires.

(ii) Compte tenu de la remarque 2.69(iii), on voit aussitôt qu'une catégorie $\mathcal{A}$ est additive (resp. abélienne) si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{A}^{\text{op}}$.

(iii) En résumant la discussion ci-dessus, on voit que pour tout anneau associatif unitaire A , la catégorie $A - \mathbf{Mod}$ est abélienne, et si $\mathcal{A}$ est une catégorie pré-additive

(resp. additive, resp. abélienne), il en est de même pour $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$ pour toute petite catégorie I , avec la loi d'addition sur $\text{Nat}(F, G)$ telle que $(\eta + \tau)_i := \eta_i + \tau_i$ pour tout couple de foncteurs $F, G : I \rightarrow \mathcal{A}$, tout $\eta, \tau \in \text{Nat}(F, G)$, et tout $i \in \text{Ob}(I)$.

(iv) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive, et $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; par définition, l'ensemble $\mathbf{h}_{A^{\text{op}}}(B) = \mathcal{A}(B, A)$ est muni d'une structure de groupe abélien, et évidemment les associations : $B \mapsto \mathbf{h}_{A^{\text{op}}}(B)$ pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $(f : B \rightarrow B') \mapsto (\mathbf{h}_{A^{\text{op}}}(f) : \mathbf{h}_{A^{\text{op}}}(B') \rightarrow \mathbf{h}_{A^{\text{op}}}(B))$ pour tout morphisme f de $\mathcal{A}$ définissent un foncteur additif à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens que l'on notera :

$$\mathbf{h}_A^\dagger : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}.$$

Le foncteur $\mathbf{h}_{A^{\text{op}}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ de la section 2.1 est donc la composition de $\mathbf{h}_A^\dagger$ avec le foncteur d'oubli $\mathbb{Z} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$. De même, la transformation naturelle $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{A^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{h}_{A'^{\text{op}}}$ associée, comme dans l'exemple 2.2(i), à tout morphisme $f : A \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$, est en fait une transformation naturelle $\mathbf{h}_f^\dagger : \mathbf{h}_A^\dagger \rightarrow \mathbf{h}_{A'}^\dagger$. Si $\mathcal{A}$ est petite, on a ainsi un foncteur :

$$\mathbf{h}^{\mathcal{A}^\dagger} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathbb{Z} - \text{Mod}) \quad A \mapsto \mathbf{h}_A^\dagger \quad (A \xrightarrow{f} A') \mapsto \mathbf{h}_f^\dagger$$

qui est plein et fidèle, compte tenu du lemme 2.82(iv) suivant :

Lemme 2.82. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories pré-additives, I une catégorie quelconque, et supposons que $\mathcal{A}$ soit petite. Alors on a :*

- (i) *La catégorie $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est pré-additive.*
- (ii) *Si $\mathcal{B}$ est I -complète (resp. I -cocomplète), il en est de même pour $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*
- (iii) *Si $\mathcal{B}$ est additive (resp. abélienne), il en est de même pour $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*
- (iv) (Lemme de Yoneda additif) *Pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ et tout foncteur additif $F : \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens :*

$$FB \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(\mathbf{h}_B^\dagger, F).$$

Démonstration. (i) : L'assertion est claire, car la structure de catégorie pré-additive sur $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est héritée de celle de $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (voir la remarque 2.81(iii)).

(ii) Soient $F : I \rightarrow \text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un foncteur, et $j : \text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ le foncteur d'inclusion; donc, F associe à tout $i \in \text{Ob}(I)$ un foncteur additif $F_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est I -complète, d'après le lemme 2.55(ii) la limite de $j \circ F$ est représentable par un foncteur $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, et au vu du lemme 2.52(i), il suffit de vérifier que L est additif. Soient alors $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $f, g \in \mathcal{A}(A, A')$; soit aussi $(p_i : L \rightarrow F_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel. Rappelons que les limites de $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ se calculent terme à terme (remarque 2.56), donc les cônes $(p_{i,A} : LA \rightarrow F_i A \mid i \in \text{Ob}(I))$ et $(p_{i,A'} : LA' \rightarrow F_i A' \mid i \in \text{Ob}(I))$ sont universels. Or, par définition $Lf : LA \rightarrow LA'$ est l'unique morphisme tel que

$$p_{i,A'} \circ Lf = F_i f \circ p_{i,A} \quad \forall i \in \text{Ob}(I)$$

et de même pour Lg et $L(f + g)$; mais comme chaque F_i est additif, il vient

$$\begin{aligned} p_{i,A'} \circ (Lf + Lg) &= p_{i,A'} \circ Lf + p_{i,A'} \circ Lg = F_i f \circ p_{i,A} + F_i g \circ p_{i,A} \\ &= (F_i f + F_i g) \circ p_{i,A} = F_i(f + g) \circ p_{i,A}. \end{aligned}$$

Par suite $Lf + Lg = L(f + g)$, d'où l'assertion. On montre de même que si $\mathcal{B}$ est I -cocomplète, il en est de même pour $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(iii) Avec (ii) on voit aussitôt que si $\mathcal{B}$ est additive, il en est de même pour $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. En particulier, si $0_{\mathcal{B}}$ est un objet zéro de $\mathcal{B}$, le foncteur constant $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de valeur $0_{\mathcal{B}}$ est trivialement additif, et fournit un objet zéro pour $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; comme – d'après la preuve de (ii) – les limites et les colimites de $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ se calculent terme à terme, il s'ensuit aussitôt qu'il en est de même pour les noyaux et les conoyaux de $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Par suite, si les noyaux de $\mathcal{B}$ sont représentables, il en est de même pour ceux de $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; plus précisément, si $\eta : F \rightarrow G$ est une transformation naturelle entre foncteurs additifs $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, alors le noyau $K := \text{Ker}(\eta)$ de η dans $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ représente le noyau de

η aussi dans $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, et le cône universel $K \rightarrow F$ dans $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est aussi universel dans $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. De même, le conoyau de η dans $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ représente aussi le conoyau de η dans $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, avec même co-cône universel. En particulier, si tous les morphismes de $\mathcal{B}$ sont stricts, il en est de même pour les morphismes de $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, d'où (iii).

(iv) Soit $F' : \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ la composition de F avec le foncteur d'oubli $\mathbb{Z} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$; le lemme de Yoneda (proposition 2.1(ii)) fournit une bijection naturelle $\omega : F'B \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(h_{B^{\text{op}}}, F')$, et noter que $\text{Nat}(h_B^\dagger, F) \subset \text{Nat}(h_{B^{\text{op}}}, F')$ est le sous-groupe des transformations naturelles $\eta : h_{B^{\text{op}}} \rightarrow F'$ telles que η_X est un homomorphisme de groupes pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. On est ainsi ramené à vérifier que :

- ω est un homomorphisme de groupes
- $\omega_{b,X} : \mathcal{B}(X, B) \rightarrow FX$ est un homomorphisme de groupes, pour tout $b \in FB$ et tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.

Or, $\omega_{b,X}(g) = F(g)(b)$ pour tout $g \in \mathcal{B}(X, B)$, et F est additif, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 2.83. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive, I une petite catégorie, $F : I \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur, $\tau_\bullet := (L \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône de sommet $L \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et base F ; avec les exemples 2.22(iv) et 2.39(i), on voit que $\tau_\bullet$ est universel $\Leftrightarrow h_A^\dagger * \tau_\bullet$ est universel pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. En particulier, si $\mathcal{A}$ est finiment complète, $h_A^\dagger$ est exact à gauche, et si $\mathcal{A}$ est complète, $h_A^\dagger$ commute avec les petites limites.

Exercice 2.84. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ens}$ qui commute avec les produits finis de $\mathcal{A}$ (voir l'exercice 2.42). Montrer que F est la composition du foncteur d'oubli $\mathbb{Z} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ avec un unique foncteur additif $F^\dagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$.

2.4.1. D'après le problème 2.76(ii), la loi de groupe sur les morphismes d'une catégorie additive est intrinsèque; ainsi, la question se pose, de donner une caractérisation purement catégorique des catégories additives. Pour cela, considérons une catégorie $\mathcal{A}$ avec objet zéro $0_{\mathcal{A}}$, et dont les produits finis sont représentables; pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ notons par $(p_{A,i} : A \times A \rightarrow A \mid i = 1, 2)$ les projections canoniques, par $0_A : A \rightarrow A$ le morphisme nul, et pour $i = 1, 2$ soit $e_{A,i} : A \rightarrow A \times A$ l'unique morphisme tel que $p_{A,i} \circ e_{A,i} = \mathbf{1}_{A_i}$ et $p_{A,j} \circ e_{A,i} = 0_{A_i A_j}$ si $j \neq i$. On a :

Proposition 2.85. Dans la situation du §2.4.1, la catégorie $\mathcal{A}$ est additive si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$:

- (a) le conoyau de la diagonale $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$ est représentable dans $\mathcal{A}$
- (b) la composition $r_A : A \xrightarrow{e_{A,1}} A \times A \xrightarrow{\pi_A} \text{Coker}(\Delta_A)$ est un isomorphisme.

(Ici, π_A est le co-cône universel pour le conoyau de Δ_A .)

Démonstration. Si $\mathcal{A}$ est additive, les conditions (a) et (b) découlent de l'observation plus précise suivante :

Affirmation 2.86. $A = \text{Coker}(\Delta_A)$ et $\pi_A = p_{A,1} - p_{A,2}$.

Preuve : On a $\Delta_A \circ p_i = \mathbf{1}_A = (e_{A,1} + e_{A,2}) \circ p_i$ pour $i = 1, 2$, d'où $\Delta_A = e_{A,1} + e_{A,2}$. Ainsi, $(p_{A,1} - p_{A,2}) \circ \Delta_A = (p_{A,1} - p_{A,2}) \circ (e_{A,1} + e_{A,2}) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A = 0_A$. Ensuite, soient $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $f : A \oplus A \rightarrow B$ un morphisme tel que $f \circ \Delta_A = 0_{AB}$; posons $g := f \circ e_{A,1} : A \rightarrow B$. Au vu des identités de la proposition 2.73(i.c), il vient :

$$\begin{aligned} g \circ (p_{A,1} - p_{A,2}) &= f \circ e_{A,1} \circ p_{A,1} - f \circ e_{A,1} \circ p_{A,2} \\ &= f \circ (\mathbf{1}_{A \oplus A} - e_{A,2} \circ p_{A,2}) - f \circ e_{A,1} \circ p_{A,2} \\ &= f - f \circ (e_{A,2} + e_{A,1}) \circ p_{A,2} \\ &= f - f \circ \Delta_A \circ p_{A,2} = f. \end{aligned}$$

D'autre part, $p_{A,1} - p_{A,2}$ est un épimorphisme, car $(p_{A,1} - p_{A,2}) \circ e_{A,1} = \mathbf{1}_A$ (exercice 1.119(i)), donc g est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $g \circ (p_1 - p_2) = f$, d'où l'assertion.

$\diamond$

Réciproquement, soient (a) et (b) vérifiées pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Pour tout $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $f, g \in \mathcal{A}(B, A)$, notons par $(f, g) : B \rightarrow A \times A$ l'unique morphisme tel que $p_1 \circ (f, g) = f$ et $p_2 \circ (f, g) = g$. On pose

$$\delta_A := r_A^{-1} \circ \pi_A : A \times A \rightarrow A \quad \text{et} \quad f - g := \delta_A \circ (f, g) : B \rightarrow A.$$

Affirmation 2.87. Pour tout $f \in \mathcal{A}(B, A)$ on a $\delta_A \circ (f \times f) = f \circ \delta_B$.

Preuve : On voit aisément que $(f \times f) \circ \Delta_B = \Delta_A \circ f$, donc il existe un unique morphisme $h : \text{Coker}(\Delta_B) \rightarrow \text{Coker}(\Delta_A)$ tel que :

$$(*) \quad h \circ \pi_B = \pi_A \circ (f \times f)$$

et il reste à vérifier que $h \circ r_B = r_A \circ f$. Au vu de (*), pour cela il suffit de montrer que $(f \times f) \circ e_{B,1} = e_{A,1} \circ f$. Mais, par définition on a $p_{A,i} \circ (f \times f) = f \circ p_{B,i}$ pour $i = 1, 2$; on donc ramené à vérifier que $f \circ p_{B,i} \circ e_{B,1} = p_{A,i} \circ e_{A,1} \circ f$ pour $i = 1, 2$. Ces identités suivent aussitôt des définitions. $\diamond$

Or, soient $A, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}(C, A)$. Montrons que l'on a :

$$(**) \quad (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \quad \text{dans } \mathcal{A}(C, A \times A).$$

Pour cela, il suffit de montrer que les deux côtés de (**) coïncident après composition avec $p_{A,i} : A \times A \rightarrow A$, pour $i = 1, 2$. On applique l'observation 2.87 avec $B = A \times A$ et $f = p_{A,i}$; il vient :

$$\begin{aligned} p_{A,i} \circ ((a_1, a_2) - (b_1, b_2)) &= p_{A,i} \circ \delta_{A \times A} \circ ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \\ &= \delta_A \circ (p_{A,i} \times p_{A,i}) \circ ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \\ &= \delta_A \circ (a_i, b_i) \\ &= a_i - b_i \end{aligned}$$

d'où l'identité souhaitée. Ensuite, montrons que l'on a :

$$(***) \quad (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) \quad \text{dans } \mathcal{A}(C, A).$$

Pour cela, on applique l'observation 2.87 avec $B = A \times A$ et $f = \delta_A$. Il vient :

$$\delta_A \circ \delta_{A \times A} \circ ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \delta_A \circ (\delta_A \times \delta_A) \circ ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$$

et compte tenu de (**), on voit que le côté gauche de cette dernière identité est

$$\delta_A \circ (a_1 - b_1, a_2 - b_2) = (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2)$$

alors que le côté droit coïncide avec $(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)$. En outre, comme $\delta_A \circ e_{A,1} = \mathbf{1}_A$ et $\delta_A \circ \Delta_A = 0_A$, on a :

$$a - 0_{CA} = a \quad \text{et} \quad a - a = 0_{CA} \quad \forall a \in \mathcal{A}(C, A).$$

Posons alors $a + b := a - (0_{CA} - b)$ pour tous $a, b \in \mathcal{A}(C, A)$. On a :

Affirmation 2.88. (i) $a = 0_{CA} + a = a + 0_{CA}$ pour tout $a \in \mathcal{A}(C, A)$.

(ii) $a + (0_{CA} - a) = 0_{CA}$ pour tout $a \in \mathcal{A}(C, A)$.

(iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tous $a, b, c \in \mathcal{A}(C, A)$.

(iv) $a + b = b + a$ pour tous $a, b \in \mathcal{A}(C, A)$.

Preuve : (i) : Avec (***) on calcule : $0_{CA} + a = 0_{CA} - (0_{CA} - a) = (a - a) - (0_{CA} - a) = (a - 0_{CA}) - (a - a) = a - 0_{CA} = a$, et : $a + 0_{CA} = a - (0_{CA} - 0_{CA}) = a - 0_{CA} = a$.

(ii) : $a + (0_{CA} - a) = a - (0_{CA} - (0_{CA} - a)) = a - (0_{CA} + a) = a - a = 0_{CA}$.

(iii) : D'un côté : $(a + b) + c = (a - (0_{CA} - b)) - (0_{CA} - c) = (a - 0_{CA}) - ((0_{CA} - b) - c) = a - ((0_{CA} - b) - c)$ et de l'autre côté $a + (b + c) = a - (0_{CA} - (b - (0_{CA} - c)))$, donc on est ramené à vérifier l'identité : $(0_{CA} - b) - c = 0_{CA} - (b - (0_{CA} - c))$. Mais on a : $0_{CA} - (b - (0_{CA} - c)) = (0_{CA} - 0_{CA}) - (b - (0_{CA} - c)) = (0_{CA} - b) - (0_{CA} - (0_{CA} - c))$, donc il suffit de montrer que $c = 0_{CA} - (0_{CA} - c)$, et cela découle de (i).

(iv) : On a : $a + b = a - (0_{CA} - b) = a - ((a - a) - (b - 0_{CA})) = a - ((a - b) - (a - 0_{CA})) = (a - 0_{CA}) - ((a - b) - a) = (a - (a - b)) - (0_{CA} - a) = (a - (a - b)) + a$, donc il suffit de

montrer que $a - (a - b) = b$. Mais on $a - (a - b) = (a - 0_{CA}) - (a - b) = (a - a) - (0_{CA} - b) = 0_{CA} - (0_{CA} - b)$, donc l'assertion suit de (i). $\diamond$

Cela achève de vérifier que $(\mathcal{A}(C, A), +, 0_{CA})$ est un groupe abélien pour tous $A, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Or, pour tout morphisme $g : C' \rightarrow C$ de $\mathcal{A}$ et tout $a, b \in \mathcal{A}(C, A)$, on a évidemment $(a - b) \circ g = a \circ g - b \circ g$. En dernier lieu, soit $d : A \rightarrow A'$ un morphisme de $\mathcal{A}$; on applique l'observation 2.87 avec $f := d$, pour calculer :

$$d \circ (a - b) = d \circ \delta_A \circ (a, b) = \delta_{A'} \circ (d \times d) \circ (a, b) = \delta_{A'} \circ (d \circ a, d \circ b) = d \circ a - d \circ b$$

pour tous $a, b \in \mathcal{A}(C, A)$. Ainsi, la loi de composition de $\mathcal{A}$ est bilinéaire par rapport aux lois de groupe abélien sur les morphismes, et cela conclut la preuve. $\square$

Dans le même esprit, on a la caractérisation suivante des catégories abéliennes :

Théorème 2.89. (i) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie avec objet zéro $0_{\mathcal{A}}$. Alors $\mathcal{A}$ est abélienne si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Les produits finis et les coproduits finis sont représentables dans $\mathcal{A}$.
 - (b) Le noyau et le conoyau de tout morphisme est représentable dans $\mathcal{A}$.
 - (c) Tout monomorphisme de $\mathcal{A}$ est le noyau d'un morphisme.
 - (d) Tout épimorphisme de $\mathcal{A}$ est le conoyau d'un morphisme.
- (ii) Toute catégorie abélienne est finiment complète et finiment cocomplète.

Démonstration. (i) : La condition (c) (resp. (d)) revient à dire que pour tout monomorphisme (resp. épimorphisme) $f : A \rightarrow B$ il existe $g \in \mathcal{A}(B, C)$ (resp. $h \in \mathcal{A}(C, A)$) et un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(g)$ (resp. $\psi : \text{Coker}(h) \xrightarrow{\sim} B$) avec :

$$\iota_g \circ \phi = f \quad (\text{resp. } \psi \circ \pi_h = f)$$

où $\iota_g : \text{Ker}(g) \rightarrow B$ (resp. $\pi_h : A \rightarrow \text{Coker}(h)$) désigne comme d'habitude le cône (resp. co-cône) universel pour le noyau de g (resp. pour le conoyau de h).

Si $\mathcal{A}$ est abélienne, on doit vérifier les conditions (c) et (d). Soit donc f un monomorphisme; d'après le lemme 2.75(iv.a), $\pi_{\iota_f} : A \rightarrow \text{Coker}(\iota_f)$ est un isomorphisme, et de même pour le morphisme $\beta_f : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$, donc f est la composition de $\iota_{\pi_f} : \text{Im}(f) \rightarrow B$ et de l'isomorphisme $\beta_f \circ \pi_{\iota_f} : A \rightarrow \text{Im}(f)$, d'où (c). Le raisonnement dual prouve (d).

Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ vérifie les conditions (a)–(d); on remarque :

Affirmation 2.90. (i) Un morphisme de $\mathcal{A}$ est un isomorphisme si et seulement s'il est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

(ii) Pour tout couple $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ de monomorphismes de $\mathcal{A}$, le produit fibré $A \times_{(f,g)} C$ est représentable dans $\mathcal{A}$.

Preuve : (i) : On peut supposer que $f : A \rightarrow B$ soit un monomorphisme et un épimorphisme, et on montre qu'il est un isomorphisme. Par (c) on peut supposer que $A = \text{Ker}(g)$ et $f = \iota_g : A \rightarrow B$ pour un morphisme $g : B \rightarrow C$ de $\mathcal{A}$; puisque $g \circ f = 0_{AC} = 0_{BC} \circ f$, il vient $g = 0_{BC}$, car f est un épimorphisme. On conclut alors comme dans la preuve du lemme 2.75(iii)

(ii) : Par (c), on peut supposer que $A = \text{Ker}(h)$ et $C = \text{Ker}(k)$ pour deux morphismes $h : B \rightarrow D$ et $k : B \rightarrow E$ de $\mathcal{A}$, et en outre, que $f = \iota_h$ et $g = \iota_k$; d'après (a), on peut considérer l'unique morphisme $(h, k) : B \rightarrow D \times E$ dont la composition avec les projections $D \xleftarrow{p_D} D \times E \xrightarrow{p_E} E$ coïncide respectivement avec h et avec k . Posons $K := \text{Ker}(g, h)$; puisque $h \circ \iota_{(h,k)} = p_D \circ (h, k) \circ \iota_{(h,k)} = 0_{KD}$, il existe un unique morphisme $u : K \rightarrow A$ tel que $f \circ u = \iota_{(h,k)}$, et de même, il existe un unique morphisme $v : K \rightarrow C$ tel que $g \circ v = \iota_{(h,k)}$. On va montrer que K représente le produit fibré $A \times_B C$, avec projections canoniques u et v . Pour cela, soient $A \xleftarrow{u'} X \xrightarrow{v'} C$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ avec $w := f \circ u' = g \circ v'$; il vient

$$p_D \circ (h, k) \circ w = h \circ f \circ u' = 0_{XD} = p_D \circ 0_{X, D \times E}$$

et de même, $p_E \circ (h, k) \circ w = p_E \circ 0_{X, D \times E}$, d'où $(h, k) \circ w = 0_{X, D \times E}$, et par suite il existe un unique morphisme $w' : X \rightarrow K$ avec $w = \iota_{(h, k)} \circ w'$. Ainsi, $f \circ u \circ w' = \iota_{(h, k)} \circ w' = f \circ u'$, donc $u \circ w' = u'$, car f est un monomorphisme ; de même, $v \circ w' = v'$, d'où l'assertion. $\diamond$

Avec l'observation 2.90(ii) et l'exercice 2.41, on déduit que $\mathcal{A}$ est finiment complète ; noter aussi que les conditions (a)–(d) sont *auto-duales*, i.e. $\mathcal{A}$ vérifie ces conditions $\Leftrightarrow$ il en est de même pour $\mathcal{A}^{\text{op}}$, donc $\mathcal{A}$ est aussi finiment cocomplète.

Affirmation 2.91. (i) Tout épimorphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est strict, et induit un isomorphisme $\iota_{\pi_f} : \text{Im}(f) \xrightarrow{\sim} B$.

(ii) Un morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est un monomorphisme $\Leftrightarrow \text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$.

Preuve : (i) : En raisonnant comme dans la preuve du 2.75(iv.b) on voit que ι_{π_f} est un isomorphisme. Ensuite, d'après (d) il existe un morphisme $g : C \rightarrow A$ qui identifie B avec $\text{Coker}(g)$, et f avec $\pi_g : A \rightarrow \text{Coker}(g)$; en particulier, $f \circ g = 0_{CB}$, donc il existe un unique morphisme $h : C \rightarrow \text{Ker}(f)$ avec $g = \iota_f \circ h$. Par suite, $\pi_{\iota_f} \circ g : C \rightarrow \text{Coim}(f)$ est le morphisme nul, donc il existe un unique morphisme $k : B \rightarrow \text{Coim}(f)$ tel que $k \circ f = \pi_{\iota_f}$. Il vient

$$\iota_{\pi_f} \circ \beta_f \circ k \circ f = \iota_{\pi_f} \circ \beta_f \circ \pi_{\iota_f} = f \quad \text{et} \quad k \circ \iota_{\pi_f} \circ \beta_f \circ \pi_{\iota_f} = k \circ f = \pi_{\iota_f}$$

d'où $\iota_{\pi_f} \circ \beta_f \circ k = \mathbf{1}_B$ et $k \circ \iota_{\pi_f} \circ \beta_f = \mathbf{1}_{\text{Coim}(f)}$, car f et π_{ι_f} sont des épimorphismes. On sait déjà que ι_{π_f} est un isomorphisme, donc il en est de même pour β_f .

(ii) : Si f est un monomorphisme, on voit que $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$ comme dans la preuve du lemme 2.75(i). Réciproquement, si $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$, soient $g, h : X \rightarrow A$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ avec $f \circ g = f \circ h$; on sait déjà que le coégaliseur de g et h est représentable dans $\mathcal{A}$ par un objet C , et soit $q : A \rightarrow C$ le co-cône universel. Il existe ainsi un unique morphisme $u : C \rightarrow B$ tel que $u \circ q = f$. Rappelons que q est un épimorphisme (exercice 2.7(i)) ; d'après (d), on peut alors supposer que $C = \text{Coker}(k)$ pour un morphisme $k : D \rightarrow A$ de $\mathcal{A}$, et que $q = \pi_k$. Par suite, $f \circ k = u \circ \pi_k \circ k = 0_{DB}$, et donc k se factorise à travers $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$; ainsi, $k = 0_{DA}$, et en raisonnant comme dans la preuve du lemme 2.75(iii) on déduit que q est un isomorphisme, d'où $g = h$. Cela achève de montrer que f est un monomorphisme. $\diamond$

Montrons ensuite que tout morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est strict ; par l'observation 2.90(i), on doit vérifier que $b := \beta_f : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(f) & \xrightarrow{\iota_f} & A & \xrightarrow{\pi_{\iota_f}} & \text{Coim}(f) & \xrightarrow{b} & \text{Im}(f) \xrightarrow{\iota_{\pi_f}} B \\ & & \parallel & & \pi_{\iota_b} \downarrow & & \uparrow \iota_{\pi_b} \\ \text{Ker}(\gamma) & \xrightarrow{\iota_\gamma} & A & \xrightarrow{\gamma} & \text{Coim}(b) & \xrightarrow{\beta_b} & \text{Im}(b) \end{array}$$

avec $\gamma := \pi_{\iota_b} \circ \pi_{\iota_f}$. Puisque $\gamma \circ \iota_f$ est le morphisme nul, il existe un unique morphisme $u : \text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(\gamma)$ tel que $\iota_\gamma \circ u = \iota_f$. De même, puisque $\iota_{\pi_f} \circ \pi_{\iota_b} \circ \beta_b \circ \gamma = f$, la composition $f \circ \iota_\gamma$ est le morphisme nul, donc il existe un unique morphisme $v : \text{Ker}(\gamma) \rightarrow \text{Ker}(f)$ avec $\iota_f \circ v = \iota_\gamma$. Il vient $\iota_f \circ v \circ u = \iota_f$ et $\iota_\gamma \circ u \circ v = \iota_\gamma$, d'où $v \circ u = \mathbf{1}_{\text{Ker}(f)}$ et $u \circ v = \mathbf{1}_{\text{Ker}(\gamma)}$, car ι_f et ι_γ sont des monomorphismes ; ainsi le morphisme $\text{Coim}(u, \mathbf{1}_A) : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Coim}(\gamma)$ est un isomorphisme (notation de la remarque 2.69(ii)). Noter aussi que π_{ι_f} et π_{ι_b} sont des épimorphismes, donc de même pour γ ; d'après l'observation 2.91(i), γ est alors la composition de $\pi_{\iota_\gamma} : A \rightarrow \text{Coim}(\gamma)$ et d'un isomorphisme $\lambda : \text{Coim}(\gamma) \xrightarrow{\sim} \text{Coim}(b)$. On voit aisément que $\pi_{\iota_b} = \lambda \circ \text{Coim}(u, \mathbf{1}_A)$, donc π_{ι_b} est un isomorphisme, par suite $\text{Ker}(b) = 0_{\mathcal{A}}$, et finalement b est un monomorphisme (observation 2.91(ii)). Compte tenu de la remarque 2.69(iii), on déduit que b est aussi un épimorphisme, comme souhaité.

Il reste à vérifier que $\mathcal{A}$ est pré-additive, et pour cela on applique le critère de la proposition 2.85 : pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, reprenons donc la notation du §2.4.1, et montrons d'abord que $A = \text{Ker}(p_{A,2} : A \times A \rightarrow A)$ et $\iota_{p_{A,2}} = e_{A,1} : A \rightarrow A \times A$. En effet, la

donnée d'un morphisme $f : X \rightarrow A \times A$ équivaut à celle d'un couple de morphismes $f_1, f_2 : X \rightarrow A$, et on a $p_{A,2} \circ f = 0_{AX} \Leftrightarrow f_2 = 0_{AX}$, et dans ce cas $f = e_{A,1} \circ f_1$, d'où l'assertion. Puisque $p_{A,2}$ est un épimorphisme strict, avec l'observation 2.91(i) on identifie $\text{Coker}(e_{A,1})$ avec A , et $p_{A,2}$ avec le co-cône universel $A \times A \rightarrow \text{Coker}(e_{A,1})$ pour le conoyau de $e_{A,1}$. De même, soient $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$ la diagonale, et $\pi_A : A \times A \rightarrow \text{Coker}(\Delta_A)$ le co-cône universel pour le conoyau de Δ_A ; puisque Δ_A est un monomorphisme strict, le dual de l'observation 2.91(i) entraîne une identification de A avec $\text{Ker}(\pi_A)$, et de Δ_A avec le cône universel $\text{Ker}(\Delta_A) \rightarrow A \times A$ pour le noyau de π_A . Avec cette notation on doit vérifier :

Affirmation 2.92. $r_A := \pi_A \circ e_{A,1} : A \rightarrow \text{Coker}(\Delta_A)$ est un isomorphisme.

Preuve : Remarquons d'abord que $B := A \times_{(\Delta_A, e_{A,1})} A = 0_{\mathcal{A}}$. En effet, la donnée d'un morphisme $h : X \rightarrow B$ équivaut à celle d'un couple $A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} A$ de morphismes tels que $\Delta_A \circ f = e_{A,1} \circ g$; par suite, $f = p_{A,2} \circ \Delta_A \circ f = p_{A,2} \circ e_{A,1} \circ g = 0_{XA}$, et $f = p_{A,1} \circ \Delta_A \circ f = p_{A,1} \circ e_{A,1} \circ g = g$. Ainsi $h = 0_{XB}$, d'où l'assertion.

Or, soit $u : X \rightarrow A$ un morphisme tel que $r_A \circ u : X \rightarrow \text{Coker}(\Delta)$ soit le morphisme nul, et posons $v := e_{A,1} \circ u$; alors $\pi_A \circ v$ est le morphisme nul, et par ce qui précède, il existe alors un unique morphisme $w : X \rightarrow A$ avec $\Delta_A \circ w = v$. Le couple (u, w) équivaut à la donnée d'un morphisme $X \rightarrow A \times_{(\Delta_A, e_{A,1})} A = 0_{\mathcal{A}}$, donc $u = 0_{XA}$. Cela montre que $\text{Ker}(r_A) = 0_{\mathcal{A}}$, et donc r_A est un monomorphisme (observation 2.91(ii)). Ensuite, soit $u' : \text{Coker}(\Delta_A) \rightarrow X$ un morphisme tel que $u' \circ r_A$ soit le morphisme nul, et posons $v' := u' \circ \pi_A$; alors $v' \circ e_{A,1}$ est le morphisme nul, et par ce qui précède, il existe alors un unique morphisme $w' : A \rightarrow X$ avec $w' \circ p_{A,2} = v'$. Par suite, $w' = w' \circ p_{A,2} \circ \Delta_A = v' \circ \Delta_A = 0_{AX}$, d'où $v' = 0_{A \times A, X}$, et comme π_A est un épimorphisme, on déduit que u' est le morphisme nul. Cela montre que $\text{Coker}(r_A) = 0_{\mathcal{A}}$, et donc r_A est un épimorphisme, par le dual de l'observation 2.91(ii). On conclut alors avec l'observation 2.90. $\diamond$

(ii) : L'assertion a déjà été montrée lors de la preuve de (i). $\square$

Remarque 2.93. (i) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{A}$. Alors f est strict, $\pi_{\iota_f} : X \rightarrow \text{Coim}(f)$ est un épimorphisme, et $\iota_{\pi_f} : \text{Im}(f) \rightarrow Y$ un monomorphisme. Ainsi, f est la composition d'un épimorphisme p suivi d'un monomorphisme i ; on dit que (p, i) est une *factorisation épi-mono* de f .

(ii) Si f est un épimorphisme, alors ι_{π_f} est un isomorphisme (lemme 2.75(iv.b)); par suite $\iota_{\pi_f} \circ \beta_f$ identifie Y avec le conoyau de $\iota_f : \text{Ker}(f) \rightarrow X$. Duallement, si f est un monomorphisme, $\beta_f \circ \pi_{\iota_f}$ identifie X avec le noyau de $\pi_f : Y \rightarrow \text{Coker}(f)$. Le conoyau d'un monomorphisme $S \rightarrow X$ sera parfois désigné aussi par X/S , si la notation n'est pas ambiguë; en particulier :

$$\text{Coim}(f) = X/\text{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \text{Coker}(f) = Y/\text{Im}(f) \quad \forall f \in \mathcal{A}(X, Y).$$

En outre, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on obtient une bijection naturelle :

$$\boxed{\text{Sub}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Quot}(X) \quad S \mapsto X/S.}$$

(iii) La factorisation épi-mono $X \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{i} Y$ de f est *unique à isomorphisme unique près* : car si $X \xrightarrow{p'} Z' \xrightarrow{i'} Y$ est une deuxième factorisation épi-mono, on voit aisément que $\text{Ker}(p') = \text{Ker}(f) = \text{Ker}(p)$ (les détails sont laissés au lecteur); d'après (ii) on a alors un unique isomorphisme $u : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ de $\mathcal{A}$ avec $u \circ p = p'$, et comme $i \circ p = f = i' \circ p' = i' \circ u \circ p$, il vient $i = i' \circ u$, car p est un épimorphisme.

Proposition 2.94. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $B_{\bullet} := (B_i \mid i \in I)$ une petite famille de sous-objets de A . Supposons que $\mathcal{A}$ soit cocomplète, ou que $B_{\bullet}$ soit une famille finie. Alors $\bigcup_{i \in I} B_i$ existe dans $\text{Sub}(A)$ (voir le §2.3.1).

Démonstration. Disons que B_i est la classe du monomorphisme $f_i : X_i \rightarrow A$, pour chaque $i \in I$; sous nos hypothèses, le coproduit $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ est représentable dans $\mathcal{A}$; soit alors $(g_i : X_i \rightarrow X \mid i \in I)$ un co-cône universel pour ce coproduit, de sorte qu'il existe un unique morphisme $f : X \rightarrow A$ tel que $f_i = f \circ g_i$ pour tout $i \in I$. Soit $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{i} A$ la factorisation épi-mono de f , et notons par $B \in \text{Sub}(A)$ la classe de $i : Y \rightarrow A$. Evidemment $B_i \subset B$ pour tout $i \in I$. Soit ensuite $C \in \text{Sub}(A)$ tel que $B_i \subset C$ pour tout $i \in I$; donc C est la classe d'un monomorphisme $j : Z \rightarrow A$, et l'hypothèse revient à dire que pour tout $i \in I$ il existe un morphisme $h_i : X_i \rightarrow Z$ tel que $f_i = j \circ h_i$. On a alors aussi un morphisme unique $h : X \rightarrow Z$ tel que $h_i = h \circ g_i$ pour tout $i \in I$; il vient $j \circ h \circ g_i = j \circ h_i = f_i = f \circ g_i$ pour tout $i \in I$, d'où $j \circ h = f$ par l'universalité du co-cône $g_\bullet$. En dernier lieu, rappelons que $Y = X/\text{Ker}(f)$ (remarque 2.93(ii)); soit $\iota_f : \text{Ker}(f) \rightarrow X$ le monomorphisme universel; alors $j \circ h \circ \iota_f = f \circ \iota_f$ est le morphisme nul, donc de même pour $h \circ \iota_f$, car j est un monomorphisme. Ainsi, h est la composition de p avec un morphisme $Y \rightarrow Z$, et par suite $B \subset C$. Cela achève de vérifier que $B = \bigcup_{i \in I} B_i$. $\square$

Exercice 2.95. (i) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\mathcal{D}$ un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array} \quad \text{dans } \mathcal{A}.$$

Montrer que si $\mathcal{D}$ est cartésien et si g est un épimorphisme, alors $\mathcal{D}$ est cocartésien et g' est un épimorphisme. Dualelement, si $\mathcal{D}$ est cocartésien, et si g' est un monomorphisme, alors $\mathcal{D}$ est cartésien, et g est un monomorphisme.

(ii) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $X_1, X_2 \in \text{Sub}(A)$. Montrer que le diagramme induit suivant est cartésien et cocartésien dans $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{E} : \begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \cup X_2. \end{array}$$

2.5. Premiers pas dans l'algèbre homologique. On termine cette leçon avec une revue des premières notions d'algèbre homologique.

Définition 2.96. (i) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec objet zéro $0_{\mathcal{A}}$; un *complexe* de $\mathcal{A}$ est une suite

$$(M_\bullet, d_\bullet) : \quad \cdots \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

constituée d'objets $(M_i \mid i \in \mathbb{Z})$ de $\mathcal{A}$ et de morphismes $d_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$ appelés les *différentielles* du complexe $M_\bullet$, tels que :

$$\boxed{d_i \circ d_{i+1} = 0_{M_{i+1}M_{i-1}} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.}$$

Avec la notation de la remarque 2.9(i), on peut écrire de façon équivalente :

$$\text{Im}(d_{i+1}) \subset \text{Ker}(d_i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Si l'on a $\text{Im}(d_{i+1}) = \text{Ker}(d_i)$ pour un indice i , on dit que le complexe $M_\bullet$ est *exact en degré i* (ou *acyclique en degré i*). Si $M_\bullet$ est exact en tout degré, on dit que $M_\bullet$ est *exact* (ou *acyclique*).

(iii) Soit $(M'_\bullet, d'_\bullet)$ un autre complexe de $\mathcal{A}$; un *morphisme de complexes*

$$\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$$

est la donnée d'un système $(\phi_i : M_i \rightarrow M'_i \mid i \in \mathbb{Z})$ de morphismes de $\mathcal{A}$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{d_i} & M_{i-1} \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_{i-1} \\ M'_i & \xrightarrow{d'_i} & M'_{i-1} \end{array} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 2.97. (i) Souvent on considère des complexes dont les termes M_i sont nuls pour tout indice i plus petit qu'un indice $i_{\min}$ (resp. pour tout indice plus grand qu'un indice $i_{\max}$) ; on dit qu'un tel complexe est *borné inférieurement* (resp. *borné supérieurement*). Dans ces cas, on définira d'habitude seulement les M_i en degrés $i \geq i_{\min}$ (resp. $i \leq i_{\max}$), les autres termes devront donc s'entendre implicitement comme étant nuls. Un complexe borné inférieurement et supérieurement est dit simplement *borné* : sa *longueur* est alors $n - m + 1$, où n (resp. m) est le plus grand (resp. le plus petit) des $i \in \mathbb{Z}$ tels que $M_i \neq 0$. On aura à discuter spécialement des *suites exactes courtes*, i.e. les complexes exacts de longueur ≤ 3 . Plus généralement, une *suite exacte* de $\mathcal{A}$ est un complexe de longueur $n + 1$ arbitraire

$$M_{\bullet} \quad : \quad M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_{i-n+1}} M_{i-n}$$

qui est exact aux degrés $i - 1, \dots, i - n + 1$. Noter qu'un complexe de la forme

$$0 \rightarrow M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \rightarrow \cdots \quad (\text{resp.} \quad \cdots \rightarrow M_{i-n+1} \xrightarrow{d_{i-n+1}} M_{i-n} \rightarrow 0)$$

est exact en degré i (resp. en degré $i - n$) si et seulement si d_i est un monomorphisme (resp. si et seulement si d_{i-n+1} est un épimorphisme), par le lemme 2.75(i,ii).

(ii) A tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, on associe un complexe

$$M[j]_{\bullet}$$

avec $M[j]_i := 0$ si $i \neq -j$ et $M[j]_{-j} := M$ (les différentielles de ce complexe sont toutes nulles). Plus généralement, si $(M_{\bullet}, d_{\bullet})$ est un complexe de $\mathcal{A}$, on dénote

$$M_{\bullet}[j]$$

le j -*décalage* de $M_{\bullet}$, qui est le complexe de $\mathcal{A}$ avec $M_k[j] := M_{k+j}$ et dont la différentielle en degré k est $d_{k+j} : M_{k+j} \rightarrow M_{k+j-1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si $\phi_{\bullet} : (M_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (M'_{\bullet}, d'_{\bullet})$ et $\psi_{\bullet} : (M'_{\bullet}, d'_{\bullet}) \rightarrow (M''_{\bullet}, d''_{\bullet})$ sont deux morphismes de complexes de $\mathcal{A}$, on obtient un morphisme évident

$$(\psi \circ \phi)_{\bullet} : M_{\bullet} \rightarrow M''_{\bullet} \quad \text{avec} \quad (\psi \circ \phi)_i := \psi_i \circ \phi_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Avec cette loi de composition, les complexes de $\mathcal{A}$ forment une catégorie

$$\mathcal{C}(\mathcal{A})$$

naturellement identifiée avec une sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$, où $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ est la catégorie associée à l'ensemble $(\mathbb{Z}, \leq)$ des entiers munis de l'ordre standard (notation de l'exemple 1.114(vii)) : en effet, un foncteur $M : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ est la donnée d'un système $(M(i) \mid i \in \mathbb{Z})$ d'objets de $\mathcal{A}$ et d'un système $(f_{ij} : M_i \rightarrow M_j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i \geq j)$ de morphismes de $\mathcal{A}$ soumis aux conditions :

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik} \quad \forall i \geq j \geq k.$$

En particulier, $f_{ij} = f_{j,j-1} \circ f_{j-1,j-2} \circ \cdots \circ f_{i,i-1}$ pour tout $i \geq j$, i.e. M est déterminé par le système d'applications $(g_n := f_{n,n-1} \mid n \in \mathbb{Z})$; réciproquement, si $(M_n, g_n : M_n \rightarrow M_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z})$ est une famille arbitraire d'objets et morphismes de $\mathcal{A}$, on obtient un foncteur $M : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ en posant $M(i) := M_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et $f_{ij} := g_{j-1} \circ g_{j-2} \circ \cdots \circ g_i$ pour tout $i \geq j$. De même, si $(M_n, g_n \mid n \in \mathbb{Z})$ et $(M'_n, g'_n \mid n \in \mathbb{Z})$ sont deux familles comme ci-dessus, et M, M' les objets correspondants de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$, la donnée d'un morphisme $\omega : M \rightarrow M'$ de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ revient à celle d'un système $(\omega_n : M_n \rightarrow$

$M'_n \mid n \in \mathbb{Z}$) de morphismes de $\mathcal{A}$ tels que $g'_n \circ \omega_n = \omega_{n-1} \circ g_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On voit donc que $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ dont les objets correspondent aux familles $(M_n, g_n \mid n \in \mathbb{Z})$ comme ci-dessus, telles que $g_{n-1} \circ g_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Noter que la bijection $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : n \mapsto -n$ est un isomorphisme de groupes ordonnés $(\mathbb{Z}, \leq) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, \leq)^{\text{op}}$; au vu de la remarque 1.127(iv), on déduit un isomorphisme de catégories : $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A}^{\text{op}})$, et évidemment ce dernier induit par restriction un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{C}(\mathcal{A})^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(\mathcal{A}^{\text{op}}) \quad (M_{\bullet}, d_{\bullet})^{\text{op}} \mapsto (M_{\bullet}^{\text{op}}, d_{\bullet}^{\text{op}}).$$

Explicitement, $(M_{\bullet}^{\text{op}}, d_{\bullet}^{\text{op}})$ est le complexe de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ avec

$$(M_{\bullet}^{\text{op}})_i := (M_{-i})^{\text{op}} \quad \text{et} \quad (d_{\bullet}^{\text{op}})_i := (d_{-i})^{\text{op}} : (M_{\bullet}^{\text{op}})_i \rightarrow (M_{\bullet}^{\text{op}})_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

A tout morphisme $\phi_{\bullet} : M_{\bullet} \rightarrow N_{\bullet}$ de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, cet isomorphisme associe le morphisme $\phi_{\bullet}^{\text{op}} : M_{\bullet}^{\text{op}} \rightarrow N_{\bullet}^{\text{op}}$ avec $(\phi_{\bullet}^{\text{op}})_i := (\phi_{-i})^{\text{op}} : (M_{\bullet}^{\text{op}})_i \rightarrow (N_{\bullet}^{\text{op}})_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

(v) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif, et $(M_{\bullet}, d_{\bullet})$ un complexe de $\mathcal{A}$; alors le système

$$F(M_{\bullet}) := (FM_i, Fd_i \mid i \in \mathbb{Z})$$

est un complexe de $\mathcal{B}$, car $Fd_{i-1} \circ Fd_i = F(d_{i-1} \circ d_i) = F(0_{M_i M_{i-2}}) = 0_{FM_i, FM_{i-2}}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. En outre, si $f_{\bullet} : M_{\bullet} \rightarrow N_{\bullet}$ est un morphisme de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, le système

$$F(f_{\bullet}) := (Ff_i \mid i \in \mathbb{Z})$$

est un morphisme de complexes $F(M_{\bullet}) \rightarrow F(N_{\bullet})$. Evidemment, pour tout morphisme de complexes $g_{\bullet} : N_{\bullet} \rightarrow Q_{\bullet}$ on a $F(g_{\bullet} \circ f_{\bullet}) = F(g_{\bullet}) \circ F(f_{\bullet})$, ainsi que $F(\mathbf{1}_{M_{\bullet}}) = \mathbf{1}_{F(M_{\bullet})}$ pour tout complexe $M_{\bullet}$. Donc, F induit un foncteur additif

$$\mathbf{C}(F) : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{B}) \quad M_{\bullet} \mapsto F(M_{\bullet}).$$

Exercice 2.98. (i) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Montrer que le foncteur d'inclusion $i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ admet des adjoints à droite et à gauche.

(ii) Montrer que la catégorie $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ est abélienne, et que si $\mathcal{A}$ est J -complète (resp. J -cocomplète) pour une catégorie J , il en est de même pour $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. En outre, le foncteur i commute avec les limites et colimites représentables; i.e. les limites et colimites de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ se calculent terme à terme.

Remarque 2.99. (i) Une suite d'objets et morphismes de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$

$$\Sigma_{\bullet} : \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte $\Leftrightarrow f$ est un monomorphisme, g est un épimorphisme, et $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, auquel cas g induit un isomorphisme $\text{Coker}(f) \xrightarrow{\sim} M''$.

(ii) Soient $h : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{A}$, et Y' un sous-objet de Y ; afin de vérifier que $\text{Im}(h) \subset Y'$, il suffit d'exhiber un épimorphisme $q : X' \rightarrow X$ avec $\text{Im}(h \circ q) \subset Y'$, car alors la composition $X' \rightarrow Y/Y'$ de $h \circ q$ avec l'épimorphisme universel $p : Y \rightarrow Y/Y'$ sera le morphisme nul, donc de même pour $p \circ h$, car q est un épimorphisme, d'où $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(p) = Y'$ (remarque 2.93(ii)). Cette simple observation est la clef pour formaliser et reproduire dans le cadre plus abstrait des catégories abéliennes, les *chasses au diagramme* dont l'usage est familier lorsqu'on raisonne sur des modules et des applications linéaires.

(iii) On dit que la suite exacte courte $\Sigma_{\bullet}$ de (i) est *scindée*, si g est un épimorphisme scindé (exercice 1.119(i)). Dans ce cas, soit s un inverse à droite pour g ; avec les projections canoniques $M' \xleftarrow{p'} M' \oplus M'' \xrightarrow{p''} M''$, on a l'isomorphisme

$$\phi := f \circ p' + s \circ p'' : M' \oplus M'' \xrightarrow{\sim} M.$$

En effet, soit $h : X \rightarrow M' \oplus M''$ un morphisme de $\mathcal{A}$ avec $\phi \circ h = 0_{XM}$; ainsi $0_{XM''} = g \circ \phi \circ h = p'' \circ h$, et par suite $0_{XM} = f \circ p' \circ h$, d'où $p' \circ h = 0_{XM'}$, car f est un

monomorphisme. Cela montre que $h = 0_{X, M' \oplus M''}$, et donc $\text{Ker } \phi = 0_{\mathcal{A}}$. Ensuite, soit $k \in \mathcal{A}(M, Y)$ avec $k \circ \phi = 0_{M' \oplus M'', Y}$; alors $0_{M'Y} = k \circ \phi \circ e' = k \circ f$, où

$$M' \xrightarrow{e'} M' \oplus M'' \xleftarrow{e''} M''$$

sont les injections canoniques. Par suite, k est la composition de g avec un morphisme $\bar{k} : M'' \rightarrow Y$ de $\mathcal{A}$ (remarque 2.93(ii)); il vient

$$0_{M' \oplus M'', Y} = \bar{k} \circ g \circ \phi = \bar{k} \circ p''$$

d'où $\bar{k} = 0_{M''Y}$, car p'' est un épimorphisme, et finalement $k = 0_{MY}$. Cela achève de vérifier que $\text{Coker } \phi = 0_{\mathcal{A}}$, et l'assertion découle alors du lemme 2.75(iv.c).

Donc, $\Sigma_{\bullet}$ est scindée si et seulement s'il existe un isomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma'_{\bullet} & & 0 \longrightarrow & M' & \xrightarrow{e'} & M' \oplus M'' & \xrightarrow{p''} M'' \longrightarrow 0 \\ \phi_{\bullet} \downarrow & & & \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel \\ \Sigma_{\bullet} & & 0 \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

(i.e. un isomorphisme $\phi_{\bullet} : \Sigma'_{\bullet} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\bullet}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ avec $\phi_0 = \mathbf{1}_{M'}$, $\phi_1 = \phi$ et $\phi_2 = \mathbf{1}_{M''}$).

(iv) Tout morphisme $\phi : M \rightarrow N$ de $\mathcal{A}$ donne lieu à un diagramme commutatif constitué de deux suites exactes courtes entrelacées

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & 0 \\ & & \searrow & & & & \nearrow \\ & & \text{Ker } \phi & & & & \text{Coker } \phi \\ & & \searrow i & & & & \nearrow \pi' \\ & & M & \xrightarrow{\phi} & N & & \\ & & \searrow \pi & & \nearrow i' & & \\ & & \text{Im } \phi & & & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

où i et i' sont les deux injections canoniques et π, π' les projections canoniques.

2.5.1. Homologie d'un complexe. Soit $(M_{\bullet}, d_{\bullet})$ un complexe de $\mathcal{A}$; on définit :

- $Z_i(M_{\bullet}) := \text{Ker}(d_i : M_i \rightarrow M_{i-1})$, le sous-objet des *cycles* en degré i
- $B_i(M_{\bullet}) := \text{Im}(d_{i+1} : M_{i+1} \rightarrow M_i)$, le sous-objet des *bords* en degré i

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Evidemment la différentielle d_i est la composition de morphismes :

$$M_{i+1} \xrightarrow{\pi_i} B_i(M_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_i} Z_i(M_{\bullet}) \xrightarrow{\iota_i} M_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

où π_i est un épimorphisme, et δ_i et ι_i sont des monomorphismes. L'homologie de $M_{\bullet}$ en degré i est le quotient

$$\boxed{H_i(M_{\bullet}) := Z_i(M_{\bullet}) / B_i(M_{\bullet}) = \text{Coker}(\delta_i)}.$$

Evidemment $M_{\bullet}$ est exact en degré i si et seulement si $H_i(M_{\bullet}) = 0$. De plus, tout morphisme de complexes $\phi_{\bullet} : M_{\bullet} \rightarrow N_{\bullet}$ induit des morphismes

$$Z_i(M_{\bullet}) \xrightarrow{Z_i(\phi_{\bullet})} Z_i(N_{\bullet}) \quad B_i(M_{\bullet}) \xrightarrow{B_i(\phi_{\bullet})} B_i(N_{\bullet}) \quad H_i(M_{\bullet}) \xrightarrow{H_i(\phi_{\bullet})} H_i(N_{\bullet})$$

(voir la remarque 2.69(i,ii)) et on a ainsi, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, trois foncteurs

$$Z_i, B_i, H_i : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}.$$

Exercice 2.100. Soit A un anneau associatif unitaire. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ les foncteurs Z_i et H_i sur $\mathcal{A} := A\text{-Mod}$ commutent avec les colimites filtrantes.

Exercice 2.101. (i) (Auto-dualité de l'homologie) Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, exhiber un isomorphisme naturel de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{A})^{\text{op}} & \xrightarrow{(-)^{\text{op}}} & \mathcal{C}(\mathcal{A}^{\text{op}}) \xrightarrow{H_{-i}} \mathcal{A}^{\text{op}} \\ & \searrow \Downarrow \omega_i & \uparrow \\ & H_i^{\text{op}} & \end{array} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

où $(-)^{\text{op}}$ dénote l'isomorphisme de catégories de la remarque 2.97(iv).

(ii) Donc, $M_{\bullet} \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ est exact en degré $i \Leftrightarrow M_{\bullet}^{\text{op}}$ est exact en degré $-i$. En particulier, $M_{\bullet}$ est acyclique si et seulement s'il en est de même pour $M_{\bullet}^{\text{op}}$.

Proposition 2.102. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif, et $M_{\bullet}$ un complexe de $\mathcal{A}$.

(i) F est exact à droite (resp. à gauche) $\Leftrightarrow F$ transforme toute suite exacte

$$\Sigma := (M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0) \quad (\text{resp. } \Sigma' := (0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''))$$

de $\mathcal{A}$ en une suite exacte de $\mathcal{B}$:

$$FM' \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FM'' \rightarrow 0 \quad (\text{resp. } 0 \rightarrow FM' \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FM'').$$

(ii) F est exact $\Leftrightarrow F$ transforme toute suite exacte courte de $\mathcal{A}$ en une suite exacte courte de $\mathcal{B}$.

(iii) Si F est exact, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ il existe un isomorphisme de foncteurs :

$$F \circ H_i \xrightarrow{\sim} H_i \circ \mathcal{C}(F) \quad : \quad \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}.$$

En particulier, si $M_{\bullet}$ est exact en degré i , il en est de même pour $F(M_{\bullet})$.

Démonstration. (i) : Si F est exact à droite, l'exemple 2.37(v) montre que F transforme Σ en une suite exacte $F\Sigma$. Réciproquement, par le problème 2.76(i) on sait que F commute avec les biproduits ; en vertu de l'exercice 2.42, pour vérifier que F est exact à droite il suffit alors de montrer qu'il commute avec les coégaliseurs. Soient donc $f_1, f_2 : M' \rightarrow M$ deux morphismes de $\mathcal{A}$; on pose $f := f_1 - f_2$, $M'' := \text{Coker } f$, et on dénote par $g : M \rightarrow M''$ l'épimorphisme universel, de sorte que la suite Σ qui en résulte est bien exacte, et (M'', g) représente le coégaliseur de f_1 et f_2 (cf. l'exemple 2.37(iii)). Par hypothèse, la suite $F\Sigma$ est exacte, donc FM'' s'identifie au conoyau de Ff , et Fg s'identifie à l'épimorphisme universel $FM \rightarrow \text{Coker}(Ff)$; mais on a $Ff = Ff_1 - Ff_2$ car F est additif, donc le conoyau de Ff représente le coégaliseur de Ff_1 et Ff_2 , comme souhaité. Ensuite, noter que F est exact à gauche $\Leftrightarrow F^{\text{op}}$ est exact à droite, et Σ' est une suite exacte de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \Sigma'^{\text{op}}$ est une suite exacte de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ (exercice 2.101(ii)), donc la caractérisation de l'exactitude à gauche se déduit du cas précédent, par dualité.

(ii) : D'après (i), la condition est nécessaire, donc on peut supposer que F transforme toute suite exacte courte en une suite exacte courte. Or, soit $\phi : M \rightarrow N$ un morphisme de $\mathcal{A}$; il vient un diagramme de suites exactes courtes entrelacées comme dans la remarque 2.99(iii), et par hypothèse, le diagramme induit :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & 0 \\ & \searrow & & & & & \nearrow \\ & F(\text{Ker } \phi) & & & & & F(\text{Coker } \phi) \\ & \searrow F_i & & & & & \nearrow F_{\pi'} \\ & FM & \xrightarrow{F\phi} & FN & & & \\ & \searrow F\pi & & \nearrow F_{i'} & & & \\ & F(\text{Im } \phi) & & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

consiste encore en deux suites exactes courtes. Autrement dit,

$$(F(\text{Ker } \phi), Fi) \quad \text{et} \quad (F(\text{Coker } \phi), F\pi')$$

représentent respectivement $\text{Ker}(F\pi)$ et $\text{Coker}(Fi')$. Mais on voit aussi que Fi' est un monomorphisme, donc $\text{Ker } F\pi = \text{Ker}(Fi' \circ F\pi) = \text{Ker } F\phi$, et de même $\text{Coker } Fi' = \text{Coker}(Fi' \circ F\pi) = \text{Coker } F\phi$, car $F\pi$ est un épimorphisme. De plus, $F(\text{Im } \phi)$ est l'image de $F\pi$, et cette dernière est identifiée par Fi' avec $\text{Im}(F\phi)$. On conclut que la suite de $\mathcal{B}$:

$$0 \rightarrow F(\text{Ker } \phi) \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{F\phi} FN \xrightarrow{F\pi'} F(\text{Coker } \phi) \rightarrow 0$$

est exacte, et on a un isomorphisme naturel $F(\text{Im } \phi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(F\phi)$ dans $\mathcal{B}$.

Maintenant, pour Σ comme en (i), on peut faire $\phi := f$, et on déduit que $F\Sigma$ est exacte ; de même, pour une suite Σ' on peut prendre $\phi := g$, et en déduire l'exactitude de $F\Sigma'$. Compte tenu de (i), il s'ensuit que F est exact.

(iii) : La preuve de (ii) nous fournit déjà des isomorphismes de foncteurs

$$(*) \quad F \circ B_i \xrightarrow{\sim} B_i \circ C(F) \quad F \circ Z_i \xrightarrow{\sim} Z_i \circ C(F) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Or, soit $(M_\bullet, d_\bullet)$ un complexe de $\mathcal{A}$ et $B_i(M_\bullet) \xrightarrow{j_i} Z_i(M_\bullet) \xrightarrow{k_i} M_i$ les monomorphismes naturels, pour tout $i \in \mathbb{Z}$; il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{F\pi_i} & FM_{i+1} & \xrightarrow{\pi'_i} B_i(FM_\bullet) \\ & \swarrow & & \downarrow Fd_{i+1} & \downarrow j'_i \\ F(B_i(M_\bullet)) & \xleftarrow{F\pi_i} & FM_{i+1} & \xrightarrow{Fd_{i+1}} & B_i(FM_\bullet) \\ \downarrow Fj_i & & \downarrow Fd_{i+1} & & \downarrow j'_i \\ F(Z_i(M_\bullet)) & \xrightarrow{Fk_i} & FM_i & \xleftarrow{k'_i} & Z_i(FM_\bullet) \\ & \searrow & & \downarrow k'_i & \end{array}$$

où j'_i et k'_i sont les monomorphismes naturels, $\pi_i : M_{i+1} \rightarrow B_i(M_\bullet)$ et $\pi'_i : FM_{i+1} \rightarrow B_i(FM_\bullet)$ les épimorphismes naturels, et dont les flèches en haut et en bas sont les isomorphismes naturels (*). On en déduit un isomorphisme naturel de $\mathcal{B}$

$$\text{Coker } Fj_i \xrightarrow{\sim} \text{Coker } j'_i = H_i(FM_\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Mais la preuve de (ii) fournit aussi un isomorphisme naturel

$$F(H_i M_\bullet) = F(\text{Coker } j_i) \xrightarrow{\sim} \text{Coker } Fj_i$$

d'où l'assertion. $\square$

Proposition 2.103. (i) Une suite $\Sigma := (M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0)$ de morphismes de $\mathcal{A}$ est exacte $\Leftrightarrow \Sigma$ induit une suite exacte de groupes abéliens

$$\Sigma_N^* : 0 \rightarrow \mathcal{A}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathcal{A}(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(M', N) \quad \forall N \in \text{Ob}(\mathcal{A}).$$

(ii) Duale, une suite $\Delta := (0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'')$ de morphismes de $\mathcal{A}$ est exacte $\Leftrightarrow \Delta$ induit une suite exacte de groupes abéliens :

$$\Delta_*^N : 0 \rightarrow \mathcal{A}(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathcal{A}(N, M'') \quad \forall N \in \text{Ob}(\mathcal{A}).$$

Démonstration. Ici $g^*(h) := h \circ g$ pour tout $h \in \mathcal{A}(M'', N)$, et $g_*(k) := g \circ k$ pour tout $k \in \mathcal{A}(N, M)$ et de même pour f^* et f_* : cf. la remarque 1.14(iii)).

(i) : Si Σ est exacte dans $\mathcal{A}$, la suite

$$\Sigma^{\text{op}} := (0 \rightarrow M''^{\text{op}} \xrightarrow{g^{\text{op}}} M^{\text{op}} \xrightarrow{f^{\text{op}}} M'^{\text{op}})$$

est exacte dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}^{\text{op}}$ (exercice 2.101(ii) et remarque 2.81(ii)) ; d'autre part, pour tout $N \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ le foncteur $h_{N^{\text{op}}}^\dagger : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ est exact à gauche (remarque 2.83), donc la suite Σ_N^* est exacte (proposition 2.102(i)).

Réciproquement, soit Σ_N^* exacte pour tout $N \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; avec $N := M''$, il vient $0_{M'M''} = f^* \circ g^*(1_{M''}) = g \circ f$, d'où $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, et il reste à vérifier que $\text{Ker}(g) \subset \text{Im}(f)$ (rappelons que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des sous-objets de N : voir la remarque 2.9). Pour cela, on prend $N := \text{Coker}(f)$, et soit $\pi : M \rightarrow N$ la projection canonique. On a $f^*(\pi) = 0$, donc il existe $\bar{\pi} : M'' \rightarrow N$ avec $\bar{\pi} \circ g = g^*(\bar{\pi}) = \pi$, d'où $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(\pi) = \text{Im}(f)$ (remarque 2.93(ii)).

(ii) : D'après l'exercice 2.101(ii), Δ est une suite exacte de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \Delta^{\text{op}}$ est une suite exacte de $\mathcal{A}^{\text{op}}$; mais $(\Delta^{\text{op}})_N^* = \Delta_N^*$, donc l'assertion découle de (i). $\square$

Exercice 2.104. (Lemme des cinq) Soient $M_\bullet$ et $N_\bullet$ deux complexes exacts de $\mathcal{A}$ de longueur 5, et $\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc} M_5 & \xrightarrow{d_{M,5}} & M_4 & \xrightarrow{d_{M,4}} & M_3 & \xrightarrow{d_{M,3}} & M_2 & \xrightarrow{d_{M,2}} & M_1 \\ \phi_5 \downarrow & & \phi_4 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_1 \downarrow \\ N_5 & \xrightarrow{d_{N,5}} & N_4 & \xrightarrow{d_{N,4}} & N_3 & \xrightarrow{d_{N,3}} & N_2 & \xrightarrow{d_{N,2}} & N_1 \end{array}$$

Montrer que si $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$ sont des isomorphismes, il en est de même pour ϕ_3 .

Exercice 2.105. Soient $\Sigma_\bullet := (0 \rightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de $\mathcal{A}$, et $\phi : M' \rightarrow M$, $\psi : N \rightarrow N''$ deux morphismes de $\mathcal{A}$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \phi^* \Sigma_\bullet & & 0 \longrightarrow N & \xrightarrow{f'} X' & \xrightarrow{g'} M' \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \parallel & \downarrow \pi' & \downarrow \phi \\ (\square) \quad \Sigma_\bullet & & 0 \longrightarrow N & \xrightarrow{f} X & \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \psi \downarrow & \downarrow \pi'' & \parallel \\ \psi_* \Sigma_\bullet & & 0 \longrightarrow N'' & \xrightarrow{f''} X'' & \xrightarrow{g''} M \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont le carré en haut à droite est cartésien, et le carré en bas à gauche est cocartésien. La flèche f' est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $\pi' \circ f' = f$ et $g' \circ f' = 0_{NM'}$; la flèche g'' est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $g'' \circ \pi'' = g$ et $g'' \circ f'' = 0_{N''M}$.

(i) Montrer que les suites horizontales $\phi^* \Sigma_\bullet$ et $\psi_* \Sigma_\bullet$ sont exactes courtes.

(ii) Exhiber un isomorphisme de suites exactes courtes

$$s_\bullet : \psi_*(\phi^* \Sigma) \xrightarrow{\sim} \phi^*(\psi_* \Sigma) \quad \text{tel que} \quad s_0 = 1_{N''} \quad \text{et} \quad s_2 = 1_{M'}.$$

(iii) Soient $\phi' : M'' \rightarrow M'$ et $\psi' : N'' \rightarrow N'$ deux autres morphismes de $\mathcal{A}$. Exhiber des isomorphismes de suites exactes courtes

$$t_\bullet : (\phi \circ \phi')^* \Sigma \xrightarrow{\sim} \phi'^*(\phi^* \Sigma) \quad u_\bullet : (\psi' \circ \psi)_* \Sigma \xrightarrow{\sim} \psi'_*(\psi_* \Sigma)$$

avec $t_0 = 1_N$, $t_2 = 1_{M''}$, $u_0 = 1_{N'}$, $u_2 = 1_M$ (voir aussi le problème 7.72).

Proposition 2.106. (Lemme du serpent) Soit un diagramme commutatif de $\mathcal{A}$

$$\Sigma \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} & & M_3 & \xrightarrow{d_3} & M_2 & \xrightarrow{d_2} & M_1 \longrightarrow 0 \\ & & \phi_3 \downarrow & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 \\ 0 & \longrightarrow & M'_3 & \xrightarrow{d'_3} & M'_2 & \xrightarrow{d'_2} & M'_1 \end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes. Alors, il existe un unique morphisme

$$\partial : \text{Ker } \phi_1 \rightarrow \text{Coker } \phi_3$$

appelé morphisme de bord, faisant commuter le diagramme :

$$\partial(\Sigma) \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(\phi_1) \times_{M_1} M_2 & \xrightarrow{p} & M_2 & \xrightarrow{\phi_2} & M'_2 & \xrightarrow{i} & \text{Coker}(\phi_3) \sqcup_{M'_3} M'_2 \\ p' \downarrow & & & & & & \uparrow i' \\ \text{Ker}(\phi_1) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & & & & & \text{Coker}(\phi_3). \end{array}$$

En outre, la suite du serpent suivante est exacte :

$$S(\Sigma) \quad : \quad \text{Ker } \phi_3 \rightarrow \text{Ker } \phi_2 \rightarrow \text{Ker } \phi_1 \xrightarrow{\partial} \text{Coker } \phi_3 \rightarrow \text{Coker } \phi_2 \rightarrow \text{Coker } \phi_1.$$

Démonstration. Dans $\partial(\Sigma)$, on a noté p, p' les projections canoniques et i, i' les injections canoniques. Pour $i = 1, 2, 3$, soient $\iota_i : \text{Ker}(\phi_i) \rightarrow M_i$ le monomorphisme universel, et $\pi_i : M'_i \rightarrow \text{Coker}(\phi_i)$ l'épimorphisme universel; ainsi, $d_2 \circ p = \iota_1 \circ p'$, d'où $d'_2 \circ \phi_2 \circ p = \phi_1 \circ \iota_1 \circ p'$, et d'autre part $\phi_1 \circ \iota_1$ est le morphisme nul, donc $\phi_2 \circ p$ est la composition de d'_3 avec un morphisme $\partial' : \text{Ker}(\phi_1) \times_{M_1} M_2 \rightarrow M'_3$. Ainsi, $i \circ \phi_2 \circ p = i \circ d'_3 \circ \partial' = i' \circ \pi_3 \circ \partial'$. Par l'exercice 2.105(i), on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}(d_2) \xrightarrow{j} \text{Ker}(\phi_1) \times_{M_1} M_2 \xrightarrow{p'} \text{Ker}(\phi_1) \rightarrow 0$$

où j désigne l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $p' \circ j$ soit le morphisme nul, et avec $p \circ j = \iota_2$; en outre, $d_3 = \iota_2 \circ k$ pour un unique épimorphisme $k : M_3 \rightarrow \text{Ker}(d_2)$, car la ligne horizontale en haut de Σ est exacte. Il vient :

$$i' \circ \pi_3 \circ \partial' \circ j \circ k = i \circ \phi_2 \circ p \circ j \circ k = i \circ \phi_2 \circ \iota_2 \circ k = i \circ \phi_2 \circ d_3 = i \circ d'_3 \circ \phi_3 = i' \circ \pi_3 \circ \phi_3$$

et comme $\pi_3 \circ \phi_3$ est le morphisme nul, il en est alors de même pour $\pi_3 \circ \partial' \circ j$, car k est un épimorphisme et i' est un monomorphisme. Par suite, il existe un unique morphisme $\partial : \text{Ker}(\phi_1) \rightarrow \text{Coker}(\phi_3)$ tel que $p' \circ \partial = \pi_3 \circ \partial'$; évidemment, ∂ est alors l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ qui fait commuter $\partial(\Sigma)$.

• Observons ensuite que le diagramme Σ^{op} de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ est encore à lignes horizontales exactes (exercice 2.101(ii)), et au vu de la remarque 2.69(iii), la construction du diagramme associé $\partial(\Sigma)$ est *auto-duale*, i.e. on a une identification naturelle :

$$\partial(\Sigma^{\text{op}}) = \partial(\Sigma)^{\text{op}}.$$

• Montrons ensuite l'exactitude du segment $\text{Ker } \phi_3 \rightarrow \text{Ker } \phi_2 \rightarrow \text{Ker } \phi_1$: pour cette assertion, l'application de bord ne joue aucun rôle. Supposons d'abord que la ligne en haut soit en fait exacte courte, i.e. d_3 est aussi un monomorphisme. Or, la donnée $X_i := (M_i, M'_i, \phi_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ est un objet de $\text{Morph}(\mathcal{C})$, et les couples (d_i, d'_i) pour $i = 2, 3$ sont des morphismes $\delta_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$. Nos hypothèses reviennent à dire que X_3 est le noyau de δ_2 , et que δ_3 est le monomorphisme canonique ι_{δ_2} . Dans cette situation, la suite des noyaux est :

$$0 \rightarrow \text{Ker } X_3 \xrightarrow{\text{Ker } \delta_3} \text{Ker } X_2 \xrightarrow{\text{Ker } \delta_2} \text{Ker } X_1$$

et elle est exacte, car Ker commute avec les limites (donc avec les noyaux). Pour le cas général, soit $(K, M'_3, \phi'_3) := \text{Ker } \delta_2$; donc K est le noyau de d_2 , et δ_3 se factorise à travers un épimorphisme $\bar{\delta}_3 := (\bar{d}_3, \mathbf{1}_{M'_3}) : X_3 \rightarrow (K, M'_3, \phi'_3)$. Par ce qui précède, on a une suite exacte $\text{Ker } \phi'_3 = \text{Ker}(K, M'_3, \phi'_3) \rightarrow \text{Ker } \phi_2 \rightarrow \text{Ker } \phi_1$, et d'autre part on voit aisément que le diagramme commutatif induit :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\phi_3) & \longrightarrow & \text{Ker}(\phi'_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_3 & \xrightarrow{\bar{d}_3} & K \end{array}$$

est cartésien (cf. la solution de l'exercice 2.105(i)). Par suite, $\text{Ker } \bar{\delta}_3 : \text{Ker } \phi_3 \rightarrow \text{Ker } \phi'_3$ est un épimorphisme (exercice 2.95(i)), d'où l'assertion.

• Le raisonnement précédent montre en même temps que aussi la suite $S(\Sigma)$ est auto-duale, *i.e.* on a une identification naturelle :

$$S(\Sigma^{\text{op}}) = S(\Sigma)^{\text{op}}.$$

Par suite, l'exactitude du segment des conoyaux se déduit comme d'habitude par dualité, compte tenu de l'exercice 2.101(ii).

• Vérifions ensuite que la composition $\text{Ker}(\phi_2) \xrightarrow{\text{Ker}(\delta_2)} \text{Ker}(\phi_1) \xrightarrow{\partial} \text{Coker}(\phi_3)$ est le morphisme nul. Pour cela, soit $l : \text{Ker}(\phi_2) \rightarrow \text{Ker}(\phi_1) \times_{M_1} M_2$ l'unique morphisme tel que $p \circ l = \iota_2$ et $p' \circ l = \text{Ker}(\delta_2)$. Alors $i' \circ \partial \circ \text{Ker}(\delta_2) = i' \circ \partial \circ p' \circ l = i \circ \phi_2 \circ p \circ l$ est le morphisme nul, d'où l'assertion, car i' est un monomorphisme. Compte tenu de l'auto-dualité de la suite $S(\Sigma)$, il s'ensuit aussitôt que la composition $\text{Ker}(\phi_1) \xrightarrow{\partial} \text{Coker}(\phi_3) \xrightarrow{\text{Coker}(\delta_3)} \text{Coker}(\delta_2)$ est, de même, le morphisme nul.

• En dernier lieu, vérifions que $\text{Ker}(\partial) \subset \text{Im}(\text{Ker} \delta_2)$. Soit donc $f \in \mathcal{A}(X, \text{Ker}(\phi_1))$ tel que $\partial \circ f$ soit le morphisme nul ; on doit vérifier que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(\text{Ker} \delta_2)$, et on va appliquer la remarque 2.99(ii). Pour cela, considérons le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ q' \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Ker}(\phi_1) \times_{M_1} M_2 & \xrightarrow{p'} & \text{Ker}(\phi_1) \end{array}$$

et rappelons que q est un épimorphisme (car il en est de même pour p'), et son noyau s'identifie naturellement avec $\text{Ker}(p') = \text{Ker}(d_2)$ (exercice 2.105(i)). Alors $i' \circ \partial \circ f \circ q = i' \circ \partial \circ p' \circ q' = i \circ \phi_2 \circ p \circ q' = i' \circ \pi_3 \circ \partial' \circ q'$ est le morphisme nul, donc de même pour $\pi_3 \circ \partial' \circ q'$, car i' est un monomorphisme. Cela montre que $\partial' \circ q'$ est la composition d'un morphisme $t : Y \rightarrow \text{Im}(\phi_3)$ avec le monomorphisme universel $s : \text{Im}(\phi_3) \rightarrow M'_3$. Considérons alors le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{r} & Y \\ r' \downarrow & & \downarrow t \\ M_3 & \xrightarrow{t'} & \text{Im}(\phi_3) \end{array}$$

où t' est l'épimorphisme universel, de sorte que $\phi_3 = s \circ t'$, et r est un épimorphisme (exercice 2.95(i)). Posons $g := p \circ q' \circ r - d_3 \circ r' : Z \rightarrow M_2$. Noter que :

$$\phi_2 \circ d_3 \circ r' = d'_3 \circ \phi_3 \circ r' = d'_3 \circ s \circ t \circ r = d'_3 \circ \partial' \circ q' \circ r$$

d'où $\phi_2 \circ g = (\phi_2 \circ p - d'_3 \circ \partial') \circ q' \circ r$. Mais par construction, $\phi_2 \circ p = d'_3 \circ \partial'$, donc $\phi_2 \circ g$ est le morphisme nul, et il existe alors un unique morphisme $h : Z \rightarrow \text{Ker}(\phi_2)$ avec $g = \iota_2 \circ h$. Noter en outre que $q \circ r$ est un épimorphisme ; d'après la remarque 2.99(ii), on est ainsi ramené à vérifier que $f \circ q \circ r = \text{Ker}(\delta_2) \circ h$. On calcule :

$$\iota_1 \circ \text{Ker}(\delta_2) \circ h = d_2 \circ \iota_2 \circ h = d_2 \circ g = d_2 \circ p \circ q' \circ r = \iota_1 \circ p' \circ q' \circ r = \iota_1 \circ f \circ q \circ r$$

d'où l'assertion, car ι_1 est un monomorphisme.

• Compte tenu de l'exercice 2.101(ii) et de l'auto-dualité de $S(\Sigma)$, on déduit aussitôt que $\text{Ker}(\text{Coker} \delta_3) = \text{Im}(\partial)$, et cela achève la preuve. $\square$

Exercice 2.107. Soient $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ deux morphismes de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow \text{Ker } g \rightarrow \text{Ker } f \circ g \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Coker } g \rightarrow \text{Coker } f \circ g \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0.$$

Problème 2.108. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine et non vide de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une *sous-catégorie de Serre* (ou une *sous-catégorie épaisse*) si elle satisfait la condition suivante. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow$

$A'' \rightarrow 0$ de $\mathcal{A}$ on a $A \in \text{Ob}(\mathcal{B}) \Leftrightarrow A', A'' \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. On dit qu'un morphisme f de $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme si $\text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.

(i) Soient $\mathcal{B}$ une sous-catégorie de Serre de $\mathcal{A}$, et $f : A \rightarrow A', g : A' \rightarrow A''$ deux morphismes de $\mathcal{A}$. Montrer que si deux éléments de $\{f, g, g \circ f\}$ sont des $\mathcal{B}$ -isomorphismes, il en est de même pour le troisième.

(ii) Soient $\mathcal{B}$ comme dans (i), et $f : B \rightarrow A, g : A' \rightarrow A$ deux morphismes; montrer que si g est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme, il en est de même pour $B \times_A g : B \times_A A' \rightarrow B$.

(iii) Soit $\mathcal{B}$ comme dans (i), et supposons que $\text{Sub}(A)$ soit un ensemble, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ (remarque 2.9(ii)). Exhiber une catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ et un foncteur $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ caractérisés à isomorphisme unique près de catégories par la propriété suivante. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, les foncteurs $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ qui se factorisent via π et un foncteur $G : \mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ sont ceux qui transforment $\mathcal{B}$ -isomorphismes de $\mathcal{A}$ en isomorphismes de $\mathcal{C}$, et la factorisation $F = G \circ \pi$ est alors unique.

(iv) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ comme dans (iii). Montrer que $\mathcal{B}^{\text{op}}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}^{\text{op}}$, et qu'il existe un unique isomorphisme de catégories $(\mathcal{A}/\mathcal{B})^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\text{op}}/\mathcal{B}^{\text{op}}$ identifiant π^{op} avec le foncteur correspondant $\pi' : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{op}}/\mathcal{B}^{\text{op}}$.

(v) En outre, montrer que $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est une catégorie abélienne, et π est un foncteur exact. On appelle $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ le quotient de $\mathcal{A}$ par la sous-catégorie de Serre $\mathcal{B}$.

Exercice 2.109. (Suites exactes courtes et limites inverses) Soient A un anneau associatif unitaire, et $\mathbb{N}^{\text{op}}$ l'ensemble $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre qui est l'opposé de l'ordre usuel (voir la remarque 1.31(ii)); on appelle *système projectif* de A -modules tout système de A -modules indexé par $\mathbb{N}^{\text{op}}$ (voir l'exemple 2.23(i)).

(i) Soit $(M_\bullet, f_\bullet)$ un système projectif de A -modules. Montrer que la donnée de $f_\bullet$ équivaut à celle de la famille d'applications A -linéaires

$$(g_n := f_{n+1, n} : M_{n+1} \rightarrow M_n \mid n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Pour $(M_n, g_n \mid n \in \mathbb{N})$ comme dans (i), soient $M_\infty := \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$, et $t : M_\infty \rightarrow M_\infty$ l'endomorphisme A -linéaire tel que $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \mapsto (x_n - g_n(x_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N})$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de A -modules

$$\text{Ker}(t) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M_n.$$

(iii) Soit maintenant une *suite exacte courte de systèmes projectifs* :

$$0 \rightarrow (M'_n, g'_n \mid n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{i_\bullet} (M_n, g_n \mid n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{p_\bullet} (M''_n, g''_n \mid n \in \mathbb{N}) \rightarrow 0$$

i.e. deux morphismes de systèmes projectifs (voir l'exemple 2.23(i)), tels que

$$0 \rightarrow M'_n \xrightarrow{i_n} M_n \xrightarrow{p_n} M''_n \rightarrow 0$$

soit une suite exacte courte pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite induite

$$(*) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M'_n \xrightarrow{i} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M_n \xrightarrow{p} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M''_n$$

est exacte (ici, i et p sont les limites inverses de $i_\bullet$ et $p_\bullet$: voir la remarque 2.29(iii)).

(iv) Dans la situation de (iii), montrer que si chaque homomorphisme de transition g'_n est surjectif, alors la suite $(*)$ est exacte courte, *i.e.* que p est surjectif.

Exercice 2.110. Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -modules. Montrer les implications suivantes (voir aussi l'exercice 3.17) :

- (i) M' et M'' sont de type fini $\Rightarrow M$ est de type fini.
- (ii) M' et M'' sont de présentation finie $\Rightarrow M$ est de présentation finie.
- (iii) M est de présentation finie et M' de type fini $\Rightarrow M''$ est de présentation finie.
- (iv) M est de type fini et M'' de présentation finie $\Rightarrow M'$ est de type fini.

2.5.2. *La suite exacte longue d'homologie.* On considère maintenant une *suite exacte courte* de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, i.e. une suite de morphismes de complexes de $\mathcal{A}$:

$$(*) \quad 0 \rightarrow M'_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} M''_\bullet \rightarrow 0$$

tels que $\text{Im } \phi_\bullet = \text{Ker } \psi_\bullet$ et $\text{Ker } \phi_\bullet = \text{Coker } \psi_\bullet = 0$ (ici, on dénote par 0 le complexe trivial dont les composantes en tout degré $i \in \mathbb{Z}$ sont l'objet zéro $0_{\mathcal{A}}$). Autrement dit, il s'agit d'un système de diagrammes commutatifs de $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_i & \xrightarrow{\phi_i} & M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M''_i \longrightarrow 0 \\ & & d'_i \downarrow & & d_i \downarrow & & \downarrow d''_i \\ 0 & \longrightarrow & M'_{i-1} & \xrightarrow{\phi_{i-1}} & M_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & M''_{i-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On en déduit des autres diagrammes commutatifs :

$$(**) \quad \begin{array}{ccccccc} M'_i/B'_i & \longrightarrow & M_i/B_i & \longrightarrow & M''_i/B''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{i-1} & \longrightarrow & Z_{i-1} & \longrightarrow & Z''_{i-1} \end{array}$$

où B_i, B'_i, B''_i sont les sous-objets des bords de $M_\bullet, M'_\bullet, M''_\bullet$, et $Z_{i-1}, Z'_{i-1}, Z''_{i-1}$ sont les sous-objets des cycles des ces mêmes complexes. Les flèches verticales des diagrammes (**) sont induites par d'_i, d_i et d''_i . Par le lemme du serpent, les lignes horizontales des diagrammes (**) sont aussi exactes. Donc, le lemme du serpent s'applique aussi à ces derniers, et on obtient pour tout $i \in \mathbb{Z}$ une suite exacte :

$$\boxed{H_i(M'_\bullet) \xrightarrow{H_i(\phi_\bullet)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(\psi_\bullet)} H_i(M''_\bullet) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(M'_\bullet) \xrightarrow{H_{i-1}(\phi_\bullet)} H_{i-1}(M_\bullet) \xrightarrow{H_{i-1}(\psi_\bullet)} H_{i-1}(M''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{i-1}} H_{i-2}(M'_\bullet) \xrightarrow{H_{i-2}(\phi_\bullet)} H_{i-2}(M_\bullet) \xrightarrow{H_{i-2}(\psi_\bullet)} H_{i-2}(M''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{i-2}} \dots}$$

Noter que ces suites “se collent” bout à bout, pour former un unique complexe exact, appelé la *suite exacte longue d'homologie* associée à la suite exacte courte (*).

Remarque 2.111. (i) Noter aussi que la suite exacte longue d'homologie est *canonique*, au sens suivant. Considérons un diagramme commutatif de complexes :

$$(***) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_\bullet & \longrightarrow & M_\bullet & \longrightarrow & M''_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \beta'_\bullet \downarrow & & \beta_\bullet \downarrow & & \downarrow \beta''_\bullet \\ 0 & \longrightarrow & N'_\bullet & \longrightarrow & N_\bullet & \longrightarrow & N''_\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes de complexes. On déduit un diagramme commutatif de $\mathcal{A}$, dont les lignes horizontales sont les suites exactes longues d'homologie associées aux deux suites courtes de (***) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_i(M_\bullet) & \longrightarrow & H_i(M''_\bullet) & \xrightarrow{\partial} & H_{i-1}(M'_\bullet) \longrightarrow \dots \\ & & H_i(\beta_\bullet) \downarrow & & H_i(\beta''_\bullet) \downarrow & & \downarrow H_{i-1}(\beta'_\bullet) \\ \dots & \longrightarrow & H_i(N_\bullet) & \longrightarrow & H_i(N''_\bullet) & \xrightarrow{\partial} & H_{i-1}(N'_\bullet) \longrightarrow \dots \end{array}$$

La vérification sera laissée en exercice : le point essentiel est la commutativité du segment de ce diagramme qui contient les morphismes de bords ∂ : cela se voit par inspection de la construction de ∂ , fournie dans la preuve du lemme du serpent.

(ii) En outre, l'auto-dualité de l'homologie (exercice 2.101(i)) et de la suite du serpent (voir la preuve de la proposition 2.106) entraînent aussitôt l'auto-dualité de la suite exacte longue d'homologie ; à savoir, la suite exacte longue associée au dual de la suite exacte courte de complexes (*) s'identifie naturellement avec la duale de la suite exacte longue d'homologie de (*).

2.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 2.7, partie (i) : On a vu que F est représentable si et seulement s'il admet un couple universel (X', f) , et noter que $f \in FX' \subset \mathbf{h}_X(X')$, donc $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$. D'autre part, un couple (X', f) est universel pour F si et seulement si, pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $g \in FY$ il existe un unique morphisme $h : X' \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ tel que $Fh(f) = \mathbf{h}_X(h)(f) = g$, i.e. tel que $h \circ f = g$. L'unicité de h veut dire précisément que f est un épimorphisme, d'où l'assertion.

Partie (ii) : L'assertion n'est rien d'autre que la traduction du lemme 2.4(i).

Partie (iii) : Evidemment un homomorphisme d'anneaux $g : A \rightarrow B$ se factorise à travers π si et seulement si $g(I) = 0$, et la factorisation est unique, donc l'assertion est une application immédiate de (i).

Partie (iv) : Munissons S de la topologie $\mathcal{T}^S$ induite par l'inclusion $i : S \rightarrow T$ (voir l'exemple 1.20(i)); alors $i : (S, \mathcal{T}^S) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ est continue, et on va montrer que $((S, \mathcal{T}^S), i)$ est un couple universel pour F_S . En effet, si X est un espace topologique, et $g : X \rightarrow T$ un élément de $F_S(X)$, l'application g est la composition de i avec une unique application ensembliste $g' : X \rightarrow S$, et il reste à vérifier que g' est continue pour la topologie $\mathcal{T}^S$. Donc, soit $U \in \mathcal{T}^S$; cela veut dire qu'il existe une partie ouverte U' de T avec $U = S \cap U'$, et $g'^{-1}U = g'^{-1}(S \cap U') = g^{-1}U$ est une partie ouverte de X , car g est continue, CQFD.

Problème 2.10, partie (i) : Soit $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; par hypothèse, on peut choisir $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ avec un isomorphisme de foncteurs $\omega^X : \mathbf{h}_X \circ F \xrightarrow{\sim} \mathbf{h}_{X'}$, et on pose $GX := X'$. Ensuite, soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$; évidemment il existe une unique transformation naturelle η qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_Y \circ F & \xrightarrow{\omega^Y} & \mathbf{h}_{GY} \\ \mathbf{h}_f * F \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{h}_X \circ F & \xrightarrow{\omega^X} & \mathbf{h}_{GX}. \end{array}$$

Par l'exemple 2.2(i), il existe un morphisme unique $f' : GX \rightarrow GY$ tel que $\eta = \mathbf{h}_{f'}$, et on pose $Gf := f'$. Si $f = \mathbf{1}_X$, la transformation naturelle η est l'automorphisme identique de $\mathbf{h}_{GX}$, et donc $G\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{GX}$. Il reste à montrer que $Gg \circ Gf = G(g \circ f)$ pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$. Mais on a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{Gf} \circ \mathbf{h}_{Gg} &= (\omega^X \circ (\mathbf{h}_f * F) \circ \omega^{Y-1}) \circ (\omega^Y \circ (\mathbf{h}_g * F) \circ \omega^{Z-1}) \\ &= \omega^X \circ (\mathbf{h}_f * F) \circ (\mathbf{h}_g * F) \circ \omega^{Z-1} \\ &= \omega^X \circ ((\mathbf{h}_f \circ \mathbf{h}_g) * F) \circ \omega^{Z-1} = \omega^X \circ (\mathbf{h}_{g \circ f} * F) \circ \omega^{Z-1} = \mathbf{h}_{G(g \circ f)} \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de la relation d'échange (exercice 1.129(iii)), et la quatrième découle de l'exemple 2.2(ii). D'où l'assertion, au vu de l'exemple 2.2(i,ii).

Partie (ii) : On a vu (exemple 2.5) que pour tout ensemble Λ , le foncteur $(-)^{\Lambda} = \mathbf{h}_{\Lambda} \circ F : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$ est représentable par le A -module libre $A^{(\Lambda)}$, et plus précisément, il existe un couple universel canonique $(A^{(\Lambda)}, e_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow A^{(\Lambda)})$ pour ce foncteur. Avec (i), on en déduit un foncteur

$$A^{(-)} : \text{Ens} \rightarrow A\text{-Mod} \quad \Lambda \mapsto A^{(\Lambda)}$$

et une adjonction canonique entre F et $A^{(-)} :$

$$\omega^{\Lambda} : \mathbf{h}_{\Lambda} \circ F \xrightarrow{\sim} \mathbf{h}_{A^{(\Lambda)}} \quad \text{telle que} \quad \omega_{A^{(\Lambda)}}^{\Lambda}(e_{\Lambda}) = \mathbf{1}_{A^{(\Lambda)}} \quad \forall \Lambda \in \text{Ob}(\text{Ens}).$$

A savoir, ω^{Λ} est l'inverse de l'isomorphisme $\eta : \mathbf{h}_{A^{(\Lambda)}} \xrightarrow{\sim} (-)^{\Lambda}$ de l'exemple 2.5, de sorte que $\omega_M^{\Lambda}(\phi) = f \Leftrightarrow f \circ e_{\Lambda} = \phi$, pour tout A -module M , tout $\phi \in M^{\Lambda}$ et toute application A -linéaire $f : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$. Explicitons l'application A -linéaire $A^{(\phi)} : A^{(\Lambda)} \rightarrow$

$A^{(\Lambda')}$ correspondante à chaque application d'ensembles $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$. D'après (i), $A^{(\phi)}$ est l'unique homomorphisme de A -modules tel que

$$h_{A^{(\phi)}} = \omega^\Lambda \circ (h_\phi * F) \circ \omega^{\Lambda'}{}^{-1}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} A^{(\phi)} &= h_{A^{(\phi)}, A^{(\Lambda')}}(\mathbf{1}_{A^{(\Lambda')}}) = \omega_{A^{(\Lambda')}}^\Lambda \circ (h_\phi * F)_{A^{(\Lambda')}} \circ \omega_{A^{(\Lambda')}}^{\Lambda'}{}^{-1}(\mathbf{1}_{A^{(\Lambda')}}) \\ &= \omega_{A^{(\Lambda')}}^\Lambda \circ (h_\phi * F)_{A^{(\Lambda')}}(e_{\Lambda'}) \\ &= \omega_{A^{(\Lambda')}}^\Lambda(e_{\Lambda'} \circ \phi). \end{aligned}$$

Cela revient à dire que $A^{(\phi)}$ est l'unique homomorphisme tel que $A^{(\phi)} \circ e_\Lambda = e_{\Lambda'} \circ \phi$, i.e. $A^{(\phi)}(e_\lambda) = e'_{\phi(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (ici on a noté $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(e'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ les bases canoniques de $A^{(\Lambda)}$ et respectivement $A^{(\Lambda')}$). Autrement dit, $A^{(-)}$ est le foncteur considéré dans l'exemple 1.121(ii).

Partie (iii) : On a vu dans l'exemple 2.6 que pour tout ensemble Λ , le foncteur $[-]^\Lambda = h_\Lambda \circ F' : A - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable par l'algèbre de polynômes $A[X_\Lambda]$ si A est commutatif, et plus généralement, par $C(A)[X_\Lambda]$, où $C(A)$ dénote le quotient commutatif maximal de A . On a en outre exhibé un couple universel canonique $(C(A)[X_\Lambda], \chi_\Lambda)$ pour ce foncteur. Avec (i), on en déduit un foncteur

$$C(A)[-] : \mathbf{Ens} \rightarrow A - \mathbf{Alg} \quad \Lambda \mapsto C(A)[X_\Lambda]$$

et une adjonction canonique entre F' et $C(A)[-]$:

$$\omega^\Lambda : h_\Lambda \circ F' \xrightarrow{\sim} h_{A[X_\Lambda]} \quad \text{telle que} \quad \omega_{C(A)[X_\Lambda]}(\chi_\Lambda) = \mathbf{1}_{C(A)[X_\Lambda]} \quad \forall \Lambda \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Ens}).$$

Un calcul comme dans la preuve de (ii) permet d'expliciter l'homomorphisme de A -algèbres $C(A)[\phi] : C(A)[X_\Lambda] \rightarrow C(A)[X_{\Lambda'}]$ correspondant à toute application $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$. On obtient que $C(A)[\phi]$ est l'unique homomorphisme tel que $X_\lambda \mapsto X_{\phi(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (détails laissés aux soins du lecteur).

Partie (iv) : Soient S un ensemble, $\mathcal{C}$ une catégorie, $\phi : S \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ une application. On obtient un foncteur bien défini $\mathcal{F}_\phi : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}$ de la catégorie discrète $\mathcal{C}_S$ vers $\mathcal{C}$, par $\mathcal{F}_\phi(x) := \phi(x)$ et $\mathcal{F}_\phi(\mathbf{1}_x) := \mathbf{1}_{\phi(x)}$ pour tout $x \in S$. Réciproquement, tout foncteur $\mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}$ est évidemment de la forme $\mathcal{F}_\phi$ pour une unique telle application ϕ . De plus, pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ on a $\mathcal{F}_{\mathbf{Ob}(F) \circ \phi} = F \circ \mathcal{F}_\phi$. Cela montre que le système d'applications

$$\mathbf{Ens}(S, \mathbf{Ob}(\mathcal{C})) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{C}_S, \mathcal{C}) \quad \phi \mapsto \mathcal{F}_\phi \quad \forall \mathcal{C} \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Cat})$$

définit un isomorphisme de foncteurs $\mathcal{F}^S : h_S \circ \mathbf{Ob} \xrightarrow{\sim} h_{\mathcal{C}_S}$. On déduit déjà que $\mathbf{Ob}$ admet un adjoint à gauche

$$\mathcal{C} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Cat} \quad S \mapsto \mathcal{C}_S.$$

Pour décrire $\mathcal{C}$ complètement, il reste à expliciter le foncteur $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_T$ associé à toute application d'ensembles $f : S \rightarrow T$. Mais (i) nous dit que $\mathcal{C}(f)$ est caractérisé par l'identité

$$h_{\mathcal{C}(f)} = \mathcal{F}^S \circ (h_f * \mathbf{Ob}) \circ \mathcal{F}^{T-1}.$$

D'où $\mathcal{C}(f) = h_{\mathcal{C}(f), \mathcal{C}_T}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}_T}) = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_T}^S \circ (h_f * \mathbf{Ob})_{\mathcal{C}_T}(\mathbf{1}_T) = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_T}^S(f) = \mathcal{C}_f$, avec $\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_T$ le foncteur associé à f comme dans l'exemple 1.121(iv).

Exercice 2.11, partie (i) : L'assertion suit par inspection directe.

Partie (ii) : Un isomorphisme $\vartheta : \mathcal{C}(-, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'(G, -)$ est la donnée d'un système de bijections

$$\vartheta_{X'}^X : \mathcal{C}(X, FX') \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'(GX, X') \quad \forall X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), \forall X' \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}')$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, FX') & \xrightarrow{\vartheta_{X'}^X} & \mathcal{C}(GX, X') \\ \mathcal{C}(f, Fg) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}'(Gf, g) \\ \mathcal{C}(Y, FY') & \xrightarrow{\vartheta_{Y'}^Y} & \mathcal{C}'(GY, Y') \end{array}$$

pour tous morphismes $f : Y \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$ et $g : X' \rightarrow Y'$ de $\mathcal{C}'$. On a déjà observé (problème 2.10) qu'une telle donnée équivaut à celle d'une adjonction pour (G, F) .

Problème 2.13, partie (i) : Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On calcule :

$$\begin{aligned} FG(f) \circ \eta_X &= FG(f) \circ \omega_{GX}^{X-1}(\mathbf{1}_{GX}) = \omega_{GY}^{X-1}(Gf \circ \mathbf{1}_{GX}) \\ &= \omega_{GY}^{X-1}(\mathbf{1}_{GY} \circ Gf) \\ &= \omega_{GY}^{Y-1}(\mathbf{1}_{GY}) \circ f = \eta_Y \circ f \end{aligned}$$

d'où l'assertion pour η . Un calcul analogue montre l'assertion pour ε .

Partie (ii) : Par définition, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & FGX \\ & \searrow \omega_{X'}^{X-1}(f) & \downarrow Ff \\ & & FX' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} GY & \xrightarrow{Gg} & GFY' \\ & \searrow \omega_{Y'}^Y(g) & \downarrow \varepsilon_{Y'} \\ & & Y' \end{array}$$

pour tous morphismes $f : GX \rightarrow X'$ de $\mathcal{C}'$ et $g : Y \rightarrow FY'$ de $\mathcal{C}$. Si l'on fait $X := FX'$ et $f := \varepsilon_{X'}$ dans le premier diagramme, et $Y' := GY$, $g := \eta_Y$ dans le deuxième, on obtient les identités triangulaires.

Partie (iii) : Compte tenu de (ii), on voit qu'il faut poser

$$\omega_{Y'}^Y(g) := \varepsilon_{Y'} \circ Gg \quad \forall Y \in \text{Ob}(Y), \forall Y' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'), \forall g \in \mathcal{C}(Y, FY').$$

Il reste à montrer que cette définition donne effectivement une adjonction. Vérifions d'abord que $\omega_{Y'}^Y : \mathcal{C}(Y, FY') \rightarrow \mathcal{C}'(GY, Y')$ est bijective. Pour cela, remarquons que (i) fournit aussi une expression explicite pour l'application réciproque, *i.e.* on devrait avoir : $\omega_{Y'}^{Y-1}(f) = Ff \circ \eta_Y$ pour tout $f : GY \rightarrow Y'$; en effet, on calcule

$$\begin{aligned} F(\omega_{Y'}^Y(g)) \circ \eta_Y &= F(\varepsilon_{Y'} \circ Gg) \circ \eta_Y = (F * \varepsilon)_{Y'} \circ FGg \circ \eta_Y \\ &= (F * \varepsilon)_{Y'} \circ \eta_{FY'} \circ g \\ &= (F * \varepsilon)_{Y'} \circ (\eta * F)_{Y'} \circ g = g \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la première identité triangulaire. Un calcul analogue montre de même que $\omega_{Y'}^Y(Ff \circ \eta_Y) = f$ pour tout $f : GY \rightarrow Y'$, d'où l'assertion. Il reste à vérifier que $\omega_{Y'}^Y$ est naturel en les variables Y et Y' . Soient donc $g : Y \rightarrow FX'$, $f : X \rightarrow Y$ et $h : X' \rightarrow Y'$ trois morphismes; l'assertion découle du calcul :

$$\begin{aligned} \omega_{Y'}^Y(Fh \circ g) \circ Gf &= \varepsilon_{Y'} \circ G(Fh \circ g) \circ Gf = \varepsilon_{Y'} \circ GFh \circ G(g \circ f) \\ &= h \circ \varepsilon_{X'} \circ G(g \circ f) \\ &= h \circ \omega_{X'}^X(g \circ f). \end{aligned}$$

Partie (iv) : Soit donc $F : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli; on a vu que son adjoint à gauche est le foncteur $A^{(-)}$ qui associe à tout ensemble Λ le A -module libre $A^{(\Lambda)}$, et par inspection directe de l'adjonction canonique ω établie pour ce couple de foncteurs on voit que l'unité $\Lambda \rightarrow A^{(\Lambda)}$ correspondante est l'application $e_\Lambda : \lambda \mapsto e_\lambda$ (où $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est, comme d'habitude, la base canonique de $A^{(\Lambda)}$). Ensuite, soit M un A -module; par définition la coïunité $\varepsilon_M : A^{(M)} \rightarrow M$ est l'application A -linéaire $\omega_{A^{(M)}}^M(\mathbf{1}_M)$. Or, $\omega^M : h_M \circ F \xrightarrow{\sim} h_{A^{(M)}}$ est l'isomorphisme déduit du couple universel $(A^{(M)}, e_M)$; si l'on décode cette description, on trouve que ε_M est l'unique application A -linéaire telle

que $\varepsilon_M \circ e_M = \mathbf{1}_M$. Autrement dit, si $(e_x \mid x \in M)$ est la base canonique de $A^{(M)}$, on a $\varepsilon_M(e_x) = x$ pour tout $x \in M$.

Pour le foncteur d'oubli $F' : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ on raisonne de manière analogue : son adjoint à gauche est le foncteur qui associe à tout ensemble Λ la A -algèbre $C(A)[X_\Lambda]$, et on a exhibé une adjonction canonique pour ce couple de foncteurs ; son unité est l'application notée $\chi_\Lambda : \Lambda \rightarrow C(A)[X_\Lambda]$ dans l'exemple 2.6. La coïté se calcule comme dans le cas précédent : pour toute A -algèbre B , il s'agit de l'homomorphisme de A -algèbres $\varepsilon_B : C(A)[X_B] \rightarrow B$ avec $\varepsilon_B(X_b) = b$ pour tout $b \in B$.

En dernier lieu, l'adjoint à gauche du foncteur $\text{Ob} : \text{Cat} \rightarrow \text{Ens}$ associe à tout ensemble S la catégorie discrète $\mathcal{C}_S$, et on a encore une adjonction canonique pour ce couple de foncteurs ; un calcul direct montre alors que l'unité $\eta_S : S \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$ est l'application identique Id_S , et pour toute catégorie $\mathcal{B}$, la coïté $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ est l'unique foncteur $\mathcal{C}_{\text{Ob}(\mathcal{B})} \rightarrow \mathcal{B}$ dont l'application sous-jacente $\text{Ob}(\mathcal{C}_{\text{Ob}(\mathcal{B})}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ est l'application identique $\text{Id}_{\text{Ob}(\mathcal{B})}$.

Exercice 2.14, partie (i) : Pour tout $(X, X') \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}')$ on a la bijection

$$\psi_{X'}^X := \vartheta_{X'}^X \circ \omega_{X'}^{X^{-1}} : h_{HX}(X') \xrightarrow{\sim} h_{GX}(X')$$

et on voit aussitôt que pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ fixé, l'association : $X' \mapsto \psi_{X'}^X$, pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ définit un isomorphisme de foncteurs $\psi^X : h_{HX} \xrightarrow{\sim} h_{GX}$. Par le lemme de Yoneda, ce dernier est de la forme h_{ϕ_X} pour un isomorphisme unique $\phi_X : GX \xrightarrow{\sim} HX$. Il reste à montrer que $Hf \circ \phi_X = \phi_Y \circ Gf$ pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$. Pour cela, grâce à l'exemple 2.2(ii), il suffit de vérifier que $h_{\phi_X} \circ h_{Hf} = h_{Gf} \circ h_{\phi_Y}$, i.e. que $\psi_{X'}^X \circ h_{Hf, X'} = h_{Gf, X'} \circ \psi_{X'}^Y$, pour tout $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$. Mais cela est clair, car

$$h_{Gf} = \vartheta^X \circ (h_f * F) \circ \vartheta^{Y^{-1}} \quad h_{Hf} = \omega^X \circ (h_f * F) \circ \omega^{Y^{-1}}.$$

Partie (ii) : L'identité pour ε^ϑ et ε^ω découle aussitôt des définitions. Ensuite, puisque $\eta_X^\omega = \omega_{HX}^{X^{-1}}(\mathbf{1}_{HX})$, il vient $\vartheta_{HX}^X(\eta_X^\omega) = \phi_X$, d'où $\eta_X^\omega = \vartheta_{HX}^{X^{-1}}(\phi_X) = F(\phi_X) \circ \eta_X^\vartheta$, comme souhaité.

Partie (iii) : L'assertion revient à dire que l'on a

$$(*) \quad (\omega^{\text{op}})_Y^{X'}(G^{\text{op}}h \circ g \circ f) = h \circ (\omega^{\text{op}})_X^{Y'}(g) \circ F^{\text{op}}f$$

pour tout morphisme $g : Y' \rightarrow G^{\text{op}}X$, $f : X' \rightarrow Y'$ de $\mathcal{C}'^{\text{op}}$ et $h : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Mais $(*)$ est évidemment équivalente à l'identité correspondante pour ω .

Exercice 2.17, partie (i) : Soient ϑ, ϑ' des adjonctions pour (G, F) , respectivement (G', F') ; pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $Y'' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'')$ soit $\tau_{Y''}^X$ la composition

$$\mathcal{C}(X, FF'Y'') \xrightarrow{\vartheta_{F'Y''}^X} \mathcal{C}'(GX, F'Y'') \xrightarrow{\vartheta_{Y''}^{G'GX}} \mathcal{C}''(G'GX, Y'').$$

On vérifie aisément que le système $(\tau_{Y''}^X \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), Y'' \in \text{Ob}(\mathcal{C}''))$ est une adjonction pour $(G'G, FF')$: les détails seront laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Vérifions d'abord que la condition $\beta * F = \eta' * \varepsilon$ détermine β . En effet, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ il vient un diagramme commutatif de $\mathcal{C}'$:

$$\begin{array}{ccc} GX & \xrightarrow{G(\eta_X)} & GFGX \\ \beta_X \downarrow & & \downarrow \beta_{FGX} \\ HX & \xrightarrow{H(\eta_X)} & HFGX \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes, car G est plein et fidèle (proposition 2.16(iii)). Cela montre que $\beta * FG$ détermine β , d'où l'assertion. Plus précisément, le raisonnement montre que $\beta = (H * \eta^{-1}) \circ (\tau * G) * (G * \eta)$ si $\beta * F = \tau$. Montrons alors que $\beta := (H * \eta^{-1}) \circ (\eta' * G)$ vérifie l'identité souhaitée ; on calcule :

$$\beta * F = (H * \eta^{-1} * F) \circ (\eta' * GF) = (HF * \varepsilon) \circ (\eta' * GF) = \eta' * \varepsilon$$

par les identités triangulaires pour (η, η) (problème 2.13(ii)) et la relation d'échange (1.129(iii)). Noter que $\beta' := (\varepsilon * H) \circ (G * \varepsilon'^{-1})$ est une autre définition possible pour la transformation naturelle $G \rightarrow H$ souhaitée; mais un calcul analogue que l'on laissera au lecteur montre que $\beta' * F = \varepsilon * \eta'$, et on voit que $\varepsilon * \eta' = \eta' * \varepsilon$ par la relation d'échange, donc $\beta = \beta'$. En dernier lieu, on a :

$$F * \beta = (FH * \eta^{-1}) \circ (F * \eta' * G) = (FH * \eta^{-1}) \circ (\varepsilon'^{-1} * FG) = \varepsilon'^{-1} * \eta^{-1} = (\varepsilon' * \eta)^{-1}.$$

Exercice 2.21 : La solution de l'exercice 1.26(iv) montre que si T est séparé, alors Δ_T est une partie fermée de $T \times T$. Réciproquement, supposons que la diagonale soit fermée dans $T \times T$, et soient $x, y \in T$ deux points distincts; ainsi, $(x, y) \notin \Delta_T$, et par hypothèse il existe un voisinage ouvert U de (x, y) avec $U \cap \Delta_T = \emptyset$; mais U contient un produit $U_x \times U_y$, où U_x et U_y sont des voisinages de x et respectivement y . Il vient $U_x \cap U_y = \emptyset$, et cela montre que T est séparé.

Problème 2.25, partie (i) : Evidemment, si $\mathcal{F}$ est principal, $p_{i*}\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre principal pour tout $i \in I$. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$ il existe $t_i \in T_i$ tel que le filtre $p_{i*}\mathcal{F}$ soit contenu dans l'ultrafiltre principal des parties fermées contenant t_i ; on pose $t := (t_i \mid i \in I) \in T$, et il suffit de montrer que $t \in Z$ pour tout $Z \in \mathcal{F}$. Supposons par l'absurde que $Z \in \mathcal{F}$ et $t \notin Z$; alors il existe un ouvert fondamental U de T tel que $t \in U$ et $U \cap Z = \emptyset$. Disons que $U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} T_i = \prod_{j \in J} p_j^{-1} U_j$ pour une partie finie $J \subset I$ et des parties ouvertes $U_j \subset T_j$ pour chaque $j \in J$. Il vient $t_j \in U_j$ pour tout $j \in J$. D'autre part, par hypothèse on a aussi $Z \subset Z' := \bigcup_{j \in J} p_j^{-1}(T \setminus U_j)$, d'où $Z' \in \mathcal{F}$, et comme $\mathcal{F}$ est premier (proposition 1.137(ii)), il vient $p_j^{-1}(T \setminus U_j) \in \mathcal{F}$ pour quelque $j \in J$. Mais alors $T \setminus U_j \in p_{j*}\mathcal{F}$ et $t_j \notin T \setminus U_j$, contradiction.

Partie (ii) : Par l'axiome du choix (voir la section 1.3), les projections canoniques $T \rightarrow T_i$ sont surjectives; compte tenu de l'exercice 1.26(ii.c), il s'ensuit que si T est compact, chaque T_i est compact. Réciproquement, supposons que chaque T_i soit compact, et soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre de T ; par le lemme 1.135 et la proposition 1.137(i), le filtre $p_{i*}\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre principal pour tout $i \in I$. Compte tenu de (i), il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est principal, et donc T est compact, encore grâce à la proposition 1.137(i).

Partie (iii.a) : Soit $L \subset T := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} T_i$ la partie des suites cohérentes, définies comme dans l'exemple 2.22(i); on munit L de la topologie induite par l'inclusion $i : L \rightarrow T$. Donc, la restriction $v_i : L \rightarrow T_i$ de la projection canonique $p_i : T \rightarrow T_i$ est une application continue, et le système $(v_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ définit un cône de base $T_\bullet$ et sommet L . Soit ensuite $(\eta_i : X \rightarrow T_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un autre cône de base $T_\bullet$, et $f : X \rightarrow T$ l'unique application continue telle que $p_i \circ f = \eta_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$; d'après l'exemple 2.22(i) on a $f(X) \subset L$, et l'exercice 2.7(iv) nous dit alors que $f = i \circ g$ pour une (unique) application continue $g : X \rightarrow L$, et évidemment $v_i \circ g = \eta_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Cela achève de vérifier que $v_\bullet$ est un cône universel.

Partie (iii.b) : Soit chaque T_i de type T_0 , et soient $x_\bullet, y_\bullet \in L$ deux suites cohérentes distinctes; alors il existe $i \in \text{Ob}(I)$ tel que $x_i \neq y_i$, et on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert U de x_i dans T_i avec $y_i \notin U$. Alors $v_i^{-1}U$ est un voisinage de $x_\bullet$ dans L qui ne contient pas $y_\bullet$; cela montre que L est de type T_0 . De même, on vérifie que si chaque T_i est séparé, alors L est séparé. En dernier lieu, pour tout $\phi \in I(i, j)$ notons $Z_\phi \subset T$ la partie des suites $x_\bullet$ telles que $T_\phi \circ p_i(x_\bullet) = p_j(x_\bullet)$; par construction, $L = \bigcap_{i, j \in \text{Ob}(I)} \bigcap_{\phi: i \rightarrow j} Z_\phi$. Or, si T_j est séparé, la partie Z_ϕ est fermée dans T , par l'exercice 1.26(iv); au vu de (ii) et de l'exercice 1.26(ii.b), on conclut que si chaque T_i est séparé et compact, L est une partie fermée de l'espace compact T , donc L est compact et séparé.

Exercice 2.31, partie (i) : Evidemment la relation $\sim$ est réflexive et symétrique. Soient $(x, \lambda) \sim (x', \lambda')$ et $(x', \lambda') \sim (x'', \lambda'')$. On peut donc trouver $\mu, \mu' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et des

morphismes $\lambda \xrightarrow{f} \mu \xleftarrow{g} \lambda', \lambda' \xrightarrow{g'} \mu' \xleftarrow{f'} \lambda''$ de $\mathcal{C}$ tels que $Ff(x) = Fg(x')$ et $Fg'(x') = Ff'(x'')$. Comme $\mathcal{C}$ est filtrant, on peut ensuite trouver des morphismes $\mu \xrightarrow{h} \nu \xleftarrow{h'} \mu'$, et un morphisme $k : \nu \rightarrow \nu'$ avec $k \circ h \circ g = k \circ h' \circ g'$; quitte à remplacer ν, h, h' par $\nu', k \circ h, k \circ g'$, on peut ainsi supposer que $h \circ g = h' \circ g'$. La transitivité de $\sim$ découle alors des identités :

$$\begin{aligned} F(hf)(x) &= Fh \circ Ff(x) = Fh \circ Fg(x') = F(hg)(x') \\ &= F(h'g')(x') = Fh' \circ Fg'(x') = Fh' \circ Ff'(x'') = F(h'f')(x''). \end{aligned}$$

Partie (ii) : Soient X un ensemble, $(\psi_\lambda : F\lambda \rightarrow X \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ un co-cône de sommet X et base F . Il existe une unique application $\psi : S \rightarrow X$ telle que $\psi(x, \lambda) = \psi_\lambda(x)$ pour tout $(x, \lambda) \in S$, et on doit vérifier que ψ se factorise à travers la projection $S \rightarrow C$; cela revient à montrer que $\psi(x, \lambda) = \psi(x', \lambda')$ pour tout $(x, \lambda) \sim (x', \lambda')$. Cette condition veut dire qu'il existe des morphismes $\lambda \xrightarrow{f} \lambda'' \xleftarrow{g} \lambda'$ de $\mathcal{C}$ avec $Ff(x) = Fg(x')$; d'où :

$$\psi(x, \lambda) = \psi_\lambda(x) = \psi_{\lambda''} \circ Ff(x) = \psi_{\lambda''} \circ Fg(x') = \psi_{\lambda'}(x') = \psi(x', \lambda').$$

Partie (iii) : On définit une structure de A -module sur L par :

$$a \cdot [x, \lambda] := [ax, \lambda] \quad [x, \lambda] + [x', \lambda'] := [Mf(x) + Mg(x'), \lambda'']$$

pour tous $[x, \lambda], [x', \lambda'] \in L$ et tout $a \in A$, où $\lambda \xrightarrow{f} \lambda'' \xleftarrow{g} \lambda'$ sont deux morphismes quelconques de $\mathcal{C}$. Il faut évidemment vérifier que ces définitions sont indépendantes des choix auxiliaires. Or, si $[x, \lambda] = [y, \mu]$, par définition il existe des morphismes $\lambda \xrightarrow{h} \nu \xleftarrow{k} \mu$ de $\mathcal{C}$ avec $Mh(x) = Mk(y)$, d'où :

$$[ax, \lambda] = [Mh(ax), \nu] = [aMh(x), \nu] = [aMk(y), \nu] = [Mk(ay), \nu] = [ay, \mu]$$

et cela achève de montrer que notre multiplication scalaire est bien définie. Ensuite, si $\lambda \xrightarrow{f'} \lambda''' \xleftarrow{g'} \lambda'$ sont deux autres morphismes de $\mathcal{C}$, en raisonnant comme dans (i), on trouve des morphismes de $\mathcal{C}$:

$$\lambda''' \xrightarrow{h'} \gamma \xleftarrow{f'} \lambda'' \quad \text{tels que} \quad h \circ f = h' \circ f'$$

et quitte à remplacer h et h' par leur composition avec un autre morphisme $\gamma \rightarrow \gamma'$, on peut aussi supposer que $h \circ g = h' \circ g'$, d'où :

$$\begin{aligned} [Mf(x) + Mg(x'), \lambda''] &= [Mh(Mf(x) + Mg(x')), \gamma] \\ &= [M(hf)(x) + M(hg)(x'), \gamma] \\ &= [M(h'f')(x) + M(h'g')(x'), \gamma] \\ &= [Mh'(Mf'(x) + Mg'(x')), \gamma] = [Mf'(x) + Mg'(x'), \lambda''']. \end{aligned}$$

Donc notre loi d'addition est indépendante du choix de f et g . En dernier lieu, si $[x, \lambda] = [y, \mu]$, on choisit ν, h et k comme ci-dessus, puis on trouve des morphismes $\lambda'' \xrightarrow{f'} \delta \xleftarrow{h'} \nu$ de $\mathcal{C}$ tels que $f' \circ f = h' \circ h$; il vient :

$$\begin{aligned} [Mf(x) + Mg(x'), \lambda''] &= [Mf'(Mf(x) + Mg(x')), \delta] \\ &= [M(f'f)(x) + M(f'g)(x'), \delta] \\ &= [M(h'h)(x) + M(f'g)(x'), \delta] = [M(h'k)(y) + M(f'g)(x'), \delta] \end{aligned}$$

et cela montre que l'addition est indépendante du représentant choisi pour $[x, \lambda]$. De même on voit l'indépendance du choix du représentant pour $[x', \lambda']$, et cela achève de vérifier que notre loi d'addition est bien définie. On doit ensuite montrer que L , muni de ces opérations, est un A -module; vérifions l'associativité de l'addition, *i.e.* que $([x, \lambda] + [x', \lambda']) + [x'', \lambda''] = [x, \lambda] + ([x', \lambda'] + [x'', \lambda''])$ pour tous $[x, \lambda], [x', \lambda'], [x'', \lambda''] \in L$; mais par ce qui précède, on peut supposer que $\lambda = \lambda' = \lambda''$, et alors les deux côtés de cette identité sont égaux à $[x + x' + x'', \lambda]$, d'où l'assertion. De même on vérifie

aussitôt tous les autres axiomes, et on voit aussi aisément que cette structure de A -module est l'unique sur L telle que chaque u_λ soit A -linéaire. Or, soient P un A -module et $(g_\lambda : M(\lambda) \rightarrow P \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ un co-cône de base M ; on a une unique application ensembliste $g : L \rightarrow P$ telle que $g_\lambda = g \circ u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et cela revient aux identités :

$$g([m, \lambda]) = g_\lambda(m) \quad \forall [m, \lambda] \in L.$$

Par suite g est A -linéaire, donc $(u_\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ est bien un co-cône universel.

Partie (iv) : La partie (iii) nous a déjà fourni une structure de A -module sur C . Ensuite, pour $[b, \lambda], [b', \lambda'] \in C$, choisissons des morphismes $\lambda \xrightarrow{f} \mu \xleftarrow{g} \lambda'$, et posons

$$[b, \lambda] \cdot [b', \lambda'] := [Bf(b) \cdot Bg(b'), \mu].$$

On vérifie comme dans la preuve de (iii) que cette définition ne dépend pas des choix de μ, f et g : les détails sont laissés aux soins du lecteur. On a donc une loi de multiplication bien définie sur C . De plus, $[1, \lambda]$ (pour tout $\lambda \in \Lambda$) est une unité pour cette multiplication. Montrons par exemple l'associativité de cette loi : si $[b, \lambda], [b', \lambda'], [b'', \lambda''] \in C$, on peut supposer que $\lambda = \lambda' = \lambda''$; dans ce cas, on a

$$([b, \lambda] \cdot [b', \lambda]) \cdot [b'', \lambda] = [bb', \lambda] \cdot [b'', \lambda] = [bb'b'', \lambda] = [b, \lambda] \cdot ([b', \lambda] \cdot [b'', \lambda])$$

comme souhaité. Des arguments analogues montrent la commutativité de la multiplication, ainsi que la propriété distributive par rapport à l'addition du A -module C . Cela achève la construction de la A -algèbre C . Ensuite, évidemment chaque $u_\lambda : B(\lambda) \rightarrow C$ est un homomorphisme de A -algèbres. Or, soit D une A -algèbre commutative, et $k_\bullet := (k_\lambda : B(\lambda) \rightarrow D \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$ un co-cône de base B (donc, chaque k_λ est un homomorphisme de A -algèbres); en particulier, $k_\bullet$ est aussi un co-cône dans la catégorie des A -modules, et donc (iii) nous fournit un morphisme unique $k : C \rightarrow D$ de A -modules tel que $k_\lambda = k \circ u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Cela revient à dire que $k([b, \lambda]) = k_\lambda(b)$ pour tout $[b, \lambda] \in C$, et on déduit aisément que k est un homomorphisme de A -algèbres, CQFD.

Problème 2.32, partie (i) : supposons d'abord qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ avec $T_\lambda = \emptyset$; pour tout espace topologique $X \neq \emptyset$, on a alors $\text{Top}(X, T_\lambda) = \emptyset$, et en particulier, il n'existe aucun cône de base $(T_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ et sommet X . Cela implique aisément que la limite de $(T_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ est représentable par l'ensemble vide, i.e. $L = \emptyset$.

Réciproquement, soit $T_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et supposons par l'absurde que $L = \emptyset$. On pose $T := \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$, et $Z_{\lambda\mu} := \{x_\bullet \in T \mid f_{\lambda\mu}(x_\lambda) = x_\mu\}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, de sorte que $L = \bigcap_{\lambda < \mu} Z_{\lambda\mu}$; on a vu (problème 2.25(ii)) que T est compact et chaque $Z_{\lambda\mu}$ est une partie fermée de T (exercice 1.26(iv)). Par la propriété de l'intersection finie il existe alors des couples $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_k, \mu_k)$ d'éléments de Λ avec $\lambda_i < \mu_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$, tels que $Z_{\lambda_1\mu_1} \cap \dots \cap Z_{\lambda_k\mu_k} = \emptyset$. Or, par l'axiome du choix on trouve $t_\bullet \in T$; comme Λ est cofiltrant, on trouve aussi $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k$. On considère l'application

$$\phi : T_\lambda \rightarrow T \quad x \mapsto (\phi_\mu(x) \mid \mu \in \Lambda) \quad \text{avec} \quad \phi_\mu(x) := \begin{cases} f_{\lambda\mu}(x) & \text{si } \lambda \leq \mu \\ t_\mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit aisément que $\phi(T_\lambda) \subset Z_{\lambda_i\mu_i}$ pour tout $i = 1, \dots, k$; contradiction.

Partie (ii) : Remarquons d'abord que la question est bien posée : en effet, bien que $\phi : L \rightarrow L'$ dépende des choix de L et L' , ainsi que des choix auxiliaires des cônes universels $(v_\lambda : L \rightarrow T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(v'_\lambda : L' \rightarrow T'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, les propriétés catégoriques de ϕ sont indépendantes de ces choix : voir la remarque 2.29(vi) (et rappelons aussi que les surjections continues sont précisément les épimorphismes de la catégorie Top : voir l'exercice 1.119(iv)). En particulier, on peut supposer que $L \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ soit le sous-espace des suites cohérentes, et $\nu_\bullet$ soit le cône universel fourni par la solution du problème 2.25(iii), et de même pour L' et $\nu'_\bullet$. Or, soit $t_\bullet \in L'$ une suite cohérente, et

pour tout $\lambda \in \Lambda$ munissons $Z_\lambda := \phi_\lambda^{-1}(t_\lambda)$ de la topologie induite par l'inclusion dans T_λ ; évidemment

$$\phi^{-1}(t_\bullet) = L \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda.$$

Or, Z_λ est $\neq \emptyset$ compact et séparé pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc $\phi^{-1}(t_\bullet) \neq \emptyset$, grâce à (i).

Exercice 2.34, partie (i) : D'abord, on voit comme dans la solution du problème 2.32(ii) que la question est bien posée, *i.e.* les propriétés catégoriques de g ne dépendent pas des choix auxiliaires nécessaires pour le définir, grâce à la remarque 2.29(vi). Ainsi, fixons arbitrairement des cônes universels $\mu_\bullet$ pour F de sommet L , et $\mu'_\bullet$ pour F' de sommet L' ; ensuite, soient $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $\phi, \psi : X \rightarrow L$ deux morphismes tels que $g \circ \phi = g \circ \psi$. Il vient

$$\omega_i \circ \mu_i \circ \phi = \mu'_i \circ g \circ \phi = \mu'_i \circ g \circ \psi = \omega_i \circ \mu_i \circ \psi \quad \forall i \in \text{Ob}(I)$$

d'où $\mu_i \circ \phi = \mu_i \circ \psi$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, car chaque ω_i est un monomorphisme. Par l'universalité du cône $\mu_\bullet$, il vient $\phi = \psi$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Comme d'habitude, l'assertion duale admet la preuve duale. De façon équivalente, la partie (ii) découle de la partie (i) : il suffit de considérer les foncteurs $F^{\text{op}}, F'^{\text{op}} : I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ et la transformation naturelle $\omega^{\text{op}} : F'^{\text{op}} \rightarrow F^{\text{op}}$.

Exercice 2.35, partie (i) : Soient $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$; si Λ est filtrant, il existe $\lambda'' \in \Lambda$ tel que $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$, et comme Λ' est une partie cofinale, il existe aussi $\lambda''' \in \Lambda'$ tel que $\lambda''' \geq \lambda''$, donc Λ' est filtrant. Réciproquement, soit Λ' filtrant, et $\lambda, \lambda' \in \Lambda$; par hypothèse il existe $\mu, \mu' \in \Lambda'$ tels que $\mu \geq \lambda$ et $\mu' \geq \lambda'$. Puis, on a aussi $\mu'' \in \Lambda'$ tel que $\mu'' \geq \mu, \mu'$, d'où $\mu'' \geq \lambda, \lambda'$, *i.e.* Λ est filtrant.

Parties (ii, iii) : Soit $h'_\bullet := (h'_\lambda : F'\lambda \rightarrow D \mid \lambda \in \Lambda')$ un co-cône de base F' ; on va prolonger $h'_\bullet$ en un co-cône $h_\bullet$ de base F et sommet D , comme suit. Evidemment, on pose $h_\lambda := h'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda'$; ensuite, pour chaque $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$ on choisit $\lambda' \in \Lambda'$ tel que $\lambda' > \lambda$, et on pose $h_\lambda := h'_\lambda \circ F_{\lambda\lambda'}$, où $F_{\lambda\lambda'} : F\lambda \rightarrow F\lambda'$ est le morphisme de transition. Montrons que h_λ ne dépend pas du choix de λ' ; en effet, si l'on a aussi $\lambda'' > \lambda$ pour un deuxième élément $\lambda'' \in \Lambda'$, la partie (i) nous dit que l'on peut trouver $\lambda''' \in \Lambda'$ tel que $\lambda''' \geq \lambda', \lambda''$, et on calcule :

$$h'_\lambda \circ F_{\lambda\lambda'} = h'_{\lambda'''} \circ F_{\lambda'\lambda'''} \circ F_{\lambda\lambda'} = h'_{\lambda'''} \circ F_{\lambda\lambda'''}.$$

De même on voit que $h'_{\lambda''} \circ F_{\lambda\lambda''} = h'_{\lambda'''} \circ F_{\lambda\lambda''}$, d'où l'assertion. Il s'ensuit aussitôt que $h_\bullet$ est bien un co-cône, et la construction montre qu'il s'agit de l'unique co-cône de base F et sommet D qui prolonge $h'_\bullet$. Or, soient $\eta' : F' \rightarrow c_L$ un co-cône universel, et $\eta : F \rightarrow c_L$ son unique prolongement; soient en outre $\tau : F \rightarrow c_D$ un autre co-cône, et $\tau' : F' \rightarrow c_D$ sa restriction. Il existe un unique morphisme $f : L \rightarrow D$ de $\mathcal{B}$ tel que $\tau' = c_f \circ \eta'$, et par l'unicité du prolongement, il vient $\tau = c_f \circ \eta$, donc η est universel. Réciproquement, soient $\eta : F \rightarrow c_L$ un co-cône universel, $\eta' : F' \rightarrow c_L$ sa restriction, et $\tau' : F' \rightarrow c_D$ un autre co-cône; si $\tau : F \rightarrow c_D$ est l'unique prolongement de τ' , il existe un unique morphisme $f : L \rightarrow D$ avec $\tau = c_f \circ \eta$, d'où $\tau' = c_f \circ \eta'$, et cela montre que η' est universel. La partie (iv) découle aussitôt de (ii) et (iii), par dualité.

Exercice 2.41 : D'après la proposition 2.40, il suffit de vérifier que l'égaliseur de tout couple $f, g : A \rightarrow B$ de morphismes de $\mathcal{C}$ est représentable. Pour cela, puisque par hypothèse les produits finis sont représentables dans $\mathcal{C}$, notons par

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$$

les projections canoniques, et soient $f', g' : A \rightarrow A \times B$ les uniques morphismes tels que $p_A \circ f' = p_A \circ g' = 1_A$, $p_B \circ f' = f$, et $p_B \circ g' = g$. Noter que f' et g' sont des

monomorphismes (exercice 1.119(i)), donc l'égaliseur de f' et g' est représentable dans $\mathcal{C}$ par un morphisme $q : K \rightarrow A$ tel que $f' \circ q = g' \circ q$; il vient

$$f \circ q = p_B \circ f' \circ q = p_B \circ g' \circ q = g \circ q.$$

Ensuite, soit $h : X \rightarrow A$ un morphisme tel que $f \circ h = g \circ h$; il vient $p_A \circ f' \circ h = h = p_A \circ g' \circ h$ et $p_B \circ f' \circ h = f \circ h = g \circ h = p_B \circ g' \circ h$, d'où $f' \circ h = g' \circ h$, donc il existe un unique morphisme $k : X \rightarrow K$ tel que $q \circ k = h$, et cela achève de montrer que $q : K \rightarrow A$ est l'égaliseur de f et g . L'assertion duale admet, comme toujours, la preuve duale.

Exercice 2.42 : On reprend les notations de la preuve de la proposition 2.40, dans laquelle on a exhibé un représentant E pour la limite de $\phi : I \rightarrow \mathcal{C}$, avec son cône universel $(\pi_i^P \circ \varepsilon : E \rightarrow \phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$. Par hypothèse, $F\varepsilon : FE \rightarrow FP$ est un égaliseur des morphismes $F\alpha, F\beta : FP \rightarrow FQ$, et les cônes

$$(F\pi_i^P : FP \rightarrow FP_i \mid i \in \text{Ob}(I)) \quad \text{et} \quad F\pi_{(i,j,f)}^Q : FQ \rightarrow FQ_{(i,j,f)} \mid (i,j,f) \in M$$

sont universels. Or, soit $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$; en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 2.40, on déduit une bijection naturelle :

$$\mathcal{C}'(X', FE) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(c_{X'}, F\phi) \quad f \mapsto (F(\pi_i^P \circ \varepsilon) \circ f : X' \rightarrow F\phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I)).$$

Donc le cône $(F(\pi_i^P \circ \varepsilon) : FE \rightarrow F\phi(i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ est universel, d'où l'assertion.

Exercice 2.43 : Pour $i = 1, 2$, soit $X_i := (A_i, f_i : FA_i \rightarrow B)$ un objet de $F\mathcal{A}/B$. Puisque $\mathcal{A}$ est finiment cocomplète, la somme directe $A := A_1 \amalg A_2$ est représentable dans $\mathcal{A}$; soit $(g_i : A_i \rightarrow A \mid i = 1, 2)$ un co-cône universel. Puisque F est exact à droite, le co-cône $(Fg_i : FA_i \rightarrow FA \mid i = 1, 2)$ est encore universel, donc il existe un unique morphisme $f : FA \rightarrow B$ tel que $f \circ Fg_i = f_i$ pour $i = 1, 2$; par suite $X := (A, f) \in \text{Ob}(F\mathcal{A}/\mathcal{B})$ et $g_i : X_i \rightarrow X$ est un morphisme de $F\mathcal{A}/\mathcal{B}$, pour $i = 1, 2$. Ensuite, soient $h_1, h_2 : X_1 \rightarrow X_2$ deux morphismes de $F\mathcal{A}/B$; donc $h_i : A_1 \rightarrow A_2$ est un morphisme de $\mathcal{A}$, avec $f_2 \circ Fh_i = f_1$ pour $i = 1, 2$. Par hypothèse, le coégaliseur A' de h_1 et h_2 est représentable dans $\mathcal{A}$, et soit $k : A_2 \rightarrow A'$ un co-cône universel; puisque F est exact à droite, FA' est le coégaliseur de Fh_1 et Fh_2 , avec co-cône universel $Fk : FA_2 \rightarrow FA'$. Comme $f_2 \circ Fh_1 = f_2 \circ Fh_2$, on a alors un unique morphisme $h : FA' \rightarrow B$ tel que $f_2 = h \circ Fk$; ainsi, $X' := (A', h) \in \text{Ob}(F\mathcal{A}/B)$ et $k : X_2 \rightarrow X'$ est un morphisme de $F\mathcal{A}/B$ avec $k \circ h_1 = k \circ h_2$.

Problème 2.45, partie (i) : Puisque Λ est filtrant, pour toute partie finie $S \subset \Lambda$ on peut choisir $\lambda(S) \in \Lambda$ tel que $\lambda(S) \geq \mu$ pour tout $\mu \in S$. Or, rappelons que la cardinalité α d'un ensemble infini est un ordinal limite (voir la remarque 2.9(ii); voir aussi [17, §II.7] pour les bases de la théorie des nombres cardinaux); par suite, Λ est la réunion d'une famille $(U_\beta \mid \beta \in \Sigma)$ de ses parties, indexée par le segment initial $\Sigma := \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ des ordinaux $< \alpha$, avec $U_\beta \subset U_\gamma$ pour tous $\beta, \gamma \in \Sigma$ tels que $\beta \leq \gamma$. Si $\alpha = \aleph_0$, on a $\Sigma = \mathbb{N}$, et chaque U_β est une partie finie; posons alors par récurrence $\Lambda_0 := U_0 \cup \{\lambda(U_0)\}$, et $\Lambda_{n+1} := U_{n+1} \cup \Lambda_n \cup \{\lambda(U_{n+1} \cup \Lambda_n)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, chaque partie Λ_n admet un élément maximal unique, donc est trivialement filtrante, et $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$. Soit alors $\alpha > \aleph_0$; pour toute partie $S \subset \Lambda$, soit $\mathcal{F}(S)$ l'ensemble des parties finies de S , et posons $S^* := S \cup \{\lambda(T) \mid T \in \mathcal{F}(S)\}$. Pour toute telle S , définissons par récurrence $S_0 := S$ et $S_{n+1} := (S_n)^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; noter que $S^\dagger := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est un ensemble filtrant, pour tout tel S . Ensuite, on définit par récurrence transfinie : $\Lambda_0 := U_0^\dagger$, $\Lambda_{\beta+1} := (U_{\beta+1} \cup \Lambda_\beta)^\dagger$ pour tout $\beta < \alpha$, et $\Lambda_\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} \Lambda_\beta$ pour tout ordinal limite $\gamma < \alpha$. On vérifie aisément que la cardinalité de chaque Λ_β est $< \alpha$, et évidemment $\Lambda = \bigcup_{\beta < \alpha} \Lambda_\beta$, comme souhaité.

Partie (ii) : Soit $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant d'objets de $\mathcal{A}$. Pour tout ordinal β , soit $\mathcal{F}_\beta$ l'ensemble des parties $S \subset \Lambda$ de cardinalité $\leq \beta$, telles que $(S, \leq)$ soit un ensemble filtrant, pour l'ordre $\leq$ hérité de Λ . Montrons, par récurrence transfinie, que

pour tout β et tout $S \in \mathcal{F}_\beta$, la catégorie $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}_S$ -cocomplète. Si $\beta < \aleph_0$, tout $S \in \mathcal{F}_\beta$ est un ensemble fini, donc S admet un élément maximal λ_0 , de sorte que $\{\lambda_0\}$ est une partie totalement bien ordonnée et cofinale dans S , et l'assertion découle de l'exercice 2.35(ii). Si $\beta = \gamma + 1$ pour un ordinal γ , on a $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_\gamma$, donc l'assertion est déjà connue par hypothèse de récurrence. Soit alors β un ordinal limite, et $S \in \mathcal{F}_\beta$; dans ce cas, (i) montre que $S = \bigcup_{t \in \Sigma} S_t$ pour une famille $(S_t \mid t \in \Sigma)$ de parties filtrantes de cardinalité $< \beta$, indexés par un ensemble bien ordonné Σ . Par hypothèse de récurrence, il existe alors pour tout $t \in \Sigma$ un co-cône universel $(\tau_\lambda^t : A_\lambda \rightarrow L^t \mid \lambda \in S_t)$ de $\mathcal{A}$. Si $t, u \in \Sigma$ et $t \leq u$, on a $S_t \subset S_u$, d'où un unique morphisme $f_{tu} : L^t \rightarrow L^u$ de $\mathcal{A}$ tel que $\tau_\lambda^u = f_{tu} \circ \tau_\lambda^t$ pour tout $\lambda \in S_t$. On obtient ainsi un système $L^\bullet := (L^t \mid t \in \Sigma)$ d'objets de $\mathcal{A}$, indexés par Σ ; par hypothèse, la colimite de $L^\bullet$ est représentable par un objet L de $\mathcal{A}$, et on choisit un co-cône universel $(\rho_t : L^t \rightarrow L \mid t \in \Sigma)$. Pour tout $\lambda \in S$, prenons aussi $t(\lambda) \in \Sigma$ tel que $\lambda \in S_{t(\lambda)}$, et posons $\phi_\lambda := \rho_{t(\lambda)} \circ \tau_\lambda^{t(\lambda)} : A_\lambda \rightarrow L$; on voit aisément que le système $(\phi_\lambda \mid \lambda \in S)$ est un co-cône $\phi_\bullet : A_\bullet \rightarrow c_L$ indépendant des choix auxiliaires des $t(\lambda)$, et par inspection directe des constructions, on vérifie aussitôt qu'il s'agit d'un co-cône universel : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (iii) : Gardons la notation de la solution de (ii); par récurrence transfinie, il suffit de montrer que pour tout ordinal β et tout $S \in \mathcal{F}_\beta$, le foncteur F commute avec la colimite du système $(A_\lambda \mid \lambda \in S)$. Cela est évident si $\beta < \aleph_0$, et aussi si β est un ordinal successeur, par hypothèse de récurrence. Soit alors β un ordinal limite, et écrivons $S = \bigcup_{t \in \Sigma} S_t$ comme ci-dessus. Par hypothèse de récurrence, le co-cône $(F\tau_\lambda^t : FA_\lambda \rightarrow FL^t \mid \lambda \in S_t)$ est universel, pour tout $t \in \Sigma$; on déduit aisément qu'il en est de même pour le co-cône $(F\phi_\lambda : FA_\lambda \rightarrow FL \mid \lambda \in S)$.

Problème 2.51, partie (i) : Soit

$$\text{Dis} : \text{Ens} \rightarrow \text{Top} \quad S \mapsto (S, \mathcal{T}_S^d)$$

le foncteur qui munit tout ensemble S de sa topologie discrète $\mathcal{T}_S^d$, et associe à toute application $f : S \rightarrow S'$ la même application $f : (S, \mathcal{T}_S^d) \rightarrow (S', \mathcal{T}_{S'}^d)$. Evidemment $S = \text{Ou} \circ \text{Dis}(S)$ pour tout ensemble S , et on pose $\eta_S := \text{Id}_S : S \rightarrow \text{Ou} \circ \text{Dis}(S)$. De plus, l'identité Id_T est une application continue $\varepsilon_{(T, \mathcal{T})} : \text{Dis} \circ \text{Ou}(T, \mathcal{T}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ pour tout $(T, \mathcal{T}) \in \text{Ob}(\text{Top})$. Avec ces notations, on voit aisément que les systèmes $(\eta_S \mid S \in \text{Ob}(\text{Ens}))$ et $(\varepsilon_{(T, \mathcal{T})} \mid (T, \mathcal{T}) \in \text{Ob}(\text{Top}))$ sont des transformations naturelles

$$\eta : \mathbf{1}_{\text{Ens}} \rightarrow \text{Ou} \circ \text{Dis} \quad \text{et respectivement} \quad \varepsilon : \text{Dis} \circ \text{Ou} \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Top}}$$

et les identités triangulaires du problème 2.13 sont trivialement vérifiées; le problème 2.13(iii) nous dit alors que Dis est adjoint à gauche de Ou . De même, soit

$$\text{Ch} : \text{Ens} \rightarrow \text{Top} \quad S \mapsto (S, \mathcal{T}_S^c)$$

le foncteur qui munit chaque ensemble S de sa *topologie chaotique* $\mathcal{T}_S^c := \{\emptyset, S\}$. On pose $\varepsilon'_S := \text{Id}_S : \text{Ou} \circ \text{Ch}(S) \rightarrow S$ pour tout ensemble S . De plus, l'identité Id_T est une application continue $\eta'_{(T, \mathcal{T})} : (T, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Ch} \circ \text{Ou}(T, \mathcal{T})$ pour tout espace topologique $(T, \mathcal{T})$. En dernier lieu, on voit trivialement que les systèmes $(\varepsilon'_S \mid S \in \text{Ob}(\text{Ens}))$ et $(\eta'_{(T, \mathcal{T})} \mid (T, \mathcal{T}) \in \text{Ob}(\text{Top}))$ définissent des transformations naturelles $\varepsilon' : \text{Ou} \circ \text{Ch} \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Ens}}$ et $\eta' : \mathbf{1}_{\text{Top}} \rightarrow \text{Ch} \circ \text{Ou}$, et le couple (η', ε') vérifie les identités triangulaires du problème 2.13; donc, Ch est adjoint à droite de Ou .

Montrons ensuite que Ens est cocomplète; on sait déjà que les sommes directes de Ens sont représentables (exemple 2.26(i)), et d'après la proposition 2.40, il nous reste à représenter les coégaliseurs de tout couple d'applications $f, g : S \rightarrow S'$. Pour cela, soit $C := S'/R$, où $R \subset S \times S'$ dénote la plus petite relation d'équivalence contenant $\{(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$, et notons par $\pi : S' \rightarrow C$ la projection canonique; on voit aisément que (C, π) est un coégaliseur de (f, g) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

En dernier lieu, montrons que $\mathbf{Top}$ est cocomplète. On doit représenter les sommes directes et les coégaliseurs de $\mathbf{Top}$. Soit alors $((T_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I)$ une famille d'espaces topologiques, notons par $T := \coprod_{i \in I} T_i$, l'union disjointe des ensembles sous-jacents, et par $j_i : T_i \rightarrow T$ l'inclusion canonique, pour tout $i \in I$; on a déjà remarqué que le foncteur d'oubli $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute avec toute colimite représentable de $\mathbf{Top}$, donc si la somme directe des espaces $(T_i, \mathcal{T}_i)$ est représentable, on doit pouvoir trouver une topologie $\mathcal{T}$ sur T telle que $(T, \mathcal{T})$ représente cette somme directe, et de plus, les applications $j_i : (T_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ seront continues, et fourniront un co-cône universel. On voit aisément qu'il suffit de prendre pour $\mathcal{T}$ la topologie de T engendrée par la base

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i \in I} \{j_i U \mid U \in \mathcal{T}_i\}$$

(les détails seront confiés aux soins du lecteur). De même, soient $f, g : (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S', \mathcal{T}')$ deux applications continues, et notons par (C, π) le coégaliseur des morphismes $f, g : S \rightarrow S'$ de $\mathbf{Ens}$ sous-jacents, exhibé ci-dessus; munissons C de la topologie $\mathcal{T}_C$ induite par $\mathcal{T}'$ via π ; on voit aisément que $((C, \mathcal{T}_C), \pi)$ représente le coégaliseur de (f, g) .

Partie (ii) : Soient $(\Lambda, \leq)$ un ensemble cofiltrant, A la colimite d'un système d'anneaux $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$, et X la limite du système $(\text{Spec } A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'espaces topologiques; d'après l'exercice 2.31(iv), on peut représenter A par l'anneau des classes d'équivalence $[\lambda, a]$ des couples (λ, a) avec $\lambda \in \Lambda$ et $a \in A_\lambda$, et soit aussi $(j_\lambda : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel correspondant, i.e. $j_\lambda(a) := [\lambda, a]$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $a \in A_\lambda$. D'autre part, X est représenté par l'ensemble des suites cohérentes $(\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ avec $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Spec } A_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, muni de la topologie induite par l'inclusion $X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spec } A_\lambda$ (voir le problème 2.25(iii)); le cône universel est constitué des restrictions $\pi_\lambda : X \rightarrow \text{Spec } A_\lambda$ des projections naturelles, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Le système d'applications continues $(\text{Spec } j_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un cône de sommet $\text{Spec } A$, donc il existe une application continue unique

$$\omega : \text{Spec } A \rightarrow X \quad \text{telle que} \quad \pi_\lambda \circ \omega = \text{Spec } j_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

et l'assertion revient à montrer que ω est un homéomorphisme. Vérifions d'abord la surjectivité de ω : soit $(\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in X$ une suite cohérente d'idéaux premiers, donc si $\lambda, \mu \in \Lambda$ et $\lambda \leq \mu$, on a $j_{\lambda\mu}^{-1} \mathfrak{p}_\mu = \mathfrak{p}_\lambda$, où $j_{\lambda\mu} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ dénote l'homomorphisme d'anneaux correspondant; notons par $\mathfrak{p} \subset A$ l'ensemble de toutes les classes $[\lambda, a]$ avec $\lambda \in \Lambda$ arbitraire et $a \in \mathfrak{p}_\lambda$. On voit aisément que $\mathfrak{p}$ est un idéal de A . Montrons que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier : soient $[\lambda, a], [\lambda', b] \in A$ avec $[\lambda, a] \cdot [\lambda', b] \in \mathfrak{p}$, autrement dit, il existe $\lambda'' \in \Lambda$ et $c \in \mathfrak{p}_{\lambda''}$ tels que $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$ et $j_{\lambda\lambda''}(a) \cdot j_{\lambda'\lambda''}(b) = c$, d'où $j_{\lambda\lambda''}(a) \in \mathfrak{p}_{\lambda''}$ ou $j_{\lambda'\lambda''}(b) \in \mathfrak{p}_{\lambda''}$, i.e. $[\lambda, a] \in \mathfrak{p}$ ou $[\lambda', b] \in \mathfrak{p}$, d'où l'assertion. Montrons ensuite que $j_\lambda^{-1} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$: en effet, si $a \in j_\lambda^{-1} \mathfrak{p}$, on a $[\lambda, a] \in \mathfrak{p}$, donc il existe $\lambda' \geq \lambda$ tel que $j_{\lambda\lambda'}(a) \in \mathfrak{p}_{\lambda'}$, d'où l'assertion. Cela achève de montrer la surjectivité de ω . Pour l'injectivité, soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$ tels que $j_\lambda^{-1} \mathfrak{p} = j_\lambda^{-1} \mathfrak{p}'$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et soit $[\lambda, a] \in \mathfrak{p}$; cela veut dire que $a \in j_\lambda^{-1} \mathfrak{p}$, donc $a \in j_\lambda^{-1} \mathfrak{p}'$, i.e. $[a, \lambda] \in \mathfrak{p}'$, d'où $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, et en échangeant les rôles de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ on obtient de même l'inclusion réciproque. Donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, d'où l'assertion.

Pour conclure, il reste à montrer que la topologie de $\text{Spec } A$ est moins fine que celle induite par X via ω . Pour cela, il suffit de vérifier l'identité :

$$D([\lambda, a]) = \omega^{-1}(\pi_\lambda^{-1} D(a)) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall a \in A_\lambda.$$

C'est un calcul direct : $\omega^{-1}(\pi_\lambda^{-1} D(a)) = (\text{Spec } j_\lambda)^{-1} D(a) = D(j_\lambda(a)) = D([\lambda, a])$.

Exercice 2.53, partie (i) : Soient $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, $\tau := (\tau_i : L \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel, et $\beta := (\beta_j : X \rightarrow F(\phi j) \mid j \in \text{Ob}(J))$ un cône de base $F \circ \phi : J \rightarrow \mathcal{C}$. Soient en outre $\psi : I \rightarrow J$ un adjoint à droite pour ϕ , et $(\eta : \mathbf{1}_J \rightarrow \psi \circ \phi, \varepsilon : \phi \circ \psi \rightarrow \mathbf{1}_I)$ l'unité et la coïté d'une adjonction pour le couple (ϕ, ψ) . Alors $(F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi) := (F(\varepsilon_i) \circ \beta_{\psi(i)} : X \rightarrow Fi \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un cône de base F , et alors il existe un unique

morphisme $f : X \rightarrow L$ de $\mathcal{C}$ tel que

$$\tau \circ c_f = (F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi).$$

Il vient $(\tau * \phi) \circ c_f = (\tau \circ c_f) * \phi = ((F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi)) * \phi = (F * \varepsilon * \phi) \circ (\beta * \psi * \phi)$. Mais noter que :

$$F(\varepsilon_{\phi(j)}) \circ \beta_{\psi\phi(j)} = F(\varepsilon_{\phi(j)}) \circ F(\phi(\eta_j)) \circ \beta_j = F(\varepsilon_{\phi(j)} \circ \phi(\eta_j)) \circ \beta_j = \beta_j$$

en vertu des identités triangulaires du problème 2.13(ii); par suite, $(\tau * \phi) \circ c_f = \beta$. Soit ensuite $g : X \rightarrow L$ un autre morphisme de $\mathcal{C}$ avec $(\tau * \phi) \circ c_g = \beta$; il vient $(F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi) = (F * \varepsilon) \circ (\tau * \phi * \psi) \circ c_g$. Mais noter que $(F * \varepsilon) \circ (\tau * \phi * \psi) = \tau$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), d'où $(F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi) = \tau \circ c_g$; de même, $(F * \varepsilon) \circ (\beta * \psi) = \tau \circ c_f$, i.e. $\tau \circ c_f = \tau \circ c_g$, donc $f = g$, par l'universalité de τ . Cela achève de vérifier que $\tau * \phi$ est universel. La partie (ii) découle aussitôt de (i).

Partie (iii) : L'unique foncteur $I \rightarrow J$ est évidemment adjoint à gauche (resp. à droite) de l'inclusion $J \rightarrow I$, donc l'assertion suit de (i) et (ii).

Partie (iv) : L'assertion découle aussitôt de l'exercice 2.35(iii,iv).

Problème 2.59, partie (i) : Pour définir le foncteur $\text{Colim}_J : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ on doit choisir pour tout foncteur $\phi : J \rightarrow \mathcal{C}$ un objet C^ϕ de $\mathcal{C}$ représentant $\text{colim}_J \phi$, ainsi qu'un co-cône universel $(\eta_j^\phi : \phi(j) \rightarrow C^\phi \mid j \in \text{Ob}(J))$. Ensuite, le foncteur $\text{Colim}_J'' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est déterminé, *mutatis mutandis*, comme dans la preuve du lemme 2.55. Toutefois, on va considérer ici plus généralement des adjoints à gauche et respectivement à droite *arbitraires* des foncteurs c_J'' et c_I' :

$$C_J'' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \quad L_I' : \text{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C}).$$

Comme expliqué dans la (duale de la) remarque 2.54(ii), pour tout $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$, l'objet $C_J''(F)$ de $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ représente la colimite du foncteur $F'' : J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$, et l'unité $\tilde{\eta} : \mathbf{1}_{\text{Fun}(I \times J, \mathcal{C})} \rightarrow c_J'' \circ C_J''$ d'une adjonction pour le couple (C_J'', c_J'') fournit un co-cône universel $(\tilde{\eta}_j^F : F''j \rightarrow C_J''F \mid j \in \text{Ob}(J))$. De même, $L_I'(F)$ représente la limite de $F' : I \rightarrow \text{Fun}(J, \mathcal{C})$, et la coïmité $\tilde{\varepsilon} : c_I' \circ L_I' \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Fun}(I \times J, \mathcal{C})}$ d'une adjonction pour (c_I', L_I') fournit un cône universel $(\tilde{\varepsilon}_i^F : L_I'F \rightarrow F'i \mid i \in \text{Ob}(I))$. Pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$ on en déduit des morphismes $\tilde{\eta}_{ji}^F : F(i, j) \rightarrow (C_J''F)(i)$ et $\tilde{\varepsilon}_{ij}^F : (L_I'F)(j) \rightarrow F(i, j)$. Avec cette notation, on pose :

$$t := \tilde{\eta} \circ \tilde{\varepsilon} : c_I' \circ L_I' \rightarrow c_J'' \circ C_J''.$$

Pour tout foncteur $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$, l'adjonction canonique pour le couple (c_I', Lim_I') exhibée dans la preuve du lemme 2.55 associée à t_F une transformation naturelle

$$L_I'(F) \rightarrow \text{Lim}_I' \circ c_J'' \circ C_J''(F) = c_J \circ \text{Lim}_I \circ C_J''(F).$$

A cette dernière, l'adjonction canonique pour (Colim_J, c_J) associe un morphisme

$$\tau_F : \text{Colim}_J \circ L_I'(F) \rightarrow \text{Lim}_I \circ C_J''(F).$$

Explicitement, τ_F est caractérisé par les identités :

$$\varepsilon_i^{C_J''F} \circ \tau_F \circ \eta_j^{L_I'F} = \tilde{\eta}_{ji}^F \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F \quad \forall (i, j) \in \text{Ob}(I \times J).$$

Il reste à montrer que l'association $F \mapsto \tau_F$ définit une transformation naturelle. Soit donc $\omega : F \rightarrow G$ une transformation naturelle de foncteurs $F, G : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$; on doit vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Colim}_J(L_I'F) & \xrightarrow{\tau_F} & \text{Lim}_I(C_J''F) \\ \text{Colim}_J(L_I'\omega) \downarrow & & \downarrow \text{Lim}_I(C_J''\omega) \\ \text{Colim}_J(L_I'G) & \xrightarrow{\tau_G} & \text{Lim}_I(C_J''G). \end{array}$$

Cela revient à prouver les identités suivantes, pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$:

$$\Phi := \varepsilon_i^{C_J''G} \circ \text{Lim}_I(C_J''\omega) \circ \tau_F \circ \eta_j^{L_I'F} = \Psi := \varepsilon_i^{C_J''G} \circ \tau_G \circ \text{Colim}_J(L_I'\omega) \circ \eta_j^{L_I'F}.$$

C'est un calcul direct :

$$\begin{aligned} \Phi &= (C_J''\omega)_i \circ \varepsilon_i^{C_J''F} \circ \tau_F \circ \eta_j^{L_I'F} = (C_J''\omega)_i \circ \tilde{\eta}_{ji}^F \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F = \tilde{\eta}_{ji}^G \circ \omega_{ji}' \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F \\ &= \tilde{\eta}_{ji}^G \circ \omega_{ji}' \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F \\ &= \tilde{\eta}_{ji}^G \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^G \circ (L_I'\omega)_j \\ &= \varepsilon_i^{C_J''G} \circ \tau_G \circ \eta_j^{L_I'F} \circ (L_I'\omega)_j = \Psi. \end{aligned}$$

Remarque 2.112. La construction de τ dépend, comme d'habitude, de plusieurs choix, mais les propriétés catégoriques de τ sont intrinsèques : en effet, soient

$$\text{Lim}_I^* : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{Colim}_J^* : \text{Fun}(J, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

des autres choix d'adjoint à droite de c_I et respectivement à gauche de c_J , et soit ϑ^* une adjonction pour le couple (c_I, Lim_I^*) ; la coïtité ε^* de ϑ^* fournit un choix alternatif de cônes universels $(\varepsilon_i^{*F} : \text{Lim}_I^* F \rightarrow F_i \mid i \in \text{Ob}(I))$, pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$. Suivant l'exercice 2.14(i), il existe un isomorphisme de foncteurs unique $\alpha : \text{Lim}_I^* \xrightarrow{\sim} \text{Lim}_I$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Nat}(c_X, F) & \\ \vartheta_F^{*X} \nearrow & & \nwarrow \vartheta_F^X \\ \mathcal{C}(X, \text{Lim}_I^* F) & \xrightarrow{h_X(\alpha_F)} & \mathcal{C}(X, \text{Lim}_I F) \end{array}$$

commute pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $F : I \rightarrow \mathcal{C}$. En prenant $X := \text{Lim}_I^* F$, il s'ensuit aisément que $\varepsilon_i^{*F} = \varepsilon_i^F \circ \alpha_F$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ (détails laissés aux soins du lecteur). De même, l'unité η^* d'une adjonction pour le couple (Colim_J^*, c_J) donne un système alternatif de co-cônes universels $(\eta_j^{*G} : G_j \rightarrow \text{Colim}_J^* G \mid j \in \text{Ob}(J))$ pour tout $G : J \rightarrow \mathcal{C}$, et il existe un isomorphisme $\beta : \text{Colim}_J \xrightarrow{\sim} \text{Colim}_J^*$ tel que $\eta_j^{*G} = \beta_G \circ \eta_j^G$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$. Or, si dans la construction ci-dessus de τ on remplace Lim_I et Colim_J par ces nouveaux foncteurs, on obtiendra une transformation naturelle différente $\tau^* : \text{Colim}_J^* \circ L_I' \rightarrow \text{Lim}_I^* \circ C_J''$, caractérisée par les identités : $\varepsilon_i^{C_J''F} \circ \tau_F^* \circ \eta_j^{L_I'F} = \tilde{\eta}_{ji}^F \circ \tilde{\varepsilon}_{ij}^F$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$. On conclut que

$$\tau_F = \alpha C_J''F \circ \tau_F^* \circ \beta L_I'F.$$

De même, si l'on remplace plutôt L_I' et C_J'' par un autre adjoint à droite $L_I'^*$ de c_I' et respectivement un autre adjoint à gauche $C_J''^*$ de c_J' , la coïtité $\tilde{\varepsilon}^*$ (resp. l'unité $\tilde{\eta}^*$) d'une adjonction pour le couple $(c_I', L_I'^*)$ (resp. $(C_J''^*, c_J')$) nous donne des choix alternatifs de cônes universels $(\tilde{\varepsilon}_i^{*F} : L_I'^* F \rightarrow F_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ (resp. co-cônes universels $(\tilde{\eta}_j^{*F} : F_j \rightarrow C_J''^* \mid j \in \text{Ob}(J))$), et il existe des isomorphismes de foncteurs $\gamma : L_I'^* \xrightarrow{\sim} L_I'$ et $\mu : C_J'' \xrightarrow{\sim} C_J''^*$ tels que $\tilde{\varepsilon}_i^{*F} = \tilde{\varepsilon}_i^F \circ \gamma_F$ et $\tilde{\eta}_j^{*F} = \mu_F \circ \tilde{\eta}_j^F$ pour tout $(i, j) \in \text{Ob}(I \times J)$. Si $\tau^* : \text{Colim}_J \circ L_I' \rightarrow \text{Lim}_I \circ C_J''$ est la transformation naturelle correspondante, il vient

$$\tilde{\eta}_j^{*F} \circ \tilde{\varepsilon}_i^{*F} = \mu_{F,i} \circ \varepsilon_i^{C_J''F} \circ \tau_F \circ \eta_j^{L_I'F} \circ \gamma_{F,j} = \varepsilon^{C_J''^*F} \circ (\text{Lim}_I' \mu_F) \circ \tau_F \circ (\text{Colim}_J'' \gamma_F) \circ \eta^{L_I'^*F}$$

pour tout foncteur $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$, d'où :

$$\tau_F^* = (\text{Lim}_I' \mu_F) \circ \tau_F \circ (\text{Colim}_J'' \gamma_F).$$

En tout cas, on voit que tout système alternatif de choix résulte en un nouveau morphisme τ_F^* qui diffère du précédent par composition à droite et à gauche avec des isomorphismes ; en particulier, τ_F est un isomorphisme (resp. un monomorphisme, resp. un épimorphisme) si et seulement si τ_F^* jouit de la même propriété.

Partie (ii) : Notons d'abord que -- grâce à la remarque 2.112 -- la question est bien posée, *i.e.* ne dépend pas des choix employés pour la construction de τ . Or, soit d'abord $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, et considérons un foncteur

$$S : I \times J \rightarrow \mathbf{Ens} \quad (i, j) \mapsto S_{ij} \quad ((i, j) \xrightarrow{(f, g)} (i', j')) \mapsto (S_{ij} \xrightarrow{S_{f, g}} S_{i'j'}).$$

Si $f = \mathbf{1}_i$ (resp. si $g = \mathbf{1}_j$) on écrira plutôt $S_{i, g}$ (resp. $S_{f, j}$) pour l'application $S_{f, g}$. pour tous $i \in \text{Ob}(I)$ et $j \in \text{Ob}(J)$ considérons aussi les foncteurs évidents :

$$J \xrightarrow{e'_i} I \times J \xleftarrow{e''_j} I \quad j \mapsto (i, j) \leftarrow i$$

D'après l'exercice 2.31(ii), pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ la colimite du foncteur $S \circ e'_i : J \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentée par le quotient $S'_i := (\bigsqcup_{j \in \text{Ob}(J)} S_{ij}) / \sim$ pour la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que

$$(x, j) \sim (S_{i, g}(x), j') \quad \forall j, j' \in \text{Ob}(J), \forall g \in J(j, j').$$

D'autre part, pour tout $j \in \text{Ob}(J)$, la limite du foncteur $S \circ e''_j : I \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentée par l'ensemble S''_j des suites cohérentes $(x_i \mid i \in \text{Ob}(I)) \in \prod_{i \in \text{Ob}(I)} S_{ij}$. Pour tout $j \in \text{Ob}(J)$, tout $i \in \text{Ob}(I)$ et tout $x \in S_{ij}$ on notera $[x, j] \in S'_i$ la classe de (x, j) . Tout morphisme $f : i \rightarrow i'$ induit une application $S'_f : S'_i \rightarrow S'_{i'}$ unique telle que $S'_f[x, j] = [S_{f, j}(x), j]$ pour tout $[x, j] \in S'_i$. De même, tout morphisme $g : j \rightarrow j'$ de J induit une application $S''_g : S''_j \rightarrow S''_{j'}$ telle que $S''_g(x_\bullet) = (S_{i, g}(x_i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ pour toute suite cohérente $x_\bullet := (x_i \mid i \in \text{Ob}(I)) \in S''_j$, et on notera par $[x_\bullet, j]$ la classe de $(x_\bullet, j)$ dans la colimite S'' du foncteur $S'' : J \rightarrow \mathbf{Ens}$ ainsi obtenu. Soit aussi S' la limite du foncteur correspondant $S'_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Ens} : i \mapsto S'_i$. Avec cette notation, la transformation naturelle τ_S de (i) est l'application

$$S'' \rightarrow S' \quad [x_\bullet, j] \mapsto ([x_i, j] \mid i \in \text{Ob}(I)).$$

Montrons que τ_S est injective : soient $[x_\bullet, j], [y_\bullet, j'] \in S''$ tels que $[x_i, j] = [y_i, j']$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$; comme $\text{Ob}(I)$ est un ensemble fini et que J est filtrante, il existe alors $j'' \in \text{Ob}(J)$ et des morphismes $j \xrightarrow{g} j'' \xleftarrow{g'} j'$ de J avec $z_i := S_{i, g}(x_i) = S_{i, g'}(y_i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Par suite $[x_\bullet, j] = [z_\bullet, j''] = [y_\bullet, j']$, d'où l'assertion. Pour montrer la surjectivité de τ_S , soit $[x_\bullet, j_\bullet] := ([x_i, j_i] \mid i \in \text{Ob}(I))$ une suite cohérente de $\prod_{i \in \text{Ob}(I)} S'_i$; cela revient à dire que :

$$(S_{f, j_i}(x_i), j_i) \sim (x_{i'}, j_{i'}) \quad \forall i, i' \in \text{Ob}(I), \forall f \in I(i, i').$$

Mais $\Delta := \bigsqcup_{i, i' \in \text{Ob}(I)} I(i, i')$ est un ensemble fini et J est filtrant, donc on trouve $k \in \text{Ob}(J)$ et un système $(j_i \xrightarrow{g_f} k \xleftarrow{g'_f} j_{i'} \mid f \in \Delta)$ de morphismes de J tel que pour chaque $f \in \Delta$ on a $S_{i', g_f} \circ S_{f, j_i}(x_i) = S_{i', g'_f}(x_{i'})$. En outre, quitte à remplacer ces morphismes par leur composition avec un morphisme $k \rightarrow k'$ convenablement choisi, on peut supposer qu'il existe un système $(h_i : j_i \rightarrow k \mid i \in \text{Ob}(I))$ de morphismes de J avec $g_f = h_i$ et $g'_f = h_{i'}$ pour tous $i, i' \in \text{Ob}(I)$ et tout $f \in I(i, i')$. Posons

$$y_i := S_{i, h_i}(x_i) \quad \forall i \in \text{Ob}(I).$$

Evidemment $[y_i, k] = [x_i, j_i]$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. D'autre part, on a

$$S_{f, k}(y_i) = S_{f, k} \circ S_{i, h_i}(x_i) = S_{i', h_i} \circ S_{f, j_i}(x_i) = y_{i'} \quad \forall f : i \rightarrow i'$$

i.e. la suite $y_\bullet := (y_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ est cohérente, et $\tau_S[y_\bullet, k] = [x_\bullet, j_\bullet]$.

Ensuite prenons $\mathcal{C} = A - \mathbf{Mod}$, et soit $F : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur ; d'après l'exemple 2.50, le foncteur d'oubli $\text{Ou} : A - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute avec toute colimite filtrante et toute limite. Par suite, $\text{Ou}(\tau_F)$ est l'application $\tau_{\text{Ou} \circ F}$ associée à $\text{Ou} \circ F : I \times J \rightarrow \mathbf{Ens}$; mais on vient de montrer que cette dernière est bijective, donc τ_F est un isomorphisme de A -modules. On raisonne de même pour $\mathcal{C} = A - \mathbf{Alg}$.

Exercice 2.60 : Soit $(\tau_j : L \rightarrow Gj \mid j \in \text{Ob}(J))$ un cône universel de base $G : J \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{B})$ et sommet $L : I \rightarrow \mathcal{B}$; on doit montrer que $(F * \tau_j : F \circ L \rightarrow F \circ (Gj) \mid j \in \text{Ob}(J))$ est encore universel. La remarque 2.56 nous ramène à vérifier que le cône $(F\tau_{j,i} : FLi \rightarrow F((Gj)i) \mid j \in \text{Ob}(J))$ est universel pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Mais la même remarque montre que le cône $(\tau_{j,i} : Li \rightarrow (Gj)i \mid j \in \text{Ob}(J))$ est universel pour tout $i \in \text{Ob}(I)$; comme F commute avec les J -limites, l'assertion s'ensuit. On raisonne de même, si F commute avec les J -colimites.

Exercice 2.61 : Soit $\tau_\bullet := (\tau_k : j_0 \rightarrow Gk \mid k \in \text{Ob}(K))$ un cône universel de sommet $j_0 \in \text{Ob}(J)$ et base G . Puisque les limites de $\text{Fun}(J, \mathcal{C})$ se calculent terme à terme (remarque 2.56), pour tout $j \in \text{Ob}(J)$ on a un cône universel $\beta_{j,\bullet} := (\beta_{j,i} : Lj \rightarrow F_i(j) \mid i \in \text{Ob}(I))$ de sommet Lj et base $F_\bullet(j)$, tel que

$$(*) \quad \beta_{j',i} \circ L\phi = F_i(\phi) \circ \beta_{j,i} \quad \forall i \in \text{Ob}(I), \forall j, j' \in \text{Ob}(J), \forall \phi \in J(j, j').$$

En outre, par hypothèse le cône $F_i * \tau_\bullet = (F_i(\tau_k) : F_i(j_0) \rightarrow F_i Gk \mid k \in \text{Ob}(K))$ est universel pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et on doit vérifier qu'il en est de même pour le cône $L * \tau_\bullet = (Lj_0 \rightarrow LGk \mid k \in \text{Ob}(K))$. Soit donc $\eta_\bullet := (\eta_k : X \rightarrow LGk \mid k \in \text{Ob}(K))$ un cône de sommet $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et base $LG : K \rightarrow \mathcal{C}$; montrons que l'on a :

$$(**) \quad F_i G(\psi) \circ \beta_{Gk,i} \circ \eta_k = \beta_{Gk',i} \circ \eta_{k'} \quad \forall i \in \text{Ob}(I), \forall k, k' \in \text{Ob}(K), \forall \psi \in K(k, k').$$

Pour cela, il suffit d'observer que d'un côté $LG(\psi) \circ \eta_k = \eta_{k'}$ (car $\eta_\bullet$ est un cône de base LG), et de l'autre côté $F_i G(\psi) \circ \beta_{Gk,i} = \beta_{Gk',i} \circ LG(\psi)$, d'après (*). Les identités (**) reviennent à dire que le système $(\beta_{Gk,i} \circ \eta_k : X \rightarrow F_i Gk \mid k \in \text{Ob}(K))$ est un cône de base $F_i G$, pour chaque $i \in \text{Ob}(I)$. Par universalité de $F_i * \tau_\bullet$, il existe alors, pour tout tel i , un unique morphisme $f_i : X \rightarrow F_i(j_0)$ de $\mathcal{C}$ tel que :

$$F_i(\tau_k) \circ f_i = \beta_{Gk,i} \circ \eta_k \quad \forall k \in \text{Ob}(K).$$

Montrons que l'on a :

$$(***) \quad F_{\phi, j_0} \circ f_i = f_{i'} \quad \forall i, i' \in \text{Ob}(I), \forall \phi \in I(i, i').$$

Pour cela, grâce à l'universalité de $F_i * \tau_k$, il suffit de vérifier que $F_{i'}(\tau_k) \circ F_{\phi, j_0} \circ f_i = F_{i'}(\tau_k) \circ f_{i'}$ pour tout tel morphisme $\phi : i \rightarrow i'$, et tout $k \in \text{Ob}(K)$. Mais d'un côté on a $F_{i'}(\tau_k) \circ f_{i'} = \beta_{Gk, i'} \circ \eta_k$, et de l'autre côté on a

$$F_{i'}(\tau_k) \circ F_{\phi, j_0} = F_{\phi, Gk} \circ F_i(\tau_k) \quad \text{et} \quad F_i(\tau_k) \circ f_i = \beta_{Gk, i} \circ \eta_k.$$

On est ainsi ramené à montrer que $F_{\phi, Gk} \circ \beta_{Gk, i} = \beta_{Gk, i'}$ pour tout $k \in \text{Ob}(K)$ et tout morphisme $\phi : i \rightarrow i'$ de I . Cela est clair, car $\beta_{Gk, \bullet}$ est un cône de sommet LGk et base $F_\bullet(Gk)$. Les identités (***) reviennent à dire que le système $(f_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un cône de sommet X et base $F_\bullet(j_0)$; par universalité de $\beta_{j_0, \bullet}$, il existe alors un unique morphisme $f : X \rightarrow Lj_0$ tel que $\beta_{j_0, i} \circ f = f_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Vérifions maintenant que :

$$(\dagger) \quad L(\tau_k) \circ f = \eta_k \quad \forall k \in \text{Ob}(K).$$

Grâce à l'universalité de $\beta_{Gk, \bullet}$, il suffit de montrer que $\beta_{Gk, i} \circ L(\tau_k) \circ f = \beta_{Gk, i} \circ \eta_k$ pour tout $k \in \text{Ob}(K)$ et tout $i \in \text{Ob}(I)$; mais d'après (*) on a $\beta_{Gk, i} \circ L(\tau_k) = F_i(\tau_k) \circ \beta_{j_0, i}$, et d'autre part $\beta_{Gk, i} \circ \eta_k = F_i(\tau_k) \circ f_i$, d'où l'identité souhaitée. Pour conclure, il ne reste qu'à prouver l'unicité du morphisme f vérifiant $(\dagger)$; soit alors $g : X \rightarrow Lj_0$ un deuxième morphisme de $\mathcal{C}$ avec $L(\tau_k) \circ g = \eta_k$ pour tout $k \in \text{Ob}(K)$. Il vient aisément

$$F_i(\tau_k) \circ \beta_{j_0, i} \circ f = \beta_{Gk, i} \circ \eta_k = F_i(\tau_k) \circ \beta_{j_0, i} \circ g \quad \forall i \in \text{Ob}(I), \forall k \in \text{Ob}(K)$$

d'où $f = g$, par l'universalité de $F_i * \tau_\bullet$ et de $\beta_{j_0, \bullet}$.

Exercice 2.64, partie (i) : Par dualité, on peut supposer que $\mathcal{C}$ soit complète, et on doit vérifier que $\int_\phi$ est plein et fidèle. Reprenons la notation de la preuve du théorème 2.62 : au vu de la proposition 2.16(iii), il faut montrer que la coïunité canonique $\tilde{\varepsilon}_F : (\int_\phi F) \circ \phi \rightarrow F$

est un isomorphisme, pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$; pour cela, compte tenu de l'exercice 2.53(iii), il suffit de vérifier que l'objet $u(i) := (i, \mathbf{1}_{\phi(i)})$ est initial dans la catégorie $\phi(i)/\phi I$, pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Soit donc $(k, f : \phi(i) \rightarrow \phi(k))$ un objet de $\phi(i)/\phi I$; puisque ϕ est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $g : i \rightarrow k$ de I tel que $\phi(g) = f$, et on voit aussitôt que (g, f) est l'unique morphisme $(i, \mathbf{1}_{\phi(i)}) \rightarrow (k, f)$ dans $\phi(i)/\phi I$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Cela découle de (i) et de l'exercice 2.17(ii).

Problème 2.65, partie (i) : Posons $\mathcal{A} := \text{Fun}(I, \text{Ens})$, $\mathcal{B} := \text{Fun}(J, \text{Ens})$, et soient $K := \int^\phi \text{oh}^I : I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ et $L := \text{h}^J \circ \phi^{\text{op}} : I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$. Le lemme de Yoneda (proposition 2.1(i)) et l'adjonction pour $(\int^\phi, \text{Fun}(\phi, \text{Ens}))$ fournissent des bijections :

$$(*) \quad \mathcal{B}(K(i), F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\text{h}_i, F \circ \phi) \xrightarrow{\sim} F(\phi i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(L(i), F)$$

naturelles en $i \in \text{Ob}(I)$ et en $F : J \rightarrow \text{Ens}$. Encore d'après le lemme de Yoneda, pour chaque $i \in \text{Ob}(I)$ fixé, $(*)$ provient d'un unique isomorphisme de foncteurs

$$\delta_i : K(i) \xrightarrow{\sim} L(i)$$

et la naturalité de $(*)$ par rapport aux morphismes $f : i \rightarrow i'$ de I revient à dire que l'association $i \mapsto \delta_i$ est un isomorphisme de foncteurs $K \xrightarrow{\sim} L$, comme souhaité.

Ensuite, d'après l'exercice 2.64(i), on sait déjà que si ϕ est plein et fidèle $\Rightarrow \int_\phi$ est plein et fidèle $\Leftrightarrow \int^\phi$ est plein et fidèle. Réciproquement, si $\int^\phi$ est plein et fidèle, puisque h^I est aussi plein et fidèle (exemple 2.2(ii)), il en est de même pour $\int^\phi \text{oh}^I$, donc de même pour $\text{h}^J \circ \phi^{\text{op}}$, en vertu de ce qui précède ; mais comme h^J est plein et fidèle, on conclut alors qu'il en est de même pour ϕ .

Partie (ii) : Pour tout foncteur $F : I \rightarrow \text{Ens}$ et tout $j \in \text{Ob}(J)$, l'ensemble $\int^\phi F(j)$ représente la colimite du foncteur $F \circ \mathbf{s}_j : \phi I/j \rightarrow \text{Ens}$, où $\mathbf{s}_j : \phi I/j \rightarrow I$ désigne la restriction du foncteur de source $\mathbf{s}_\phi : \phi I/J \rightarrow I$ (voir la remarque 2.12(ii,iii)). Puisque I est finiment cocomplète et ϕ est exact à droite, la catégorie $\phi I/j$ est filtrante pour tout $j \in \text{Ob}(J)$ (exercice 2.43) ; on choisit alors pour $\int^\phi F(j)$ son représentant canonique fourni par l'exercice 2.31(ii), i.e. l'ensemble des classes d'équivalence $[x, (i, f)]$ des couples $(x, (i, f))$ formés d'un objet $(i, f : \phi i \rightarrow j)$ de $\phi I/j$ et d'un élément $x \in F i$. Or, soient K une catégorie finie, $F_\bullet : K \rightarrow \text{Fun}(I, \text{Ens})$ un foncteur, et $(\tau_k : L \rightarrow F_k \mid k \in \text{Ob}(K))$ un cône universel de base $F_\bullet$; on doit vérifier que $(\int^\phi \tau_k : \int^\phi L \rightarrow \int^\phi F_k \mid k \in \text{Ob}(K))$ est un cône universel. Puisque les limites de $\text{Fun}(I, \text{Ens})$ et de $\text{Fun}(J, \text{Ens})$ se calculent terme à terme (remarque 2.56), cela revient à dire que $(\tau_{k,i} : L i \rightarrow F_k(i) \mid k \in \text{Ob}(K))$ est un cône universel pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et on doit montrer que

$$((\int^\phi \tau_k)_j : \int^\phi L(j) \rightarrow \int^\phi F_k(j) \mid k \in \text{Ob}(K))$$

est un cône universel pour tout $j \in \text{Ob}(J)$. On peut choisir pour $L i$ son représentant canonique fourni par l'exemple 2.22(i), i.e. l'ensemble des suites cohérentes $x_\bullet := (x_k \mid k \in \text{Ob}(K))$ dans $\prod_{k \in \text{Ob}(K)} F_k(i)$, de sorte que $\tau_{k,i}(x_\bullet) = x_k$ pour tout $k \in \text{Ob}(K)$ et tout tel $x_\bullet$. Ainsi, $\int^\phi L(j)$ est la colimite de $L \circ \mathbf{s}_j$, représentée par l'ensemble des classes d'équivalence $[x_\bullet, (i, f)]$, avec $(i, f) \in \text{Ob}(\phi I/j)$ et $x_\bullet \in L i$. Avec cette notation, $(\int^\phi \tau_k)_j$ est l'application telle que $[x_\bullet, (i, f)] \mapsto [x_k, (i, f)]$, pour chaque $k \in \text{Ob}(K)$. Pour tout $j \in \text{Ob}(J)$, notons par L'_j la limite du foncteur

$$K \rightarrow \text{Ens} \quad k \mapsto \int^\phi F_k(j) \quad (j \xrightarrow{f} j') \mapsto \int^\phi F_k(f)$$

représentée par l'ensemble des suites cohérentes $([x_k, (i_k, f_k)] \mid k \in \text{Ob}(K))$ dans le produit $\prod_{k \in \text{Ob}(K)} \int^\phi F_k(j)$. D'après le problème 2.59(ii), il existe une bijection naturelle :

$$\int^\phi L(j) \xrightarrow{\sim} L'_j \quad [x_\bullet, (i, f)] \mapsto ([x_k, (i, f)] \mid k \in \text{Ob}(K)).$$

Sous cette identification, l'application $(\int^\phi \tau_k)_j$ correspond à la projection canonique $L'_j \rightarrow \int^\phi F_k(j) : ([x_k, (i_k, f_k)] \mid k \in \text{Ob}(K)) \mapsto [x_k, (i_k, f_k)]$, d'où l'assertion.

Exercice 2.66, partie (i) : Si f est un monomorphisme, l'identité $f \circ p_1 = f \circ p_2$ implique que $p_1 = p_2$, et d'autre part on a $p_1 \circ \Delta_{Y/X} = \mathbf{1}_Y$. Il vient :

$$p_1 \circ \Delta_{Y/X} \circ p_1 = p_1 = p_1 \circ \mathbf{1}_{Y \times_X Y} \quad \text{et} \quad p_2 \circ \Delta_{Y/X} \circ p_1 = p_2 = p_2 \circ \mathbf{1}_{Y \times_X Y}$$

d'où $\Delta_{Y/X} \circ p_1 = \mathbf{1}_{Y \times_X Y}$, car le cône $(p_i : Y \times_X Y \rightarrow Y \mid i = 1, 2)$ est universel. Cela montre que $\Delta_{Y/X}$ est un isomorphisme. Réciproquement, si $\Delta_{Y/X}$ est un isomorphisme, les identités $p_i \circ \Delta_{Y/X} = \mathbf{1}_Y$ pour $i = 1, 2$ impliquent que $p_1 = p_2$; or, si $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, il existe un unique morphisme $h : Z \rightarrow Y \times_X Y$ tel que $p_i \circ h = g_i$ pour $i = 1, 2$, d'où $g_1 = g_2$, et cela montre que f est un monomorphisme.

Partie (ii) : Par hypothèse le cône $(Fp_i : F(Y \times_X Y) \rightarrow FY \mid i = 1, 2)$ est toujours universel, i.e. $F(Y \times_X Y)$ représente le produit fibré $FY \times_{FX} FY$; les identités $Fp_i \circ F(\Delta_{Y/X}) = \mathbf{1}_{FY}$ pour $i = 1, 2$ montrent alors que $F(\Delta_{Y/X})$ est le morphisme diagonal $\Delta_{FY/FX}$. D'après (i), $\Delta_{Y/X}$ est un isomorphisme, donc il en est de même pour $\Delta_{FY/FX}$, et ainsi Ff est un monomorphisme, encore d'après (i).

Parties (iii) et (iv) : Cela découle de (i) et (ii), par dualité.

Partie (iv) : Par le lemme 2.55(ii) (resp. par la remarque 2.58(ii)), la catégorie $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est finiment complète (resp. finement cocomplète) et les foncteurs d'évaluation ev_i sont exacts (remarque 2.56); au vu de (ii) (resp. de (iv)), il vient que si β est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), il en est de même pour chaque β_i . Pour la réciproque, considérons le morphisme diagonal $\Delta_{F/G}$ de β ; en raisonnant comme dans la preuve de (ii) on voit que $\text{ev}_i(\Delta_{F/G}) = \Delta_{F_i/G_i}$, le morphisme diagonal de β_i , pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et ce dernier est un isomorphisme si β_i est un monomorphisme, d'après (i). Donc, si tout β_i est un monomorphisme, $\Delta_{F/G}$ est un isomorphisme, et alors β est un monomorphisme, toujours d'après (i). On raisonne de même si chaque β_i est un épimorphisme, en invoquant (iii) plutôt que (i).

Exercice 2.70, partie (i) : Soit $(\eta_j : L \rightarrow F''j \mid j \in \text{Ob}(J))$ un cône universel; les identités $\eta_{j,i'} \circ Lf = (F''j)(f) \circ \eta_{j,i} = 0_{L_i, F(i',j)}$ pour tout $j \in \text{Ob}(J)$ caractérisent Lf . Mais $0_{L_i, L_{i'}}$ vérifie ces identités, donc $Lf = 0_{L_i, L_{i'}}$. On raisonne de manière analogue, si L représente $\text{colim}_J F''$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Avec (i) on voit que τ commute avec toute limite et colimite représentable de $\text{Morph}(\mathcal{B})$ (par la calculabilité terme à terme de ces limites et colimites); l'assertion découle alors de la proposition 2.57 et de la remarque 2.58(iii).

Partie (iii) : Soit $(T_\lambda := (M_\lambda, N_\lambda, f_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de $\text{Morph}(A - \text{Mod})$ indexé par l'ensemble partiellement ordonné filtrant $(\Lambda, \leq)$, et $T := (M, N, f)$ une colimite de ce système; un co-cône universel $(\eta_\lambda : T_\lambda \rightarrow T \mid \lambda \in \Lambda)$ pour cette colimite est alors la donnée d'un système de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M_\lambda & \xrightarrow{\eta_\lambda^M} & M \\ f_\lambda \downarrow & & \downarrow f \\ N_\lambda & \xrightarrow{\eta_\lambda^N} & N \end{array} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Notons aussi par $\iota_\lambda : \text{Ker } f_\lambda \rightarrow M_\lambda$ et $\iota : \text{Ker } f \rightarrow M$ les monomorphismes canoniques, soient K une colimite du système de A -modules $(\text{Ker}(T_\lambda) = \text{Ker } f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, et $(\eta_\lambda^K : \text{Ker } f_\lambda \rightarrow K \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel; d'après le problème 2.59(ii), il existe un isomorphisme unique de A -modules

$$\tau : K \xrightarrow{\sim} \text{Ker } f \quad \text{tel que} \quad \iota \circ \tau \circ \eta_\lambda^K = \eta_\lambda^M \circ \iota_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in \Lambda$ le morphisme $\text{Ker}(\eta_\lambda) : \text{Ker } f_\lambda \rightarrow \text{Ker } f$ vérifie l'identité $\iota \circ \text{Ker}(\eta_\lambda) = \eta_\lambda^M \circ \iota_\lambda$. Comme ι est un monomorphisme, il vient

$$\text{Ker}(\eta_\lambda) = \tau \circ \eta_\lambda^M \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

En dernier lieu, notons que le co-cône $(\eta_\lambda^M \mid \lambda \in \Lambda)$ est aussi universel, car les colimites de $\text{Morph}(A - \text{Mod})$ se calculent terme à terme; on conclut que le co-cône $(\text{Ker}(\eta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel, CQFD.

Problème 2.76, partie (i) : Si F est additif, on a $F0_{XY} = 0_{FX, FY}$ pour tous $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; mais $0_{\mathcal{A}}$ est l'unique objet X de $\mathcal{A}$ (à isomorphisme unique près) tel que $1_X = 0_{XX}$, donc $1_{FX} = 0_{FX, FX}$, et de même, cette identité caractérise les objets zéro de $\mathcal{B}$, donc $F0_{\mathcal{A}}$ est un objet zéro. Ensuite, soient $A_1, A_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ tels que $A_1 \oplus A_2$ soit représentable, et soient (e_1, e_2) et (p_1, p_2) les injections et projections canoniques correspondantes; posons $e'_i := Fe_i$ et $p'_i := Fp_i$ pour $i = 1, 2$. Comme F est additif, il vient $p'_i \circ e'_i = 1_{FA_i}$ pour $i = 1, 2$ et $p'_j \circ e'_j = 0_{FA_j, FA_i}$ pour $j \neq i$, ainsi que $e'_1 \circ p'_1 + e'_2 \circ p'_2 = 1_{F(A_1 \oplus A_2)}$. D'après la proposition 2.73, $F(A_1 \oplus A_2)$ représente alors le biproduit de FA_1 et FA_2 , avec les injections et projections canoniques (Fe_1, Fe_2) et (Fp_1, Fp_2) , d'où l'assertion.

Si F commute avec les produits finis représentables de $\mathcal{C}$, alors $F(A_1 \oplus A_2)$ représente le produit de FA_1 et FA_2 , et $(Fp_i \mid i = 1, 2)$ est un cône universel; en outre, si $0_{\mathcal{A}}$ est l'objet zéro de $\mathcal{A}$, alors $F0_{\mathcal{A}}$ est un objet final de $\mathcal{B}$ (remarque 2.27(ii)), et tout objet final est un objet zéro de $\mathcal{B}$. Par suite F préserve les morphismes nuls (remarque 2.72(ii)). En particulier, $Fe_i \circ Fp_i = 1_{FA_i}$ pour $i = 1, 2$, et $Fp_j \circ Fe_i = 0_{FA_i, FA_j}$ pour $j \neq i$; la proposition 2.73 entraîne alors que le co-cône $(Fe_i \mid i = 1, 2)$ est de même universel, comme souhaité. Si F commute avec les coproduits finis représentables, alors F^{op} commute avec les produits finis représentables, et compte tenu de la remarque 2.72(i), l'assertion découle du cas précédent.

Partie (ii) : Soient $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et notons par $(e_i, p_i \mid i = 1, 2)$ (resp. $(e'_i, p'_i \mid i = 1, 2)$) le cône et le co-cône universels de $A \oplus A$ (resp. de $A' \oplus A'$) tels que $\sum_{i=1}^2 e_i \circ p_i = 1_{A \oplus A}$ (resp. $\sum_{i=1}^2 e'_i \circ p'_i = 1_{A' \oplus A'}$), comme dans la proposition 2.73; notons aussi par $\Delta_A : A \rightarrow A \oplus A$ et $\nabla_{A'} : A' \oplus A' \rightarrow A'$ la diagonale de A et respectivement la codiagonale de A' (voir la remarque 2.67). Rappelons que $p_i \circ \Delta_A = 1_A$ et $\nabla_{A'} \circ e_i = 1_{A'}$ pour $i = 1, 2$. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(A, A')$; on calcule pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} p'_i \circ (f_1 \oplus f_2) \circ \Delta_A &= p'_i \circ (f_1 \oplus f_2) \circ (e_1 \circ p_1 + e_2 \circ p_2) \circ \Delta_A \\ &= p'_i \circ (f_1 \oplus f_2) \circ (e_1 + e_2) \\ &= p'_i \circ (f_1 \oplus f_2) \circ e_1 + p_i \circ (f_1 \oplus f_2) \circ e_2 = f_i \end{aligned}$$

(notation de la remarque 2.74(ii)) et par suite :

$$\begin{aligned} \nabla_{A'} \circ (f_1 \oplus f_2) \circ \Delta_A &= \nabla_{A'} \circ (e'_1 \circ p'_1 + e'_2 \circ p'_2) \circ (f_1 \oplus f_2) \circ \Delta_A \\ &= \nabla_{A'} \circ (e'_1 \circ f_1 + e'_2 \circ f_2) = f_1 + f_2. \end{aligned}$$

Or, si F commute avec les produits finis ou les coproduits finis, $F0_{\mathcal{A}}$ est l'objet zéro $0_{\mathcal{A}'}$ de $\mathcal{A}'$, d'où $F0_{AA'} = 0_{FA, FA'}$; en outre $F(A \oplus A) = FA \oplus FA$ et $F(A' \oplus A') = FA' \oplus FA'$. Par suite, le système de morphismes $(Fe_i, Fp_i \mid i = 1, 2)$ vérifie encore les identités de la proposition 2.73(i.c), et on déduit aussitôt que $F(f_1 \oplus f_2) = Ff_1 \oplus Ff_2$; en outre, évidemment $F(\Delta_A) = \Delta_{FA}$ et $F(\nabla_{A'}) = \nabla_{FA'}$. Donc finalement $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$, comme souhaité.

Exercice 2.84 : Pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout objet $A \oplus A$ représentant le biproduit de deux copies de A , soient $(A \xrightarrow{e_{A,i}} A \oplus A \xrightarrow{p_{A,i}} A \mid i = 1, 2)$ les injections et projections

canoniques ; par hypothèse, il existe une unique bijection

$$\omega_A : F(A \oplus A) \xrightarrow{\sim} FA \times FA \quad \text{telle que} \quad p_{FA,i} \circ \omega_A = Fp_{A,i} \quad \forall i = 1, 2$$

où $(p_{FA,i} : FA \times FA \rightarrow FA \mid i = 1, 2)$ sont les projections naturelles. Posons alors :

$$\mu_A := p_{A,1} + p_{A,2} : A \oplus A \rightarrow A \quad \text{et} \quad \mu_{FA} := F(\mu_A) \circ \omega_A^{-1} : FA \times FA \rightarrow FA.$$

Noter que μ_{FA} ne dépend pas du choix du représentant pour le biproduit : en effet, soit B un deuxième objet représentant le biproduit de deux copies de A , avec projections canoniques $p'_1, p'_2 : B \rightarrow A$; posons $\mu' := p'_1 + p'_2 : B \rightarrow A$, et soit $\omega' : FB \xrightarrow{\sim} FA \times FA$ l'unique bijection telle que $p_{FA,i} \circ \omega' = Fp'_i$ pour $i = 1, 2$. Il existe un unique isomorphisme $\rho : B \xrightarrow{\sim} A \oplus A$ tel que $p_{A,i} \circ \rho = p'_i$ pour $i = 1, 2$. Il vient $\mu' = \mu_A \circ \rho$ et $\omega' = \omega \circ F\rho$, d'où $F(\mu') \circ \omega'^{-1} = \mu_{FA}$, comme souhaité.

Choisissons ensuite, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ un objet représentant le produit $A \times A \times A$, avec projections canoniques $(\pi_{A,i} : A \times A \times A \rightarrow A \mid i = 1, 2, 3)$. Noter que $A \times A \times A$ représente aussi le biproduit $(A \oplus A) \oplus A$, avec cône universel :

$$A \oplus A \xleftarrow{q'_A} A \times A \times A \xrightarrow{\pi_{A,3}} A$$

où q'_A désigne l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $p_{A,i} \circ q'_A = \pi_{A,i}$ pour $i = 1, 2$. De même, $A \times A \times A$ représente le biproduit $A \oplus (A \oplus A)$, avec cône universel :

$$A \xleftarrow{\pi_{A,1}} A \times A \times A \xrightarrow{q''_A} A \oplus A$$

où q''_A désigne l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $p_{A,i} \circ q''_A = \pi_{A,i+1}$ pour $i = 1, 2$. Avec cette notation, montrons que l'on a un diagramme commutatif :

$$\mathcal{D}_A : \begin{array}{ccccc} A \times A \times A & \xlongequal{\quad} & (A \oplus A) \oplus A & \xrightarrow{\mu_A \oplus \mathbf{1}_A} & A \oplus A \\ \parallel & & & & \downarrow \mu_A \\ A \oplus (A \oplus A) & \xrightarrow{\mathbf{1}_A \oplus \mu_A} & A \oplus A & \xrightarrow{\mu_A} & A. \end{array}$$

En effet, par définition on a $\mu_A \oplus \mathbf{1}_A = e_{A,1} \circ \mu_A \circ q'_A + e_{A,2} \circ \pi_{A,3}$, et $q'_A = e_{A,1} \circ \pi_{A,1} + e_{A,2} \circ \pi_{A,2}$, d'où $\mu_A \circ (\mu_A \oplus \mathbf{1}_A) = \mu_A \circ q'_A + \pi_{A,3} = \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3}$. De même, $\mathbf{1}_A \oplus \mu_A = e_{A,1} \circ \pi_{A,1} + e_{A,2} \circ \mu_A \circ q''_A$ et $q''_A = e_{A,1} \circ \pi_{A,2} + e_{A,2} \circ \pi_{A,3}$, d'où $\mu_A \circ (\mathbf{1}_A \oplus \mu_A) = \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3}$.

On a en outre un diagramme d'ensembles :

$$\mathcal{D}_{FA} : \begin{array}{ccccc} F(A \oplus (A \oplus A)) & \xlongequal{\quad} & F(A \times A \times A) & \xlongequal{\quad} & F((A \oplus A) \oplus A) \\ \omega'_A \downarrow & & \downarrow \tau_A & & \downarrow \omega'_A \\ FA \times F(A \oplus A) & \xrightarrow{\mathbf{1}_{FA} \times \omega_A} & FA \times FA \times FA & \xleftarrow{\omega_A \times \mathbf{1}_{FA}} & F(A \oplus A) \times FA \end{array}$$

dont les trois flèches verticales sont des bijections caractérisées par les identités :

$$\begin{aligned} \pi_{FA,i} \circ \tau_A &= F(\pi_{A,i}) & \forall i = 1, 2, 3 \\ q'_{FA} \circ \omega'_A &= F(q'_A) & \pi_{FA,3} \circ \omega'_A &= F(\pi_{A,3}) \\ q''_{FA} \circ \omega''_A &= F(q''_A) & \pi_{FA,1} \circ \omega''_A &= F(\pi_{A,1}) \end{aligned}$$

où $(\pi_{FA,i} : FA \times FA \times FA \rightarrow FA \mid i = 1, 2, 3)$ sont les projections canoniques, et de même pour $F(A \oplus A) \times FA \xrightarrow{q'_{FA}} F(A \oplus A) \xleftarrow{q''_{FA}} FA \times F(A \oplus A)$. On vérifie aisément la commutativité de $\mathcal{D}_{FA}$, ainsi que les identités :

$$\omega_A \circ F(\mu_A \oplus \mathbf{1}_A) = (F\mu_A \times \mathbf{1}_{FA}) \circ \omega'_A \quad \omega_A \circ F(\mathbf{1}_A \times \mu_A) = (\mathbf{1}_{FA} \times F\mu_A) \circ \omega''_A$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur) ; par suite, si l'on considère aussi le diagramme commutatif $F(\mathcal{D}_A)$ (dédit de $\mathcal{D}_A$, après application terme à terme du foncteur

F), il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FA \times FA \times FA & \xrightarrow{\mu_{FA} \times \mathbf{1}_{FA}} & FA \times FA \\ \downarrow \mathbf{1}_{FA} \times \mu_{FA} & & \downarrow \mu_A \\ FA \times FA & \xrightarrow{\mu_A} & A. \end{array}$$

Cela revient à dire que $\mu_{FA} : FA \times FA \rightarrow FA$ est une *loi de composition associative* sur l'ensemble FA . Soient ensuite $\beta_A : A \oplus A \xrightarrow{\sim} A \oplus A$ l'unique morphisme tel que $p_{A,i} \circ \beta_A = p_{A,3-i}$ pour $i = 1, 2$, et $\beta_{FA} : FA \times FA \xrightarrow{\sim} FA \times FA$ la bijection qui échange les facteurs : $(x, y) \mapsto (y, x)$ pour tous $x, y \in FA$; on vérifie aussitôt que :

$$\omega_A \circ F\beta_A = \beta_{FA} \circ \omega_A \quad \text{et} \quad \mu_A \circ \beta_A = \mu_A$$

d'où : $\mu_{FA} \circ \beta_{FA} = \mu_{FA}$. Cela revient à dire que la loi de composition μ_{FA} est *commutative*. Noter que F commute avec le produit vide, autrement dit, il envoie l'objet final $0_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ sur un objet final de $\mathbf{Ens}$, i.e. un ensemble avec un seul élément (remarque 2.27(ii)). Pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$, soit $0_A : 0_{\mathcal{A}} \rightarrow A$ l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ (rappelons que $0_{\mathcal{A}}$ est aussi un objet initial de $0_{\mathcal{A}}$) ; l'image de $F0_A$ est alors $\{0_{FA}\}$ pour un unique élément $0_{FA} \in FA$. Rappelons en outre que $p_{A,1} \circ e_{A,1} = \mathbf{1}_A$, et $p_{A,2} \circ e_{A,1} = 0_{AA} : A \rightarrow A$ est le morphisme nul de A , i.e. l'unique morphisme qui se factorise à travers $0_{\mathcal{A}}$; ainsi, $F0_{AA} : FA \rightarrow FA$ est l'application telle que $x \mapsto 0_{FA}$ pour tout $x \in FA$, et $e_{FA,1} := \omega_A \circ Fe_{A,1} : FA \rightarrow FA \times FA$ est alors l'application telle que : $x \mapsto (x, 0_{FA})$ pour tout $x \in FA$. Mais on a aussi $\mu_A \circ e_{A,1} = \mathbf{1}_A$, d'où $\mu_{FA} \circ e_{FA,1} = \mathbf{1}_{FA}$. Cela revient à dire que 0_{FA} est un *élément neutre* pour la loi de composition μ_{FA} , pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$.

En dernier lieu, soit $\Delta_A : A \rightarrow A \oplus A$ le morphisme diagonal (exercice 2.66(i)) ; on voit aisément que $\omega_A \circ F(\Delta_A) = \Delta_{FA} : FA \rightarrow FA \times FA$, l'application diagonale de FA dans $FA \times FA$. En outre, $\mu_A \circ (\mathbf{1}_A \oplus (-\mathbf{1}_A)) \circ \Delta_A = 0_{AA}$, d'où $\mu_{FA} \circ (\mathbf{1}_{FA} \times F(-\mathbf{1}_A)) \circ \Delta_{FA} = F0_{AA}$, autrement dit, pour tout $x \in FA$ on a $\mu_{FA}(x, F(-\mathbf{1}_A)(x)) = 0_{FA}$. Cela achève de vérifier que $F^\dagger A := (FA, \mu_A, 0_{FA})$ est un *groupe abélien* pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$. Montrons ensuite que l'association $A \mapsto F^\dagger A$ pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ définit un foncteur $F^\dagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$; soit donc $f : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}$, et noter que $\mu_B \circ (f \oplus f) = f \circ \mu_A$. On déduit aussitôt que $\mu_{FB} \circ (Ff \times Ff) = Ff \circ \mu_{FA}$, i.e. Ff est un homomorphisme de groupes $F^\dagger A \rightarrow F^\dagger B$, d'où l'assertion. Avec l'exemple 2.22(iv), on voit que $F^\dagger$ commute avec les produits finis, donc il est additif (problème 2.76(ii)). Pour vérifier l'unicité de $F^\dagger$, rappelons que tout foncteur additif $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ commute avec les biproduits de $\mathcal{A}$ (problème 2.76 (i)), donc il existe un unique isomorphisme $\lambda_A : F^\dagger(A \oplus A) \xrightarrow{\sim} F^\dagger A \oplus F^\dagger A$ de $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ tel que $\lambda_A \circ F^\dagger e_{A,i} = e_{F^\dagger A,i}$ pour $i = 1, 2$ (où $(e_{F^\dagger A,i} : F^\dagger A \rightarrow F^\dagger A \oplus F^\dagger A \mid i = 1, 2)$ sont les injections canoniques), et noter que μ_A est aussi le morphisme codiagonal de A (voir l'exercice 2.66(iii)), de sorte que $F^\dagger(\mu_A) \circ \lambda_A^{-1} : F^\dagger A \oplus F^\dagger A \rightarrow F^\dagger A$ doit être le morphisme codiagonal de $F^\dagger A$, i.e. la loi de composition du groupe abélien $F^\dagger A$. Avec cette notation, vérifions que $\lambda_A = \omega_A$; pour cela, grâce à l'universalité du cône $(p_{FA,i} \mid i = 1, 2)$ et du co-cône $(F^\dagger e_{A,i} \mid i = 1, 2)$, il suffit de montrer que $p_{FA,j} \circ \lambda_A \circ F^\dagger e_{A,i} = F^\dagger p_{A,j} \circ F^\dagger e_{A,i}$ pour tous $i, j = 1, 2$. Mais $p_{FA,j} \circ \lambda_A \circ F^\dagger e_{A,i} = p_{FA,j} \circ e_{F^\dagger A,i}$, d'où l'assertion. Cela montre que pour tout foncteur additif $F^\dagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ dont la composition avec le foncteur d'oubli $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ coïncide avec F , notre application μ_{FA} est forcément la loi de composition de $F^\dagger A$, comme souhaité.

Exercice 2.95, partie (i) : Soit $\mathcal{D}$ cartésien ; notons par $B \xleftarrow{p_B} B \oplus C \xrightarrow{p_C} C$ les projections canoniques, par $B \xrightarrow{e_B} B \oplus C \xleftarrow{e_C} C$ les injections canoniques, posons $h := g \circ p_B - f \circ p_C : B \oplus C \rightarrow D$, et soit comme d'habitude $\iota_h : \text{Ker}(h) \rightarrow B \oplus C$ le cône universel. Pour tout couple de morphismes $B \xleftarrow{u} X \xrightarrow{v} C$ avec $f \circ v = g \circ u$, soit aussi

$(u, v) := e_B \circ u + e_C \circ v : X \rightarrow B \oplus C$; il vient

$$\begin{aligned} h \circ (u, v) &= (g \circ p_B - f \circ p_C) \circ (e_B \circ u + e_C \circ v) \\ &= g \circ p_B \circ e_B \circ u - f \circ p_C \circ e_C \circ v = g \circ u - f \circ v = 0_{XD} \end{aligned}$$

donc il existe un unique morphisme $w : X \rightarrow \text{Ker}(h)$ avec $\iota_h \circ w = (u, v)$. Par suite $p_B \circ \iota_h \circ w = u$ et $p_C \circ \iota_h \circ w = v$; cela montre que $\text{Ker}(h)$ représente le produit fibré $B \times_{(g,f)} C$, et on peut donc supposer que $A = \text{Ker}(h)$, avec les projections canoniques $f' = p_B \circ \iota_h$ et $g' = p_C \circ \iota_h$. Noter que h est un épimorphisme, car il en est de même pour $g = h \circ e_B$; d'après la remarque 2.93(ii), on a alors une identification naturelle de D avec $\text{Coker}(\iota_h)$. Or, soient $B \xrightarrow{u'} X \xleftarrow{v'} C$ deux morphismes avec $u' \circ f' = v' \circ g'$, et posons $[u', v'] := u' \circ p_B - v' \circ p_C : B \oplus C \rightarrow X$; il vient

$$[u', v'] \circ \iota_h = u' \circ p_B \circ \iota_h - v' \circ p_C \circ \iota_h = u' \circ f' - v' \circ g' = 0_{AX}$$

donc il existe un unique morphisme $w' : D \rightarrow X$ avec $w' \circ h = [u', v']$. Par suite, $w' \circ g = w' \circ h \circ e_B = [u', v'] \circ e_B = u'$, et $w' \circ f = w' \circ (-h \circ e_C) = -[u', v'] \circ e_C = v'$. Cela achève de vérifier que $\mathcal{D}$ est cocartésien. Ensuite, soit $v'' : C \rightarrow X$ un morphisme avec $v'' \circ g' = 0_{AX}$; comme $\mathcal{D}$ est cocartésien, il existe alors un unique morphisme $w'' : D \rightarrow X$ avec $w'' \circ f = v''$ et $w'' \circ g = 0_{BX}$, et si g est un épimorphisme, il vient $w'' = 0_{DX}$, d'où $v'' = 0_{CX}$. Cela revient à dire que $\text{Coker}(g') = 0_{\mathcal{A}}$, donc g' est un épimorphisme (lemme 2.75(ii)).

Partie (ii) : Noter que X_1 et X_2 sont aussi des sous-objets de $X_1 \cup X_2$, et $X_1 \cap X_2$ représente aussi l'intersection de X_1 et X_2 dans $\text{Sub}(X_1 \cup X_2)$; au vu du lemme 2.47(ii), cela montre que $\mathcal{E}$ est cartésien. Ensuite, disons que $X_1 \cap X_2$ (resp. X_i) soit la classe dans $\text{Sub}(A)$ du monomorphisme $j_{12} : X_1 \cap X_2 \rightarrow A$ (resp. de $j_i : X_i \rightarrow A$, pour $i = 1, 2$), et soient $(k_i : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_i \mid i = 1, 2)$ les uniques monomorphismes tels que $j_{12} = j_1 \circ k_1 = j_2 \circ k_2$; notons en outre $(X_i \xrightarrow{e_i} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_j} X_j \mid i, j = 1, 2)$ les projections et les injections canoniques. Rappelons que $X_1 \cup X_2$ est l'image du morphisme $t := j_1 \circ p_1 + j_2 \circ p_2 : X_1 \oplus X_2 \rightarrow A$ (proposition 2.94). Soit alors $f : Y \rightarrow X_1 \oplus X_2$ un morphisme de $\mathcal{A}$ avec $t \circ f = 0_{YA}$, et posons $f_i := p_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ pour $i = 1, 2$; il vient $j_1 \circ f_1 + j_2 \circ f_2 = 0_{YA}$, et d'autre part $f = e_1 \circ f_1 + e_2 \circ f_2$. Avec cette notation, f équivaut alors à la donnée d'un couple de morphismes $(f_i : Y \rightarrow X_i \mid i = 1, 2)$ tels que $j_1 \circ f_1 = j_2 \circ (-f_2)$; à son tour, cela équivaut à la donnée d'un morphisme $f' : Y \rightarrow X_1 \cap X_2$ tel que $f_1 = k_1 \circ f'$ et $f_2 = -k_2 \circ f'$. Cela montre que le sous-objet $X_1 \cap X_2$ représente $\text{Ker}(t)$, et le monomorphisme universel $\text{Ker}(t) \rightarrow X_1 \oplus X_2$ correspond à $e_1 \circ k_1 - e_2 \circ k_2$ sous cette identification. Or, on a $X_1 \cup X_2 = (X_1 \oplus X_2) / \text{Ker}(t)$, donc la donnée d'un morphisme $g : X_1 \cup X_2 \rightarrow Z$ équivaut à celle d'un couple de morphismes $(g_i : X_i \rightarrow Z \mid i = 1, 2)$ avec $g_1 \circ k_1 = g_2 \circ k_2$, par suite $\mathcal{E}$ est cocartésien.

Exercice 2.98, partie (i) : Soient $M_\bullet := (M_n, g_n : M_n \rightarrow M_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z})$ un objet de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$, et $N_\bullet := (N_n, d_n : N_n \rightarrow N_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z})$ un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$; soit aussi $\phi_\bullet : N_\bullet \rightarrow M_\bullet$ un morphisme de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $M_n^* := \text{Ker}(g_{n-1} \circ g_n)$, et notons par $\iota_n : M_n^* \rightarrow M_n$ le monomorphisme universel; puisque $(g_{n-2} \circ g_{n-1}) \circ (g_n \circ \iota_n)$ est le morphisme nul, il existe un unique $h_n \in \mathcal{A}(M_n^*, M_{n-1}^*)$ tel que $\iota_{n-1} \circ h_n = g_n \circ \iota_n$. On a $\iota_{n-2} \circ h_{n-1} \circ h_n = g_{n-1} \circ \iota_{n-1} \circ h_n = g_{n-1} \circ g_n \circ \iota_n = 0_{M_n^* M_{n-2}}$, d'où $h_{n-1} \circ h_n = 0_{M_n^* M_{n-2}^*}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, car ι_{n-2} est un monomorphisme; donc la donnée $M_\bullet^* := (M_n^*, h_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, et $\iota_\bullet := (\iota_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est un morphisme $M_\bullet^* \rightarrow M_\bullet$ de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g_{n-1} \circ g_n \circ \phi_n = g_{n-1} \circ \phi_{n-1} \circ d_n = \phi_n \circ d_{n-1} \circ d_n = 0_{N_n M_{n-2}}$, donc il existe un unique $\phi_n^* \in \mathcal{A}(N_n, M_n^*)$ tel que $\phi_n = \iota_n \circ \phi_n^*$; il vient $\iota_{n-1} \circ h_n \circ \phi_n^* = g_n \circ \iota_n \circ \phi_n^* = g_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ d_n = \iota_{n-1} \circ \phi_{n-1}^* \circ d_n$, d'où $h_n \circ \phi_n^* = \phi_{n-1}^* \circ d_n$, car ι_{n-1} est un monomorphisme. Ainsi, la donnée $\phi_\bullet^* := (\phi_n^* \mid n \in \mathbb{Z})$ est l'unique morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tel que $\phi_\bullet^* \circ \iota_\bullet = \phi_\bullet$. L'unicité de $\phi_\bullet^*$ entraîne aisément que $(\phi_\bullet \circ \psi_\bullet)^* = \psi_\bullet \circ \phi_\bullet^*$ pour tout morphisme $\psi_\bullet : N'_\bullet \rightarrow N_\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$; cela achève de montrer que l'association

$\phi_\bullet \mapsto \phi_\bullet^*$ définit un isomorphisme de foncteurs

$$h_{M_\bullet^{\text{op}}} \circ i^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} h_{M_\bullet^{*\text{op}}}$$

d'où un foncteur $F : \text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ adjoint à droite de i , tel que $FM_\bullet = M_\bullet^*$ pour tout $M \in \text{Ob}(\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A}))$. L'existence d'un adjoint à gauche suit par dualité, car $i^{\text{op}} : \mathcal{C}(\mathcal{A})^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})^{\text{op}}$ s'identifie naturellement avec l'inclusion $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\text{op}}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A}^{\text{op}})$ pour la catégorie abélienne $\mathcal{A}^{\text{op}}$ (remarque 2.81(ii)).

Partie (ii) : Soit $F : J \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ un foncteur ; si $\mathcal{A}$ est J -complète, il en est de même pour $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ (lemme 2.55(ii)), donc la limite de $i \circ F$ est représentée par un foncteur $L : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$, et au vu de (ii) et du lemme 2.52(ii), la limite de F est alors représentable dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. On raisonne de même pour montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est J -cocomplète si $\mathcal{A}$ est J -cocomplète, à l'aide de (ii), du dual du lemme 2.52(ii), et de la remarque 2.81(ii). Ensuite, i commute avec les limites et colimites représentables, en vertu de (i) et de la proposition 2.49 ; il s'ensuit que i commute avec les noyaux et le conoyaux, donc aussi avec les images et les coimages, et par suite les morphismes canoniques $\beta_f : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ commutent de même avec i . Puisque tout morphisme de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ est strict (remarque 2.81(iii)), il en est alors de même pour tout morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, donc cette dernière est abélienne.

Exercice 2.100 : Soit $((M_{\lambda, \bullet}, d_\bullet^{M_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de complexes de A -modules indexé par un ensemble partiellement ordonné filtrant $(\Lambda, \leq)$, notons par $(L_\bullet, d_\bullet^L)$ la limite directe de ce système, par H la limite directe du système

$$(H_i(M_{\lambda, \bullet}) \mid \lambda \in \Lambda)$$

et soient $(\eta_{\lambda, \bullet} : M_{\lambda, \bullet} \rightarrow L_\bullet \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(\gamma_\lambda : H_i(M_{\lambda, \bullet}) \rightarrow H \mid \lambda \in \Lambda)$ des co-cônes universels ; l'assertion concernant H_i revient à exhiber un isomorphisme

$$\omega : H \xrightarrow{\sim} H_i(L_\bullet) \quad \text{tel que} \quad \omega \circ \gamma_\lambda = H_i(\eta_{\lambda, \bullet}) \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

On peut construire un tel isomorphisme comme suit. Rappelons que H est (isomorphe à) l'ensemble des classes d'équivalence $[\bar{a}, \lambda]$ des couples $(\bar{a}, \lambda)$, avec $\lambda \in \Lambda$ et $\bar{a} \in H_i(M_{\lambda, \bullet})$: voir l'exercice 2.31(iii) ; on pose $\omega([\bar{a}, \lambda]) := H_i(\eta_{\lambda, \bullet})(\bar{a})$. On doit vérifier que cette association donne une application A -linéaire bien définie, et en montrer la bijectivité ; ces vérifications ne présentent pas de difficultés, et on laissera au lecteur le soin de développer cet argument. On propose plutôt une preuve d'esprit plus catégorique, valable dans toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$ dont les noyaux commutent avec les colimites filtrantes (c'est le cas pour $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$, d'après l'exercice 2.70(iii)). Fixons $i \in \mathbb{Z}$. On vérifie d'abord que le foncteur Z_i commute avec les colimites filtrantes ; pour cela, on considère le foncteur $\tau : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Morph}(\mathcal{A})$ qui associe à tout complexe $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ de $\mathcal{A}$ l'objet (M_i, M_{i-1}, d_i) de $\text{Morph}(\mathcal{A})$, et à tout morphisme de complexes $\phi_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet^M) \rightarrow (N_\bullet, d_\bullet^N)$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\phi_i} & N_i \\ d_i^M \downarrow & & \downarrow d_i^N \\ M_{i-1} & \xrightarrow{\phi_{i-1}} & N_{i-1}. \end{array}$$

Evidemment, Z_i est la composition $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tau} \text{Morph}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{Ker}} \mathcal{A}$. Mais il est clair que τ commute avec toute colimite (et en fait, avec toute limite) de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, car ces dernières se calculent terme à terme dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et dans $\text{Morph}(\mathcal{A})$; d'autre part, par hypothèse Ker commute avec les colimites filtrantes, d'où l'assertion.

Ensuite, la différentielle $d_{i+1}^M : M_{i+1} \rightarrow M_i$ de tout complexe $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ de $\mathcal{A}$ se factorise à travers un morphisme $\bar{d}^M : M_{i+1} \rightarrow Z_i(M_\bullet)$, et tout morphisme $\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$

de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ fait commuter le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} M_{i+1} & \xrightarrow{\phi_{i+1}} & N_{i+1} \\ \bar{d}^M \downarrow & & \downarrow \bar{d}^N \\ Z_i(M_\bullet) & \xrightarrow{Z_i(\phi_\bullet)} & Z_i(N_\bullet). \end{array}$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\bar{d} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Morph}(\mathcal{A}) \quad (M_\bullet, d_\bullet) \mapsto \bar{d}^M$$

associant à tout morphisme de complexes $\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ le diagramme $(*)$. Avec cette notation, on voit aussitôt que H_i est la composition

$$\mathbf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{d}} \mathbf{Morph}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{Coker}} \mathcal{A}.$$

Comme **Coker** commute avec toute colimite (exercice 2.70(ii)), on est ramené à vérifier que $\bar{d}$ commute avec les colimites filtrantes. Or, soient $((M_{\lambda,\bullet}, d_\bullet^{M_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$, $(L_\bullet, d_\bullet^L)$ et $(\eta_{\lambda,\bullet} : M_{\lambda,\bullet} \rightarrow L_\bullet \mid \lambda \in \Lambda)$ comme ci-dessus ; on déduit un système de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M_{\lambda,i+1} & \xrightarrow{\eta_{\lambda,i+1}} & L_{i+1} \\ \bar{d}^{M_\lambda} \downarrow & & \downarrow \bar{d}^L \\ Z_i(M_{\lambda,\bullet}) & \xrightarrow{Z_i(\eta_{\lambda,\bullet})} & Z_i(L_\bullet) \end{array} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Noter que le co-cône $(\eta_{\lambda,i+1} \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel, car les colimites de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ se calculent terme à terme ; le co-cône $(Z_i(\eta_{\lambda,\bullet}) \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel à son tour, car on vient de voir que Z_i commute avec les colimites filtrantes. Par suite, la commutativité de ces diagrammes détermine $\bar{d}^L$, et l'identifie avec la colimite du système de morphismes $(\bar{d}^{M_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$. L'objet $\bar{d}(L_\bullet)$ de $\mathbf{Morph}(\mathcal{A})$ est alors la colimite de $(\bar{d}(M_{\lambda,\bullet}) \mid \lambda \in \Lambda)$, et $(\bar{d}(\eta_{\lambda,\bullet}) \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône universel, CQFD.

Exercice 2.101, partie (i) : Soit $(M_\bullet, d_\bullet)$ un complexe de $\mathcal{A}$; pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on obtient aisément deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(d_i) & \xrightarrow{\iota'_i} & M_i \\ \pi'_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ H_i(M_\bullet) & \xrightarrow{\iota_i} & \text{Coker}(d_{i+1}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Ker}((d^{\text{op}})_{-i}) & \xrightarrow{a'} & (M_\bullet^{\text{op}})_{-i} \\ b' \downarrow & & \downarrow b \\ H_{-i}(M_\bullet^{\text{op}}) & \xrightarrow{a} & \text{Coker}((d^{\text{op}})_{-i+1}) \end{array}$$

où ι'_i (resp. a') est un monomorphisme de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{A}^{\text{op}}$) et les flèches verticales du diagramme de gauche (resp. de droite) sont des épimorphismes de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{A}^{\text{op}}$). Or, soient $f : H_i(M_\bullet) \rightarrow X$ et $g : M_i \rightarrow X$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ avec $f \circ \pi'_i = g \circ \iota'_i$; soit aussi $\bar{d}_{i+1} : M_{i+1} \rightarrow \text{Ker}(d_i)$ l'unique morphisme tel que $\iota'_i \circ \bar{d}_{i+1} = d_{i+1}$. Il vient $g \circ d_{i+1} = f \circ \pi'_i \circ \bar{d}_{i+1}$, et puisque $\pi'_i \circ \bar{d}_{i+1}$ est le morphisme nul, il en est de même pour $g \circ d_{i+1}$, donc $g = \bar{g} \circ \pi_i$ pour un unique morphisme $\bar{g} : \text{Coker}(d_{i+1}) \rightarrow X$ de $\mathcal{A}$. Comme $f \circ \pi'_i = \bar{g} \circ \pi_i \circ \iota'_i = \bar{g} \circ \iota_i \circ \pi'_i$, on a $f = \bar{g} \circ \pi_i$, car π'_i est un épimorphisme. Cela achève de montrer que le diagramme de gauche est cocartésien, et donc de même pour le diagramme de droite. D'après l'exercice 2.95(i), il s'ensuit que ι_i est un monomorphisme de $\mathcal{A}$, et de même, a est un monomorphisme de $\mathcal{A}^{\text{op}}$. Mais noter que $\text{Ker}((d^{\text{op}})_{-i}) = \text{Coker}(d_{i+1})^{\text{op}}$ et $\text{Coker}((d^{\text{op}})_{-i+1}) = \text{Ker}(d_i)^{\text{op}}$; en outre, sous ces identifications, a' (resp. b) correspond à π_i^{op} (resp. à $\iota_i'^{\text{op}}$). Par suite, on a ainsi obtenu pour le morphisme $\pi_i \circ \iota'_i$ deux factorisations épi-mono : la première est le couple (π'_i, ι_i) est la deuxième est la composition $\text{Ker}(d_i) \xrightarrow{a^{\text{op}}} H_{-i}(M_\bullet^{\text{op}})^{\text{op}} \xrightarrow{b'^{\text{op}}} \text{Coker}(d_{i+1})$. D'après la remarque 2.93(iii),

il existe alors un unique isomorphisme de $\mathcal{A}^{\text{op}}$

$$\omega_{i,M_\bullet} : H_{-i}(M_\bullet^{\text{op}}) \xrightarrow{\sim} H_i(M_\bullet)^{\text{op}} \quad \text{tel que} \quad \omega_{i,M_\bullet} \circ b = \iota_i^{\text{op}} \quad \text{et} \quad \pi_i^{\text{op}} \circ \omega_{i,M_\bullet} = a.$$

La naturalité des morphismes ι_i et π_i' et l'unicité de $\omega_{i,M_\bullet}$ entraînent aisément que l'association $M_\bullet \mapsto \omega_{i,M_\bullet}$ fournit l'isomorphisme de foncteurs souhaité : les détails sont laissés aux soins du lecteur. L'assertion (ii) suit trivialement de (i).

Exercice 2.104 : On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Im}(d_{M,5}) & \xrightarrow{j_{M,5}} & \text{Ker}(d_{M,4}) & \xrightarrow{\iota_{M,4}} & M_4 & \xrightarrow{\pi_{M,4}} & \text{Im}(d_{M,4}) & \xrightarrow{\bar{d}_{M,4}} & M_3 \\ \text{Im}(\phi_5, \phi_4) \downarrow & & \text{Ker}(\phi_4, \phi_3) \downarrow & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \text{Im}(\phi_4, \phi_3) & & \downarrow \phi_3 \\ \text{Im}(d_{N,5}) & \xrightarrow{j_{N,5}} & \text{Ker}(d_{N,4}) & \xrightarrow{\iota_{N,4}} & N_4 & \xrightarrow{\pi_{N,4}} & \text{Im}(d_{N,4}) & \xrightarrow{\bar{d}_{N,4}} & N_3 \end{array}$$

où $j_{M,5}$, $\iota_{M,4}$, $j_{N,5}$ et $\iota_{N,4}$ sont les monomorphismes canoniques, $\pi_{M,4}$ et $\pi_{N,4}$ sont les épimorphismes canoniques, $\text{Ker}(\phi_4, \phi_3)$ est le morphisme induit par le couple (ϕ_4, ϕ_3) par fonctorialité des noyaux (remarque 2.69(i)), et de même pour $\text{Im}(\phi_4, \phi_3)$ et $\text{Im}(\phi_5, \phi_4)$. En outre, $\bar{d}_{M,4}$ est l'unique monomorphisme tel que $\bar{d}_{M,4} \circ \pi_{M,4} = d_{M,4}$, et de même pour $\bar{d}_{N,4}$. Or, $j_{M,5}$ et $j_{N,5}$ sont des isomorphismes, car $M_\bullet$ et $N_\bullet$ sont exacts en degré 4 ; en outre $\text{Im}(\phi_5, \phi_4)$ est un isomorphisme, car il en est de même pour ϕ_4 et ϕ_5 . Par suite, $\text{Ker}(\phi_4, \phi_3)$ est un isomorphisme. Mais $\text{Im}(d_{M,4})$ (resp. $\text{Im}(d_{N,4})$) est aussi le conoyau de $\iota_{M,4}$ (resp. de $\iota_{N,4}$), et par hypothèse ϕ_4 est un isomorphisme ; par suite, $\text{Im}(\phi_4, \phi_3)$ est un isomorphisme. En dernier lieu, noter que $\text{Im}(\bar{d}_{M,4}) = \text{Im}(d_{M,4})$ et $\text{Im}(\bar{d}_{N,4}) = \text{Im}(d_{N,4})$. Ainsi, quitte à remplacer M_4 et N_4 respectivement par $\text{Im}(d_{M,4})$ et $\text{Im}(d_{N,4})$, on peut supposer du début que $M_5 = N_5 = 0$. Noter ensuite que les complexes $M_\bullet^{\text{op}}$ et $N_\bullet^{\text{op}}$ de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ sont exacts, d'après l'exercice 2.101(ii) ; le même raisonnement nous ramène alors au cas où l'on a aussi $M_1 = N_1 = 0$. Or, soit $h \in \mathcal{A}(X, M_3)$ avec $\phi_3 \circ h = 0_{XN_3}$; il vient

$$\phi_2 \circ d_{M,3} \circ h = d_{N,3} \circ \phi_3 \circ h = 0_{XN_2}$$

d'où $d_{M,3} \circ h = 0_{XM_2}$, car ϕ_2 est un isomorphisme. Puisque la suite $0 \rightarrow M_4 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ est exacte courte, il existe alors un unique morphisme $k : X \rightarrow M_4$ avec $h = d_{M,4} \circ k$; il vient $d_{N,4} \circ \phi_4 \circ k = \phi_3 \circ d_{M,4} \circ k = 0_{XN_3}$, d'où $k = 0_{XM_4}$, car ϕ_4 est un isomorphisme, et $d_{N,4}$ est un monomorphisme (puisque la suite $0 \rightarrow N_4 \rightarrow N_3 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ est exacte courte). Ainsi, $h = 0_{XM_3}$, et cela achève de vérifier que $\text{Ker } \phi_3 = 0_{\mathcal{A}}$. Par dualité, on déduit de même que $\text{Coker } \phi_3 = 0_{\mathcal{A}}$, et on conclut avec le lemme 2.75(iv.c).

Exercice 2.105, partie (i) : Par l'exercice 2.101(ii), la suite $\Sigma_\bullet^{\text{op}}$ est exacte courte, et on a :

$$(\psi_* \Sigma_\bullet)^{\text{op}} = (\psi^{\text{op}})^*(\Sigma_\bullet^{\text{op}}) \quad \text{dans } \mathcal{C}(\mathcal{A}^{\text{op}}).$$

Donc il suffit de vérifier que $\phi^* \Sigma_\bullet$ est exacte courte. Puisque g est un épimorphisme, l'exercice 2.95(i) montre qu'il en est de même pour g' . Aussi, f' est un monomorphisme, car il en est de même pour f . Il reste donc à vérifier que f' identifie N avec le noyau de g' . Soit alors $h : Y \rightarrow X'$ un morphisme de $\mathcal{A}$ avec $g' \circ h = 0_{YM'}$; ainsi $g \circ \pi' \circ h = 0_{YM}$, et par suite il existe un unique morphisme $k : Y \rightarrow N$ tel que $f \circ k = \pi' \circ h$. Il vient $\pi' \circ f' \circ k = \pi' \circ h$ et $g' \circ f' \circ k = 0_{YM'} = g' \circ h$; par la propriété universelle du produit fibré, on a alors $f' \circ k = h$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Considérons aussi les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc} \phi^* \Sigma & & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & X' & \xrightarrow{g'} & M' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \psi & & \downarrow p' & & \parallel & & \\ \psi_*(\phi^* \Sigma) & & 0 & \longrightarrow & N'' & \xrightarrow{h'} & Y' & \xrightarrow{k'} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\phi^*(\psi_*\Sigma) & 0 \longrightarrow & N'' & \xrightarrow{h''} & Y'' & \xrightarrow{k''} & M' \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow p'' & & \downarrow \phi \\
\psi_*\Sigma & 0 \longrightarrow & N'' & \xrightarrow{f''} & X'' & \xrightarrow{g''} & M \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Par la propriété universelle du produit fibré, la donnée d'un morphisme $s_1 : Y' \rightarrow Y''$ équivaut à celle d'un couple de morphismes $s'_1 : Y' \rightarrow M'$ et $s''_1 : Y' \rightarrow X''$ tels que

$$(*) \quad \phi \circ s'_1 = g'' \circ s''_1.$$

Par la propriété universelle de la somme amalgamée, la donnée de s'_1 (resp. s''_1) correspond à son tour à celle d'un couple de morphismes $u' : X' \rightarrow M'$ et $v' : N'' \rightarrow M'$ tels que $u' \circ f' = v' \circ \psi$ (resp. $u'' : X' \rightarrow X''$ et $v'' : N'' \rightarrow X''$ tels que $u'' \circ f' = v'' \circ \psi$), et $(*)$ revient aux identités :

$$\phi \circ u' = g'' \circ u'' \quad \text{et} \quad \phi \circ v' = g'' \circ v''.$$

On prend $u' := g'$ et $v' := 0_{N''M'}$ (resp. $u'' := \pi'' \circ \pi'$ et $v'' := f''$). Vérifions que la donnée $(s_0 := \mathbf{1}_{N''}, s_1, s_2 := \mathbf{1}_{M'})$ est bien un morphisme de suites exactes courtes $\psi_*(\phi^*\Sigma) \rightarrow \phi^*(\psi_*\Sigma)$. Cela revient à montrer les identités : $s_1 \circ h' = h''$ et $k'' \circ s_1 = k'$. La première à son tour équivaut à : $s'_1 \circ h' = k'' \circ h'' = 0_{N''M'}$ et $s''_1 \circ h' = p'' \circ h'' = f''$. Mais cela est clair, car par construction on a $s'_1 \circ h' = v'$ et $s''_1 \circ h' = v''$. De même, l'identité $k'' \circ s_1 = k'$ équivaut à : $s'_1 = k'$, et cela est clair, car $s'_1 \circ p' = u' = g' = k' \circ p'$, et $s'_1 \circ h' = v' = 0_{N''M'} = k' \circ h'$. En dernier lieu, puisque s_0 et s_2 sont des isomorphismes, il en est de même pour s_1 , d'après l'exercice 2.104, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\phi'^*(\phi^*\Sigma) & 0 \longrightarrow & N & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{b} & M'' \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow p & & \downarrow \phi' \\
\phi^*\Sigma & 0 \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & X' & \xrightarrow{g'} & M' \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow \pi' & & \downarrow \phi \\
\Sigma & 0 \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Puisque les deux carrés en haut et en bas à droite sont cartésiens, on voit aisément qu'il en est de même pour le carré formé des flèches horizontales b et g , et par les flèches verticales $\pi' \circ p$ et $\phi \circ \phi'$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Par suite, a est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $b \circ a = 0_{NM''}$ et $\pi' \circ p \circ a = f$, d'où l'identification souhaitée $(\phi \circ \phi')^*\Sigma \xrightarrow{\sim} \phi'^*(\phi^*\Sigma)$. L'identification naturelle $(\psi' \circ \psi)_*\Sigma \xrightarrow{\sim} \psi'_*(\psi_*\Sigma)$ se déduit comme d'habitude par dualité.

Exercice 2.107 : Remarquons d'abord que l'on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker}(f \circ g) & \xrightarrow{g'} & \text{Ker}(f) \\
i' \downarrow & & \downarrow i \\
A & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

où i et i' sont les monomorphismes universels. En effet, soient $A \xleftarrow{u} X \xrightarrow{v} \text{Ker } f$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ avec $g \circ u = i \circ v$; il vient $f \circ g \circ u = f \circ i \circ v = 0_{XC}$, donc $u = i' \circ w$ pour un unique morphisme $w : X \rightarrow \text{Ker}(f \circ g)$, et on a

$$i \circ g' \circ w = g \circ i' \circ w = g \circ u = i \circ v$$

d'où $g' \circ w = v$, car i est un monomorphisme, d'où l'assertion. Notons ensuite par

$$A \xrightleftharpoons[p_A]{e_A} A \oplus B \xrightleftharpoons[p_B]{e_B} B \quad B \xrightleftharpoons[p'_B]{e'_B} B \oplus C \xrightleftharpoons[p'_C]{e'_C} C$$

les injections et les projections canoniques, et considérons le diagramme commutatif

$$\Sigma(g, f) \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{e_A} & A \oplus B & \xrightarrow{p_B} & B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{e'_B} & B \oplus C & \xrightarrow{p'_C} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

à lignes horizontales exactes, avec $h := g \oplus f - e'_B \circ p_B$. On va exhiber un isomorphisme $\text{Ker}(h) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(f \circ g)$, identifiant le monomorphisme universel $\text{Ker}(h) \rightarrow A \oplus B$ avec $j := (e_A + e_B \circ g) \circ i' : \text{Ker}(f \circ g) \rightarrow A \oplus B$. Soit en fait $u : X \rightarrow A \oplus B$ un morphisme avec $h \circ u = 0_{X, B \oplus C}$, et posons $u_A := p_A \circ u$ et $u_B := p_B \circ u$; il vient $f \circ u_B = p'_C \circ h \circ u = 0_{X_C}$, donc $u_B = u'_B \circ i$ pour un unique morphisme $u'_B : X \rightarrow \text{Ker}(f)$. En outre,

$$0_{X_B} = p'_B \circ h \circ u = (g \circ p_A - p_B) \circ u = g \circ u_A - u_B$$

i.e. $u_B = g \circ u_A$. Autrement dit, la donnée de u équivaut à celle d'un couple de morphismes (u_A, u'_B) tel que $u'_B \circ i = g \circ u_A$; par ce qui précède, la donnée de (u_A, u'_B) équivaut aussi à celle d'un morphisme $w : X \rightarrow \text{Ker}(f \circ g)$ avec $i' \circ w = u_A$ et $g' \circ w = u'_B$. En dernier lieu, noter que, pour un tel w on a

$$\begin{aligned} j \circ w &= e_A \circ u_A + e_B \circ g \circ i' \circ w = e_A \circ u_A + e_B \circ i \circ g' \circ w \\ &= e_A \circ u_A + e_B \circ i \circ u'_B = e_A \circ u_A + e_B \circ u_B = u. \end{aligned}$$

L'isomorphisme souhaité s'ensuit aussitôt. Noter aussi que la construction de $\Sigma(g, f)$ est auto-duale, i.e. $\Sigma(f^{\text{op}}, g^{\text{op}}) = \Sigma(g, f)^{\text{op}}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur); par suite, on a de même un isomorphisme $\text{Coker}(h) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(f \circ g)$. Pour conclure, il suffit maintenant d'invoquer le lemme du serpent (proposition 2.106).

Problème 2.108, partie (i) : Cela découle aussitôt de l'exercice 2.107 : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Soit $A' \xrightarrow{p} A'' \xrightarrow{i} A$ la factorisation épi-mono de g (remarque 2.93(i)), et posons $B'' := B \times_A A'$, de sorte que $B \times_A g = (B \times_A i) \circ (B'' \times_{A''} p)$; alors i et p sont des $\mathcal{B}$ -isomorphismes, et d'après (i) il suffit de montrer qu'il en est de même pour $B'' \times_{A''} p$ et $B \times_A i$. Ainsi, on peut supposer que g soit un monomorphisme ou un épimorphisme. Si g est un épimorphisme, il en est de même pour $B \times_A g$, et $\text{Ker}(g)$ s'identifie naturellement avec $\text{Ker}(B \times_A g)$ (exercice 2.105(i)), d'où l'assertion. Si g est un monomorphisme, soit $B \xrightarrow{q} B' \xrightarrow{j} A$ la factorisation épi-mono de f ; on a $B \times_A g = B \times_{B'} (B' \times_A g)$, donc on peut supposer que f soit un monomorphisme ou un épimorphisme. Si f est un épimorphisme, le diagramme cartésien

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} B \times_A A' & \longrightarrow & A' \\ B \times_A g \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

est aussi cocartésien (exercice 2.95(i)), et $B \times_A g$ est un monomorphisme, car il en est de même pour g (exemple 2.23(iii)); par suite, on a une identification naturelle de $\text{Coker}(B \times_A g)$ avec $\text{Coker}(g)$ (exercice 2.105(i)), d'où l'assertion. En dernier lieu, soient f et g deux monomorphismes, et posons $C := \text{Im}(f) \cup \text{Im}(g)$, de sorte que g est la composition des monomorphismes $g' : A' \rightarrow C$ et $g'' : A'' \rightarrow A$; puisque $\text{Coker}(g')$ est un sous-objet de $\text{Coker}(g)$, on voit avec (i) que g' est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme. D'autre part, f est la composition de g'' avec un monomorphisme $f' : B \rightarrow C$, et on a une identification naturelle de $B \times_A g$ avec $B \times_C g'$. Quitte à remplacer A par C , on peut donc supposer que le diagramme $(*)$ soit aussi cocartésien (exercice 2.95(ii)), et on conclut alors comme dans le cas précédent.

Partie (iii) : Soient $X \xleftarrow{f} X' \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes de $\mathcal{A}$; si f est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme, la propriété universelle souhaitée entraîne l'existence d'un unique morphisme $h : \pi X \rightarrow \pi Y$ de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ avec $\pi(g) = h \circ \pi(f)$. On essaiera donc de réaliser les morphismes $\pi X \rightarrow \pi Y$ de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ par les *classes d'équivalence* de tels diagrammes, pour la plus petite relation d'équivalence telle que deux tels diagrammes

$$(*) \quad \mathcal{D} := (X \xleftarrow{f} X' \xrightarrow{g} Y) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' := (X \xleftarrow{f'} X'' \xrightarrow{g'} Y)$$

sont équivalents s'il existe $t \in \mathcal{A}(X', X'')$ avec $f' \circ t = f$ et $g' \circ t = g$; puisque f et f' sont des $\mathcal{B}$ -isomorphismes, noter qu'il en est de même pour t , d'après (i), et par suite ces diagrammes représenteront le même morphisme de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, car :

$$\pi(g) \circ \pi(f)^{-1} = \pi(g) \circ \pi(t)^{-1} \circ \pi(f')^{-1} = \pi(g') \circ \pi(f')^{-1}.$$

Toutefois, si $\mathcal{A}$ n'est pas une petite catégorie, ces classes d'équivalence ne forment pas forcément un ensemble ; pour y remédier, noter que le diagramme $\mathcal{D}$ induit un unique morphisme $(f, g) : X' \rightarrow X \times Y$ dont la composition avec la projection $p_X : X \times Y \rightarrow X$ (resp. $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$) coïncide avec f (resp. avec g), et soit $q : X' \rightarrow X'' := \text{Im}(f, g)$ l'épimorphisme canonique, de sorte qu'il existe un unique monomorphisme $(f', g') : X'' \rightarrow X \times Y$ avec $(f, g) = (f', g') \circ q$. Ce dernier correspond à son tour à un diagramme $\mathcal{D}' := (X \xleftarrow{f'} X'' \xrightarrow{g'} Y)$; montrons que f' est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme : d'après (i) il suffit de vérifier que q est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme, car $f = f' \circ q$. Mais $\text{Coker}(q) = 0 \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, et $\text{Ker}(q) = \text{Ker}(f, g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$, donc $\text{Ker}(q) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Cela achève de montrer que $\mathcal{D}$ est équivalent à $\mathcal{D}'$; on notera par $[f, g] \in \text{Sub}(X \times Y)$ le sous-objet déterminé par le monomorphisme (f', g') . Remarquons ensuite que la condition que $f' = p_X \circ (f', g')$ soit un $\mathcal{B}$ -isomorphisme *ne dépend que du sous-objet* $[f, g]$: car si un monomorphisme $u : Z \rightarrow X \times Y$ est un deuxième représentant pour le sous-objet $[f, g]$, alors par définition il existe un isomorphisme $v : X' \xrightarrow{\sim} Z$ de $\mathcal{A}$ tel que $u \circ v = (f', g')$, et il s'ensuit aisément que $p_X \circ u$ est de même un $\mathcal{B}$ -isomorphisme. Le même raisonnement montre que deux diagrammes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ comme dans (*) avec $[f, g] = [f', g']$ sont équivalents. Mais par hypothèse, $\text{Sub}(X \times Y)$ est un ensemble, donc de même pour sa partie $\text{Sub}_{\mathcal{B}}(X \times Y)$ des sous-objets $[f, g]$ tels que f soit un $\mathcal{B}$ -isomorphisme ; ainsi, on remplacera nos classes d'équivalence par l'ensemble des classes d'équivalence

$$\text{Sub}_{\mathcal{B}}(X \times Y)/\sim.$$

Par inspection des définitions, on voit que $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence telle que $[f, g] \sim [f', g']$ si $[f, g] \subset [f', g']$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. On notera par $\langle f, g \rangle \in \text{Sub}_{\mathcal{B}}(X \times Y)/\sim$ la classe du sous-objet $[f, g]$. Remarquons :

Lemme 2.113. (i) *Pour tout $\mathcal{B}$ -isomorphisme $f : X \rightarrow Y$, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_{(f, f)} X$ est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme (exercice 2.66(i)).*

(ii) *Soient $[f_1, g_1] \subset [f_0, g_0] \supset [f_2, g_2]$ trois éléments de $\text{Sub}_{\mathcal{B}}(X \times Y)$. Alors il existe $[f_3, g_3] \in \text{Sub}_{\mathcal{B}}(X \times Y)$ avec $[f_1, g_1] \supset [f_3, g_3] \subset [f_2, g_2]$.*

(iii) *Soient $[f, g], [f', g'] \in \text{Sub}_{\mathcal{B}}(X, Y)$; alors $\langle f, g \rangle = \langle f', g' \rangle$ si et seulement s'il existe $[f'', g''] \in \text{Sub}_{\mathcal{B}}(X, Y)$ avec $[f, g] \supset [f'', g''] \subset [f', g']$.*

Démonstration. (i) : Soient $X \xleftarrow{p_1} X \times_{(f, f)} X \xrightarrow{p_2} X$ les projections canoniques et $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_{(f, f)} X$ le morphisme diagonal ; on voit aisément que $f \circ (p_1 - p_2)$ et $(p_1 - p_2) \circ \Delta_{X/Y}$ sont les morphismes nuls, d'où une suite exacte courte de $\mathcal{A}$:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\Delta_{X/Y}} X \times_{(f, f)} X \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow 0.$$

(ii) : Pour $i = 1, 2$ soit $t_i : X_i \rightarrow X_0$ un $\mathcal{B}$ -isomorphisme avec $f_i = f_0 \circ t_i$ et $g_i = g_0 \circ t_i$. D'après (ii), les projections canoniques $X_1 \xleftarrow{p_1} X_1 \times_{(t_1, t_2)} X_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ sont des $\mathcal{B}$ -isomorphismes ; on fait alors $f_3 := f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ et $g_3 := g_1 \circ p_1 = g_2 \circ p_2$.

Partie (iv) : Une inspection directe des définitions montre que $\mathcal{B}^{\text{op}}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}^{\text{op}}$, et qu'un morphisme f de $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{B}$ -isomorphisme si et seulement si f^{op} est un $\mathcal{B}^{\text{op}}$ -isomorphisme. Il s'ensuit aussitôt que les couples $((\mathcal{A}/\mathcal{B})^{\text{op}}, \pi^{\text{op}})$ et $(\mathcal{A}^{\text{op}}/\mathcal{B}^{\text{op}}, \pi')$ jouissent de la même propriété universelle détaillée dans (iii). L'assertion se démontre alors par un argument formel, comme dans la preuve du lemme 2.4(i) : les détails sont confiés aux soins du lecteur.

Partie (v) : Afin de vérifier que $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est pré-additive, soient $(X \xleftarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} Y \mid i = 1, 2)$ deux diagrammes comme dans (*), de sorte que f_1, f_2 et les projections canoniques $(p_i : X_1 \times_{(f_1, f_2)} X_2 \rightarrow X_i \mid i = 1, 2)$ sont des $\mathcal{B}$ -isomorphismes, d'après (ii) ; montrons que $\langle f_1 \circ p_1, g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2 \rangle$ ne dépend que de $(\langle f_i, g_i \rangle \mid i = 1, 2)$. Pour cela, soit $t : X'_1 \rightarrow X_1$ un $\mathcal{B}$ -isomorphisme ; il vient un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X'_1 \times_{(f_1 \circ t, f_2)} X_2 & \xrightarrow{t'} & X_1 \times_{(f_1, f_2)} X_2 \\ p'_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X'_1 & \xrightarrow{t} & X_1 \end{array}$$

tel que p'_1 et $p'_2 := p_2 \circ t'$ sont les projections canoniques : les détails sont laissés aux soins du lecteur ; d'après (ii), t' est alors un $\mathcal{B}$ -isomorphisme, et on a :

$\langle f_1 \circ p_1, g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2 \rangle = \langle f_1 \circ p_1 \circ t', (g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2) \circ t' \rangle = \langle f_1 \circ t \circ p'_1, g_1 \circ t \circ p'_1 + g_2 \circ p'_2 \rangle$ alors que $\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f_1 \circ t, g_1 \circ t \rangle$; cela prouve l'indépendance du représentant pour $\langle f_1, g_1 \rangle$, et en échangeant les rôles de (f_1, g_1) et (f_2, g_2) on vérifie de même l'indépendance du représentant pour $\langle f_2, g_2 \rangle$, d'où l'assertion. On pose :

$$(\dagger) \quad \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle := \langle f_1 \circ p_1, g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2 \rangle.$$

Puisque $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$, on voit aussitôt que la loi d'addition $(\dagger)$ est commutative, et on vérifie aisément que $\langle f, g \rangle + \langle \mathbf{1}_X, 0_{XY} \rangle = \langle f, g \rangle$ pour tout $\langle f, g \rangle \in (\mathcal{A}/\mathcal{B})(X, Y)$. Montrons que $\langle f, g \rangle + \langle f, -g \rangle = \langle \mathbf{1}_X, 0_{XY} \rangle$ pour tout tel $\langle f, g \rangle$: en effet, soient $p_1, p_2 : X' \times_{(f, f)} X' \rightarrow X'$ les projections ; avec le lemme 2.113(i) il vient :

$$\langle f \circ p_1, g \circ p_1 + (-g) \circ p_2 \rangle = \langle f \circ p_1 \circ \Delta_{X'/X}, (g \circ p_1 - g \circ p_2) \circ \Delta_{X'/X} \rangle = \langle f, 0_{XY} \rangle$$

d'où l'assertion. Pour vérifier l'associativité de $(\dagger)$, soient $(X \xleftarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} Y \mid i = 1, 2, 3)$ trois diagrammes comme dans (*) ; il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 \times_X X_2 \times_X X_3 & & \\ & \swarrow p_{12} & & \searrow p_{23} & \\ X_1 \times_X X_2 & & & & X_2 \times_X X_3 \\ \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & & \swarrow q_2 \\ X_1 & & X_2 & & X_3 \\ \searrow f_1 & & \swarrow f_2 & & \searrow f_2 \\ X & \xleftarrow{f_2} & X & \xrightarrow{f_2} & X \\ & \swarrow f_3 & & \searrow f_3 & \end{array}$$

dont les trois carrés sont cartésiens. Par suite :

$$\begin{aligned} (\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle) + \langle f_3, g_3 \rangle &= \langle f_2 \circ p_2, g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2 \rangle + \langle f_3, g_3 \rangle \\ &= \langle f_2 \circ p_2 \circ p_{12}, (g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2) \circ p_{12} + g_3 \circ q_3 \circ p_{23} \rangle \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \langle f_1, g_1 \rangle + (\langle f_2, g_2 \rangle + \langle f_3, g_3 \rangle) &= \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2 \circ q_2, g_2 \circ q_2 + g_3 \circ q_3 \rangle \\ &= \langle f_2 \circ q_2 \circ p_{23}, (g_2 \circ q_2 + g_3 \circ q_3) \circ p_{23} + g_1 \circ p_1 \circ p_{12} \rangle \end{aligned}$$

d'où l'assertion, car $p_2 \circ p_{12} = q_2 \circ p_{23}$. En dernier lieu, montrons que la loi de composition est bilinéaire, par rapport à l'addition $(\dagger)$: pour cela, soit $Y \xleftarrow{h} Y' \xrightarrow{k} Z$ un troisième diagramme comme dans (*) ; on doit vérifier que

$$\langle h, k \rangle \circ (\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle) = \langle h, k \rangle \circ \langle f_1, g_1 \rangle + \langle h, k \rangle \circ \langle f_2, g_2 \rangle.$$

Mais puisque $\langle h, k \rangle = \langle \mathbf{1}_{Y'}, k \rangle \circ \langle h, \mathbf{1}_{Y'} \rangle$, on peut supposer que l'on a soit $h = \mathbf{1}_Y$, soit $k = \mathbf{1}_{Y'}$. Soit $k = \mathbf{1}_{Y'}$; comme $\langle h, \mathbf{1}_{Y'} \rangle$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, et comme $\langle \mathbf{1}_{Y'}, h \rangle$ est son inverse à gauche, il suffit de vérifier que

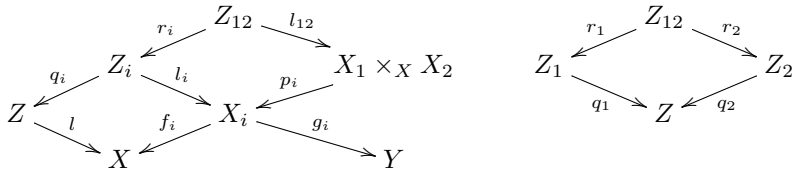
$$\langle \mathbf{1}_{Y'}, h \rangle \circ (\langle h, \mathbf{1}_{Y'} \rangle \circ \langle f_1, g_1 \rangle + \langle h, \mathbf{1}_{Y'} \rangle \circ \langle f_2, g_2 \rangle) = \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle.$$

Donc, on est ramené au cas où $h = \mathbf{1}_Y$; mais on a $\langle \mathbf{1}_Y, k \rangle \circ \langle f_i, g_i \rangle = \langle f_i, k \circ g_i \rangle$ pour $i = 1, 2$, et $\langle h, k \rangle \circ (\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle) = \langle f_1 \circ p_1, k \circ (g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2) \rangle$, d'où l'assertion.

De même, pour tout diagramme $Z \xleftarrow{m} Z' \xrightarrow{l} X$, on doit vérifier que :

$$(\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle) \circ \langle m, l \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \circ \langle m, l \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle \circ \langle m, l \rangle$$

et en raisonnant comme ci-dessus on se ramène au cas où $m = \mathbf{1}_Z$; on a alors les diagrammes commutatifs :



dont les trois carrés sont cartésiens. Avec cette notation,

$$\langle f_i, g_i \rangle \circ \langle \mathbf{1}_Z, l \rangle = \langle q_i, g_i \circ l_i \rangle \quad \forall i = 1, 2$$

et :

$$(\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle) \circ \langle \mathbf{1}_Z, l \rangle = \langle q_1 \circ r_1, (g_1 \circ p_1 + g_2 \circ p_2) \circ l_{12} \rangle.$$

Mais $\langle q_1, g_1 \circ l_1 \rangle + \langle q_2, g_2 \circ l_2 \rangle = \langle q_1 \circ r_1, g_1 \circ l_1 \circ r_1 + g_2 \circ l_2 \circ r_2 \rangle$, d'où l'assertion.

Ensuite, une inspection directe montre que π est un foncteur additif. Par suite, tout objet zéro de $\mathcal{A}$ est aussi un objet zéro pour $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, et π commute avec les biproduits (problème 2.76(i)); comme $\text{Ob}(\mathcal{A}) = \text{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, on déduit que tout biproduit de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est représentable, donc $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est une catégorie additive.

Montrons que le noyau de tout $\langle f, g \rangle \in (\mathcal{A}/\mathcal{B})(X, Y)$ est représentable. Pour cela, puisque $\langle f, \mathbf{1}_{X'X'} \rangle$ est un isomorphisme et $\langle f, g \rangle = \langle \mathbf{1}_{X'}, g \rangle \circ \langle f, \mathbf{1}_{X'X} \rangle$, on se ramène au cas où $f = \mathbf{1}_X$, et dans ce cas on va vérifier plus précisément que $\text{Ker}(g)$ représente $\text{Ker} \langle f, g \rangle$. En effet, soit $Z \xleftarrow{h} Z' \xrightarrow{k} X$ un diagramme comme dans (*), avec $\langle h, g \circ k \rangle = \langle \mathbf{1}_X, g \rangle \circ \langle h, k \rangle = \langle \mathbf{1}_Z, 0_{ZY} \rangle$; d'après le lemme 2.113(iii), il existe un $\mathcal{B}$ -isomorphisme $t : Z'' \rightarrow Z'$ tel que $g \circ k \circ t = 0_{Z''Y}$, donc $k \circ t$ est la composition du monomorphisme naturel $\iota_g : \text{Ker}(g) \rightarrow X$ et d'un unique morphisme $k' : Z'' \rightarrow \text{Ker}(g)$ de $\mathcal{A}$, de sorte que $\langle h, k \rangle = \langle h \circ t, k \circ t \rangle = \langle \mathbf{1}_{\text{Ker}(g)}, \iota_g \rangle \circ \langle h \circ t, k' \rangle$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que $\pi(l)$ est un monomorphisme, pour tout monomorphisme $l : T \rightarrow S$ de $\mathcal{A}$; mais pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, il est clair que l induit une injection d'ensembles partiellement ordonnés :

$$\text{Sub}_{\mathcal{B}}(U \times T) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{B}}(U \times S) \quad (\phi : W \rightarrow U \times T) \mapsto ((U \times l) \circ \phi : W \rightarrow U \times S)$$

identifiant $\text{Sub}_{\mathcal{B}}(U \times T)$ avec la partie des éléments de $\text{Sub}_{\mathcal{B}}(U \times S)$ contenus dans le sous-objet $U \times l : U \times T \rightarrow U \times S$, d'où l'assertion, au vu du lemme 2.113(iii).

La preuve montre en outre que π commute avec tout noyau; au vu de (iv), on déduit de même que tout conoyau de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est représentable, et que π commute avec les conoyaux. En dernier lieu, montrons que le morphisme canonique $\beta_{\langle f, g \rangle} : \text{Coim} \langle f, g \rangle \rightarrow \text{Im} \langle f, g \rangle$ est un isomorphisme. Pour cela, en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène au cas où $f = \mathbf{1}_X$, de sorte que $\langle f, g \rangle = \pi(g)$; mais puisque π commute avec les noyaux et les conoyaux, il est clair que $\beta_{\pi(g)} = \pi(\beta_g)$, et par hypothèse $\beta_g : \text{Coim}(g) \rightarrow \text{Im}(g)$ est un isomorphisme, d'où l'assertion. Cela achève de vérifier que $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est abélienne; au vu de la proposition 2.102(ii) on voit alors que π est exact, comme souhaité.

Exercice 2.109, partie (i) : On peut raisonner comme dans la remarque 2.97(iii); les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Dans l'exemple 2.22(ii), on a vu que la limite inverse du système projectif $M_\bullet$ est le sous-module des suites cohérentes de M_∞ . Par (i), on voit aisément qu'un élément $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in M_\infty$ est une suite cohérente si et seulement si $g_n(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : On pose $M'_\infty := \prod_{n \in \mathbb{N}} M'_n$ et $M''_\infty := \prod_{n \in \mathbb{N}} M''_n$, et on définit les endomorphismes correspondants t' et t'' de ces modules comme dans (ii); les systèmes d'applications A -linéaires $i_\bullet$ et $p_\bullet$ font commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & M''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g'_n & & \downarrow g_n & & \downarrow g''_n \\
 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{p_n} & M''_n \longrightarrow 0
 \end{array}
 \quad (\dagger)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$; on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M'_\infty & \xrightarrow{i_\infty} & M_\infty & \xrightarrow{p_\infty} & M''_\infty \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow t' & & \downarrow t & & \downarrow t'' \\
 0 & \longrightarrow & M'_\infty & \xrightarrow{i_\infty} & M_\infty & \xrightarrow{p_\infty} & M''_\infty \longrightarrow 0
 \end{array}
 \quad (\dagger\dagger)$$

avec $i_\infty := \prod_{n \in \mathbb{N}} i_n$ et pareil pour p_∞ . Par hypothèse, toutes les lignes des diagrammes $(\dagger)$ sont exactes, donc de même pour les lignes de $(\dagger\dagger)$. Dans cette situation, le lemme du serpent nous donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } t' \rightarrow \text{Ker } t \rightarrow \text{Ker } t'' \rightarrow \text{Coker } t'.$$

Compte tenu de (ii), on en déduit une suite exacte

$$(\dagger \dagger \dagger) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M'_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^{\text{op}}} M''_n \rightarrow \text{Coker } t'$$

et une inspection directe des constructions montre aisément que le segment initial de cette dernière coïncide avec la suite $(*)$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Au vu de la suite $(\dagger \dagger \dagger)$, il suffit de montrer que t' est surjectif, si les homomorphismes g'_n sont tous surjectifs. Soit donc $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in M'_\infty$ un élément; il faut exhiber une suite $(y_n \mid n \in \mathbb{N}) \in M'_\infty$ telle que $y_n - g_n(y_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On construit les y_n par récurrence sur n : pour $n = 0$ on pose $y_0 := 0$; ensuite, si $n \geq 0$ et on a déjà l'élément y_n , on remarque que l'équation $g_n(z) = y_n - x_n$ admet une solution $z \in M'$, car g_n est surjectif, et on pose $y_{n+1} := z$.

Exercice 2.110, partie (i) : Par hypothèse, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et des surjections A -linéaires $\phi' : A^n \rightarrow M'$, $\phi'' : A^m \rightarrow M''$. Soit $e'_1, \dots, e'_n$ (resp. $e''_1, \dots, e''_m$) la base canonique de A^n resp. de A^m , et pour tout $i = 1, \dots, m$ choisissons $m_i \in M$ tel que $g(m_i) = \phi''(e''_i)$. On considère l'application A -linéaire $\phi : A^n \oplus A^m \rightarrow M$ telle que $\phi(e'_i) = f \circ \phi'(e'_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\phi(e''_j) = m_j$ pour $j = 1, \dots, m$; avec cette notation, on obtient un diagramme commutatif de A -modules dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{i} & A^n \oplus A^m & \xrightarrow{p} & A^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

et où i et p sont respectivement l'injection et la projection canoniques. Or, le lemme du serpent nous donne la suite exacte $\text{Coker } \phi' = 0 \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow \text{Coker } \phi'' = 0$, qui montre que ϕ est surjective, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Reprenons la notation de la preuve (i) ; par hypothèse, on peut choisir ϕ' et ϕ'' tels que $\text{Ker } \phi'$ et $\text{Ker } \phi''$ soient des A -modules de type fini. Or, le lemme du serpent nous donne aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \phi' \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow \text{Ker } \phi'' \rightarrow \text{Coker } \phi' = 0.$$

Compte tenu de (i), il s'ensuit que $\text{Ker } \phi$ est de type fini, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une surjection A -linéaire $\phi : A^n \rightarrow M$ dont le noyau est un A -module de type fini. On peut alors trouver un sous-module $N \subset A^n$ de type fini, tel que $\phi(N) = M'$; on en déduit un isomorphisme $M'' \xrightarrow{\sim} A^n / (N + \text{Ker } \phi)$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Soit $\phi'' : A^m \rightarrow M''$ une application A -linéaire avec noyau de type fini ; comme dans (i), on relève ϕ'' en une application A -linéaire $\phi : A^m \rightarrow M$, et on obtient un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A^m & \xlongequal{\quad} & A^m & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

En vertu du lemme du serpent, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow (\text{Ker } \phi'') / (\text{Ker } \phi) \rightarrow M' \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow 0$$

d'où l'assertion, compte tenu de (i).

3. GÉMEAUX II



CETTE leçon introduit le produit tensoriel, qui -- avec les sommes et les produits directs et les foncteurs Hom -- complète la liste des opérations fondamentales de l'algèbre linéaire sur les anneaux généraux. Son importance ne peut pas surprendre, car il intervient de droit dans toute question où il s'agit d'applications multilinéaires : on l'appliquera notablement pour construire les foncteurs d'*extension des scalaires* (section 3.2) et pour fournir une description alternative des coproduits finis dans les catégories d'algèbres (section 3.4).

La section 3.3 développe l'importante *technique de localisation* des anneaux et des modules, dont l'efficacité décisive est révélée surtout quand elle est couplée avec son allié, le *lemme de Nakayama* (corollaire 3.49), sûrement le lemme le plus célèbre de l'algèbre commutative. Ces deux outils forment le socle d'un *modus operandi* typique de l'algébriste moderne, tellement omniprésent qu'il est presque une seconde nature : lorsqu'on examine les propriétés d'un anneau ou des ses modules, on essaye dans une première phase de focaliser l'étude *autour de chaque idéal premier*, ce qui revient à remplacer l'anneau d'origine par la collection de ses localisés, qui en sont des drastiques simplifications ; maintes questions *de nature locale* sur les anneaux et leurs propriétés se prêtent directement à être analysées de telle sorte, et même pour des problèmes de nature non locale, l'étude locale est souvent une étape utile.

On se penche ensuite sur le concept de *platitude* pour modules et algèbres, dont la définition, plutôt abstraite, peut paraître opaque ; mais parmi les nombreux critères équivalents, deux en particulier nous permettent d'esquisser un tableau général assez satisfaisant : d'un côté, par le théorème 3.86 de Govorov-Lazard, tout module plat est une limite directe filtrante de modules libres ; de l'autre côté, on verra dans la leçon suivante que les modules plats de présentation finie sont facteurs directs de modules libres (de rang fini). Pour les algèbres, la situation est plus complexe et variée : les premiers exemples d'algèbres plates que l'on rencontrera sont les localisations et les algèbres de polynômes, mais il y en a d'autres : notamment les complétions adiques des anneaux noethériens, que l'on étudiera dans la leçon 9.

D'un point de vue géométrique, les homomorphismes plats $f : A \rightarrow B$ d'anneaux sont distingués par plusieurs propriétés remarquables : premièrement, l'application induite $\text{Spec } f$ est générante, et même ouverte si f est de présentation finie. Deuxièmement, un thème importante de la géométrie algébrique est l'étude des relations entre les propriétés de $\text{Spec } A$, de $\text{Spec } B$ et des fibres de $\text{Spec } f$: dans ces questions, la platitude de f joue un rôle primordial : par exemple, on verra dans les leçons suivantes que si f est un homomorphisme *plat et local* d'anneaux locaux noethériens, la dimension de $\text{Spec } B$ est la somme des dimensions de $\text{Spec } A$ et de la fibre $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{m})$ au-dessus du point fermé $\mathfrak{m} \in \text{Spec } A$; plus généralement, sous les mêmes hypothèses, le quatrième chapitre du traité [16] contient une longue liste d'attributs géométriques (tels que la *régularité*,

la *normalité*, la *propriété de Cohen-Macaulay* ...) qui sont hérités par B , pourvu qu'ils soient valables pour A et pour la fibre fermée de $\text{Spec } f$. En dernier lieu, la platitude intervient dans la plupart des problèmes de *descente*, *i.e.* quand on cherche à déduire des propriétés d'un A -module M ou d'une A -algèbre C , lorsqu'on a déjà prouvé les mêmes propriétés *après le changement de base plat* $A \rightarrow B$, c'est-à-dire pour le B -module $B \otimes_A M$ ou la B -algèbre $B \otimes_A C$.

3.1. Produit tensoriel de modules. Le produit tensoriel de A -modules est une solution universelle pour un certain problème de factorisation d'applications. Afin d'énoncer ce problème, rappelons d'abord :

Définition 3.1. Soient A un anneau commutatif, $k \in \mathbb{N}$ un entier non nul, et considérons une suite $M_1, \dots, M_k, P$ de A -modules. Une application

$$\beta : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P$$

est dite *A-multilinéaire* si elle satisfait la condition suivante. Pour tout $(m_1, \dots, m_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$ et tout $i \in \{1, \dots, k\}$, l'application

$$M_i \rightarrow P \quad x \mapsto \beta(m_1, \dots, m_{i-1}, x, m_{i+1}, \dots, m_k)$$

est A -linéaire. On notera

$$\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, P)$$

l'ensemble des applications A -multilinéaires $M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P$. Pour $k = 2$, une application A -multilinéaire $M_1 \times M_2 \rightarrow P$ est aussi appelée *A-bilinéaire*.

Dans la situation de la définition 3.1, noter que si $\beta : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P$ est A -multilinéaire, et si $f : P \rightarrow P'$ est un homomorphisme de A -modules, la composition $f \circ \beta : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P'$ est A -multilinéaire; on obtient ainsi une application

$$\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, f) : \mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, P) \rightarrow \mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, P') \quad \beta \mapsto f \circ \beta$$

d'où un foncteur bien défini :

$$\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, -) : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}.$$

Remarque 3.2. (i) On voit aisément que $\mathcal{L}(M_1 \times \dots \times M_k, P)$ est un A -sous-module du A -module $P^{M_1 \times \dots \times M_k}$ (voir l'exemple 1.12(iii)) et par la suite on le munira de la structure de A -module héritée par ce dernier. De plus, pour tout homomorphisme $f : P \rightarrow P'$ de A -modules, l'application $\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, f)$ est A -linéaire, et $\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, -)$ se relève ainsi en un foncteur bien défini de la catégorie $A\text{-Mod}$ dans elle-même.

(ii) On a aussi un important isomorphisme de A -modules :

$$\phi_{M_\bullet, P} : \mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_k, P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_{k-1}, \text{Hom}_A(M_k, P)).$$

En fait, soit $\beta : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P$ une application A -multilinéaire; pour tout $m_\bullet := (m_1, \dots, m_{k-1}) \in M_1 \times \dots \times M_{k-1}$ on obtient une application A -linéaire

$$\beta_{m_\bullet} : M_k \rightarrow P \quad x \mapsto \beta(m_1, \dots, m_{k-1}, x)$$

d'où une application A -multilinéaire

$$\beta_\bullet : M_1 \times \dots \times M_{k-1} \rightarrow \text{Hom}_A(M_k, P) \quad m_\bullet \mapsto \beta_{m_\bullet}$$

et on voit aisément que l'application $\phi_{M_\bullet, P}$ qui associe à chaque tel β l'application $\beta_\bullet$ est à son tour A -linéaire. Sa réciproque envoie toute application A -multilinéaire $f : M_1 \times \dots \times M_{k-1} \rightarrow \text{Hom}_A(M_k, P)$ sur l'application A -multilinéaire

$$\beta_f : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P \quad (m_1, \dots, m_k) \mapsto f(m_1, \dots, m_{k-1})(m_k).$$

3.1.1. Le but de cette section est de prouver que les foncteurs $\mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_k, -)$ sont représentables. Pour cela, il convient de se placer dans un cadre plus général : considérons alors trois anneaux A, B, C associatifs unitaires, un (A, B) -bimodule M , un (B, C) -bimodule N , et un (A, C) -bimodule P . On dira qu'une application $\beta : M \times N \rightarrow P$ est (A, B, C) -bilinéaire si elle vérifie les conditions suivantes :

- β est $\mathbb{Z}$ -bilinéaire (pour les structures de $\mathbb{Z}$ -module sous-jacentes à M, N, P)
- $\beta(ax, yc) = a \cdot \beta(x, y) \cdot c \quad \forall a \in A, \forall x \in M, \forall y \in N, \forall c \in C$
- $\beta(xb, y) = \beta(x, by) \quad \forall x \in M, \forall b \in B, \forall y \in N$.

Rappelons que si A est un anneau commutatif, tout A -module (M, μ_M) est naturellement identifié avec son (A, A) -bimodule associé $(M, \mu_M, \mu_M^{\text{op}})$ (voir le §1.1.5) ; si $A = B = C$ est un anneau commutatif, et si M, N, P sont trois A -modules, on voit aisément que, sous ces identifications, les applications (A, A, A) -bilinéaires $M \times N \rightarrow P$ correspondent aux applications A -bilinéaires de la définition 3.1.

L'ensemble des applications (A, B, C) -bilinéaires $M \times N \rightarrow P$ sera noté :

$$\mathcal{L}_{A,B,C}(M \times N, P).$$

Avec cette notation, on a une bijection naturelle, généralisant la remarque 3.2(ii) :

$$(*) \quad \mathcal{L}_{A,B,C}(M \times N, P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A,B)}(M, \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P))$$

où $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P)$ désigne le (A, B) -bimodule fourni par la remarque 1.15(i). A savoir, $(*)$ associe à toute β comme ci-dessus l'application (A, B) -linéaire $\beta^* : M \rightarrow \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P)$ telle que $\beta^*(x)(y) := \beta(x, y)$ pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$.

Proposition 3.3. *Dans la situation du §3.1.1, il existe un (A, C) -bimodule $M \otimes_B N$ appelé le produit tensoriel de M et N , et une application (A, B, C) -bilinéaire*

$$\omega : M \times N \rightarrow M \otimes_B N$$

tels que pour tout (A, C) -bimodule P et toute application (A, B, C) -bilinéaire $\beta : M \times N \rightarrow P$, on a une application (A, C) -linéaire unique $\bar{\beta} : M \otimes_B N \rightarrow P$ faisant commuter le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\beta} & P \\ \omega \downarrow & \nearrow \bar{\beta} & \\ M \otimes_B N & & \end{array}$$

Démonstration. On considère le $\mathbb{Z}$ -module libre $T := \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ et sa base canonique

$$(e_{m,n} \mid m \in M, n \in N)$$

et on dénote par $S \subset T$ le $\mathbb{Z}$ -sous-module engendré par les éléments :

$$e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n} \quad e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} \quad e_{mb,n} - e_{m,bn}$$

pour tous $m, m' \in M$, tous $n, n' \in N$ et tout $b \in B$. On forme le quotient

$$M \otimes_B N := T/S$$

et on dénote $m \otimes n$ la classe de $e_{m,n}$ dans $M \otimes_B N$, pour tous $m \in M$ et $n \in N$. Pour tout $a \in A$ et tout $c \in C$, on a un unique endomorphisme $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mu_{a,c} : T \rightarrow T$ tel que $\mu_{a,c}(e_{m,n}) := e_{am,nc}$ pour tout $(m, n) \in M \times N$, et on voit aussitôt que $\mu_{a,c}(S) \subset S$ pour tous tels a et c . Le quotient $M \otimes_B N$ est muni alors d'une structure de (A, C) -bimodule, telle que

$$a \cdot (m \otimes n) \cdot c := am \otimes nc \quad \forall a \in A, \forall c \in C, \forall (m, n) \in M \times N$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). On considère l'application

$$\omega : M \times N \rightarrow M \otimes_B N \quad (m, n) \mapsto m \otimes n.$$

On voit aussitôt que ω est (A, B, C) -bilinéaire. Or, si $\beta : M \times N \rightarrow P$ est (A, B, C) -bilinéaire, soit $\gamma : T \rightarrow P$ l'unique application $\mathbb{Z}$ -linéaire telle que

$$\gamma(e_{m,n}) := \beta(m, n) \quad \forall (m, n) \in M \times N.$$

La (A, B, C) -bilinéarité de β implique aisément que $\gamma(S) = 0$, donc γ se factorise à travers une unique application (A, C) -linéaire $\bar{\beta} : M \otimes_B N \rightarrow P$; par construction

$$\bar{\beta}(m \otimes n) = \beta(m, n) \quad \forall (m, n) \in M \times N$$

et le diagramme $(*)$ commute. Puisque l'image de ω engendre $M \otimes_B N$, on voit que $\bar{\beta}$ est l'unique application (A, C) -linéaire faisant commuter $(*)$. $\square$

Remarque 3.4. (i) La proposition 3.3 nous donne une bijection naturelle

$$\mathcal{L}_{A,B,C}(M \times N, P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A,C)}(M \otimes_B N, P) \quad f \mapsto f \circ \omega.$$

Par composition avec la bijection $(*)$ du §3.1.1, on déduit une bijection :

$$\lambda_{M,N,P} : \text{Hom}_{(A,C)}(M \otimes_B N, P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A,B)}(M, \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P)).$$

Explicitement, il s'agit de l'application qui associe à tout homomorphisme de (A, C) -modules $f : M \otimes_B N \rightarrow P$, l'homomorphisme $f' : M \rightarrow \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P)$ de (A, B) -modules tel que $f'(m)(n) = f(m \otimes n)$ pour tous $m \in M, n \in N$.

(ii) Soit $f : M \rightarrow M'$ (resp. $g : N \rightarrow N'$) une application (A, B) -linéaire (resp. (B, C) -linéaire). On déduit une application (A, C) -linéaire

$$f \otimes_B g : M \otimes_B N \rightarrow M' \otimes_B N' \quad m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n).$$

A savoir, soit $\omega' : M' \times N' \rightarrow M' \otimes_B N'$ l'application (A, B, C) -bilinéaire universelle fournie par la proposition 3.3; la composition $\omega' \circ (f \times g) : M \times N \rightarrow M' \otimes_B N'$ est aussi (A, B, C) -bilinéaire, donc on peut définir $f \otimes_B g$ comme l'unique application (A, C) -linéaire qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f \times g} & M' \times N' \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega' \\ M \otimes_B N & \xrightarrow{f \otimes_B g} & M' \otimes_B N'. \end{array}$$

Cette définition illustre l'utilité de la propriété universelle : elle nous permet de montrer l'existence d'applications linéaires sans avoir à les construire explicitement. Pour apprécier cette commodité, on peut remarquer qu'un élément typique x de $M \otimes_B N$ s'écrit en général comme une somme finie $x = \sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i$ d'un nombre arbitraire k de *tenseurs élémentaires* $m_i \otimes n_i$, et ni cette écriture, ni le nombre k de termes ne sont déterminés de façon unique par x . Donc, si l'on songeait à définir directement une application (A, C) -linéaire sur $M \otimes_B N$, par une formule qui explicite ses valeurs sur tout $x \in M \otimes_B N$, on se heurterait à des complications, dues à la nécessité de vérifier que la définition proposée ne dépend pas de l'écriture de x comme somme de tenseurs élémentaires. Si l'on invoque la propriété universelle, on est par contre assuré *a priori* de l'existence de l'application cherchée, et on pourra *a posteriori* même l'explicitier par une formule concrète, une fois qu'on l'a exhibée par cette méthode plus abstraite.

(iii) Noter que l'on a une bijection naturelle

$$\mathcal{L}_{A,B,C}(M \times N, P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{C^{\text{op}}, B^{\text{op}}, A^{\text{op}}}(N^{\text{op}} \times M^{\text{op}}, P^{\text{op}}) \quad \beta \mapsto \beta^{\text{op}}$$

associant à toute $\beta : M \times N \rightarrow P$ (A, B, C) -bilinéaire l'application $(C^{\text{op}}, B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -bilinéaire $\beta^{\text{op}} : N^{\text{op}} \times M^{\text{op}} \rightarrow P^{\text{op}}$ telle que $\beta^{\text{op}}(y, x) := \beta(x, y)$ pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$. D'après le lemme 2.4(i), cette bijection induit un isomorphisme $(C^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -linéaire :

$$(M \otimes_B N)^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} N^{\text{op}} \otimes_{B^{\text{op}}} M^{\text{op}} \quad (x \otimes y)^{\text{op}} \mapsto y^{\text{op}} \otimes x^{\text{op}}.$$

(iv) Si f et g comme dans (ii) sont surjectifs, on voit aisément qu'il en est de même pour $f \otimes_B g$, car $M' \otimes_B N'$ est engendré par ses tenseurs élémentaires. Par contre, l'injectivité de f et g n'entraîne pas, en général, celle de $f \otimes_B g$.

Exemple 3.5. Prenons $A = B = C := \mathbb{Z}$, et considérons les $\mathbb{Z}$ -modules $M = M' = \mathbb{Z}$, $N = N' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que l'on regarde comme des $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -bimodules (voir le §1.1.5). Faisons $f := 2 \cdot Id_M$ et $g := Id_N$. Il vient :

$$f \otimes_{\mathbb{Z}} g(1 \otimes \bar{1}) = 2 \otimes \bar{1} = (1 \cdot 2) \otimes \bar{1} = 1 \otimes (2 \cdot \bar{1}) = 1 \otimes 0 = (1 \otimes 0) \cdot 0 = 0$$

où $\bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dénote la classe de 1. D'autre part, on a une application A -bilinéaire non nulle $\beta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, à savoir la multiplication scalaire du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et évidemment $\beta(1 \otimes \bar{1}) = \bar{1} \neq 0$, donc on a forcément $0 \neq \omega(1, \bar{1}) = 1 \otimes \bar{1}$, par suite $f \otimes_{\mathbb{Z}} g$ n'est pas injective.

Exercice 3.6. (i) Soient A, B, C trois anneaux associatifs unitaires, et considérons des homomorphismes de (A, B) -bimodules (resp. de (B, C) -bimodules) :

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \quad (\text{resp. } N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'').$$

Montrer que $(f' \circ f) \otimes_B (g' \circ g) = (f' \otimes_B g') \circ (f \otimes_B g)$.

(ii) Soient A, B deux anneaux associatifs unitaires. Montrer que pour tout (A, B) -bimodule M il existe des uniques isomorphismes de (A, B) -bimodules

$$A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \xleftarrow{\sim} M \otimes_B B \quad \text{tels que} \quad a \otimes m \mapsto am \quad mb \mapsto m \otimes b.$$

(iii) Pour toute petite famille $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de (A, B) -bimodules et $(M'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ de (B, C) -bimodules, exhiber un isomorphisme naturel

$$(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \otimes_B (\bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} M'_{\lambda'}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'} M_\lambda \otimes_B M'_{\lambda'}$$

tel que $(m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \otimes (m'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda') \mapsto (m_\lambda \otimes m'_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$ pour tout $m_\bullet \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ et tout $m'_\bullet \in \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} M'_{\lambda'}$. En particulier, avec $A = B = C$ on a l'isomorphisme :

$$A^{(\Lambda)} \otimes_A A^{(\Lambda')} \xrightarrow{\sim} A^{(\Lambda \times \Lambda')} \quad e_\lambda \otimes e_{\lambda'} \mapsto e_{(\lambda, \lambda')}$$

avec $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, $(e_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ et $(e_{(\lambda, \lambda')} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$ les bases canoniques de $A^{(\Lambda)}$, $A^{(\Lambda')}$ et respectivement $A^{(\Lambda \times \Lambda')}$.

Remarque 3.7. L'exercice 3.6(i) montre que l'association : $(M, N) \mapsto M \otimes_B N$ se prolonge en un foncteur bien défini

$$- \otimes_B - : (A, B) - \text{Mod} \times (B, C) - \text{Mod} \rightarrow (A, C) - \text{Mod}.$$

De même, l'association $(N, P) \mapsto \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P)$ définit un foncteur

$$\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, -) : (B, C) - \text{Mod}^{\text{op}} \times (A, C) - \text{Mod} \rightarrow (A, B) - \text{Mod}$$

qui associe l'application (A, B) -linéaire

$$\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(k, h) : \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P) \rightarrow \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N', P') \quad (N \xrightarrow{g} P) \mapsto (N' \xrightarrow{h \circ g \circ k} P')$$

à tout homomorphisme $h : P \rightarrow P'$ de (A, C) -bimodules et tout homomorphisme $k : N' \rightarrow N$ de (B, C) -bimodules. Si l'on fixe un (B, C) -bimodule N , on obtient évidemment par restriction un couple de foncteurs

$$\begin{aligned} - \otimes_B N : (A, B) - \text{Mod} &\rightarrow (A, C) - \text{Mod} & M &\mapsto M \otimes_B N \\ \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, -) : (A, C) - \text{Mod} &\rightarrow (A, B) - \text{Mod} & P &\mapsto \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, P) \end{aligned}$$

associant à tout homomorphisme $f : M \rightarrow M'$ de (A, B) -bimodules et tout h comme ci-dessus, l'application (A, C) -linéaire $f \otimes_B N := f \otimes_B Id_N : M \otimes_B N \rightarrow M' \otimes_B N$, et respectivement l'application (A, B) -linéaire $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, h) := \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(Id_N, h)$ (et on

peut évidemment aussi fixer le (A, B) -bimodule M , pour obtenir le foncteur analogue $M \otimes_A -$). On vérifie aisément l'identité :

$$\lambda_{M,N,P'}(h \circ g \circ (f \otimes_B N)) = \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, h) \circ \lambda_{M',N,P}(g) \circ f$$

pour tout homomorphisme $f : M \rightarrow M'$ de (A, B) -bimodules, et $h : P \rightarrow P'$ et $g : M' \otimes_B N \rightarrow P$ de (A, C) -bimodules, où $\lambda_{M,N,P'}$ et $\lambda_{M',N,P}$ sont les isomorphismes canoniques fournis par la remarque 3.4(i). Autrement dit, pour N fixé, le système d'isomorphismes $(\lambda_{M,N,P} \mid M \in (A, B) - \text{Mod}, P \in \text{Ob}(A, C) - \text{Mod})$ établit une adjonction pour le couple de foncteurs

$$(- \otimes_B N, \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(N, -)).$$

Proposition 3.8. Soient $A_0, \dots, A_3$ quatre anneaux associatifs unitaires, et pour $i = 0, 1, 2$ soit M_i un (A_i, A_{i+1}) -bimodule. Alors on a un isomorphisme naturel de (A_0, A_3) -bimodules

$$M_0 \otimes_{A_1} (M_1 \otimes_{A_2} M_2) \xrightarrow{\sim} (M_0 \otimes_{A_1} M_1) \otimes_{A_2} M_2 \quad \text{avec} \quad x_0 \otimes (x_1 \otimes x_2) \mapsto (x_0 \otimes x_1) \otimes x_2.$$

Démonstration. Pour tout (A_0, A_3) -bimodule Q , soient les (A_0, A_1) -bimodules

$$S := \text{Hom}_{A_3^{\text{op}}}(M_1 \otimes_{A_2} M_2, Q) \quad T := \text{Hom}_{A_2^{\text{op}}}(M_1, \text{Hom}_{A_3^{\text{op}}}(M_2, Q))$$

(voir la remarque 1.15(ii)). D'après la remarque 3.4(i), on a des bijections naturelles :

$$\text{Hom}_{(A_0, A_3)}(M_0 \otimes_{A_1} (M_1 \otimes_{A_2} M_2), Q) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A_0, A_1)}(M_0, S)$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{(A_0, A_3)}((M_0 \otimes_{A_1} M_1) \otimes_{A_2} M_2, Q) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A_0, A_2)}(M_0 \otimes_{A_1} M_1, \text{Hom}_{A_3^{\text{op}}}(M_2, Q)) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A_0, A_1)}(M_0, T). \end{aligned}$$

Or, si l'on oublie la structure de A_1 -module à gauche de M_1 , on obtient un A_2^{op} -module, et cela équivaut aussi à la donnée d'un $(\mathbb{Z}, A_2)$ -bimodule, que l'on notera par $M_1^\dagger$; de même, par oubli de structure on déduit de $M_1 \otimes_{A_2} M_2$ et de Q des $(\mathbb{Z}, A_3)$ -bimodules $(M_1 \otimes_{A_2} M_2)^\dagger$ et $Q^\dagger$. Pour tout $x_1 \in M_1$, on écrira $x_1^\dagger$ pour désigner ce même x_1 , regardé comme élément de $M_1^\dagger$. Avec cette notation :

$$\begin{aligned} T &= \text{Hom}_{(\mathbb{Z}, A_2)}(M_1^\dagger, \text{Hom}_{A_3^{\text{op}}}(M_2, Q^\dagger)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\mathbb{Z}, A_3)}(M_1^\dagger \otimes_{A_2} M_2, Q^\dagger) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_3^{\text{op}}}(M_1^\dagger \otimes_{A_2} M_2, Q^\dagger) \end{aligned}$$

toujours d'après la remarque 3.4(i). En outre, une inspection de la construction du produit tensoriel montre que les $(\mathbb{Z}, A_3)$ -bimodules $M_1^\dagger \otimes_{A_2} M_2$ et $(M_1 \otimes_{A_2} M_2)^\dagger$ coïncident; on déduit aisément un isomorphisme (A_0, A_1) -linéaire $S \xrightarrow{\sim} T$, d'où finalement une bijection :

$$(*) \quad \text{Hom}_{(A_0, A_3)}(M_0 \otimes_{A_1} (M_1 \otimes_{A_2} M_2), Q) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A_0, A_3)}((M_0 \otimes_{A_1} M_1) \otimes_{A_2} M_2, Q)$$

et si l'on trace ces identifications, on voit aisément que $(*)$ associe à toute application (A_0, A_3) -linéaire $\phi : M_0 \otimes_{A_1} (M_1 \otimes_{A_2} M_2) \rightarrow Q$ l'application (A_0, A_3) -linéaire $\phi^* : (M_0 \otimes_{A_1} M_1) \otimes_{A_2} M_2 \rightarrow Q$ avec $\phi^*((x_0 \otimes x_1) \otimes x_2) := \phi(x_0 \otimes (x_1 \otimes x_2))$ pour tout $x_i \in M_i$ ($i = 0, 1, 2$). L'assertion découle alors aussitôt du lemme 2.4(i). $\square$

Remarque 3.9. L'isomorphisme de la proposition 3.8 exprime l'associativité du produit tensoriel; à cause de cette associativité, généralement on ne distinguera pas entre les bimodules $M_0 \otimes_{A_1} (M_1 \otimes_{A_2} M_2)$ et $(M_0 \otimes_{A_1} M_1) \otimes_{A_2} M_2$, que l'on notera indifféremment

$$M_0 \otimes_{A_1} M_1 \otimes_{A_2} M_2.$$

De même, un tenseur élémentaire de ce produit sera noté $x_0 \otimes x_1 \otimes x_2$, oubliant les parenthèses. Plus généralement, pour toute suite finie $A_0, \dots, A_{k+1}$ d'anneaux associatifs unitaires, et toute famille $(M_i \mid i = 0, \dots, k)$ de (A_i, A_{i+1}) -bimodules, on peut itérer la construction du produit tensoriel, et cela peut se faire de plusieurs façons différentes (qu'il faudrait distinguer par des parenthèses opportunes), mais tous ces différents produits

seront liés par des *isomorphismes canoniques d'associativité*, donc, dans la pratique on peut oublier les parenthèses et écrire simplement

$$M_0 \otimes_{A_1} \cdots \otimes_{A_k} M_k$$

pour un choix arbitraire d'un de ces produits, sans créer des ambiguïtés inacceptables, et un tenseur élémentaire de ce produit itéré sera noté $x_0 \otimes \cdots \otimes x_k$.

3.1.2. Le produit tensoriel des bimodules sur les anneaux associatifs jouera un rôle important lors de la discussion de certaines constructions catégoriques, dans la section 4.1 ; mais pour les besoins de l'algèbre commutative, le cas commutatif suffit dans la plupart des situations. Revenons donc ici, et jusqu'à la fin de cette section, au cadre de la définition 3.1 : soient A un anneau commutatif, et M et N deux A -modules, que l'on identifiera avec leurs (A, A) -bimodules associés ; par inspection directe des définitions, on voit que $\text{Hom}_{(A,A)}(M, N)$ est alors simplement le (A, A) -bimodule associé au A -module $\text{Hom}_A(M, N)$ de la remarque 1.14(ii), et de même, les multiplications à droite et à gauche du (A, A) -bimodule $M \otimes_A N$ coïncident, *i.e.* ce produit tensoriel est en fait le (A, A) -bimodule associé à son A -module à gauche sous-jacent. Ainsi, dans ce cas la remarque 3.7 produit des foncteurs

$$\begin{aligned} - \otimes_A - &: (A - \text{Mod}) \times (A - \text{Mod}) \rightarrow A - \text{Mod} \\ \text{Hom}_A(-, -) &: (A - \text{Mod})^{\text{op}} \times (A - \text{Mod}) \rightarrow A - \text{Mod} \end{aligned}$$

ainsi qu'une adjonction canonique pour leurs restrictions, pour tout A -module N :

$$- \otimes_A N : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod} \quad \text{Hom}_A(N, -) : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}.$$

Remarque 3.10. La proposition 3.3 se généralise au produit d'un nombre arbitraire de A -modules $M_1, \dots, M_k$: on a l'application A -multilinéaire

$$\omega_k : M_1 \times \cdots \times M_k \rightarrow M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_k \quad (m_1, \dots, m_k) \mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$$

et $(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_k, \omega_k)$ est un couple universel pour le foncteur $\mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_k, -)$. Autrement dit, si P est un autre A -module, et $\beta : M_1 \times \cdots \times M_k \rightarrow P$ une application A -multilinéaire, alors il existe une application A -linéaire unique $\bar{\beta} : M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_k \rightarrow P$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \cdots \times M_k & \xrightarrow{\beta} & P \\ \omega_k \downarrow & \searrow \bar{\beta} & \\ M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_k & & \end{array}$$

L'universalité de ω_k se montre par récurrence sur $k \geq 2$. Si $k = 2$, l'assertion est déjà connue, par la proposition 3.3. Supposons donc que ω_{k-1} soit universelle, pour un entier $k \geq 3$. On a donc un isomorphisme de A -modules :

$$\text{Hom}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_{k-1}, Q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_{k-1}, Q) \quad \phi \mapsto \phi \circ \omega_{k-1}$$

pour tout A -module Q ; si l'on prend $Q := \text{Hom}_A(M_k, P)$ et on compose avec l'inverse de l'isomorphisme $\phi_{M_\bullet, P}$ de la remarque 3.2(ii), on arrive à un isomorphisme

$$\text{Hom}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_{k-1}, \text{Hom}_A(M_k, P)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_k, P)$$

et on peut composer ce dernier avec l'isomorphisme $\lambda_{M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_{k-1}, M_k, P}$ de la remarque 3.4(i), pour obtenir l'isomorphisme

$$\text{Hom}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_k, P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_k, P).$$

Si l'on retrace ces isomorphismes canoniques, on voit aisément que ce dernier est donné explicitement par : $\phi \mapsto \phi \circ \omega_k$, CQFD.

Proposition 3.11. Soit $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Alors, tout A -module N induit une suite exacte

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes_A N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes_A N} M'' \otimes_A N \rightarrow 0.$$

Démonstration. Evidemment le foncteur $-\otimes_A N$ est additif, et commute avec les colimites représentables, car il admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii)). L'assertion suit alors de la proposition 2.102(i). $\square$

Soient M, N deux A -modules, $M' \subset M$ un sous-module, $j : M' \rightarrow M$ l'inclusion, $\pi : M \rightarrow M/M'$ la projection ; la proposition 3.11 fournit un isomorphisme naturel

$$(M/M') \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(j \otimes_A N : M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N).$$

Explicitement, pour $m \in M$ et $n \in N$, notons $\overline{m} \in M/M'$ et $\overline{m \otimes n} \in \text{Coker } j \otimes_A N$ les classes de m et $m \otimes n$; l'isomorphisme ci-dessus est l'unique application A -linéaire telle que $\overline{m} \otimes n \mapsto \overline{m \otimes n}$. De plus, $j \otimes_A N$ induit une surjection A -linéaire

$$M' \otimes_A N \rightarrow \text{Ker}(\pi \otimes_A N : M \otimes_A N \rightarrow (M/M') \otimes_A N).$$

La propriété d'exactitude à droite du produit tensoriel exprimée par la proposition 3.11 peut être reformulée par un système d'équations linéaires ; à savoir, on a :

Exercice 3.12. Soient M et N deux A -modules, $(n_i \mid i \in I)$ un système de générateurs de N , et $(m_i \mid i \in I)$ un élément $M^{(I)}$. Montrer que $\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = 0$ dans $M \otimes_A N$ si et seulement s'il existe un ensemble J , un élément $(m'_j \mid j \in J)$ de $M^{(J)}$ et un système $(a_{\bullet k} := (a_{hk} \mid h \in I) \mid k \in J)$ d'éléments de $A^{(I)}$ tels que :

$$\sum_{k \in J} a_{ik} m'_k = m_i \quad \sum_{h \in I} a_{hj} n_h = 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Exercice 3.13. Soient A un anneau, $I, J \subset A$ deux idéaux. Montrer qu'il existe un isomorphisme unique de A -modules

$$A/I \otimes_A A/J \xrightarrow{\sim} A/(I+J) \quad \text{tel que} \quad (1 \bmod I) \otimes (1 \bmod J) \mapsto (1 \bmod I+J).$$

Exercice 3.14. Généraliser l'exercice 3.6(iii) de la façon suivante. Soient

$$(M_{\bullet}, f_{\bullet\bullet}) \quad \text{et} \quad (M'_{\bullet}, f'_{\bullet\bullet})$$

deux systèmes de A -modules indexés respectivement par $(\Lambda, \leq)$ et par $(\Lambda', \leq)$ (voir l'exemple 2.23(i)). On munit $\Lambda \times \Lambda'$ de la relation d'ordre telle que

$$(\lambda, \lambda') \leq (\mu, \mu') \Leftrightarrow \lambda \leq \mu \text{ et } \lambda' \leq \mu' \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda, \forall \lambda', \mu' \in \Lambda'.$$

On voit aisément que la donnée $(M_{\lambda} \otimes_A M_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$ est un système de A -modules indexé par $\Lambda \times \Lambda'$, dont les homomorphismes de transition sont les applications $f_{\lambda, \mu} \otimes_A f'_{\lambda', \mu'} : M_{\lambda} \otimes_A M'_{\lambda'} \rightarrow M_{\mu} \otimes_A M'_{\mu'}$ pour tout $(\lambda, \lambda') \leq (\mu, \mu')$. Notons les co-cônes universels respectifs par

$$u_{\bullet} : M_{\bullet} \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda} \quad u'_{\bullet} : M'_{\bullet} \rightarrow \varinjlim_{\lambda' \in \Lambda'} M'_{\lambda'} \quad v_{\bullet, \bullet} : M_{\bullet} \otimes_A M'_{\bullet} \rightarrow \varinjlim_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'} M_{\lambda} \otimes_A M'_{\lambda'}.$$

Montrer qu'il existe un isomorphisme unique de A -modules

$$\varinjlim_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'} M_{\lambda} \otimes_A M_{\lambda'} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda} \otimes_A \varinjlim_{\lambda' \in \Lambda'} M'_{\lambda'}, \quad v_{\lambda, \lambda'}(x \otimes y) \mapsto u_{\lambda}(x) \otimes u'_{\lambda'}(y).$$

3.2. Restriction et extension des scalaires. Dans cette section et la suivante, on discutera quelques premières applications du produit tensoriel.

3.2.1. *Restriction et coextension des scalaires.* En vue de certaines applications dans la leçon suivante, il est utile de considérer d'abord un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'anneaux associatifs et unitaires. Soit donc N un B -module ; on déduit une structure de A -module sur N , en posant :

$$a \cdot n := f(a) \cdot n \quad \forall a \in A, \forall n \in N.$$

On notera $N_{[f]}$ le A -module N muni de cette loi de multiplication par scalaires. Si $n \in N$, parfois on notera aussi par $n_{[f]}$ ce même n , vu comme élément de $N_{[f]}$. On appelle $N_{[f]}$ le A -module obtenu par restriction des scalaires du B -module N , suivant l'homomorphisme f . Si N' est un autre B -module, et $\phi : N \rightarrow N'$ une application B -linéaire, on notera

$$\phi_{[f]} : N_{[f]} \rightarrow N'_{[f]}$$

l'application ϕ , vue comme homomorphisme de A -modules (*i.e.* $\phi_{[f]}(n_{[f]}) := \phi(n)_{[f]}$ pour tout $n \in N$). Evidemment, on obtient ainsi un foncteur bien défini

$$(-)_{[f]} : B - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}.$$

On souhaite exhiber un adjoint à droite pour ce foncteur. Pour cela, rappelons que B est naturellement un (B, B) -bimodule (voir le §1.1.5), et par restriction des scalaires sur sa structure gauche de B -module on obtient alors le (A, B) -bimodule $B_{[f]}^g$; d'autre part, tout A -module (à gauche) (M, μ_M) peut être muni d'une unique structure de $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule (M, μ_M, μ_M^d) , avec la loi évidente de multiplication scalaire à droite $\mu_M^d : M \times \mathbb{Z} \rightarrow A$, et de même, tout B -module (à gauche) est naturellement un $(B, \mathbb{Z})$ -bimodule. La première observation est que l'on a une identification naturelle de $(A, \mathbb{Z})$ -bimodules, *i.e.* de A -modules (à gauche) :

$$\omega_N : N_{[f]} \xrightarrow{\sim} B_{[f]}^g \otimes_B N \quad x_{[f]} \mapsto 1_{[f]} \otimes x \quad \forall x \in N.$$

En effet, par l'exercice 3.6(ii), on a un isomorphisme naturel de $(B, \mathbb{Z})$ -bimodules $\omega'_N : B \otimes_B N \xrightarrow{\sim} N : b \otimes x \mapsto bx$; d'autre part, par inspection directe de la construction du produit tensoriel on voit que le $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule $(B \otimes_B N)_{[f]}$ (obtenu par restriction des scalaires sur la structure de B -module à gauche de $B \otimes_B N$) n'est rien d'autre que $B_{[f]}^g \otimes_B N$. Donc, ω'_N est un isomorphisme $B_{[f]}^g \otimes_B N \xrightarrow{\sim} N_{[f]}$ de $(A, \mathbb{Z})$ -bimodules, et évidemment ω_N est l'application réciproque de ω'_N .

Or, avec la remarque 1.15(ii), on a le $(B, \mathbb{Z})$ -bimodule (*i.e.* le B -module à gauche)

$$M^{[f]} := \text{Hom}_A(B_{[f]}^g, M) \quad \forall M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}).$$

On appelle $M^{[f]}$ le B -module obtenu par coextension des scalaires du A -module M , suivant l'homomorphisme f . Evidemment toute application A -linéaire $\psi : M \rightarrow M'$ induit une application B -linéaire $\psi^{[f]} : M^{[f]} \rightarrow M'^{[f]}$ avec $\psi(u) := \psi \circ u$ pour tout $u \in M^{[f]}$. On a ainsi un foncteur bien défini

$$(-)^{[f]} : A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}.$$

Noter les bijections canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_B(N, M^{[f]}) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(B, \mathbb{Z})}(N, M^{[f]}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\mathbb{Z}, B^{\text{op}})}(N^{\text{op}}, M^{[f]\text{op}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\mathbb{Z}, B^{\text{op}})}(N^{\text{op}}, \text{Hom}_{A^{\text{op}}}((B_{[f]}^g)^{\text{op}}, M^{\text{op}})) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\mathbb{Z}, A^{\text{op}})}(N^{\text{op}} \otimes_{B^{\text{op}}} (B_{[f]}^g)^{\text{op}}, M^{\text{op}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(A, \mathbb{Z})}(B_{[f]}^g \otimes_B N, M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(N_{[f]}, M) \end{aligned}$$

déduites des remarques 1.15(ii) et 3.4(i,iii) et de l'isomorphisme ω_N ci-dessus. Cela achève de montrer que le foncteur $(-)^{[f]}$ est adjoint à droite de $(-)_{[f]}$.

3.2.2. Extension des scalaires. Gardons la notation du § 3.2.1, et soit M un A -module (à gauche). À partir du (B, B) -bimodule B on déduit aussi, par restriction de scalaires sur sa structure droite de B^{op} -module, un (B, A) -bimodule $B_{[f]}^d$ (puisque l'on n'a défini la restriction de scalaires que pour les modules à gauche, cela se construit plus formellement comme $((B^{\text{op}})_{[f^{\text{op}}]}^g)^{\text{op}}$). En regardant à nouveau M comme un $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule, on obtient le $(B, \mathbb{Z})$ -bimodule $B_{[f]}^d \otimes_A M$, et on notera son B -module (à gauche) sous-jacent par :

$$B \otimes_A M.$$

Explicitement, on a $b \cdot (b' \otimes m) = (bb') \otimes m$ pour tous $b, b' \in B$, et tout $m \in M$. D'après la remarque 3.4(i), on a alors une bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{(B, \mathbb{Z})}(B_{[f]}^d \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(B, A)}(B_{[f]}^d, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)) \quad \forall N \in \text{Ob}(B - \text{Mod})$$

(où l'on regarde également N comme un $(B, \mathbb{Z})$ -bimodule). Evidemment on a :

$$\text{Hom}_{(B, \mathbb{Z})}(B_{[f]}^d \otimes_A M, N) = \text{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$$

et d'autre part, tout homomorphisme (B, A) -linéaire $\phi : B_{[f]}^d \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ est déterminé par $u := \phi(1_B) : M \rightarrow N$. La (B, A) -linéarité de ϕ revient aux identités : $\phi(1_B \cdot a) = u \cdot a$ pour tout $a \in A$; mais rappelons que $1_B \cdot a = f(a)$ dans le (B, A) -bimodule $B_{[f]}^d$, donc $\phi(1_B \cdot a) = \phi(f(a)) = f(a) \cdot u$, et l'identité $u \cdot a = f(a) \cdot u$ se traduit par : $u(ax) = f(a) \cdot u(x)$ pour tout $x \in M$, exprimant la A -linéarité de $u : M \rightarrow N_{[f]}$. En résumant, on obtient une bijection naturelle :

$$\lambda_{M, N} : \text{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, N_{[f]}) \quad \forall N \in \text{Ob}(B - \text{Mod}).$$

Explicitement, à toute application B -linéaire $\phi : B \otimes_A M \rightarrow N$, cette bijection associe l'application A -linéaire $\psi : M \rightarrow N_{[f]}$ telle que $\psi(x) = \phi(1_B \otimes x)$ pour tout $x \in M$; on dira que ψ est l'adjointe de ϕ (et aussi que ϕ est l'adjointe de ψ). Le système de ces bijections est évidemment une adjonction pour le couple :

$$B \otimes_A - : A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod} \quad (-)_{[f]} : B - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}.$$

On appelle $B \otimes_A -$ l'extension des scalaires suivant l'homomorphisme f ; il s'agit donc d'un adjoint à gauche du foncteur de restriction des scalaires suivant f .

Ainsi, le B -module $B \otimes_A M$ représente le foncteur $\text{Hom}_A(M, (-)_{[f]})$, pour tout A -module M , et d'après le § 2.1.1, le couple $(B \otimes_A M, \iota_M)$ avec

$$\iota_M : M \rightarrow B \otimes_A M \quad m \mapsto 1_B \otimes m$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout B -module N et toute application A -linéaire $\psi : M \rightarrow N_{[f]}$ il existe une unique application B -linéaire $\phi : B \otimes_A M \rightarrow N$ telle que $\psi = \phi \circ \iota_M$; évidemment, ϕ est l'adjointe de ψ , et $\phi(b \otimes m) = b \cdot \psi(m)$ pour tout $b \in B$ et tout $m \in M$.

Remarque 3.15. Considérons un deuxième homomorphisme d'anneaux associatifs unitaires $g : B \rightarrow C$; par l'exercice 2.17(i), la composition de foncteurs $(C \otimes_B -) \circ (B \otimes_A -)$ est adjointe à gauche de $(-)_{[f]} \circ (-)_{[g]} = (-)_{[g \circ f]}$. Au vu de l'exercice 2.14(i), on déduit, pour tout A -module M un isomorphisme naturel de C -modules :

$$\phi_M : C \otimes_B (B \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} C \otimes_A M.$$

Il est parfois important de disposer d'une description explicite de cet isomorphisme canonique (voir par exemple § 5.1.3); voici un argument au goût catégoriel. Par (i), les couples $(B \otimes_A M, \iota_M)$ et $(C \otimes_B (B \otimes_A M), \iota_{B \otimes_A M})$ sont universels pour respectivement les foncteurs $\text{Hom}_A(M, (-)_{[f]})$ et $\text{Hom}_B(B \otimes_A M, (-)_{[g]})$; il s'ensuit aisément que le couple $(C \otimes_B (B \otimes_A M), (\iota_{B \otimes_A M})_{[f]} \circ \iota_M)$ est universel pour le foncteur $\text{Hom}_A(M, (-)_{[g \circ f]})$, et $(C \otimes_A M, \iota_{C \otimes_A M})$ est un autre couple universel pour ce même foncteur. Par le lemme

2.4(i), il existe alors un isomorphisme unique ϕ_M comme souhaité, vérifiant l'identité $(\phi_M)_{[g \circ f]} \circ (\iota_{B \otimes_A M})_{[f]} \circ \iota_M = \iota_{C \otimes_A M}$, *i.e.*

$$\phi_M(1_{[g]} \otimes 1_{[f]} \otimes m) = 1_{[g \circ f]} \otimes m \quad \forall m \in M.$$

3.2.3. Supposons ensuite que *l'image de $f : A \rightarrow B$ soit contenue dans le centre $Z(B)$ de B* (voir la remarque 1.14(ii)), et soient (M, μ_M) un A -module et (N, μ_N) un B -module. Munissons M de la structure de $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule (M, μ_M, μ_M^d) comme au §3.2.2, et remarquons que l'on a aussi sur N une structure naturelle de (B, A) -bimodule (N, μ_N, μ_N^d) , avec $\mu_N^d : N \times A \rightarrow N$ telle que $\mu_N^d(x, a) := f(a) \cdot x$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in N$; en outre, toute application B -linéaire $\psi : N \rightarrow N'$ vers un deuxième B -module $(N', \mu_{N'})$ est évidemment une application (B, A) -linéaire $(N, \mu_N, \mu_N^d) \rightarrow (N', \mu_{N'}, \mu_{N'}^d)$. Par suite, $N \otimes_A M$ est naturellement un $(B, \mathbb{Z})$ -bimodule, *i.e.* un B -module, et toute tel ψ induit une application B -linéaire $\psi \otimes_A M : N \otimes_A M \rightarrow N' \otimes_A M$. Explicitement, on a $(\psi \otimes_A M)(x \otimes y) = \psi(x) \otimes y$ pour tout $x \in N$ et tout $y \in M$. Noter aussi l'identité de A -modules :

$$(N \otimes_A M)_{[f]} = N_{[f]} \otimes_A M \quad (n \otimes m)_{[f]} = n_{[f]} \otimes m.$$

En effet, les deux ensembles sous-jacents à ces A -modules sont égaux, donc tout revient à montrer que les multiplications scalaires sont aussi égales; or, on a :

$$a \cdot (n \otimes m)_{[f]} = (f(a) \cdot (n \otimes m))_{[f]} = (f(a) \cdot n \otimes m)_{[f]} = a \cdot n_{[f]} \otimes m = a \cdot (n_{[f]} \otimes m)$$

pour tous $a \in A$, $n \in N$ et $m \in M$, comme souhaité.

3.2.4. On revient maintenant, et jusqu'à la fin de cette leçon, à notre cadre standard, où *tout anneau en discussion est tacitement supposé commutatif* (sauf mention contraire explicite). Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, M un A -module, et N un B -module; on identifie M (resp. N) avec son (A, A) -bimodule (resp. (B, B) -bimodule) associé, comme au §1.1.5, et par restriction de scalaires, on obtient un (B, A) -bimodule $N_{[f]}$. D'après la remarque 1.15(i), on déduit alors une structure naturelle de (B, A) -bimodule sur $\text{Hom}_A(M, N_{[f]})$ et de (A, B) -bimodule sur $\text{Hom}_A(N_{[f]}, M)$. Puisque B est commutatif, on obtient dans les deux cas des B -modules à gauche par oubli d'une moitié de la structure de bimodule; on dénote ces B -modules respectivement

$$\text{Hom}_A(M, N) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_A(N, M).$$

Explicitement, pour tout $b \in B$ et toute application A -linéaire $\phi : M \rightarrow N_{[f]}$ (resp. $\psi : N_{[f]} \rightarrow M$) on a $(b \cdot \phi)(m) := b \cdot \phi(m)$ pour tout $m \in M$ (resp. $(b \cdot \psi)(n) := \psi(b \cdot n)$ pour tout $n \in N$). Avec ces structures, l'adjonction $\lambda_{M, N}$ du §3.2.2 est même un isomorphisme de B -modules : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Exercice 3.16. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs, M et N deux B -modules, $\omega : M \times N \rightarrow M \otimes_B N$ l'application B -bilinéaire universelle. On peut voir ω aussi comme une application $\omega_{[f]} : M_{[f]} \times N_{[f]} \rightarrow (M \otimes_B N)_{[f]}$ A -bilinéaire, d'où une application A -linéaire induite

$$\phi : M_{[f]} \otimes_A N_{[f]} \rightarrow (M \otimes_B N)_{[f]} \quad m_{[f]} \otimes n_{[f]} \mapsto (m \otimes n)_{[f]}.$$

Montrer que ϕ est surjective, et que si f est surjectif, ϕ est un isomorphisme.

(ii) Soit en outre Λ un ensemble, et notons par $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(e'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ les bases canoniques du A -module libre $A^{(\Lambda)}$ et respectivement du B -module libre $B^{(\Lambda)}$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de B -modules

$$B \otimes_A A^{(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} B^{(\Lambda)} \quad \text{tel que} \quad 1 \otimes e_\lambda \mapsto e'_\lambda.$$

L'adjonction de la remarque 3.7 implique que, pour tout A -module M , le foncteur $\text{Hom}_A(M, -)$ commute avec les limites de la catégorie $A - \mathbf{Mod}$ (proposition 2.49(i)); les questions de la commutation de $- \otimes_A M$ avec les limites et de $\text{Hom}_A(M, -)$ avec les colimites conduisent aussi à des résultats intéressants; à savoir, on a la caractérisation purement catégorique suivante :

Exercice 3.17. (i) Soient A un anneau commutatif, et M un A -module. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) M est de présentation finie
 - (b) Le foncteur $-\otimes_A M$ commute avec tout produit de A -modules
 - (c) Le foncteur $\text{Hom}_A(M, -)$ commute avec toute limite directe filtrante.
- (ii) Montrer également qu'une A -algèbre (commutative) B est de présentation finie (voir §1.1.1) si et seulement si le foncteur

$$A - \text{Alg}(B, -) : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens} \quad C \mapsto A - \text{Alg}(B, C)$$

commute avec toute limite directe filtrante.

(iii) Soient B et C deux A -algèbres, $f : B \rightarrow C$ un homomorphisme surjectif de A -algèbres, et on suppose que B soit de type fini, et C de présentation finie. Montrer que $\text{Ker } f$ est un idéal de type fini de B .

(iv) Soit $f : B \rightarrow C$ un homomorphisme de A -algèbres, et on suppose que C soit de présentation finie et B de type fini. Montrer que f est de présentation finie.

(v) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et M un B -module. Montrer les assertions suivantes :

- (a) Si le A -module $M_{[f]}$ est de type fini, alors le B -module M est de type fini.
- (b) Supposons que le A -module $B_{[f]}$ soit de type fini (resp. de présentation finie). Alors, si le B -module M est de type fini (resp. de présentation finie) il en est de même pour le A -module $M_{[f]}$.
- (c) Si B est une A -algèbre de type fini, et si le A -module $M_{[f]}$ est de présentation finie, alors le B -module M est de présentation finie.
- (d) Si $B_{[f]}$ est un A -module de présentation finie, alors B est une A -algèbre de présentation finie.

3.2.5. Quelques isomorphismes remarquables. Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ des homomorphismes d'anneaux, M un A -module, N un B -module, P un C -module. D'après le §3.2.3, on peut former le B -module $N \otimes_A M$, et le C -module $P \otimes_B N$; on a alors de même les C -modules $P \otimes_B (N \otimes_A M)$ et $(P \otimes_B N) \otimes_A M$.

Proposition 3.18. Dans la situation de §3.2.5 on a :

(i) Il existe un isomorphisme unique de C -modules :

$$P \otimes_B (N \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} (P \otimes_B N) \otimes_A M \quad \text{tel que} \quad p \otimes (n \otimes m) \mapsto (p \otimes n) \otimes m.$$

(ii) Soit $\mu : M \rightarrow M'$ (resp. $\nu : N \rightarrow N'$, resp. $\vartheta : P \rightarrow P'$) un homomorphisme de A -modules (resp. de B -modules, resp. de C -modules). Le diagramme suivant, dont les flèches horizontales sont les isomorphismes de (i), est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_B (N \otimes_A M) & \xrightarrow{\sim} & (P \otimes_B N) \otimes_A M \\ \vartheta \otimes_B (\nu \otimes_A \mu) \downarrow & & \downarrow (\vartheta \otimes_B \nu) \otimes_A \mu \\ P' \otimes_B (N' \otimes_A M') & \xrightarrow{\sim} & (P' \otimes_B N') \otimes_A M' \end{array}$$

Démonstration. (i) : On regarde comme d'habitude M comme un (A, A) -bimodule, et N comme un (B, B) -bimodule, d'où un (B, A) -bimodule $N_{[f]}^d$, par restriction suivant f de la structure droite de B -module; de même on définit le (C, B) -bimodule $P_{[g]}^d$ et le (C, A) -bimodule $P_{[g]}^d \otimes_B N_{[f]}^d$. Avec cette notation l'assertion est un cas particulier de la proposition 3.8.

(ii) : On peut vérifier la commutativité par évaluation sur les tenseurs élémentaires $(p \otimes n) \otimes m$, et pour ces derniers l'assertion est évidente. $\square$

Exercice 3.19. Avec la notation de la proposition 3.18, $\text{Hom}_A(N_{[f]}^d, M)$ est un (A, B) -bimodule (remarque 1.15(i)), et d'autre part $P_{[g]}^d \otimes_B N_{[f]}^d$ est un (C, A) -bimodule. Exhiber

aussi un isomorphisme unique de (A, C) -bimodules :

$$\mathrm{Hom}_B(P, \mathrm{Hom}_A(N, M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P \otimes_B N, M) \quad \text{tel que} \quad \phi \mapsto (p \otimes n \mapsto \phi(p)(n))$$

pour les structures naturelles de (A, C) -bimodule fournies par la remarque 1.15(i).

Proposition 3.20. *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et M, N deux A -modules. Il existe des isomorphismes uniques de B -modules :*

$$\begin{aligned} B \otimes_A (M \otimes_A N) &\xrightarrow{\sim} (B \otimes_A M) \otimes_B (B \otimes_A N) \quad \text{tel que} \quad 1 \otimes (m \otimes n) \mapsto (1 \otimes m) \otimes (1 \otimes n) \\ M \otimes_A N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A M \quad \text{tel que} \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m. \end{aligned}$$

Démonstration. La proposition 3.18(i) et l'exercice 3.6(ii) fournissent des isomorphismes B -linéaires :

$$\begin{aligned} B \otimes_A (M \otimes_A N) &\xrightarrow{\sim} (B \otimes_A M) \otimes_A N \\ &\xrightarrow{\sim} ((B \otimes_A M) \otimes_B B) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (B \otimes_A M) \otimes_B (B \otimes_A N). \end{aligned}$$

Par inspection directe, on voit que la composition est donnée par l'expression indiquée. Le deuxième isomorphisme est un cas particulier de la remarque 3.4(iii). $\square$

3.2.6. *Produit tensoriel et changement de base.* Considérons la catégorie

$$\mathbf{AlgMod}$$

dont les objets sont les couples (A, M) où A est un anneau, et M est un A -module ; les morphismes $(f, g) : (A, M) \rightarrow (A', M')$ sont les couples formés d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow A'$ et une application A -linéaire $g : M \rightarrow M'_{[f]}$, avec la loi de composition évidente : $(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g)$, pour tous (f, g) et $(f', g') : (A', M') \rightarrow (A'', M'')$ comme ci-dessus. Avec cette notation, soient deux morphismes de $\mathbf{AlgMod}$

$$(f, g) : (A, M) \rightarrow (A', M') \quad (f, h) : (A, N) \rightarrow (A', N').$$

L'application $M \times N \rightarrow (M' \otimes_{A'} N')_{[f]} : (x, y) \mapsto g(x) \otimes h(y)$ est évidemment A -bilinéaire, donc se factorise à travers l'application A -bilinéaire universelle $M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ et une application A -linéaire unique

$$g \otimes_f h : M \otimes_A N \rightarrow (M' \otimes_{A'} N')_{[f]} \quad x \otimes y \mapsto g(x) \otimes h(y).$$

Soient encore $(f', g') : (A', M') \rightarrow (A'', M'')$ et $(f', h') : (A', N') \rightarrow (A'', N'')$ deux autres morphismes de $\mathbf{AlgMod}$; par inspection directe, on voit que :

$$(g' \circ g) \otimes_{f' \circ f} (h' \circ h) = (g' \otimes_{f'} h') \circ (g \otimes_f h).$$

On a un foncteur évident $\pi : \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ tel que $\pi(A, M) := A$ et $\pi(f, g) := f$ pour tout objet (A, M) et tout morphisme (f, g) de $\mathbf{AlgMod}$, et rappelons que le produit fibré de catégories $\mathbf{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}} \mathbf{AlgMod}$ est la catégorie dont les objets sont les données (A, M, N) formées d'un anneau A et deux A -modules M, N ; les morphismes $(f, g, h) : (A, M, N) \rightarrow (A', M', N')$ sont formés d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow A'$ et deux applications A -linéaires $g : M \rightarrow M'_{[f]}$ et $h : N \rightarrow N'_{[f]}$ (voir l'exemple 2.23(v)). Avec cette notation, la discussion ci-dessus se résume en disant que l'on a un foncteur bien défini

$$- \otimes - : \mathbf{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}} \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathbf{AlgMod} \quad (A, M, N) \mapsto (A, M \otimes_A N)$$

qui associe à tout (f, g, h) comme ci-dessus le morphisme $(f, g \otimes_f h)$ de $\mathbf{AlgMod}$.

Remarque 3.21. Soient $(f, g) : (A, M) \rightarrow (A', M')$, $(f, h) : (A, N) \rightarrow (A', N')$, $(f, k) : (A, P) \rightarrow (A', P')$ trois morphismes de AlgMod ; on vérifie aisément que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A N & \xrightarrow{g \otimes_f h} & M' \otimes_{A'} N' \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \otimes_A M & \xrightarrow{h \otimes_f g} & N' \otimes_{A'} M' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (M \otimes_A N) \otimes_A P & \xrightarrow{(g \otimes_f h) \otimes_f k} & (M' \otimes_{A'} N') \otimes_{A'} P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_A (N \otimes_A P) & \xrightarrow{g \otimes_f (h \otimes_f k)} & M' \otimes_{A'} (N' \otimes_{A'} P') \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes des propositions 3.18(i) et 3.20.

Exercice 3.22. Montrer que la catégorie AlgMod est complète et cocomplète.

Remarque 3.23. Dans la suite, on s'intéressera surtout aux colimites des systèmes *filtrants* $(A_\bullet, M_\bullet) := ((A_\lambda, M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ d'objets de AlgMod , pour lesquelles on dispose d'une description explicite, généralisant l'exercice 2.31(iii,iv). En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, soit $(f_{\lambda\mu}, g_{\lambda\mu}) : (A_\lambda, M_\lambda) \rightarrow (A_\mu, M_\mu)$ le morphisme de transition du système $(A_\bullet, M_\bullet)$; d'après l'exercice 2.31(iv), la colimite du système d'anneaux $(A_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ est représentée par l'anneau A des classes d'équivalence $[a, \lambda]$ des couples (a, λ) avec $\lambda \in \Lambda$ et $a \in A_\lambda$, et le co-cône universel est donné par les homomorphismes d'anneaux $\tau_\lambda : A_\lambda \rightarrow A : a \mapsto [a, \lambda]$, pour chaque $\lambda \in \Lambda$. De même, d'après l'exercice 2.31(iii), la colimite du système filtrant $(M_\bullet, g_{\bullet\bullet})$ des groupes abéliens sous-jacents aux A_λ -modules M_λ est représentée par le groupe abélien M des classes d'équivalence $[x, \mu]$ des couples (x, μ) avec $\mu \in \Lambda$ et $x \in M_\mu$. Pour de tels (a, λ) et (x, μ) , choisissons $\nu \in \Lambda$ avec $\nu \geq \lambda, \mu$, et posons

$$(a, \lambda) \cdot (x, \mu) := [f_{\lambda\nu}(a) \cdot g_{\mu\nu}(x), \nu] \in M.$$

Vérifions que cette définition ne dépend pas du choix de ν : en effet, si $\nu' \geq \nu$, en rappelant que $g_{\nu\nu'}$ est une application A_ν -linéaire $M_\nu \rightarrow (M_{\nu'})_{[f_{\nu\nu}]}$, on trouve :

$$\begin{aligned} [f_{\lambda\nu}(a) \cdot g_{\mu\nu}(x), \nu] &= [g_{\nu\nu'}(f_{\lambda\nu}(a) \cdot g_{\mu\nu}(x)), \nu'] = [f_{\nu\nu'} \circ f_{\lambda\nu}(a) \cdot (g_{\nu\nu'} \circ g_{\mu\nu}(x)), \nu'] \\ &= [f_{\lambda\nu'}(a) \cdot g_{\mu\nu'}(x), \nu'] \end{aligned}$$

d'où l'assertion. De même, on voit aisément que la définition de $(a, \lambda) \cdot (x, \mu)$ ne dépend que des classes $[a, \lambda]$ et $[x, \mu]$, et on a ainsi une opération bien définie :

$$A \times M \rightarrow M \quad ([a, \lambda], [x, \mu]) \mapsto (a, \lambda) \cdot (x, \mu)$$

qui munit M d'une structure de A -module (compatible avec sa structure de groupe abélien : les détails sont confiés aux soins du lecteur). Pour tout $\mu \in \Lambda$ on a de plus un homomorphisme évident $t_\mu : M_\mu \rightarrow M_{[\tau_\mu]}$ de A_μ -modules tel que $x \mapsto [x, \mu]$ pour tout $x \in M_\mu$. Le système $((\tau_\lambda, t_\lambda) : (A_\lambda, M_\lambda) \rightarrow (A, M) \mid \lambda \in \Lambda)$ est alors un co-cône de base $(A_\bullet, M_\bullet)$ et de sommet (A, M) . Pour voir qu'il s'agit d'un co-cône universel, soit $((\tau'_\lambda, t'_\lambda) : (A_\lambda, M_\lambda) \rightarrow (B, N) \mid \lambda \in \Lambda)$ un autre co-cône de base $(A_\bullet, M_\bullet)$ et de sommet $(B, N) \in \text{Ob}(\text{AlgMod})$; il existe un unique homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ et un unique homomorphisme de groupes abéliens $g : M \rightarrow N$ tels que $f \circ \tau_\lambda = \tau'_\lambda$ et $g \circ t_\lambda = t'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et par inspection directe on vérifie aussitôt que g est un homomorphisme de A -modules $M \rightarrow N_{[f]}$, d'où l'assertion.

3.2.7. Fibres d'un module. Soient A un anneau, $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier; le *corps résiduel* de $\mathfrak{p}$ est par définition le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$, et sera noté dorénavant

$$k(\mathfrak{p}) := \text{Frac } A/\mathfrak{p}.$$

Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local, on dira aussi que $k(\mathfrak{m})$ est le *corps résiduel* de A .

Si $f : A' \rightarrow A$ est un homomorphisme d'anneaux, soit $\mathfrak{p}' := f^{-1}(\mathfrak{p})$; alors f induit un homomorphisme *injectif* $A'/\mathfrak{p}' \rightarrow A/\mathfrak{p}$, qui admet un prolongement unique en une *extension de corps résiduels*

$$f_{(\mathfrak{p})} : k(\mathfrak{p}') \rightarrow k(\mathfrak{p}).$$

Le corps $k(\mathfrak{p})$ est muni d'une structure évidente de A -algèbre ; à tout A -module M on peut donc associer le $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel

$$M(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A M$$

qu'on appellera *la fibre de M au-dessus de $\mathfrak{p}$* . Le *rang* de M est l'application :

$$\mathrm{rk}_M : \mathrm{Spec} A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{k(\mathfrak{p})} M(\mathfrak{p}).$$

La famille $M(\bullet) := (M(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A)$ est un analogue algébrique des fibrés vectoriels que l'on étudiera dans la section 4.5, à cela près, que le rang de M n'est pas forcément localement constant sur $\mathrm{Spec} A$ (et même les corps résiduels de deux points distincts de $\mathrm{Spec} A$ sont généralement non isomorphes) ; par exemple, on a :

Exemple 3.24. Soient $A := \mathbb{C}[X, Y]$, et $M := A^2/N$, où $N \subset A^2$ est le A -sous-module engendré par $Xe_1 + Ye_2$ (avec (e_1, e_2) la base canonique de A^2). Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, soit $\mathfrak{m} \subset A$ l'idéal maximal engendré par $(X - a, Y - b)$; on a

$$M(\mathfrak{m}) = \frac{k(\mathfrak{m})^2}{k(\mathfrak{m}) \cdot (ae_1 + be_2)} = \frac{\mathbb{C}^2}{\mathbb{C} \cdot (a, b)}.$$

Donc, si $(a, b) = (0, 0)$ ceci est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2, et si $(a, b) \neq 0$, il s'agit d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1.

Tout $m \in M$ détermine une “section” du “fibré vectoriel” associé à M : *i.e.* à chaque $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$ on associe le vecteur $m(\mathfrak{p}) := 1 \otimes m \in M(\mathfrak{p})$. Donc, le A -module M tient lieu *d'ensemble des sections globales* du “fibré vectoriel” $M(\bullet)$. De plus, tout homomorphisme de A -modules $f : M \rightarrow N$ induit une application $k(\mathfrak{p})$ -linéaire $f(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : M(\mathfrak{p}) \rightarrow N(\mathfrak{p})$, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$. Par ces constructions, l'étude des A -modules et des applications A -linéaires peut se ramener -- dans une certaine mesure -- à celle des espaces vectoriels sur un corps K et des K -homomorphismes, où l'on pourra dérouler les méthodes de l'algèbre linéaire classique.

3.3. Localisation et lemme de Nakayama. D'après la remarque 1.45(i), toute partie fermée Z du spectre premier d'un anneau A s'identifie au spectre d'une certaine A -algèbre A' (en l'occurrence, un quotient de A), et l'inclusion $Z \subset \mathrm{Spec} A$ s'identifie à $\mathrm{Spec} \pi : \mathrm{Spec} A' \rightarrow \mathrm{Spec} A$, où $\pi : A \rightarrow A'$ est le morphisme structural de la A -algèbre A' . Par contre, les parties ouvertes de $\mathrm{Spec} A$ ne peuvent pas toujours être réalisées de cette façon. Toutefois, cela reste vrai du moins pour les parties ouvertes de la forme $D(f)$: on peut associer naturellement à toute partie de cette forme une A -algèbre A' , telle que l'application correspondante $\mathrm{Spec} A' \rightarrow \mathrm{Spec} A$ se factorise à travers un homéomorphisme $\mathrm{Spec} A' \xrightarrow{\sim} D(f)$. C'est l'objet de la présente section sur la technique de localisation des anneaux.

Le prototype des localisations est la construction du *corps des fractions* d'un anneau intègre A , qui “rend inversible” tout élément non nul de A dans une extension canonique $\mathrm{Frac}(A)$ de A . En général, la localisation construit une *solution universelle* d'un certain problème d'extension d'anneaux et morphismes d'anneaux. La proposition suivante formalise ce problème (et fournit sa solution) :

Proposition 3.25. *Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie. Il existe une A -algèbre*

$$(S^{-1}A, j)$$

caractérisée à isomorphisme unique près par la propriété suivante :

- Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors f se factorise à travers j si et seulement si $f(S) \subset B^\times$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ j \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

et cette factorisation est unique.

L'homomorphisme $j : A \rightarrow S^{-1}A$ est appelé application de localisation.

Démonstration. Unicité de $(S^{-1}A, j)$ à isomorphisme unique près : pour tout anneau B , soit $FB \subset \mathbb{Z} - \text{Alg}(A, B)$ la partie des homomorphismes $g : A \rightarrow B$ tels que $g(S) \subset B^\times$. Evidemment, si $g \in FB$, on a $h \circ g \in FB'$ pour tout anneau B' et tout homomorphisme d'anneaux $h : B \rightarrow B'$; cela veut dire que

$$F : \mathbb{Z} - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$$

est un sous-foncteur de $\mathbf{h}_A$. On voit donc que l'existence de $(S^{-1}A, j)$ équivaut à la représentabilité de F , et l'assertion est un cas particulier de l'exercice 2.7(i,ii).

Existence de $(S^{-1}A, j)$: d'abord, soit $\tilde{S} \subset A$ la partie des produits $s := s_1 \cdots s_k$ de longueur arbitraire $k \in \mathbb{N}$, d'éléments de S (pour $k = 0$ on obtient $s = 1$) ; on voit aisément que si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, on a $f(S) \subset B^\times \Leftrightarrow f(\tilde{S}) \subset B^\times$. Donc, le couple $(S^{-1}A, j)$ existe si et seulement si le couple correspondant $(\tilde{S}^{-1}A, \tilde{j})$ existe, et par ce qui précède ils sont canoniquement isomorphes, car couples universels pour le même sous-foncteur F de $\mathbf{h}_A$. En résumé, on peut remplacer S par $\tilde{S}$, et supposer que S soit une *partie multiplicative* de A , i.e. une partie telle que :

- $1 \in S$, et pour tous $s, t \in S$ on a aussi $st \in S$.

On introduit sur l'ensemble $S \times A$ la relation binaire $\sim$ définie par :

- $(s, a) \sim (t, b) \Leftrightarrow \exists u \in S$ tel que $usb = uta$.

On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence : si $(s, a) \sim (t, b) \sim (v, c)$, il existe $u, u' \in S$ tels que $usb = uta$ et $u'tc = u'vb$, d'où $uu'tsc = uu'vbs = uu'tva$; comme $uu't \in S$, on déduit $(s, a) \sim (v, c)$, d'où l'assertion. La classe d'équivalence de (s, a) sera notée par la fraction :

$$\frac{a}{s}$$

et on pose $S^{-1}A := (S \times A)/\sim$. On définit une opération :

$$(S \times A) \times (S \times A) \rightarrow S \times A \quad (s, a) + (t, b) := (st, at + bs)$$

et on vérifie que cette application induit une addition $+$: $S^{-1}A \times S^{-1}A \rightarrow S^{-1}A$, i.e. si $(s, a) \sim (s', a')$ et $(t, b) \sim (t', b')$, on a $(s, a) + (t, b) \sim (s', a') + (t', b')$. En effet : par hypothèse il existe $u, v \in S$ tel que $usa' = us'a$ et $vtb' = vt'b$, donc

$$uvst(a't' + b's') = uvs't'(at + bs) \quad \text{et } uv \in S.$$

De même, on définit une opération :

$$(S \times A) \times (S \times A) \rightarrow S \times A \quad (s, a) \cdot (t, b) := (st, ab).$$

On vérifie aisément que cette application induit une multiplication sur $S^{-1}A$, et que la donnée $(S^{-1}A, +, \cdot)$ est un anneau (exercice !) En particulier, l'élément neutre de l'addition est $0/1$, et celui de la multiplication est $1/1$, donc toute fraction $s/1$ avec $s \in S$ admet l'inverse $1/s$ dans $S^{-1}A$. L'homomorphisme j est défini par :

$$j : A \rightarrow S^{-1}A \quad a \mapsto \frac{a}{1} \quad \forall a \in A.$$

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme tel que $f(s) \in B^\times$, on définit

$$\bar{f} : S^{-1}A \rightarrow B \quad \frac{a}{s} \mapsto f(s)^{-1} \cdot f(a).$$

On vérifie aisément que $\bar{f}$ est bien défini : supposons que $a/s = b/t$, de sorte que $uat = ubt$ pour quelque $u \in S$; on déduit

$$\frac{f(a)}{f(s)} = \frac{f(a) \cdot f(ut)}{f(s) \cdot f(ut)} = \frac{f(aut)}{f(ust)} = \frac{f(ubs)}{f(ust)} = \frac{f(b) \cdot f(us)}{f(t) \cdot f(us)} = \frac{f(b)}{f(t)}.$$

De plus, $\bar{f}$ est l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $\bar{f} \circ j = f$ (exercice!). De l'autre côté, si f se factorise à travers j et un homomorphisme $\bar{f} : S^{-1}A \rightarrow B$, on voit que $f(s) = \bar{f}(s/1)$, donc $f(s)$ admet l'inverse $\bar{f}(1/s)$ dans B . $\square$

Exemple 3.26. Soit A un anneau.

- (i) Si A est intègre et si $S := A \setminus \{0\}$, alors $S^{-1}A = \text{Frac}(A)$ (voir §1.1.2).
- (ii) Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, noter que $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de A . Cette localisation $S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$ de A en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ sera désignée :

$$A_{\mathfrak{p}}.$$

- (iii) Si $f \in A$ est un élément arbitraire, posons $S_f := \{f\}$; on notera :

$$A_f := S_f^{-1}A.$$

- (iv) Soient K un corps algébriquement clos, $n \in \mathbb{N}$, $A := K[X_1, \dots, X_n]$, et $Q \in A$ un polynôme arbitraire. La localisation A_Q définie comme dans (iii) est l'anneau des fractions $R := P/Q^k$ avec $P \in A$ et $k \in \mathbb{N}$ arbitraires. Toute telle fraction détermine une application ensembliste :

$$D_K(Q) \rightarrow K \quad \underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \mapsto R(\underline{a}) := P(\underline{a})/Q(\underline{a})^k$$

(où $D_K(Q) \subset \text{Max } A \simeq K^n$ est défini comme au §1.3.1).

Remarque 3.27. (i) Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie multiplicative, et $a/s \in S^{-1}A$ un élément arbitraire ; la construction de $S^{-1}A$ montre que l'on a $a/s = 0/1$ dans $S^{-1}A$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$ dans A . En particulier, un élément $a \in A$ est dans le noyau de l'application de localisation $j : A \rightarrow S^{-1}A$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$. Par suite, j est injective $\Leftrightarrow$ tout élément de S est régulier dans A .

(ii) D'autre part, j est rarement surjective, mais -- par l'exercice 2.7(i) -- elle est toujours un épimorphisme de la catégorie des anneaux.

Exemple 3.28. Soient A, B deux anneaux, et $C := A \times B$ leur produit cartésien, muni de l'addition et la multiplication usuelles : $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$ et $(a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb')$ pour tous $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$. En particulier, l'unité de la multiplication de C est le couple $(1, 1)$. Posons $s := (1, 0)$; on a $s^n = s$ pour tout $n > 0$, donc $S := \{(1, 1), s\}$ est une partie multiplicative de C , et d'après la remarque 3.27(i), le noyau de la localisation $j : C \rightarrow S^{-1}C$ est l'idéal $\{0\} \times B \subset C$. Ainsi, j est la composition de la projection $\pi : C \rightarrow A : (a, b) \mapsto a$ avec un homomorphisme injectif d'anneaux

$$j' : A \rightarrow S^{-1}C \quad a \mapsto \frac{(a, 0)}{(1, 1)}.$$

Mais j' est aussi surjectif : en effet, tout élément de $S^{-1}C$ est soit une fraction de la forme $\frac{(a, b)}{(1, 1)}$, soit de la forme $\frac{(a, b)}{s}$, mais on a $\frac{(a, b)}{(1, 1)} = \frac{(a, 0)}{(1, 1)} = \frac{(a, b)}{s}$ car $(a, b) \cdot s = (a, 0) \cdot s$ pour tous $a, b \in S$. Donc, j' est un isomorphisme, i.e. l'application de localisation coïncide, à isomorphisme unique près, avec la projection sur le facteur A de C .

On peut arriver à la même conclusion à l'aide de la propriété universelle de $S^{-1}C$. En effet, soit $f : C \rightarrow R$ un homomorphisme d'anneaux tel que $f(s) \in R^\times$. On a $s \cdot (0, b) = (0, 0)$ pour tout $b \in B$, d'où $0 = f(0, 0) = f(s) \cdot f(0, b)$, et on conclut que $f(0, b) = 0$ pour tout $b \in B$, ce qui montre que f se factorise, de façon évidemment unique, à travers la projection π . Réciproquement, s'il existe un homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : A \rightarrow R$ tel que $f = \bar{f} \circ \pi$, on a $f(s) = \bar{f} \circ \pi(s) = \bar{f}(1) = 1 \in R^\times$. La C -algèbre (A, π) est alors

solution universelle du même problème de factorisation qui caractérise $(S^{-1}C, j)$, et elle est donc canoniquement isomorphe à cette dernière.

Exercice 3.29. Soient A un anneau, $S, T \subset A$ deux parties, et $j_S : A \rightarrow S^{-1}A$ l'application de localisation. On pose $\bar{T} := j_S(T)$; montrer qu'il existe un unique isomorphisme $(S \cup T)^{-1}A \xrightarrow{\sim} \bar{T}^{-1}(S^{-1}A)$ de A -algèbres.

3.3.1. *Idéaux des anneaux localisés.* Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie multiplicative, $I \subset A$ un idéal, $j : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation ; on voit aisément que la partie

$$S^{-1}I := \{a/s \in S^{-1}A \mid a \in I, s \in S\}$$

est un idéal de $S^{-1}A$. Montrons que tout idéal de $S^{-1}A$ est de cette forme :

Lemme 3.30. (i) Pour tout idéal $J \subset S^{-1}A$ on a $J = S^{-1}(j^{-1}J)$.

(ii) Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et si $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, on a $S^{-1}\mathfrak{p} \in \text{Spec } S^{-1}A$, et $\mathfrak{p} = j^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$.

Démonstration. (i) : Si $a/s \in J$, on a $a/1 = (a/s) \cdot (s/1) \in J$, donc $a \in j^{-1}J$, d'où $a/s \in S^{-1}(j^{-1}J)$. L'inclusion $S^{-1}(j^{-1}J) \subset J$ est immédiate.

(ii) : Si $(a/s) \cdot (b/t) \in S^{-1}\mathfrak{p}$, il vient $ab/(st) = c/u$ dans $S^{-1}A$ pour quelque $c \in \mathfrak{p}$, $u \in S$; d'où, $abuv = cstv$ dans A , pour quelque $v \in S$, et donc $abuv \in \mathfrak{p}$. Mais $uv \in S$, donc $ab \in \mathfrak{p}$, et par suite, soit $a/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$, soit $b/t \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Ensuite, évidemment $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} := j^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$; d'autre part, si $a \in \mathfrak{q}$, on a $a/1 = c/u$ pour quelque $c \in \mathfrak{p}$ et $u \in S$, d'où $uva = cv$ dans A pour quelque $v \in S$, d'où $a \in \mathfrak{p}$, car $uv \in S$ et par hypothèse $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Ainsi, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. $\square$

Proposition 3.31. Dans la situation du §3.3.1, l'application

$$\text{Spec } j : \text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \text{Spec } A$$

est injective, et son image est la partie $\Sigma := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

Démonstration. L'injectivité de $\text{Spec}(j)$ découle directement du lemme 3.30(i).

Soient $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S^{-1}A$ et $\mathfrak{p} := j^{-1}\mathfrak{q}$; si $t \in S \cap \mathfrak{p}$, on obtient $1 = t/t \in S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, contradiction. Donc, $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, et cela montre que l'image de $\text{Spec}(j)$ est contenue dans Σ ; l'inclusion opposée découle aussitôt du lemme 3.30(ii). $\square$

Exemple 3.32. (i) Soient A un anneau, $f \in A$ un élément, et $S \subset A$ la partie multiplicative $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Donc, $S^{-1}A = A_f$ (notation de l'exemple 3.26(iii)), et la proposition 3.31 nous dit que $\text{Spec } j$ induit une identification naturelle :

$$\text{Spec } A_f \simeq D(f).$$

Plus précisément, la topologie de $\text{Spec } A_f$ coïncide avec la topologie induite par $\text{Spec } A$ via l'application injective $\text{Spec } j$. La preuve de cette dernière assertion est analogue à celle de la remarque 1.45(i) : il suffit de noter que pour tout $a/f^n \in A_f$ on a $D(a/f^n) = D(a/1) = (\text{Spec } j)^{-1}D(a)$.

(ii) Plus généralement, pour toute partie S , le même argument montre que la topologie de $\text{Spec } S^{-1}A$ est induite par celle de $\text{Spec } A$ via l'application $\text{Spec } j$.

(iii) Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. La proposition 3.31 montre aussi que la localisation $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ de l'exemple 3.26(ii) induit une identification canonique

$$\text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \simeq \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}.$$

Ainsi, $S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}$ est l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$; i.e. $(A_{\mathfrak{p}}, S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p})$ est un anneau local.

Exercice 3.33. Soient A un anneau intègre, $S \subset A$ un ensemble d'éléments premiers de A , et $a \in A$ avec $S \nmid a$, i.e. tel qu'aucun $s \in S$ ne divise a . Montrer que :

(i) a est premier dans $A \Leftrightarrow a/1$ est premier dans $S^{-1}A$.

(ii) $a \in A^{\times} \Leftrightarrow a/1 \in (S^{-1}A)^{\times}$.

Remarque 3.34. On peut aussi utiliser la proposition 3.31 afin de donner une caractérisation purement topologique de l'application de localisation. Pour cela, soit $U \subset \operatorname{Spec} A$ une partie arbitraire ; pour tout anneau B , notons par $F_U B \subset \mathbb{Z} - \operatorname{Alg}(A, B)$ l'ensemble des homomorphismes $f : A \rightarrow B$ tels que l'image de $\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ soit contenue dans U . Evidemment, si $f \in F_U B$, on a $g \circ f \in F_U B'$ pour tout anneau B' et tout homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow B'$; on a donc un sous-foncteur du foncteur h_A

$$F_U : \mathbb{Z} - \operatorname{Alg} \rightarrow \operatorname{Ens}.$$

On dira que U est *représentable* si F_U est représentable. Si $(A_U, j_U : A \rightarrow A_U)$ est un couple universel pour F_U , on dira aussi que j_U (ou A_U) *représente* U . Par l'exercice 2.7, j_U est alors un épimorphisme d'anneaux, et la A -algèbre A_U est déterminée à isomorphisme unique près. Avec cette terminologie, on a :

Exercice 3.35. Soit $S \subset A$ une partie, et posons $U := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Montrer que la partie U de $\operatorname{Spec} A$ est représentable par la A -algèbre $S^{-1}A$.

En général, la question de décider si une partie donnée de $\operatorname{Spec} A$ soit représentable est assez subtile (et dépasse les moyens de ce cours). Nous nous contentons ici de proposer le problème suivant (voir aussi le problème 11.75 pour une généralisation) :

Problème 3.36. Soit K un corps ; on pose $A := K[X, Y]$, et on dénote $\mathfrak{m} \subset A$ l'idéal maximal engendré par X et Y . Montrer que $U := \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ n'est pas une partie représentable (noter que si K est algébriquement clos, $\operatorname{Max} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ correspond au plan K^2 privé de son origine $(0, 0)$, suivant la bijection canonique fournie par le Nullstellensatz).

Exercice 3.37. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif d'anneaux, et $\phi := \operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$. Montrer que $\phi(\operatorname{Spec} B)$ contient tout idéal premier minimal de A (exercice 1.61(i)). En déduire que $\phi(\operatorname{Spec} B)$ est dense dans $\operatorname{Spec} A$.

(ii) Réciproquement, si A est réduit et si $\phi(\operatorname{Spec} B)$ est dense dans $\operatorname{Spec} A$, montrer que f est injectif.

Exercice 3.38. Soient A un anneau, $I, J \subset A$ des idéaux, $S \subset A$ une partie. Montrer :

$$\begin{aligned} S^{-1}(I + J) &= S^{-1}I + S^{-1}J & \operatorname{rad}(S^{-1}I) &= S^{-1}(\operatorname{rad}(I)) \\ S^{-1}(I \cdot J) &= (S^{-1}I) \cdot (S^{-1}J) & \mathcal{N}(S^{-1}A) &= S^{-1}\mathcal{N}(A) \\ S^{-1}(I \cap J) &= (S^{-1}I) \cap (S^{-1}J). \end{aligned}$$

Exercice 3.39. Soient K un corps, $n \in \mathbb{N}$ un entier, et $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_k$ une suite finie d'inclusions strictes d'idéaux premiers de $K[T_1, \dots, T_n]$. Montrer que $k \leq 2^n$.

Exercice 3.40. Soient Γ un groupe abélien, $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ un anneau Γ -gradué (voir le §1.1.6), et $S \subset A$ une partie formée d'éléments homogènes de A . Montrer qu'il existe une unique structure d'anneau Γ -gradué sur $B := S^{-1}A$ telle que la localisation $j : A \rightarrow B$ soit un morphisme d'anneaux Γ -gradués.

Exercice 3.41. Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie ; notons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties finies $S' \subset S$, partiellement ordonné par l'inclusion : $S_1 \leq S_2$ si et seulement si $S_1 \subset S_2$. La propriété universelle des localisations implique que pour tous $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ avec $S_1 \leq S_2$, il existe un unique morphisme de A -algèbres $j_{S_1 S_2} : S_1^{-1}A \rightarrow S_2^{-1}A$; on obtient donc un système direct de A -algèbres $(S'^{-1}A \mid S' \in \mathcal{S})$ indexé par $(\mathcal{S}, \leq)$, ainsi qu'un co-cône $(j_{S'} : S'^{-1}A \rightarrow S^{-1}A \mid S' \in \mathcal{S})$. Montrer que le co-cône $j_\bullet$ est universel ; en particulier, on a un isomorphisme canonique :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ S' \in \mathcal{S}}} S'^{-1}A \xrightarrow{\sim} S^{-1}A.$$

3.3.2. Produits tensoriels et localisation des modules. Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie multiplicative, M un A -module, et $j_A : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation. L'extension des scalaires de M suivant j_A est munie d'une application A -linéaire canonique $\iota_M : M \rightarrow (S^{-1}A \otimes_A M)_{[j_A]}$, et on a vu au §3.2.2 que $(S^{-1}A \otimes_A M, \iota_M)$ est un couple universel pour le foncteur

$$\mathrm{Hom}_A(M, (-)_{[j_A]}) : S^{-1}A - \mathrm{Mod} \rightarrow \mathrm{Ens}.$$

On peut exhiber un autre couple universel pour ce foncteur, par une construction de *module de fractions*, qui généralise celle de $S^{-1}A$; je l'esquisse à grandes lignes, laissant au lecteur le soin des détails. On définit une relation $\sim$ sur $S \times M$ par :

$$(s, m) \sim (s', m') \Leftrightarrow \exists u \in S \text{ tel que } usm' = us'm.$$

On vérifie aisément que $\sim$ est une relation d'équivalence; on pose

$$S^{-1}M := (S \times M) / \sim$$

et on dénote la classe d'un couple (s, m) par

$$\frac{m}{s} \in S^{-1}M$$

(cf. la preuve de la proposition 3.25). On définit une opération d'addition

$$(S \times M) \times (S \times M) \mapsto S \times M \quad ((s, m), (s', m')) \mapsto (ss', s'm + sm')$$

et on vérifie que cette opération induit une addition $+$: $S^{-1}M \times S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M$. On définit aussi une opération

$$(S \times A) \times (S \times M) \rightarrow S \times M \quad ((s, a), (s', m)) \mapsto (ss', am)$$

et on vérifie qu'elle induit une opération de multiplication scalaire $S^{-1}A \times S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M$, munissant ainsi $S^{-1}M$ d'une structure naturelle de $S^{-1}A$ -module, et on a une application A -linéaire $j_M : M \rightarrow (S^{-1}M)_{[j_A]}$ telle que $j_M(m) = m/1$ pour tout $m \in M$. Finalement, si $g : M \rightarrow N_{[j_A]}$ est A -linéaire, on pose

$$g' : S^{-1}M \rightarrow N \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \cdot g(m).$$

On voit aisément que g' est bien définie, et elle est l'unique application $S^{-1}A$ -linéaire avec $g'_{[j_A]} \circ j_M = g$. On déduit un isomorphisme canonique de $S^{-1}A$ -modules

$$(*) \quad S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M \quad \frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}.$$

De plus, si $\phi : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de A -modules, l'application $j_N \circ \phi : M \rightarrow S^{-1}N_{[j_A]}$ se factorise à travers un unique homomorphisme de $S^{-1}A$ -modules

$$S^{-1}\phi : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$$

et évidemment on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{S^{-1}A \otimes_A \phi} & S^{-1}A \otimes_A N \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}\phi} & S^{-1}N \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques ci-dessus. Autrement dit, on a obtenu un foncteur

$$S^{-1}(-) : A - \mathrm{Mod} \rightarrow S^{-1}A - \mathrm{Mod} \quad M \mapsto S^{-1}M$$

et le système d'isomorphismes $(*)$ est un isomorphisme de foncteurs

$$S^{-1}A \otimes_A - \xrightarrow{\sim} S^{-1}(-).$$

L'intérêt de cette description (à isomorphisme unique près) de $S^{-1}A \otimes_A M$ par *localisation* de M , se trouve dans l'observation suivante :

Remarque 3.42. (i) Par inspection directe, on voit aussitôt qu'un élément $m/s \in S^{-1}M$ est nul si et seulement s'il existe $u \in S$ tel que $um = 0$ dans M .

(ii) Soit $\phi : M' \rightarrow M$ une injection A -linéaire ; alors $S^{-1}\phi : S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M$ est aussi injective. En effet, si $m'/s \in \text{Ker } S^{-1}\phi$, on déduit de (i) qu'il existe $u \in S$ tel que $u \cdot \phi(m') = 0$ dans M , et donc $um' = 0$ dans M' , par l'injectivité de ϕ , d'où $m'/s = 0$ dans $S^{-1}M'$.

Corollaire 3.43. *Toute suite exacte courte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de A -modules induit une suite exacte :*

$$0 \rightarrow S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M'' \rightarrow 0.$$

Démonstration. Par ce qui précède, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} S^{-1}A \otimes_A M' & \longrightarrow & S^{-1}A \otimes_A M & \longrightarrow & S^{-1}A \otimes_A M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S^{-1}M' & \longrightarrow & S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de $S^{-1}A$ -modules, dont les flèches verticales sont des isomorphismes, et dont la première ligne horizontale est exacte, par la proposition 3.11. On déduit que la deuxième ligne horizontale est aussi exacte. Mais la remarque 3.42(ii) montre que l'application $S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M$ est injective, d'où le corollaire. $\square$

Corollaire 3.44. *Soient M, N deux A -modules, $S \subset A$ une partie multiplicative. Il existe un isomorphisme $S^{-1}A$ -linéaire unique*

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \quad \text{tel que} \quad \frac{m \otimes n}{s} \mapsto \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{1}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.20 et de l'identification entre $S^{-1}M$ et $S^{-1}A \otimes_A M$ donnée ci-dessus. $\square$

Exemple 3.45. (i) Avec la notation de 3.3.2, soient M' un $S^{-1}A$ -module, et $M := M'_{[jA]}$. Alors le couple $(M, \text{Id}_M : M \rightarrow M'_{[jA]})$ est aussi universel pour le foncteur $\text{Hom}_A(M, (-)_{[jA]})$, et donc la localisation $M \rightarrow (S^{-1}M)_{[jA]}$ est un isomorphisme dans ce cas, et en fait elle est même un isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules $M' \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$. Pour la preuve il suffit de remarquer que si N est un $S^{-1}A$ -module quelconque, toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N_{[jA]}$ est déjà une application $S^{-1}A$ -linéaire $M' \rightarrow N$; en effet, on a :

$$\frac{a}{s} \cdot f(x) = \frac{1}{s} \cdot f(ax) = \frac{1}{s} \cdot f\left(s \cdot \frac{a}{s} \cdot x\right) = \frac{s}{s} \cdot f\left(\frac{a}{s} \cdot x\right) = f\left(\frac{a}{s} \cdot x\right) \quad \forall \frac{a}{s} \in S^{-1}A, \forall x \in M.$$

(ii) Par exemple, soient $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \subset A$ deux idéaux premiers, $\pi : A \rightarrow \kappa(\mathfrak{q})$ la projection, V un $\kappa(\mathfrak{q})$ -espace vectoriel, et considérons le A -module $N := V_{[\pi]}$. Noter que $\pi(A \setminus \mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})^\times$, donc π se factorise à travers la localisation $j : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ et un unique homomorphisme d'anneaux $\bar{\pi} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \kappa(\mathfrak{q})$ avec $\text{Ker } \bar{\pi} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$. En particulier, $N = N'_{[j]}$, avec $N' := V_{[\bar{\pi}]}$. Par (i), la localisation $N \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ est alors un isomorphisme. Plus généralement, avec le corollaire 3.44 on déduit pour tout A -module M un isomorphisme de $\kappa(\mathfrak{q})$ -espaces vectoriels (notation du §3.2.7) :

$$M(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\sim} M(\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}).$$

3.3.3. Le lemme de Nakayama. Soit $\phi : A^n \rightarrow A^n$ un endomorphisme A -linéaire ; rappelons que le *polynôme caractéristique* de ϕ est le polynôme

$$\chi_\phi(T) := \det(T \cdot Id_{A^n} - \phi) \in A[T].$$

Lemme 3.46. (Cayley-Hamilton) *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\chi_\phi(\phi) = 0.$$

Démonstration. Si A est un corps, c'est l'identité bien connue de Cayley-Hamilton. Si A est un anneau intègre, il est un sous-anneau de son corps des fractions K , et ϕ est la restriction d'une application K -linéaire $\phi_K : K^n \rightarrow K^n$ (brièvement : si $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de A^n , on représente ϕ par une matrice $B := (b_{ji} \mid i, j = 1, \dots, n)$ comme dans l'exemple 1.125, de sorte que $\chi_\phi(T)$ est aussi le polynôme caractéristique $\chi_B(T)$ de B , et la même matrice définit l'application ϕ_K). On sait que $\chi_{\phi_K}(\phi_K) = 0$, d'où $\chi_\phi(\phi) = 0$.

Si A est un anneau arbitraire, posons $R := \mathbb{Z}[Y_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n]$ et soit $e'_1, \dots, e'_n$ la base canonique de R^n ; on définit un homomorphisme d'anneaux $f : R \rightarrow A$ par :

$$f(Y_{ij}) := b_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

et on considère l'endomorphisme ψ de R^n tel que $\psi(e'_i) := \sum_{j=1}^n Y_{ji} e'_j$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On a donc un diagramme commutatif d'applications A -linéaires :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R R^n & \xrightarrow{\sim} & A^n \\ A \otimes_R \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ A \otimes_R R^n & \xrightarrow{\sim} & A^n \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les identifications canoniques de l'exercice 3.16(ii). Mais comme R est intègre, on a $\chi_\psi(\psi) = 0$, d'où $\chi_\phi(\phi) = A \otimes_R \chi_\psi(\psi) = 0$. $\square$

Proposition 3.47. *Soient M un A -module de type fini, $\phi : M \rightarrow M$ un endomorphisme, $I \subset A$ un idéal tel que $\phi(M) \subset IM$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ avec*

$$\phi^n + a_1 \cdot \phi^{n-1} + \dots + a_n \cdot Id_M = 0 \quad \text{et} \quad a_k \in I^k \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de M , et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n . Par hypothèse, on a une matrice $B := (b_{ji} \mid i, j = 1, \dots, n)$ d'éléments de I avec $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n b_{ji} x_j$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $\pi : A^n \rightarrow M$ la surjection A -linéaire telle que $e_i \mapsto x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. La matrice B correspond à un endomorphisme ψ de A^n faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\psi} & A^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\phi} & M. \end{array}$$

Comme π est surjectif, il suffit de trouver une identité du type souhaité pour l'application ψ , car si $\psi^n + a_1 \psi^{n-1} + \dots + a_n \cdot Id_{A^n} = 0$, on aura aussi $\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n \cdot Id_M = 0$. Donc, on peut supposer du départ que M soit libre de type fini, et en raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.46, on se ramène alors au cas où $A = \mathbb{Z}[Y_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n]$, $I = \sum_{i,j=1}^n AY_{ij}$ et $B = (Y_{ji} \mid i, j = 1, \dots, n)$. Or, noter que $P := \det(B) \in A$ est un polynôme homogène de degré total n ; d'autre part, $\chi_B(T) \in A[T] = \mathbb{Z}[T, Y_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n]$ est l'image de P sous l'homomorphisme d'anneaux $h : A \rightarrow A[T]$ tel que $h(Y_{ij}) := -Y_{ij}$ si $i \neq j$, et $h(Y_{ii}) := T - Y_{ii}$ pour $i = 1, \dots, n$. Il est clair que h transforme tout polynôme homogène de A en un polynôme homogène de $A[T]$ de même degré (pour la graduation telle que $\deg T = 1 = \deg Y_{ij}$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$), par suite $\chi_B(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n$ avec $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\deg(a_i) = n - i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où l'assertion, au vu du lemme 3.46. $\square$

Corollaire 3.48. Soient M un A -module de type fini, $I \subset A$ un idéal tel que $IM = M$. Alors il existe $x \in A$ tel que

$$x \equiv 1 \pmod{I} \quad \text{et} \quad xM = 0.$$

Démonstration. On applique la proposition 3.47 à $\phi := Id_M$; si $\phi^k + \cdots + a_k \cdot Id_M = 0$, on peut prendre $x := 1 + a_1 + \cdots + a_k$. $\square$

Corollaire 3.49. (Lemme de Nakayama) Soient M un A -module de type fini, $\mathcal{J}$ le radical de Jacobson de A , et supposons que $\mathcal{J}M = M$. Alors $M = 0$.

Démonstration. Par le corollaire 3.48, on sait qu'il existe $a \in \mathcal{J}$ tel que $(1+a) \cdot M = 0$. De l'autre côté, on a $1+a \in A^\times$, par le théorème 1.50(i), d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 3.50. Soient M un A -module, $N \subset M$ un sous-module, $I \subset A$ un idéal tel que $M = IM + N$. On a $M = N$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (a) $I \subset \mathcal{J}(A)$ et M est de type fini.
- (b) I est nilpotent, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$.

Démonstration. On a $I(M/N) = (IM+N)/N = M/N$, donc $M/N = 0$ si (a) est vérifiée, par le lemme de Nakayama. Sinon, remarquons que $I^k(M/N) = M/N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où encore $M/N = 0$, quand (b) est vérifiée. $\square$

Le lemme de Nakayama et ses corollaires sont particulièrement efficaces quand A est local, comme illustré par la proposition fort utile suivante. D'autre part, certaines propriétés des A -modules et des homomorphismes des A -modules sont *de nature locale*, i.e. peuvent se lire après changement de base suivant les localisations $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ aux idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A : on verra au paragraphe suivant un petit échantillon de ces propriétés, et un autre exemple est donné par la proposition 3.77. On peut ainsi entrevoir une stratégie générale pour aborder l'étude de ces propriétés locales des modules sur des anneaux quelconques : on localisera et on essaiera ensuite d'appliquer aux modules localisés les résultats ci-dessus.

Proposition 3.51. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local, M un A -module, $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système d'éléments de M dont les classes $(\bar{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ sont une base du $k(\mathfrak{m})$ -espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$. On suppose que M soit de type fini, ou que $\mathfrak{m}$ soit un idéal nilpotent. Alors $x_\bullet$ est un système de générateurs du A -module M .

Démonstration. Soit $N := \sum_{\lambda \in \Lambda} Ax_\lambda$; on a $M = N + \mathfrak{m}M$. Or, $\mathcal{J}(A) = \mathfrak{m}$, car A est local, donc il suffit d'appliquer le corollaire 3.50. $\square$

Remarque 3.52. On a déjà observé que le rang d'un A -module M de type fini n'est pas forcément localement constant sur $\text{Spec } A$ (voir l'exemple 3.24) ; toutefois, la proposition 3.51 implique que l'on a :

$$\text{rk}_M(\mathfrak{p}) \geq \text{rk}_M(\mathfrak{q}) \quad \forall \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } A \quad \text{tels que} \quad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}.$$

Car, si $n := \text{rk}_M(\mathfrak{p}) = \text{rk}_{M_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ (exemple 3.45(ii)), on a un système de générateurs $x_1, \dots, x_n$ du $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$, et leurs images $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ dans le $k(\mathfrak{q})$ -espace vectoriel $M(\mathfrak{q}) = M_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ sont alors une famille génératrice, d'où l'assertion.

Problème 3.53. (i) Soient $A \neq 0$ un anneau, $n, m \in \mathbb{N}$, et $f : A^n \rightarrow A^m$ une application A -linéaire. Montrer les assertions suivantes :

- (a) Si f est surjective (resp. bijective), alors $n \geq m$ (resp. $n = m$).
- (b) Si f est injective, alors $n \leq m$ (difficile!).

(Signalons que ces énoncés ne sont plus vrais, si A est non-commutatif ! Voir [47, (1.4)].)

(ii) Soient M un A -module de type fini, et $g : M \rightarrow M$ une surjection A -linéaire. Montrer que f est bijective.

(iii) Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local, M un A -module, N un A -module de type fini, et $h : M \rightarrow N$ une application A -linéaire telle que $h(\mathfrak{m}) : M(\mathfrak{m}) \rightarrow N(\mathfrak{m})$ est surjective (notation du §3.2.7). Montrer que h est surjective.

3.3.4. Propriétés locales des modules. Si M, N sont des A -modules, $\phi : M \rightarrow N$ une application A -linéaire et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, on pose comme d'habitude $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$ et

$$M_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}M \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$$

et on notera $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ l'application $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire induite par ϕ . De même, pour tout $f \in A$ on notera $M_f := A_f \otimes_A M$ et $\phi_f := A_f \otimes_A \phi : M_f \rightarrow N_f$.

Proposition 3.54. *Soit M un A -module. On a les équivalences :*

$$(a) M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b) M_{\mathfrak{p}} = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A \quad \Leftrightarrow \quad (c) M_{\mathfrak{m}} = 0 \quad \forall \mathfrak{m} \in \text{Max } A.$$

Démonstration. Evidemment $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, donc on suppose (c) et on montre que $M = 0$. On raisonne par l'absurde : si $x \in M \setminus \{0\}$, l'idéal annulateur de x ne contient pas 1, donc il est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A (corollaire 1.35). Par hypothèse, $M_{\mathfrak{m}} = 0$, i.e. il existe $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ tel que $ax = 0$, ce qui contredit le choix de $\mathfrak{m}$. $\square$

Proposition 3.55. *Soit $\phi : M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) ϕ est injective (resp. surjective).
- (b) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ est injective (resp. surjective) pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.
- (c) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ est injective (resp. surjective) pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.

Démonstration. Compte tenu des identifications canoniques

$$(\text{Ker } \phi)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\phi_{\mathfrak{p}}) \quad (\text{Coker } \phi)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(\phi_{\mathfrak{p}}) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$$

fournies par le corollaire 3.43, il suffit d'appliquer la proposition 3.54. $\square$

Exercice 3.56. Soit M un A -module, et supposons que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ il existe $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que M_f soit un A_f -module de type fini (resp. de présentation finie). Montrer que M est de type fini (resp. de présentation finie).

Définition 3.57. Soit M un A -module. Le *support* de M est la partie

$$\text{Supp}_A M := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Pour $x \in M$, le *support* de x est la partie

$$\text{Supp}_A(x) := \text{Supp}_A Ax.$$

Remarque 3.58. (i) Par la proposition 3.54, on a $\text{Supp}_A M = \emptyset \Leftrightarrow M = 0$.

(ii) Si M est un A -module de type fini, la proposition 3.51 montre que

$$\text{Supp}_A M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid M(\mathfrak{p}) \neq 0\} = \text{rk}_M^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{0\}).$$

Soit $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs de M , et pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $I_i := \text{Ann}_A(x_i)$, de sorte que $\text{Ann}_A M = \bigcap_{i=1}^n I_i$. On voit aisément que $V(I_i) \subset \text{Spec } A$ est la partie des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que $x_i/1 \neq 0$ dans $M_{\mathfrak{p}}$, donc

$$\text{Supp}_A(x_i) = V(I_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \text{Supp}_A M = \bigcup_{i=1}^n \text{Supp}_A(x_i) = V(\text{Ann}_A M).$$

En particulier, le support de M est une partie *fermée* de $\text{Spec } A$. De plus, pour toute partie multiplicative $S \subset A$ on a :

$$\text{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = S^{-1}(\text{Ann}_A M).$$

En effet, on a $\text{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}A(x_i/1))$; au vu de l'exercice 3.38 on est alors ramené au cas où M est cyclique, i.e. $M \simeq A/I$ pour un idéal $I \subset A$. Dans ce cas, $\text{Ann}_A(M) = I$ et $\text{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = S^{-1}I$, comme souhaité.

(iii) Soient $S \subset A$ une partie multiplicative, et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, d'où $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$, et $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$; on déduit une identification naturelle :

$$(S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, on obtient l'identité :

$$\operatorname{Supp}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \operatorname{Spec} S^{-1}A \cap \operatorname{Supp}_A M.$$

Exemple 3.59. Soit $A := \mathbb{C}[X, Y]$; on considère les vecteurs suivants de A^2

$$v_1 := \begin{pmatrix} X-1 \\ -Y \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} Y \\ X+1 \end{pmatrix} \quad \text{et on pose} \quad M := A^2/(Av_1 + Av_2).$$

Soit aussi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; évidemment, $M_{\mathfrak{p}} = 0$ si et seulement si $\{v_1, v_2\}$ est une base de $A_{\mathfrak{p}}^2$, si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} X-1 & Y \\ -Y & X+1 \end{pmatrix} = X^2 + Y^2 - 1 \notin \mathfrak{p}.$$

Autrement dit : $\operatorname{Supp}_A M = V(X^2 + Y^2 - 1)$, dont l'intersection avec $\operatorname{Max} A = \mathbb{C}^2$ est une conique affine non dégénérée.

3.4. Produit tensoriel d'algèbres. Soient A un anneau *commutatif*, et

$$(B, f : A \rightarrow B) \quad (C, g : A \rightarrow C)$$

deux A -algèbres associatives unitaires (i.e. f et g sont deux morphismes d'anneaux associatifs unitaires); rappelons que B est naturellement un (B, B) -bimodule, donc aussi un (B, A) -bimodule, après restriction des scalaires à droite suivant f , et de même C est naturellement un (A, C) -bimodule. Donc $B \otimes_A C$ est un (B, C) -bimodule. Supposons en outre, que les images de f et g soient contenues respectivement dans le centre $Z(B)$ de B et $Z(C)$ de C (voir la remarque 1.14); dans ce cas, on va munir $B \otimes_A C$ d'une structure de A -algèbre. Remarquons d'abord que sur $B \otimes_A C$ on a déjà une application B -linéaire (resp. C^{op} -linéaire)

$$\iota_B : B \rightarrow B \otimes_A C \quad b \mapsto b \otimes 1 \quad (\text{resp. } \iota_C : C \rightarrow B \otimes_A C \quad c \mapsto 1 \otimes c).$$

Nos hypothèses sur les images de f et g entraînent aisément que l'application

$$\beta : B \times C \times B \times C \rightarrow B \otimes_A C \quad (b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

est A -multilinéaire; d'après la remarque 3.10, β se factorise alors par une unique application A -linéaire

$$\mu : B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C \quad b \otimes c \otimes b' \otimes c' \mapsto bb' \otimes cc'.$$

Soit aussi $\omega : (B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \rightarrow B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C$ l'application A -bilinéaire universelle; la loi de multiplication sur $B \otimes_A C$ sera la composition

$$\mu \circ \omega : (B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \rightarrow B \otimes_A C \quad (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'.$$

Par construction, il s'agit d'une application A -bilinéaire, donc les axiomes usuels pour la multiplication d'un anneau (associativité, distributivité par rapport à l'addition) peuvent se vérifier sur les produits de tenseurs élémentaires, et pour ces derniers, ces propriétés sont immédiates. De plus, on voit immédiatement que les applications ι_B et ι_C sont des homomorphismes d'anneaux tels que

$$\iota_B \circ f = \iota_C \circ g.$$

En particulier, $\iota_B \circ f : A \rightarrow B \otimes_A C$ munit $B \otimes_A C$ d'une structure de A -algèbre associative unitaire, telle que ι_B et ι_C soient des homomorphismes de A -algèbres. On appelle $B \otimes_A C$ le *produit tensoriel* des A -algèbres B et C . Il est clair que si B et C sont commutatifs, il en est de même pour $B \otimes_A C$. Ce produit tensoriel est solution universelle du problème

de factorisation suivant. Soient D un anneau associatif unitaire, et $B \xrightarrow{h} D \xleftarrow{k} C$ deux homomorphismes d'anneaux tels que :

$$h \circ f = k \circ g \quad \text{et} \quad h(b) \cdot k(c) = k(c) \cdot h(b) \quad \forall b \in B, \forall c \in C.$$

Alors il existe un unique homomorphisme $j : B \otimes_A C \rightarrow D$ d'anneaux associatifs unitaires qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow \iota_B \\ C & \xrightarrow{\iota_C} & B \otimes_A C \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow h \\ \nearrow k \\ \dashrightarrow j \end{array} \quad D.$$

En fait, on a une application (B, A, C) -bilinéaire

$$B \times C \rightarrow D \quad (b, c) \mapsto h(b) \cdot k(c)$$

d'où une application (B, A, C) -linéaire unique $j : B \otimes_A C \rightarrow D$ avec $j(b \otimes c) = h(b) \cdot k(c)$ pour tous $b \in B, c \in C$. Il suffit alors de remarquer que j est un homomorphisme d'anneaux, car pour tous $b, b' \in B$ et tous $c, c' \in C$ on a :

$$\begin{aligned} j((b \otimes c) \cdot (b' \otimes c')) &= j(bb' \otimes cc') = h(bb') \cdot k(cc') = h(b) \cdot h(b') \cdot k(c) \cdot k(c') \\ &= h(b) \cdot k(c) \cdot h(b') \cdot k(c') = j(b \otimes c) \cdot j(b' \otimes c'). \end{aligned}$$

En particulier, si B et C sont des A -algèbres commutatives, $B \otimes_A C$ représente la somme amalgamée de B et C le long de A dans la catégorie $\mathbb{Z} - \text{Alg}$, ou de façon équivalente, le coproduit de (B, f) et (C, g) dans la catégorie $A - \text{Alg}$ des A -algèbres.

Remarque 3.60. (i) Evidemment, les mêmes considérations s'étendent aux familles finies arbitraires $B_\bullet := (B_1, \dots, B_n)$ de A -algèbres commutatives : par récurrence sur n , le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^n B_i := B_1 \otimes_A \dots \otimes_A B_n$ est muni d'une structure naturelle de A -algèbre avec des homomorphismes $(\iota_i : B_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n B_i \mid i = 1, \dots, n)$ qui font de cette A -algèbre le coproduit de la famille $B_\bullet$ dans la catégorie $A - \text{Alg}$.

(ii) De même, pour tout $i = 1, \dots, n$ soit M_i un B_i -module ; alors le A -module $\bigotimes_{i=1}^n M_i := M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_n$ est muni d'une structure naturelle de $\bigotimes_{i=1}^n B_i$ -module telle que pour tous $b_1 \otimes \dots \otimes b_n \in \bigotimes_{i=1}^n B_i$ et $m_1 \otimes \dots \otimes m_n \in \bigotimes_{i=1}^n M_i$ on a

$$(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \cdot (m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = b_1 m_1 \otimes \dots \otimes b_n m_n.$$

La construction s'effectue aisément par récurrence sur n ; pour $n = 2$ on considère l'application A -multilinéaire $B_1 \times B_2 \times M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_A M_2$ telle que $(b_1, b_2, m_1, m_2) \mapsto b_1 m_1 \otimes b_2 m_2$, et on raisonne comme dans la construction de la A -algèbre $B \otimes_A C$ ci-dessus : les détails seront confiés au lecteur.

(iii) En outre, posons $B := \bigotimes_{i=1}^n B_i$; il existe un unique isomorphisme B -linéaire

$$(B \otimes_{B_1} M_1) \otimes_B \dots \otimes_B (B \otimes_{B_n} M_n) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^n M_i$$

tel que $(1 \otimes m_1) \otimes \dots \otimes (1 \otimes m_n) \mapsto m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ pour tous $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$, où $B \otimes_{B_i} M_i$ dénote le B -module obtenu par extension de scalaires du B_i -module M_i suivant l'homomorphisme ι_i , pour tout $i = 1, \dots, n$. En effet, ces deux B -modules représentent le même sous-foncteur $F : B - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ de $\mathcal{L}_A(M_1 \times \dots \times M_n, -)$ (notation de la définition 3.1) qui associe à chaque B -module N l'ensemble des applications A -linéaires $\beta : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N$ telles que $\beta(b_1 m_1, \dots, b_n m_n) = (b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \cdot \beta(m_1, \dots, m_n)$ pour tous $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$ et tous $b_1 \in B_1, \dots, b_n \in B_n$; l'existence et unicité d'un tel isomorphisme découle alors comme d'habitude du lemme 2.4(i) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(iv) Soient A et B deux anneaux associatifs unitaires, et M un (A, B) -bimodule. On déduit une application $\mathbb{Z}$ -multilinéaire :

$$A \times B^{\text{op}} \times M \rightarrow M \quad (a, b^{\text{op}}, m) \mapsto a \cdot m \cdot b$$

d'où, comme d'habitude, une application $\mathbb{Z}$ -linéaire $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow M$, que l'on peut composer avec l'application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire universelle $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}} \times M \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ pour obtenir l'application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$\mu_M : A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}} \times M \rightarrow M \quad (a \otimes b^{\text{op}}, m) \mapsto a \cdot m \cdot b.$$

On voit aisément que la donnée (M, μ_M) est un $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}}$ -module (à gauche) : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Réciproquement, à tout $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}}$ -module (N, μ_N) on associe le (A, B) -bimodule dont le groupe abélien sous-jacent est celui de N , et avec les lois de multiplication scalaire telles que $a \cdot n \cdot b := (a \otimes b^{\text{op}}) \cdot n$ pour tous $n \in N$, $a \in A$ et $b \in B$. Ainsi, la catégorie $(A, B) - \text{Mod}$ des (A, B) -bimodules s'identifie naturellement avec $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}} - \text{Mod}$. En particulier, cela montre que $(A, B) - \text{Mod}$ est une catégorie abélienne complète et cocomplète.

Exercice 3.61. Soient A un anneau commutatif, et $(B_i, f_i : A \rightarrow B_i)$ trois A -algèbres associatives unitaires telles que $f_i(A) \subset Z(B_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que les isomorphismes canoniques fournis par les propositions 3.18 et 3.20 :

$$B_1 \otimes_A B_2 \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes_A B_1 \quad B_1 \otimes_A (B_2 \otimes_A B_3) \xrightarrow{\sim} (B_1 \otimes_A B_2) \otimes_A B_3$$

sont en fait des isomorphismes de A -algèbres associatives unitaires.

Par simplicité on revient maintenant à notre cadre standard, où *tout anneau est tacitement supposé commutatif*.

Exemple 3.62. Soient $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $I \subset A$ un idéal. On voit aisément que l'argument utilisé dans la solution de l'exercice 3.13 se généralise, et fournit un isomorphisme de A -modules

$$B \otimes_A A/I \xrightarrow{\sim} B/IB \quad b \otimes \bar{a} \mapsto \overline{ba} \quad \forall b \in B, \forall a \in A$$

qui est en fait même un isomorphisme de A -algèbres.

Exercice 3.63. (i) Soient A un anneau, et B, C, D trois A -algèbres. Montrer que l'isomorphisme canonique de la proposition 3.20 est un isomorphisme de $B - \text{Alg}$:

$$B \otimes_A (C \otimes_A D) \xrightarrow{\sim} (B \otimes_A C) \otimes_B (B \otimes_A D).$$

(ii) Soient A un anneau, B, C deux A -algèbres, $\phi : C \rightarrow D$ un homomorphisme d'anneaux ; on munit $B \otimes_A C$ de la structure de C -algèbre induite par l'homomorphisme $\iota_C : C \rightarrow B \otimes_A C$ tel que $c \mapsto 1 \otimes c$ pour tout $c \in C$. On munit aussi $(B \otimes_A C) \otimes_C D$ et $B \otimes_A D$ des structures de D -algèbres définies de manière analogue. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de D -algèbres

$$(B \otimes_A C) \otimes_C D \xrightarrow{\sim} B \otimes_A D \quad \text{tel que} \quad (b \otimes c) \otimes d \mapsto b \otimes \phi(c) \cdot d.$$

(iii) Soient B une A -algèbre, Λ un ensemble, et notons $A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ la A -algèbre de polynômes sur un ensemble d'indéterminées X_λ indexées par $\lambda \in \Lambda$. Montrer qu'il existe un isomorphisme unique de B -algèbres

$$B \otimes_A A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda] \xrightarrow{\sim} B[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda] \quad \text{tel que} \quad 1 \otimes X_\lambda \mapsto X_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

(iv) Soit $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux, et on considère le foncteur évident de restriction des scalaires suivant f :

$$(-)_{[f]} : A' - \text{Alg} \rightarrow A - \text{Alg} \quad (B, g : A' \rightarrow B) \mapsto (B, g \circ f : A \rightarrow B).$$

Montrer que $(-)_{[f]}$ admet l'adjoint à gauche :

$$A' \otimes_A - : A - \text{Alg} \rightarrow A' - \text{Alg} \quad (C, h : A \rightarrow C) \mapsto (A' \otimes_A C, i_{A'} : A' \rightarrow A' \otimes_A C)$$

qui associe à tout homomorphisme $\phi : C \rightarrow D$ de A -algèbres l'homomorphisme $A' \otimes_A \phi : A' \otimes_A C \rightarrow A' \otimes_A D$ de A' -algèbres.

Exercice 3.64. (i) Soient A un anneau, B', B'' deux A -algèbres, M' un B' -module de type fini, M'' un B'' -module de type fini. On pose $B := B' \otimes_A B''$, et on munit $M := M' \otimes_A M''$ de sa structure naturelle de B -module (voir la remarque 3.60); soient en outre $\phi' : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B'$ et $\phi'' : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B''$ les applications induites par les homomorphismes naturels d'anneaux $B' \rightarrow B \leftarrow B''$. Montrer que :

$$\text{Supp}_B M = \phi'^{-1}(\text{Supp}_{B'} M') \cap \phi''^{-1}(\text{Supp}_{B''} M'').$$

(ii) En particulier, pour tout couple M, M' de A -modules de type fini, et tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ on a :

$$(a) \text{Supp}_A(M \otimes_A M') = \text{Supp}_A(M) \cap \text{Supp}_A(M').$$

$$(b) \text{Supp}_B(B \otimes_A M) = (\text{Spec } f)^{-1}(\text{Supp}_A M).$$

3.4.1. *Produit tensoriel de corps.* Si K est un corps non algébriquement clos, la description du produit tensoriel de deux K -algèbres fait en général intervenir les K -automorphismes des extensions algébriques de K ; voici une illustration :

Exemple 3.65. Soient K un corps, E une extension galoisienne de K de degré $d \in \mathbb{N}$, et G le groupe de Galois de E sur K . En vertu de la discussion précédente, pour tout $\sigma \in G$ on déduit un diagramme commutatif de K -algèbres

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{j} & E \\ j \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\quad} & E \otimes_K E \\ & \searrow Id_E & \downarrow \pi_\sigma \\ & & E \end{array}$$

où j est l'inclusion de K dans E . Explicitement, on a :

$$\pi_\sigma(a \otimes b) = a \cdot \sigma(b) \quad \forall a, b \in E.$$

Or, soit $e_1, \dots, e_d$ une base du K -espace vectoriel E ; on munit le produit tensoriel $E \otimes_K E$ de la structure “gauche” de E -espace vectoriel, *i.e.* la multiplication par un scalaire $e \in E$ est définie par

$$e \cdot (a \otimes b) := ea \otimes b \quad \forall a, b \in E.$$

Donc, $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_d$ est une base de $E \otimes_K E$ pour cette structure. On munit aussi $E \otimes_K E$ de la structure de E -algèbre “gauche”, dont le morphisme structural est $E \otimes_K j : E \rightarrow E \otimes_K E$ (telle que $e \mapsto e \otimes 1$ pour tout $e \in E$). Notons

$$\mathfrak{m}_\sigma := \text{Ker } \pi_\sigma \quad \forall \sigma \in G.$$

Soient $\sigma, \tau \in G$; montrons que $\mathfrak{m}_\sigma = \mathfrak{m}_\tau \Leftrightarrow \sigma = \tau$. En effet, d'un côté la propriété universelle du produit tensoriel donne : $\pi_\sigma = \pi_\tau \Leftrightarrow \sigma = \tau$. De l'autre côté, on a

$$\pi_\sigma(a \otimes 1) = a \quad \forall a \in E, \forall \sigma \in G$$

d'où

$$x - \pi_\sigma(x) \otimes 1 \in \mathfrak{m}_\sigma \quad \forall x \in E \otimes_K E, \forall \sigma \in G.$$

Si maintenant $\mathfrak{m}_\tau = \mathfrak{m}_\sigma$, on calcule

$$\pi_\tau(x) = \pi_\tau(\pi_\sigma(x) \otimes 1) + \pi_\tau(x - \pi_\sigma(x) \otimes 1) = \pi_\tau(\pi_\sigma(x) \otimes 1) = \pi_\sigma(x) \quad \forall x \in E \otimes_K E$$

i.e. $\pi_\sigma = \pi_\tau$, comme souhaité. Par le lemme chinois (lemme 1.60), on en déduit un homomorphisme surjectif de E -algèbres

$$\phi : E \otimes_K E \rightarrow \prod_{\sigma \in G} (E \otimes_K E) / \mathfrak{m}_\sigma = E^{|G|} \quad a \otimes b \mapsto (a \cdot \sigma(b) \mid \sigma \in G).$$

(le produit de d copies de E , indexées par les éléments de G). Mais ϕ est aussi une application E -linéaire de E -espaces vectoriels, pour la structure de E -espace vectoriel introduite ci-dessus; comme ces deux E -espaces vectoriels ont la même dimension d , l'homomorphisme ϕ doit être un isomorphisme de E -algèbres.

On voit en particulier que $\text{Spec } E \otimes_K E \supset \{\mathfrak{m}_\sigma \mid \sigma \in G\}$. Le prochain exercice montre que cette inclusion est en fait une égalité; donc on a une bijection canonique

$$\text{Gal}(E/K) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } E \otimes_K E.$$

Exercice 3.66. (i) Soient A_1 et A_2 deux anneaux, $A := A_1 \times A_2$ et pour $i = 1, 2$ notons $\pi_i : A \rightarrow A_i$ la projection. Si M est un A -module, montrer :

(a) Il existe un A_1 -module M' , un A_2 -module M'' et un isomorphisme A -linéaire

$$M \xrightarrow{\sim} M'_{[\pi_1]} \oplus M''_{[\pi_2]}.$$

(b) Si $N = N'_{[\pi_1]} \oplus N''_{[\pi_2]}$ est un deuxième A -module, toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ est la somme directe $f = f'_{[\pi_1]} \oplus f''_{[\pi_2]}$ d'une application A_1 -linéaire $f' : M' \rightarrow N'$ et une application A_2 -linéaire $f'' : M'' \rightarrow N''$.

(ii) Pour $i = 1, 2$, soit $\mathcal{T}_i$ la topologie de Zariski de $\text{Spec } A_i$. Montrer que les injections $\text{Spec}(\pi_i) : \text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } (A_1 \times A_2)$ induisent un homéomorphisme

$$\text{Spec } A_1 \sqcup \text{Spec } A_2 \xrightarrow{\sim} \text{Spec } (A_1 \times A_2)$$

où la topologie $\mathcal{T}$ de la *réunion disjointe* $\text{Spec } A_1 \sqcup \text{Spec } A_2$ est l'unique telle que :

— $\text{Spec } A_1, \text{Spec } A_2 \in \mathcal{T}$

— $\mathcal{T}$ induit sur $\text{Spec } A_i$ la topologie $\mathcal{T}_i$, via l'inclusion $\text{Spec}(\pi_i)$, pour $i = 1, 2$.

(iii) Réciproquement, soit A un anneau tel que $\text{Spec } A$ est la réunion disjointe $U_1 \sqcup U_2$ de deux parties ouvertes. Montrer qu'il existe des anneaux A_1, A_2 et un isomorphisme d'anneaux $\phi : A \xrightarrow{\sim} A_1 \times A_2$ tel que U_i (pour $i = 1, 2$) coïncide avec l'image de l'application $\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A$ induite par la projection

$$A \xrightarrow{\phi} A_1 \times A_2 \rightarrow A_i.$$

Exercice 3.67. On peut généraliser l'exemple 3.65 de la façon suivante. Soient K un corps, F une extension finie séparable de K de degré $d \in \mathbb{N}$, et E la clôture galoisienne de F (dans une clôture algébrique fixée $\overline{F}$ de F). On pose $G := \text{Gal}(E/K)$ et soit $H \subset G$ le sous-groupe des $\sigma \in G$ tels que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in F$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de E -algèbres

$$E \otimes_K F \xrightarrow{\sim} E^{|G/H|}$$

($E^{|G/H|}$ dénote le produit de d copies de E , indexées par l'ensemble quotient G/H).

Par contre, les extensions inséparables “ne changent pas le spectre”, comme déjà observé dans l'exercice 1.46(iv); en fait, on a :

Exemple 3.68. Soit $K := \mathbb{F}_p[T]$ et $E := \mathbb{F}_p[T^{1/p}] = K[X]/(X^p - T)$. On voit que

$$E \otimes_K E = E[X]/(X^p - T).$$

Or, $(T^{1/p} - X)^p = T - X^p = 0$, donc tout idéal premier de $E \otimes_K E$ contient $T^{1/p} - X$, i.e. $\text{Spec } E \otimes_K E = \text{Spec } E[X]/(T^{1/p} - X) = \text{Spec } E$.

Problème 3.69. Soient A_0 un anneau, $A_\bullet := (A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de A_0 -algèbres, A la colimite de $A_\bullet$, et $(j_\lambda^A : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel.

(i) Soient aussi B une A -algèbre de présentation finie, et M un B -module de présentation finie. Montrer qu'il existe $\lambda \in \Lambda$, une A_λ -algèbre B_λ de présentation finie, et un B_λ -module de présentation finie M_λ , avec des isomorphismes de A -algèbres : $A \otimes_{A_\lambda} B_\lambda \xrightarrow{\sim} B$, et de B -modules : $B \otimes_{B_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{\sim} M$.

(ii) Soient B_0 une A_0 -algèbre, M_0, N_0 deux B_0 -modules, et supposons que M_0 soit de présentation finie. Posons $B := A \otimes_{A_0} B_0$, et

$$B_\lambda := A_\lambda \otimes_{A_0} B_0 \quad M_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} M_0 \quad N_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} N_0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

et soit aussi $u : B \otimes_{B_0} M_0 \rightarrow B \otimes_{B_0} N_0$ une application B -linéaire. Montrer qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ et une application B_λ -linéaire $u_\lambda : M_\lambda \rightarrow N_\lambda$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} B \otimes_{B_\lambda} M_\lambda & \xrightarrow{B \otimes_{B_\lambda} u_\lambda} & B \otimes_{B_\lambda} N_\lambda \\ \phi_\lambda^M \downarrow & & \downarrow \phi_\lambda^N \\ B \otimes_{B_0} M_0 & \xrightarrow{u} & B \otimes_{B_0} N_0 \end{array}$$

où ϕ_λ^M et ϕ_λ^N sont les isomorphismes naturels de la remarque 3.15.

(iii) Soient B_0 et C_0 deux A_0 -algèbres, et supposons que B_0 soit de présentation finie. Posons $B := A \otimes_{A_0} B_0$, $C := A \otimes_{A_0} C_0$, et

$$B_\lambda := A_\lambda \otimes_{A_0} B_0 \quad C_\lambda := A_\lambda \otimes_{A_0} C_0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Soit aussi $f : B \rightarrow C$ un homomorphisme de A -algèbres. Montrer qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ et un homomorphisme de A_λ -algèbres $f_\lambda : B_\lambda \rightarrow C_\lambda$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} A \otimes_{A_\lambda} B_\lambda & \xrightarrow{A \otimes_{A_\lambda} f_\lambda} & A \otimes_{A_\lambda} C_\lambda \\ \psi_\lambda^B \downarrow & & \downarrow \psi_\lambda^C \\ B & \xrightarrow{f} & C. \end{array}$$

où ψ_λ^B et ψ_λ^C sont les isomorphismes naturels de l'exercice 3.63(ii).

(iv) Avec la notation de (ii) (resp. de (iii)), soit $u'_\lambda : M_\lambda \rightarrow N_\lambda$ une deuxième application B_λ -linéaire (resp. $f'_\lambda : B_\lambda \rightarrow C_\lambda$ un deuxième homomorphisme de A_λ -algèbres) telle que $(*)$ (resp. $(**)$) commute aussi avec $B \otimes_{B_\lambda} u_\lambda$ remplacé par $B \otimes_{B_\lambda} u'_\lambda$ (resp. avec $A \otimes_{A_\lambda} f_\lambda$ remplacé par $A \otimes_{A_\lambda} f'_\lambda$). Montrer qu'il existe $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, tel que

$$B_\mu \otimes_{B_\lambda} u_\lambda = B_\mu \otimes_{B_\lambda} u'_\lambda \quad (\text{resp. tel que } A_\mu \otimes_{A_\lambda} f_\lambda = A_\mu \otimes_{A_\lambda} f'_\lambda).$$

(v) Avec la notation de (ii) (resp. de (iii)), soient M_0 et N_0 des B_0 -modules de présentation finie (resp. soient B_0 et C_0 des A_0 -algèbres de présentation finie). Montrer que les B -modules $B \otimes_{B_0} M$ et $B \otimes_{B_0} N$ sont isomorphes (resp. les A -algèbres B et C sont isomorphes) $\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que les B_λ -modules M_λ et N_λ sont isomorphes (resp. tel que les A_λ -algèbres B_λ et C_λ sont isomorphes).

3.4.2. Produits tensoriels et localisation d'algèbres. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $S \subset A$ une partie multiplicative, et $j_A : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation. On a vu que, pour tout anneau D , la donnée d'un morphisme d'anneaux $h : S^{-1}A \otimes_A B \rightarrow D$ équivaut à celle d'un couple de morphismes d'anneaux $(\phi : S^{-1}A \rightarrow D, \psi : B \rightarrow D)$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ j_A \downarrow & & \downarrow \psi \\ S^{-1}A & \xrightarrow{\quad} & S^{-1}A \otimes_A B \\ & \searrow \phi & \downarrow h \\ & & D. \end{array}$$

Mais ϕ équivaut à la donnée d'un homomorphisme $i : A \rightarrow D$ tel que $i(S) \subset D^\times$; à savoir, ϕ correspond à l'homomorphisme $i := \phi \circ j_A = \psi \circ f$. Donc, h équivaut à la donnée d'un homomorphisme $\psi : B \rightarrow D$ avec $\psi(f(S)) \subset D^\times$; cette dernière, à son tour, équivaut à celle d'un morphisme $f(S)^{-1}B \rightarrow D$. Ainsi, $S^{-1}A \otimes_A B$ et $f(S)^{-1}B$ sont solutions

universelles du même problème de factorisation, et par suite il existe un isomorphisme de B -algèbres unique

$$S^{-1}A \otimes_A B \xrightarrow{\sim} f(S)^{-1}B \quad \frac{a}{s} \otimes b \mapsto \frac{f(a) \cdot b}{f(s)}.$$

Dans la suite, on écrira souvent $S^{-1}B$ au lieu de $f(S)^{-1}B$. En particulier, si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, la partie $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$ est multiplicative, et on pose

$$B_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}B \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B.$$

En prenant $B := A/\mathfrak{p}$, on obtient une identification naturelle

$$A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} S_{\mathfrak{p}}^{-1}(A/\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}).$$

Pour un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ quelconque et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, au vu de l'exercice 3.61, de l'exemple 3.62, de la remarque 1.45(i) et de la proposition 3.31, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Spec } B \otimes_A k(\mathfrak{p}) &= \text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{q}\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{p} \subset f^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ et } \mathfrak{q} \cap f(S_{\mathfrak{p}}) = \emptyset\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})\}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a une identification naturelle d'espaces topologiques :

$$(*) \quad \boxed{\text{Spec } B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} (\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A.}$$

Exemple 3.70. Soient $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier, $n \in \mathbb{N}$, et $P_1, \dots, P_k$ une suite de polynômes de $A[X_1, \dots, X_n]$; posons $B := A[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_k)$. Compte tenu de l'exercice 3.63(iii), on déduit un isomorphisme naturel de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres

$$B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})[X_1, \dots, X_n]/(\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_k)$$

où $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_k \in k(\mathfrak{p})[X_1, \dots, X_n]$ sont les images de $P_1, \dots, P_k$.

Remarque 3.71. (i) Dans la situation du §3.4.2, soit $\pi_{(\mathfrak{p})} : B \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ l'homomorphisme tel que $b \mapsto b \otimes 1$; l'application continue

$$\text{Spec } \pi_{(\mathfrak{p})} : \text{Spec } B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Spec } B$$

est la composition de $(*)$ avec l'inclusion $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Spec } B$. En effet, $\pi_{(\mathfrak{p})}$ est la composition de la localisation $B \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ avec la projection $B_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \simeq B \otimes_A k(\mathfrak{p})$, donc l'assertion découle de la remarque 1.45(i) et de l'exemple 3.32(ii).

(ii) Considérons un diagramme commutatif d'anneaux, et le diagramme commutatif induit d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } B' & \xrightarrow{\phi := \text{Spec } h} & \text{Spec } B \\ \text{Spec } f' \downarrow & & \downarrow \text{Spec } f \\ \text{Spec } A' & \xrightarrow{\text{Spec } g} & \text{Spec } A. \end{array}$$

Soient aussi $\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A'$, $\mathfrak{p} := g^{-1}(\mathfrak{p}')$, et $g_{(\mathfrak{p}')} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}')$ l'extension de corps résiduels induite par g . Evidemment ϕ se restreint en une application continue

$$\phi_{(\mathfrak{p}')} : (\text{Spec } f')^{-1}(\mathfrak{p}') \rightarrow (\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$$

et les homomorphismes de A -algèbres $k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{x \mapsto 1 \otimes g_{(\mathfrak{p}')} (x)} B' \otimes_{A'} k(\mathfrak{p}') \xleftarrow{h(b) \otimes 1 \leftarrow b} B$ induisent un homomorphisme de A -algèbres $h_{(\mathfrak{p}')} : B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow B' \otimes_{A'} k(\mathfrak{p}')$ tel que $b \otimes x \mapsto h(b) \otimes g_{(\mathfrak{p}')} (x)$, faisant commuter le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ \pi_{(\mathfrak{p})} \downarrow & & \downarrow \pi_{(\mathfrak{p}')} \\ B \otimes_A k(\mathfrak{p}) & \xrightarrow{h_{(\mathfrak{p}')}} & B' \otimes_{A'} k(\mathfrak{p}'). \end{array}$$

Au vu de (i), on déduit que l'homéomorphisme $(*)$ et l'homéomorphisme correspondant $\text{Spec } B' \otimes_{A'} k(\mathfrak{p}') \simeq (\text{Spec } f')^{-1}(\mathfrak{p}')$ identifient $\phi_{(\mathfrak{p}')}$ avec $\text{Spec } h_{(\mathfrak{p}')}$.

Exercice 3.72. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow A'$ deux homomorphismes d'anneaux et $B' := A' \otimes_A B$; on dénote par T et T' les images des applications continues

$$\text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A \quad \text{et} \quad \text{Spec } (A' \otimes_A f) : \text{Spec } B' \rightarrow \text{Spec } A'.$$

Montrer que $T' = (\text{Spec } g)^{-1}(T)$. En particulier, si $\text{Spec } f$ est surjective, il en est de même pour $\text{Spec } (A' \otimes_A f)$. (Voir l'exercice 5.78 pour une généralisation.)

3.5. Modules plats et algèbres plates.

Définition 3.73. (i) Soit P un A -module. On dit que P est *plat* (resp. *fidèlement plat*) si le foncteur $P \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ est exact (resp. exact et fidèle).

(ii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que f est *plat* (resp. *fidèlement plat*) si $B_{[f]}$ est un A -module plat (resp. fidèlement plat). Dans ce cas, on dit aussi que B est une *A -algèbre plate* (resp. *fidèlement plate*).

Remarque 3.74. (i) Au vu de la proposition 2.102(ii), le corollaire 3.43 et la discussion du §3.3.2, la A -algèbre $S^{-1}A$ est plate, pour toute partie $S \subset A$.

(ii) Les propositions 2.102(ii) et 3.11 impliquent aussi aisément qu'un A -module P est plat si et seulement si le foncteur $P \otimes_A -$ transforme applications A -linéaires injectives en applications A -linéaires injectives.

(iii) Si $(P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille de A -modules, la somme directe $P := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ est plate si et seulement si chaque P_λ est plat. En effet, si $\phi : N' \rightarrow N$ est une application A -linéaire injective, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_A N' & \xrightarrow{P \otimes_A \phi} & P \otimes_A N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda \otimes_A N') & \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda \otimes_A \phi)} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda \otimes_A N) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes de l'exercice 3.6(iii). Evidemment les applications $P_\lambda \otimes_A \phi$ sont toutes injectives si et seulement s'il en est de même pour leur somme directe, et cette dernière condition équivaut à l'injectivité de $P \otimes_A \phi$. L'assertion découle alors de (ii).

(iv) En particulier, tout A -module libre est plat.

(v) Par exemple, pour tout ensemble Λ , la A -algèbre de polynômes $A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ est plate (voir l'exemple 2.6), car son A -module sous-jacent est libre.

(vi) L'associativité du produit tensoriel implique aussi immédiatement que si P et Q sont deux A -modules plats, $P \otimes_A Q$ est plat. Plus généralement, si B est une A -algèbre, Q un A -module plat, P un B -module plat, la proposition 3.18(i) implique que $P \otimes_A Q$ est un B -module plat. En particulier, si $f : A \rightarrow C$ est un homomorphisme plat d'anneaux, l'homomorphisme induit $B \otimes_A f : B \rightarrow B \otimes_A C$ est plat pour toute A -algèbre B .

Exercice 3.75. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, M un A -module, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Si B est une A -algèbre plate, alors $\text{Ann}_{B \otimes_A M}(IB) = B \otimes_A \text{Ann}_M(I)$.
- (ii) Si M est un A -module plat, alors $\text{Ann}_{B \otimes_A M}(IB) = \text{Ann}_B(I) \otimes_A M$.
- (iii) Si M est plat et si $a \in A$ est un élément régulier, alors a est M -régulier.
- (iv) Si A est intègre et si $B \neq 0$ est une A -algèbre plate, alors f est injectif.

Exercice 3.76. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux.

(i) Soient M, P deux B -modules; supposons que $M_{[f]}$ soit un A -module plat, et que P soit un B -module plat. Montrer que $(P \otimes_B M)_{[f]}$ est un A -module plat. En particulier, si f est plat, et si P est un B -module plat, $P_{[f]}$ est un A -module plat.

(ii) De même, si f et g sont plats, alors $g \circ f : A \rightarrow C$ est une A -algèbre plate.

(iii) Généraliser la remarque 3.74(iii) de la façon suivante. Soit $P_\bullet := (P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de A -modules plats, indexé par un ensemble partiellement ordonné filtrant Λ . Montrer que la limite directe du système $P_\bullet$ est un A -module plat.

Proposition 3.77. *Soient A un anneau, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre, et M un B -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $M_{[f]}$ est un A -module plat.
- (b) $(M_{\mathfrak{p}})_{[f]}$ est un A -module plat pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$.
- (c) $(M_{\mathfrak{m}})_{[f]}$ est un A -module plat pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$.

Démonstration. Compte tenu de l'isomorphisme $B_{\mathfrak{p}}$ -linéaire $M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}} \otimes_B M$, on voit que (a) $\Rightarrow$ (b) avec l'exercice 3.76(i), et (b) $\Rightarrow$ (c) est trivial. Supposons que (c) soit vérifiée, et soit $\phi : N \rightarrow N'$ un homomorphisme injectif de A -modules ; on doit montrer que l'application B -linéaire $M \otimes_A \phi : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'$ est injective, et d'après la proposition 3.55, il suffit de vérifier que $(M \otimes_A \phi)_{\mathfrak{m}} : (M \otimes_A N)_{\mathfrak{m}} \rightarrow (M \otimes_A N')_{\mathfrak{m}}$ est injective pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$. Mais la proposition 3.18(i) fournit des isomorphismes $B_{\mathfrak{m}}$ -linéaires naturels :

$$(M \otimes_A N)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{m}} \otimes_B (M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} (B_{\mathfrak{m}} \otimes_A M) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{m}} \otimes_A N$$

et de même $(M \otimes_A N')_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{m}} \otimes_A N'$. Ces isomorphismes identifient $(M \otimes_A \phi)_{\mathfrak{m}}$ avec l'application $B_{\mathfrak{m}}$ -linéaire $M_{\mathfrak{m}} \otimes_A \phi$, et cette dernière est injective pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$, car par hypothèse $M_{\mathfrak{m}}$ est un A -module plat. $\square$

Proposition 3.78. *Soit P un A -module. Alors P est plat si et seulement si pour tout idéal $I \subset A$ de type fini, l'inclusion $I \rightarrow A$ induit une injection A -linéaire*

$$\phi_I : P \otimes_A I \rightarrow P \quad x \otimes a \mapsto ax.$$

Démonstration. L'isomorphisme naturel $P \xrightarrow{\sim} P \otimes_A A$ identifie ϕ_I avec $P \otimes_A i$, où $i : I \rightarrow A$ est l'inclusion, donc si P est plat l'application ϕ_I est injective. Réciproquement, supposons que ϕ_I soit injective pour tout idéal I de A de type fini, et soit $j : M' \rightarrow M$ l'inclusion d'un sous-module de M ; par la remarque 3.74(ii) il suffit de montrer que $P \otimes_A j$ est injective.

Affirmation 3.79. Si ϕ_I est injective pour tout idéal $I \subset A$ de type fini, alors ϕ_I est injective pour tout idéal I de A .

Preuve : Soit $I \subset A$ un idéal arbitraire, et $x \in \text{Ker } \phi_I$; écrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i$ pour certains $x_1, \dots, x_n \in P$ et $a_1, \dots, a_n \in I$, et notons par $J \subset I$ le sous-idéal engendré par $a_1, \dots, a_n$. Evidemment x est dans l'image de l'application A -linéaire $\phi_{J,I} : P \otimes_A J \rightarrow P \otimes_A I$ induite par l'inclusion $J \rightarrow I$; on a $\phi_I \circ \phi_{J,I} = \phi_J$, et comme ϕ_J est injective par hypothèse, on déduit que $x = 0$, d'où l'assertion. $\diamond$

Affirmation 3.80. On peut supposer que M soit de type fini.

Preuve : Ecrivons M comme la colimite du système filtrant $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses sous-modules de type fini, ordonnés par inclusion ; on pose $M'_\lambda := M' \cap M_\lambda$, de sorte que M' est la colimite du système filtrant $(M'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $j_\lambda : M'_\lambda \rightarrow M_\lambda$ la restriction de j ; le complexe $\Sigma_\bullet := (0 \rightarrow M' \xrightarrow{j} M)$ est alors la colimite du système filtrant de complexes

$$(\Sigma_\bullet^\lambda := (0 \rightarrow M'_\lambda \xrightarrow{j_\lambda} M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$$

où les morphismes de transition $\Sigma_\bullet^\mu \rightarrow \Sigma_\bullet^\lambda$ sont induits par les inclusions $M'_\mu \rightarrow M'_\lambda$ et $M_\mu \rightarrow M_\lambda$, pour tout $\mu \leq \lambda$ de Λ . On sait que les colimites de $\mathcal{C}(A)$ se calculent terme à terme (voir l'exercice 2.98(ii)) et d'autre part le foncteur $P \otimes_A -$ commute avec les colimites (proposition 2.49(ii)), donc $P \otimes_A \Sigma_\bullet$ est la colimite du système filtrant $(P \otimes_A \Sigma_\bullet^\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$; de plus, les foncteurs H_i commutent avec les limites directes filtrantes (voir l'exercice 2.100). On est donc ramené à montrer l'injectivité de $P \otimes_A j_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'où l'assertion. $\diamond$

Soit donc M de type fini, et supposons d'abord que M soit libre de rang $r \in \mathbb{N}$; on raisonne par récurrence sur r : si $r = 1$, on a un isomorphisme de A -modules $A \xrightarrow{\sim} M$ qui identifie le sous-module M' de M à un idéal $I \subset A$, et alors l'affirmation 3.79 nous dit que $P \otimes_A j$ est injective, comme souhaité. Ensuite, soit $r > 1$, et supposons que $P \otimes_A j'$ soit injective, pour toute inclusion $j' : N' \rightarrow N$ d'un A -module N' dans un A -module libre de rang $< r$. Soit alors $N \subset M$ un facteur direct, libre de rang $r - 1$, de sorte que $Q := M/N$ est aussi libre de rang 1, et M est isomorphe à la somme directe $N \oplus Q$; on pose $N' := M' \cap N$, et on dénote par $\pi : M \rightarrow Q$ la projection. Il vient un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes

$$\mathcal{D} \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi(M') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j' & & \downarrow j & & \downarrow j'' \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\pi} & Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

où j, j', j'' sont les inclusions. Après tensorisation avec P , on déduit un diagramme commutatif $P \otimes_A \mathcal{D}$; le foncteur additif $P \otimes_A -$ commute avec les biproduits (problème 2.76(i)), donc la ligne horizontale en bas de $P \otimes_A \mathcal{D}$ est toujours exacte, et celle du haut est exacte à droite, car $P \otimes_A -$ est exact à droite (proposition 2.102(i)). Par hypothèse de récurrence, $P \otimes_A j'$ et $P \otimes_A j''$ de $P \otimes_A \mathcal{D}$ sont injectives; par le lemme du serpent, il s'ensuit que $P \otimes_A j$ est injective, comme souhaité.

En dernier lieu, soit M un A -module de type fini arbitraire; on peut trouver un A -module libre L de rang fini avec une surjection A -linéaire $f : L \rightarrow M$, et on pose $L' := f^{-1}(M')$ et $K := \text{Ker } f$. Il vient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\mathcal{D}' \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow j' & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

où j' est l'inclusion. Par le cas précédent, la ligne horizontale en bas de $P \otimes_A \mathcal{D}'$ est exacte, et celle du haut est exacte à droite; de plus, $\text{Ker } P \otimes_A j' = 0$, encore par le cas précédent. Par le lemme du serpent, il s'ensuit que $\text{Ker } P \otimes_A j = 0$, et la preuve est achevée. $\square$

Exercice 3.81. (i) Soit P un A -module. Montrer que P est plat si et seulement s'il satisfait la condition suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute relation linéaire

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in A \text{ et } x_1, \dots, x_n \in P$$

il existe $y_1, \dots, y_m \in P$ et des éléments $(b_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ de A avec

$$(*) \quad b_{i1} y_1 + \cdots + b_{im} y_m = x_i \quad \text{et} \quad b_{1j} a_1 + \cdots + b_{nj} a_n = 0 \quad \forall i \leq n, \forall j \leq m.$$

(ii) Soient A un anneau intègre et principal, P un A -module. Montrer que P est plat si et seulement s'il est sans torsion (voir §1.1.4).

Théorème 3.82. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local, P un A -module plat. On suppose que P soit de type fini, ou que $\mathfrak{m}$ soit nilpotent. Alors P est un A -module libre.

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_d \in P$ dont les images dans $P/\mathfrak{m}P = k(\mathfrak{m}) \otimes_A P$ sont une famille libre de ce dernier $k(\mathfrak{m})$ -espace vectoriel. On va d'abord montrer par récurrence sur d , que $x_1, \dots, x_d$ est une famille libre de P , i.e. pour toute relation A -linéaire :

$$(*) \quad a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = 0 \quad \text{avec } a_1, \dots, a_d \in A$$

on a $a_1 = \cdots = a_d = 0$. Pour $d = 1$, soit donc $ax_1 = 0$ pour quelque $a \in A$; d'après l'exercice 3.81(i), il existe $y_1, \dots, y_m \in P$ (pour quelque $m \in \mathbb{N}$) et $b_1, \dots, b_m \in A$ tel que $x_1 = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ et $b_j a = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$. Comme $x_1 \notin \mathfrak{m}P$, on doit avoir $b_i \notin \mathfrak{m}$ pour au moins un indice i ; par suite $b_i \in A^\times$, d'où $a = 0$, comme souhaité. Ensuite, soit $d > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute famille $x'_1, \dots, x'_{d-1}$

d'éléments de P dont l'image est libre dans $P/\mathfrak{m}P$. Etant donnée une relation $(*)$, d'après l'exercice 3.81(i) on trouve $y_1, \dots, y_m \in P$ et des éléments $(b_{ij} \mid i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, m)$ de A tels que $x_i = \sum_{h=1}^m b_{ih}y_h$ et $\sum_{k=1}^d b_{kj}a_k = 0$ pour tous $i = 1, \dots, d$ et $j = 1, \dots, m$. A nouveau, comme $x_d \notin \mathfrak{m}P$, il existe $h \leq m$ tel que $b_{dh} \in A^\times$; il vient

$$a_d = -b_{dh}^{-1} \cdot (b_{1h}a_1 + \dots + b_{d-1h}a_{d-1}).$$

Posons $c_k := -b_{kh}/b_{dh} \in A$ pour $k = 1, \dots, d-1$; on déduit la relation A -linéaire

$$a_1(x_1 + c_1x_d) + \dots + a_{d-1}(x_{d-1} + c_{d-1}x_d) = 0 \quad \text{dans } P.$$

Mais évidemment l'image dans $P/\mathfrak{m}P$ de la suite $x_1 + c_1x_d, \dots, x_{d-1} + c_{d-1}x_d$ est une famille libre ; par hypothèse de récurrence, on a donc $a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$, d'où $a_dx_d = 0$, et par le cas précédent on conclut que $a_d = 0$, comme souhaité.

Choisissons maintenant un système $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'éléments de P dont les images dans $P/\mathfrak{m}P$ sont une base de ce $k(\mathfrak{m})$ -espace vectoriel. Par la proposition 3.51 on sait que $x_\bullet$ est un système de générateurs de P ; de l'autre côté, par ce qui précède la famille $x_\bullet$ est libre dans P . Donc $P \simeq A^{(\Lambda)}$ et $x_\bullet$ est une base de P . $\square$

Problème 3.83. (i) Soient A un anneau, M un A -module, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre. Avec la notation du §3.2.7, montrer les assertions suivantes :

- (a) M est fidèlement plat $\Leftrightarrow M$ est plat et $M(\mathfrak{m}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.
- (b) Si f est fidèlement plat, alors $f \otimes_A M : M \rightarrow B \otimes_A M$ est injectif.
- (c) f est fidèlement plat $\Leftrightarrow f$ est plat et $\text{Spec } f$ est surjective $\Rightarrow f$ est injectif.
- (d) Si f est fidèlement plat, alors $A^\times = f^{-1}(B^\times)$.

(ii) Supposons que f soit fidèlement plat, et soit C une A -algèbre. Montrer que :

- (a) L'homomorphisme $C \otimes_A f : C \rightarrow C \otimes_A B$ est fidèlement plat.
- (b) M est plat (resp. de type fini, resp. de présentation finie) si et seulement si le B -module $B \otimes_A M$ est plat (resp. de type fini, resp. de présentation finie).
- (c) C est de type fini (resp. de présentation finie) si et seulement si la B -algèbre $B \otimes_A C$ est de type fini (resp. de présentation finie).
- (d) Un homomorphisme $\phi : M \rightarrow M'$ de A -modules est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) si et seulement s'il en est de même pour $B \otimes_A \phi$.

(iii) Soient $(A, \mathfrak{m}_A)$ et $(B, \mathfrak{m}_B)$ deux anneaux locaux ; on dit que l'homomorphisme $f : A \rightarrow B$ est *local* si $f^{-1}\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A$. Montrer qu'un homomorphisme plat d'anneaux locaux est fidèlement plat si et seulement s'il est local.

On peut maintenant démontrer une importante propriété topologique des homomorphismes plats, déjà annoncée dans l'introduction. Pour l'énoncer, faisons la définition suivante. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux ; on dit que $\text{Spec } f$ est *générisante* si pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ et tout $\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$ avec $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q})$ il existe $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B$ tel que $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ et $f^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$. (On étudiera cette notion dans le contexte plus général des espaces spectraux : voir la définition 4.61(ii).)

Théorème 3.84. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On a :

- (i) S'il existe un B -module M de type fini avec $\text{Supp}_B M = \text{Spec } B$, et tel que $M_{[f]}$ soit un A -module plat, l'application continue $\text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est *générisante*.
- (ii) En particulier, si f est plat, $\text{Spec } f$ est *générisante*.

Démonstration. L'assertion (ii) suit de (i), car si f est plat, on peut prendre $M := B$. Pour (i), soient $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ et $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } A$; notons $j_{\mathfrak{p}} : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, $j_{\mathfrak{q}} : B \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ les localisations, et $f_{\mathfrak{q}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $f_{\mathfrak{q}} \circ j_{\mathfrak{p}} = j_{\mathfrak{q}} \circ f$;

on déduit un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} B_q & \xrightarrow{\mathrm{Spec} j_q} & \mathrm{Spec} B \\ \mathrm{Spec} f_q \downarrow & & \downarrow \mathrm{Spec} f \\ \mathrm{Spec} A_p & \xrightarrow{\mathrm{Spec} j_p} & \mathrm{Spec} A. \end{array}$$

Rappelons que $\mathrm{Spec} j_p$ identifie $\mathrm{Spec} A_p$ avec $\{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec} A \mid \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}\}$, et de même pour $\mathrm{Spec} j_q$ (exemple 3.32(iii)) ; de plus, M_q est un B_q -module de type fini dont le support est $\mathrm{Spec} B_q$ (remarque 3.58(iii)), et $(M_p)_{[f_p]}$ est un A_p -module plat (remarque 3.74(vi)), donc de même pour $(M_q)_{[f_q]} \xrightarrow{\sim} (B_q \otimes_{B_p} M_p)_{[f_q]}$, car B_q est un B_p -module plat (remarque 3.74(i) et exercice 3.76(i)). Quitte à remplacer A, B, f et M par A_p, B_q, f_q et M_q , on peut ainsi supposer que $(A, \mathfrak{m}_A)$ et $(B, \mathfrak{m}_B)$ soient des anneaux locaux et que f soit un homomorphisme local, et on est ramené à vérifier que $\mathrm{Spec} f$ est *surjective* dans ce cas.

Or, d'après le lemme de Nakayama on a $M/\mathfrak{m}_B M \neq 0$, donc aussi $M_{[f]}(\mathfrak{m}_A) = (M/\mathfrak{m}_A M)_{[f]} \neq 0$. D'après le problème 3.83(i.a), il s'ensuit que $M_{[f]}$ est un A -module fidèlement plat, et alors $M_{[f]}(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \otimes_A M_{[f]} \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$ (voir la solution du problème 3.83(i.a)) ; mais $k(\mathfrak{p}) \otimes_A M$ est un $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ -module, donc $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$. Par suite, $\mathrm{Spec} k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \neq \emptyset$ (théorème 1.34), et ainsi $(\mathrm{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$ (voir §3.4.2). $\square$

3.5.1. Le théorème de Govorov-Lazard. Le dernier résultat important de cette leçon est un théorème dû indépendamment à V.E. Govorov [33] et D. Lazard [50] que l'on peut voir comme une caractérisation purement catégorique des A -modules plats (car les modules libres sont à leur tour caractérisés par des propriétés universelles : voir l'exemple 2.5). Je suis la présentation de [50], agrémentée par quelques observations tirées de [21, Sec. 6.3].

Lemme 3.85. *Soit P un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *P est un A -module plat.*
- (b) *Pour tout A -module de présentation finie M et toute application A -linéaire $f : M \rightarrow P$ il existe un A -module L libre de rang fini et des applications A -linéaires $g : M \rightarrow L$ et $h : L \rightarrow P$ telles que $f = h \circ g$.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : On peut supposer que $M = L_1/(Ax_1 + \cdots + Ax_s)$ pour un A -module libre L_1 de rang fini et une suite $x_1, \dots, x_s$ d'éléments de L_1 ; on dénote par $\pi : L_1 \rightarrow M$ la projection et on pose $\phi_1 := f \circ \pi$. Il suffit d'exhiber un A -module libre L de rang fini et des applications A -linéaires $g_1 : L_1 \rightarrow L$, $h : L \rightarrow P$ avec $x_1, \dots, x_s \in \mathrm{Ker} g_1$ et telles que $\phi_1 = h \circ g_1$; en effet, dans ce cas g_1 se factorise à travers une application A -linéaire $g : M \rightarrow L$ et on aura $f = h \circ g$. On raisonne par récurrence sur s . Si $s = 0$, on a $L = M$ et on prend $g := \mathrm{Id}_L$, $h := f$.

Ensuite, soit $s > 0$, et on suppose que pour tout A -module libre L_2 de rang fini, toute application A -linéaire $\phi_2 : L_2 \rightarrow P$ et tout système $x'_1, \dots, x'_{s-1}$ d'éléments de $\mathrm{Ker} \phi_2$, il existe des homomorphismes $g_2 : L_2 \rightarrow L$ et $h : L \rightarrow P$ de A -modules tels que $\phi_2 = h \circ g_2$, avec L libre de rang fini et $x'_1, \dots, x'_{s-1} \in \mathrm{Ker} g_2$. Or, soit $e_1, \dots, e_n$ une base de L_1 , et disons que $x_s = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in A$; il vient $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \phi_1(e_i) = 0$ dans P , et d'après l'exercice 3.81(i) on trouve alors $y_1, \dots, y_m \in P$ et des éléments $(b_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ de A tels que $\phi_1(e_i) = \sum_{h=1}^m b_{ih} y_h$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\sum_{k=1}^n b_{kj} a_k = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$. On pose $L_2 := A^m$ et on dénote par $e'_1, \dots, e'_m$ la base canonique de L_2 ; on définit des applications $\psi : L_1 \rightarrow L_2$ et $\phi_2 : L_2 \rightarrow P$ par :

$$\psi(e_i) := b_{i1}e'_1 + \cdots + b_{im}e'_m \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \phi_2(e'_j) := y_j \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Une simple inspection montre que $\phi_2 \circ \psi = \phi_1$, et donc $\psi(x_1), \dots, \psi(x_{s-1}) \in \mathrm{Ker} \phi_2$. De plus, on voit aisément que $\psi(x_s) = 0$. Par hypothèse de récurrence, ϕ_2 est la composition d'applications A -linéaires $g_2 : L_2 \rightarrow L$ et $h : L \rightarrow P$ avec L libre de rang fini et

$\psi(x_1), \dots, \psi(x_{s-1}) \in \text{Ker } g_2$. Si l'on pose $g_1 := g_2 \circ \psi$, on a finalement $x_1, \dots, x_s \in \text{Ker } g_1$ et $\phi_1 = h \circ g_1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soient $x_1, \dots, x_n \in P$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ deux suites finies avec $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ dans P . Notons par $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n , et posons $x := \sum_{i=1}^n a_i e_i \in A^n$; on considère l'application A -linéaire $\phi : A^n \rightarrow P$ telle que $\phi(e_i) := x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Evidemment $\phi(x) = 0$, donc ϕ se factorise à travers la projection $\pi : A^n \rightarrow M := A^n/Ax$ et une unique application A -linéaire $f : M \rightarrow P$. Par hypothèse, il existe un A -module libre L de rang $m \in \mathbb{N}$ tel que f soit la composition d'applications A -linéaires $g : M \rightarrow L$ et $h : L \rightarrow P$; soit $e'_1, \dots, e'_m$ une base de L . Pour tout $i \leq n$ on a donc $b_{i1}, \dots, b_{im} \in A$ tels que $g \circ \pi(e_i) = \sum_{j=1}^m b_{ij} e'_j$; soit aussi $y_j := h(e'_j)$ pour tout $j \leq m$. Il vient $\sum_{h=1}^m b_{ih} y_h = x_i$ pour tout $i \leq n$, et comme $x \in \text{Ker}(\pi)$, on a d'autre part $\sum_{k=1}^n b_{kj} a_k = 0$ pour tout $j \leq m$. Au vu de l'exercice 3.81(i), P alors est plat. $\square$

Théorème 3.86. (Govorov-Lazard) *Soit P un A -module. Alors P est plat si et seulement s'il est la colimite d'un système filtrant de A -modules libres de rang fini.*

Démonstration. La condition est suffisante, au vu de l'exercice 3.76(iii), car tout A -module libre est plat (remarque 3.74(iv)). Pour la réciproque, considérons d'abord un A -module M quelconque; on pose $E := M \times \mathbb{N}$, on dénote par $(e_{m,n} \mid (m,n) \in E)$ la base canonique de $A^{(E)}$, et soit $\phi : A^{(E)} \rightarrow M$ l'application A -linéaire telle que $e_{m,n} \mapsto m$ pour tout $(m,n) \in E$. On dénote par $\mathcal{F}_M$ l'ensemble des couples (I, S) constitués d'une partie finie $I \subset E$ et d'un sous-module $S \subset A^I \cap \text{Ker } \phi$ de type fini, et on munit $\mathcal{F}_M$ de l'ordre partiel tel que $(I, S) \geq (I', S')$ si et seulement si $I' \subset I$ et $S' \subset S$. Evidemment $(\mathcal{F}_M, \geq)$ est filtrant, et on considère le système filtrant de A -modules $(A^I/S \mid (I, S) \in \mathcal{F}_M)$, dont les morphismes de transition $A^{I'}/S' \rightarrow A^I/S$ sont les applications A -linéaires induites par l'inclusion $A^{I'} \subset A^I$, pour $(I', S') \leq (I, S)$. On a de plus un co-cône $\phi_\bullet := (\phi_{(I,S)} : A^I/S \rightarrow M \mid (I, S) \in \mathcal{F}_M)$, où chaque $\phi_{(I,S)}$ est induit par la restriction $A^I \rightarrow M$ de ϕ . Compte tenu de l'exercice 2.31(iii) on voit aisément que le co-cône $\phi_\bullet$ est universel. Soit maintenant $\mathcal{G}_M \subset \mathcal{F}_M$ la partie constituée des couples (I, S) tels que A^I/S est un A -module libre (donc, de rang fini); au vu de l'exercice 2.35, on est ramené à montrer :

Affirmation 3.87. Si P est un A -module plat, $\mathcal{G}_P$ est une partie cofinale de $\mathcal{F}_P$.

Preuve : Soit $(I, S) \in \mathcal{F}_P$ et pour tout $(m, n) \in I$ soit $\bar{e}_{m,n} \in A^I/S$ l'image de l'élément $e_{m,n}$ de la base canonique de A^I . D'après le lemme 3.85, il existe un A -module libre L de rang $r \in \mathbb{N}$ et des applications A -linéaires $\nu : A^I/S \rightarrow L$, $\omega : L \rightarrow P$ telles que $\phi_{(I,S)} = \omega \circ \nu$. Choisissons une base $\mathcal{B} := \{l_1, \dots, l_r\}$ de L et une partie $I' := \{(m_1, n_1), \dots, (m_r, n_r)\} \subset (P \times \mathbb{N}) \setminus I$ de cardinalité r telle que $m_i = \omega(l_i)$ pour $i = 1, \dots, r$, et soit $\tau : I' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ la bijection telle que $\tau(m_i, n_i) := l_i$ pour $i = 1, \dots, r$. On pose $J := I \cup I'$ et on considère la surjection A -linéaire

$$\psi : A^J \rightarrow L \quad e_{m,n} \mapsto \begin{cases} \nu(\bar{e}_{m,n}) & \text{si } (m,n) \in I \\ \tau(m,n) & \text{si } (m,n) \in I'. \end{cases}$$

Posons aussi $T := \text{Ker } \psi$; par inspection directe, on voit que $S \subset T$, et T est un sous-module de type fini de A^J , par l'exercice 2.110(iv). De plus, on a $\omega \circ \psi = \phi_{|A^J}$, donc $T \subset \text{Ker } \phi$, i.e. $(J, T) \in \mathcal{G}_P$ et $(J, T) \geq (I, S)$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 3.88. Ce résultat est notamment utile dans la situation suivante. Soit $F : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ un foncteur qui commute avec les limites directes filtrantes; si l'on sait montrer que F transforme A -modules libres en B -modules plats, on déduira plus généralement grâce au théorème 3.86 que F transforme A -modules plats en B -modules plats. Voici quelques applications :

Problème 3.89. (Algèbres symétriques et algèbres tensorielles) Soit A un anneau (commutatif) ; considérons la catégorie

$$A - \text{AlgAss}$$

des A -algèbre associatives unitaires $(B, f : A \rightarrow B)$ telles que $f(A)$ soit contenu dans le centre $Z(B)$ de B (voir le §3.4 et la remarque 1.14(ii)) ; les morphismes de A -algèbres associatives unitaires sont définis comme dans le cas des A -algèbres commutatives (voir §1.1.1). On a deux foncteurs d'oubli évidents

$$F : A - \text{Alg} \rightarrow A - \text{Mod} \quad G : A - \text{AlgAss} \rightarrow A - \text{Mod}$$

qui associent à toute A -algèbre commutative (resp. à toute A -algèbre associative unitaire) son A -module sous-jacent.

(i) Montrer que F et G admettent des adjoints à gauche, que l'on notera

$$\text{Sym}_A^\bullet : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Alg} \quad \text{Tens}_A^\bullet : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{AlgAss}.$$

Pour tout A -module M , on appelle $\text{Sym}_A^\bullet(M)$ la A -algèbre symétrique et $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ la A -algèbre tensorielle associée à M .

(ii) Montrer que les foncteurs F et G commutent avec les colimites filtrantes.

(iii) Soit P un A -module plat ; montrer que $\text{Sym}_A^\bullet(P)$ est une A -algèbre plate, et que $\text{Tens}_A^\bullet(P)$ est une A -algèbre associative plate.

Exemple 3.90. Soient A un anneau, M un A -module. Alors le A -module $\text{End}_A(M)$ est muni d'une structure naturelle de A -algèbre associative, dont la multiplication est donnée par la composition d'endomorphismes de M , et avec l'addition usuelle d'endomorphismes : les détails sont laissés aux soins du lecteur. La coïté de l'adjonction fournie par le problème 3.89(i), est alors un homomorphisme naturel de A -algèbres associatives :

$$\text{Tens}_A^\bullet(\text{End}_A(M)) \rightarrow \text{End}_A(M).$$

Problème 3.91. (Algèbres alternées) Soit A un anneau ; on dit qu'une A -algèbre associative B est *alternée*, si le A -module sous-jacent à B est une somme directe

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

de A -modules $(B_n \mid n \in \mathbb{N})$ appelés les *composantes homogènes* de B , et on a :

- $b \cdot b' \in B_{n+n'}$ et $b \cdot b' = (-1)^{nn'} b' \cdot b$ pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$, $b \in B_n$ et $b' \in B_{n'}$
- $b^2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $b \in B_{2n+1}$.

En particulier, $1 \in B_0$, l'image de l'homomorphisme structurel $A \rightarrow B$ est contenue dans B_0 , et $B_{2n} \subset Z(B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un *morphisme* $f : B \rightarrow B'$ de A -algèbres alternées est un morphisme de A -algèbres associatives tel que $f(B_n) \subset B'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc f est la somme directe d'applications A -linéaires $(f_n : B_n \rightarrow B'_n \mid n \in \mathbb{N})$. Evidemment les A -algèbres alternées forment une catégorie

$$A - \text{AlgAlt}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a un foncteur :

$$(-)_n : A - \text{AlgAlt} \rightarrow A - \text{Mod} \quad B \mapsto B_n \quad (f : B \rightarrow B') \mapsto (f_n : B_n \rightarrow B'_n).$$

(i) Montrer que le foncteur $(-)_1$ admet un adjoint à gauche

$$\Lambda_A^\bullet : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{AlgAlt}.$$

Pour tout A -module M on appelle $\Lambda_A^\bullet(M)$ la A -algèbre extérieure associée à M .

(ii) Pour tout A -module M , exhiber des isomorphismes A -linéaires naturels :

$$M \xrightarrow{\sim} \text{Tens}_A^1(M) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_A^1(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^1(M).$$

(iii) Soient B et C deux A -algèbres alternées. Montrer qu'il existe sur le produit tensoriel $B \otimes_A C$ une structure naturelle de A -algèbre alternée telle que

$$(B \otimes_A C)_n = \bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes_A C_j \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

— les applications $i_B : B \rightarrow B \otimes_A C$ et $i_C : C \rightarrow B \otimes_A C$ telles que

$$i_B(b) := b \otimes 1 \quad i_C(c) := 1 \otimes c \quad \forall b \in B, \forall c \in C$$

sont des morphismes d'algèbres alternées

— $B \otimes_A C$ représente le coproduit de B et C dans la catégorie $A - \mathbf{AlgAlt}$, et le couple de morphismes (i_B, i_C) est un co-cône universel.

(iv) Soient M et N deux A -modules. Dédurre de (iii) et du problème 3.89(i) des isomorphismes naturels de A -algèbres et respectivement de A -algèbres alternées :

$$\mathrm{Sym}_A^\bullet(M \oplus N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_A^\bullet(M) \otimes_A \mathrm{Sym}_A^\bullet(N) \quad \Lambda_A^\bullet(M \oplus N) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^\bullet(M) \otimes_A \Lambda_A^\bullet(N).$$

(v) Montrer que $(-)_n$ commute avec les colimites filtrantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(vi) Soit P un A -module plat. Montrer que $\Lambda_A^\bullet(P)$ est une A -algèbre alternée plate.

Remarque 3.92. (i) Soit $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs. Comme déjà pour les algèbres commutatives (voir l'exercice 3.63(iv)), on a un foncteur évident de restriction des scalaires :

$$(-)_{[f]} : A' - \mathbf{AlgAss} \rightarrow A - \mathbf{AlgAss} \quad (B, g : A \rightarrow B) \mapsto B_{[f]} := (B, g \circ f)$$

dont on peut exhiber un adjoint à gauche explicite : si $(B, g : A \rightarrow B)$ est une A -algèbre associative avec $g(A) \subset Z(B)$, on a d'après le §3.4, une structure naturelle de A -algèbre associative sur $A' \otimes_A B$, avec deux morphismes canoniques

$$A' \xrightarrow{\iota_{A'}} A' \otimes_A B \xleftarrow{\iota_B} B$$

et par inspection directe on voit que l'image de $\iota_{A'}$ est contenue dans $Z(A' \otimes_A B)$, i.e. $(A' \otimes_A B, \iota_{A'}) \in \mathrm{Ob}(A' - \mathbf{Ass})$. Or, soient $(C, h : A' \rightarrow C) \in \mathrm{Ob}(A' - \mathbf{AlgAss})$ et $k : B \rightarrow C_{[f]}$ un morphisme de $A - \mathbf{AlgAss}$; par hypothèse, $h(a') \cdot k(b) = k(b) \cdot h(a')$ pour tout $a' \in A'$ et tout $b \in B$, donc il existe un unique homomorphisme $j : A' \otimes_A B \rightarrow C$ d'anneaux associatifs tel que $j(a' \otimes b) = h(a') \cdot k(b)$ pour tous tels a' et b . On voit aisément que j est l'unique morphisme $(A' \otimes_A B, \iota_{A'}) \rightarrow (C, h)$ de $A' - \mathbf{AlgAss}$ tel que $j_{[f]} \circ \iota_B = k$. Ainsi, l'adjoint à gauche souhaité est le foncteur :

$$A' \otimes_A - : A - \mathbf{AlgAss} \rightarrow A' - \mathbf{AlgAss} \quad (B, g) \mapsto (A' \otimes_A B, \iota_{A'}).$$

Si, de plus, B est une A -algèbre alternée, on voit aussitôt que $A' \otimes_A B$ est une A' -algèbre alternée, d'où par restriction, un adjoint à gauche

$$A' \otimes_A - : A - \mathbf{AlgAlt} \rightarrow A' - \mathbf{AlgAlt}$$

pour le foncteur de restriction des scalaires correspondant.

(ii) D'après la solution du problème 3.89(iii), $\mathrm{Sym}_A^\bullet(A)$ est isomorphe à $A[X]$, et en particulier $\mathrm{Sym}_A^i(A)$ est un A -module libre de rang 1 pour tout $i \in \mathbb{N}$. La solution du problème 3.91(vi) nous a montré, d'autre part, que $\Lambda_A^i(A) = 0$ pour $i > 1$ et $\Lambda_A^i(A) = A$ pour $i = 0, 1$. Au vu des isomorphismes du problème 3.91(iv), par une simple récurrence sur k on déduit que pour tous $i, k \in \mathbb{N}$ les A -modules

$$\mathrm{Sym}_A^i(A^k) \quad \text{et} \quad \Lambda_A^i(A^k)$$

sont libres de rang $\binom{k+i-1}{i}$ et respectivement $\binom{k}{i}$ (voir aussi l'exemple 11.17; ici on pose $\binom{k}{i} := 0$ pour $i > k$) : les vérifications détaillées sont confiées au lecteur.

(iii) Pour tout A -module M , les produits de deux éléments x, y dans $\mathrm{Tens}_A^\bullet(M)$, dans $\mathrm{Sym}_A^\bullet(M)$, et dans $\Lambda_A^\bullet(M)$ sont traditionnellement notés respectivement par

$$x \otimes y \quad x \cdot y \quad x \wedge y$$

et les solutions des problèmes 3.89 et 3.91 montrent que ces A -algèbres graduées sont engendrées par leurs composantes homogènes de degré un. Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$, tout élément de $\Lambda_A^k(M)$ est une somme de produits $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$, avec de convenables $x_1, \dots, x_k \in M = \Lambda_A^1(M)$, et de même pour $\mathrm{Tens}_A^\bullet(M)$ et $\mathrm{Sym}_A^\bullet(M)$.

Exercice 3.93. Soient M, N deux A -modules, et $\beta : M^k = M \times \cdots \times M \rightarrow N$ une application A -multilinéaire du produit cartésien de k copies de M ; on dit que β est *alternée* si β s'annule sur tout $m_\bullet := (m_1, \dots, m_k) \in M^k$ tel que $\{m_1, \dots, m_k\}$ est un ensemble de cardinalité $< k$. Il s'ensuit aisément que β s'annule sur toute suite $m_\bullet$ dont l'un des termes m_i est combinaison linéaire de $m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_k$. Si $N = A$, on dit aussi que β est une *k-forme alternée*. Soit

$$\text{Alt}_A^k(M, N) \subset \mathcal{L}_A(M \times \cdots \times M, N)$$

l'ensemble des applications A -multilinéaires alternées $M^k \rightarrow N$ (notation de la définition 3.1); toute application A -linéaire $\phi : N \rightarrow N'$ induit une application

$$\text{Alt}_A^k(M, \phi) : \text{Alt}_A^k(M, N) \rightarrow \text{Alt}_A^k(M, N') \quad \beta \mapsto \phi \circ \beta.$$

On a ainsi un foncteur $\text{Alt}_A^k(M, -) : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$ bien défini. Montrer que le A -module $\Lambda_A^k(M)$ représente le foncteur $\text{Alt}_A^k(M, -)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Voici une application de l'exercice 3.93 que j'ai apprise de J.-F.-Burnol :

Problème 3.94. (i) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ et $x_\bullet := (x_1, \dots, x_k)$ une suite d'éléments de A^n . Montrer que $x_\bullet$ est *liée* (i.e. il existe une relation $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ avec $a_1, \dots, a_k \in A$ non tous nuls) si et seulement s'il existe $u \in A \setminus \{0\}$ tel que

$$u \cdot f(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \forall f \in \text{Alt}_A^k(A^n, A).$$

(ii) Dédurre de (i) une autre solution pour la dernière question du problème 3.53(i).

Exercice 3.95. Soient $A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux, M un A -module. Exhiber des isomorphismes naturels de A' -algèbres et de A' -algèbres alternées :

$$A' \otimes_A \text{Sym}_A^\bullet(M) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_{A'}^\bullet(A' \otimes_A M) \quad A' \otimes_A \Lambda_A^\bullet(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{A'}^\bullet(A' \otimes_A M).$$

3.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 3.6, partie (i) : Ces applications sont (A, C) -linéaires, donc il suffit de voir qu'elles coïncident sur les tenseurs élémentaires. Or, si $m \in M$ et $n \in N$, on a

$$\begin{aligned} (f' \circ f) \otimes_B (g' \circ g)(m \otimes n) &= (f' \circ f)(m) \otimes (g' \circ g)(n) \\ &= (f' \otimes_B g')(f(m) \otimes g(n)) \\ &= (f' \otimes_B g') \circ (f \otimes_B g)(m \otimes n). \end{aligned}$$

Partie (ii) : Ici A (resp. B) est vu comme un (A, A) -bimodule (resp. un (B, B) -bimodule), comme d'habitude. On considère l'application (A, A, B) -bilinéaire $\sigma : A \times M \rightarrow M$ telle que $\sigma(a, m) = a \cdot m$ pour tous $a \in A, m \in M$. Si P est un (A, B) -module et $\beta : A \times M \rightarrow P$ une application (A, A, B) -bilinéaire, on voit aisément qu'il existe une application (A, B) -linéaire unique $\beta_1 : M \rightarrow P$ telle que $\beta = \beta_1 \circ \sigma$: à savoir, $\beta_1(m) := \beta(1, m)$ pour tout $m \in M$. Donc, (M, σ) est un couple universel pour le foncteur $\mathcal{L}_A(A \times M, -)$; par le lemme 2.4(i), il existe alors un isomorphisme (A, B) -linéaire unique $\phi : A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$ tel que $\phi \circ \omega = \sigma$, où $\omega : A \times M \rightarrow A \otimes_A M$ est l'application A -bilinéaire universelle. Evidemment, $\phi(a \otimes m) = \phi \circ \omega(a, m) = \sigma(a, m) = a \cdot m$ pour tous $a \in A$ et $m \in M$. On raisonne de même pour exhiber l'isomorphisme $M \otimes_B B \xrightarrow{\sim} M$.

Partie (iii) : Notons

$$M := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \quad M' := \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} M'_{\lambda'} \quad M'' := \bigoplus_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'} (M_\lambda \otimes_B M'_{\lambda'})$$

et soit $\beta : M \times M' \rightarrow M''$ l'application (A, B, C) -bilinéaire telle que

$$\beta(m_\bullet, m'_\bullet) = (m_\lambda \otimes m'_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda') \quad \forall m_\bullet \in M, m'_\bullet \in M'.$$

Il existe une application (A, C) -linéaire unique $\bar{\beta} : M \otimes_B M' \rightarrow M''$ telle que $\bar{\beta} \circ \omega = \beta$, où $\omega : M \times M' \rightarrow M \otimes_B M'$ est l'application (A, B, C) -bilinéaire universelle. Evidemment $\bar{\beta}(m_\bullet \otimes m'_\bullet) = (m_\lambda \otimes m'_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$ pour tous $m_\bullet, m'_\bullet$ comme ci-dessus. De l'autre côté, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$ les inclusions canoniques $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow M$ et $i'_{\lambda'} : M'_{\lambda'} \rightarrow M'$

induisent des applications (A, C) -linéaires $i_\lambda \otimes_B i'_{\lambda'} : M_\lambda \otimes_B M'_{\lambda'} \rightarrow M \otimes_B M'$, d'où une application (A, C) -linéaire $\gamma : M'' \rightarrow M \otimes_B M'$ telle que

$$\gamma(m_\lambda \otimes m'_{\lambda'} | (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda') = \sum_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'} (i_\lambda \otimes_B i'_{\lambda'})(m_\lambda \otimes m'_{\lambda'})$$

pour tout $(m_\lambda \otimes m'_{\lambda'} | (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda') \in M''$. On voit aisément que $\bar{\beta}$ et γ sont l'inverse l'une de l'autre, donc $\bar{\beta}$ est un isomorphisme.

Exercice 3.12 : La condition est suffisante, car si les systèmes $m'_\bullet$ et $a_{\bullet\bullet}$ vérifient ces systèmes d'équations linéaires, on a :

$$\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = \sum_{i \in I} \sum_{k \in J} a_{ik} m'_k \otimes n_i = \sum_{k \in J} m'_k \otimes \sum_{i \in I} a_{ik} n_i = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = 0$ dans $M \otimes_A N$. Soit $\pi : A^{(I)} \rightarrow N$ la surjection A -linéaire telle que $\pi(e_i) := n_i$ pour tout $i \in I$, où $(e_i | i \in I)$ dénote la base canonique de $A^{(I)}$; soit aussi $(x_j | j \in J)$ un système de générateurs de $\text{Ker } \pi$, et $\phi : A^{(J)} \rightarrow A^{(I)}$ l'application A -linéaire telle que $\phi(e'_j) := x_j$ pour tout $j \in J$, où $(e'_j | j \in J)$ dénote la base canonique de $A^{(J)}$. Par la proposition 3.11 et la remarque 3.4(iii), on déduit une suite exacte :

$$M \otimes_A A^{(J)} \xrightarrow{M \otimes_A \phi} M \otimes_A A^{(I)} \xrightarrow{M \otimes_A \pi} M \otimes_A N \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, $(M \otimes_A \pi)(\sum_{i \in I} m_i \otimes e_i) = 0$, donc on a $(m'_j | j \in J) \in M^{(J)}$ tel que

$$(*) \quad \sum_{i \in I} m_i \otimes e_i = (M \otimes_A \phi)(\sum_{j \in J} m'_j \otimes e'_j).$$

D'autre part, ϕ est déterminée par le système $(a_{ij} | (i, j) \in I \times J)$ d'éléments de A tels que $\phi(e'_j) := \sum_{i \in I} a_{ij} e_i$ pour tout $j \in J$, et par construction on a $0 = \pi \circ \phi(e'_j) = \sum_{i \in I} a_{ij} n_i$ pour tout $j \in J$. En dernier lieu, l'identité $(*)$ se traduit par le système d'équations : $m_i = \sum_{j \in J} a_{ij} m'_j$ pour tout $i \in I$, comme souhaité.

Exercice 3.13 : On a la suite exacte courte de A -modules

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$$

d'où, par la proposition 3.11, une suite exacte

$$I \otimes_A A/J \xrightarrow{j \otimes_A A/J} A \otimes_A A/J \xrightarrow{\pi \otimes_A A/J} A/I \otimes_A A/J \rightarrow 0.$$

Par l'exercice 3.6(ii), on sait que l'application $\phi : A \otimes_A A/J \rightarrow A/J : a \otimes \bar{b} \mapsto a \cdot \bar{b}$ est un isomorphisme de A -modules. D'autre part, on voit aisément que l'image de $\phi \circ (j \otimes_A A/J)$ est le A -sous-module $(I + J)/J$ de A/J . On déduit que

$$(\pi \otimes_A A/J) \circ \phi^{-1} : A/J \rightarrow A/I \otimes_A A/J$$

se factorise à travers un isomorphisme $\omega : A/(I + J) \xrightarrow{\sim} A/I \otimes_A A/J$ (cf. la remarque 2.99(i)) tel que $\omega(\bar{1}) = \bar{1} \otimes \bar{1}$; l'application réciproque est l'isomorphisme cherché.

On peut aussi utiliser l'application A -bilinéaire $\beta : A/I \times A/J \rightarrow A/(I + J)$ telle que $\beta(\bar{a}, \bar{b}) = \pi(\bar{a}) \cdot \pi'(\bar{b})$, où $\pi : A/I \rightarrow A/(I + J)$ et $\pi' : A/J \rightarrow A/(I + J)$ sont les projections. On voit aisément que $(A/(I + J), \beta)$ est un couple universel pour le foncteur $\mathcal{L}_A(A/I \times A/J, -)$, donc il existe un unique isomorphisme $\bar{\beta} : A/I \otimes_A A/J \xrightarrow{\sim} A/(I + J)$ tel que $\bar{\beta}(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \pi(\bar{a}) \cdot \pi'(\bar{b})$ pour tous $\bar{a} \in A/I$ et $\bar{b} \in A/J$.

Exercice 3.14 : Pour alléger la notation, notons L et L' respectivement les limites directes du système $M_\bullet$ et du système $M'_\bullet$. Evidemment, la famille d'applications

$$(u_\lambda \otimes_A u'_{\lambda'} : M_\lambda \otimes_A M'_{\lambda'} \rightarrow L \otimes_A L' | (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$$

définit un co-cône $M_{\bullet} \otimes_A M'_{\bullet} \rightarrow L \otimes_A L'$. Soit aussi $(L'', v_{\bullet, \bullet})$ la limite directe du système $M_{\bullet} \otimes_A M'_{\bullet}$; on en déduit une application A -linéaire unique $\phi : L'' \rightarrow L \otimes_A L'$ comme souhaité. Pour montrer que ϕ est un isomorphisme, on va exhiber une application réciproque. Pour cela, notons

$$\bar{v}_{\lambda, \lambda'} : M'_{\lambda'} \rightarrow \text{Hom}_A(M_{\lambda}, L'')$$

l'application A -linéaire correspondante à $v_{\lambda, \lambda'} : M_{\lambda} \otimes_A M'_{\lambda'} \rightarrow L''$, suivant la bijection canonique de la remarque 3.4(i). On voit aisément que

$$\bar{v}_{\lambda, \mu'} \circ f'_{\lambda', \mu'} = \bar{v}_{\lambda, \lambda'} \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall \lambda', \mu' \in \Lambda' \text{ tels que } \lambda' \leq \mu'.$$

Autrement dit, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $\bar{v}_{\lambda, \bullet} := (\bar{v}_{\lambda, \lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ est un co-cône $M'_{\bullet} \rightarrow \text{Hom}_A(M_{\lambda}, L'')$, d'où une application A -linéaire unique

$$\bar{\phi}_{\lambda} : L' \rightarrow \text{Hom}_A(M_{\lambda}, L'') \quad \text{telle que} \quad \bar{\phi}_{\lambda} \circ u'_{\lambda'} = \bar{v}_{\lambda, \lambda'} \quad \forall \lambda' \in \Lambda'.$$

On remarque que la donnée de $\bar{\phi}_{\lambda}$ équivaut à celle d'une application A -linéaire $\bar{\rho}_{\lambda} : M_{\lambda} \rightarrow \text{Hom}_A(L', L'')$ (explicitement : on pose $\bar{\rho}_{\lambda}(x)(y) := \bar{\phi}_{\lambda}(y)(x)$ pour tous $x \in M_{\lambda}$ et $y \in L'$), et on voit aisément que

$$\bar{\rho}_{\mu} \circ f_{\lambda, \mu} = \bar{\rho}_{\lambda} \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda \text{ tels que } \lambda \leq \mu.$$

Il vient une application A -linéaire unique $\bar{\psi} : L \rightarrow \text{Hom}_A(L', L'')$ telle que $\bar{\psi} \circ u_{\bullet} = \bar{\rho}_{\bullet}$ et on dénote $\psi : L \otimes_A L' \rightarrow L''$ l'application A -linéaire correspondante. Par inspection directe, on voit que $\psi(u_{\lambda}(x) \otimes u'_{\lambda'}(y)) = v_{\lambda, \lambda'}(x \otimes y)$ pour tous $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$, $x \in M_{\lambda}$ et $y \in M'_{\lambda'}$, i.e. ψ est l'inverse cherchée de ϕ .

Remarque 3.96. On peut aussi déduire l'isomorphisme de l'exercice 3.14 des résultats du §2.3.3, concernant la permutation des (co)limites. En effet, la remarque 2.58(iii) nous fournit un isomorphisme canonique de A -modules :

$$L'' \xrightarrow{\sim} \lim_{\lambda' \in \Lambda'} \left(\lim_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda} \otimes_A M'_{\lambda'} \right).$$

D'autre part, chaque foncteur $- \otimes_A M'_{\lambda'}$ admet un adjoint à droite (voir la remarque 3.7) et donc il commute avec toute colimite représentable (proposition 2.49(ii)), d'où un isomorphisme canonique

$$\lim_{\lambda' \in \Lambda'} \left(\lim_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda} \otimes_A M'_{\lambda'} \right) \xrightarrow{\sim} \lim_{\lambda' \in \Lambda'} L \otimes_A M'_{\lambda'}.$$

Ensuite, la remarque 3.4(iii) nous dit que $- \otimes_A L$ est isomorphe au foncteur $L \otimes_A -$, et donc aussi ce dernier commute avec les colimites; d'où un l'isomorphisme naturel

$$\lim_{\lambda' \in \Lambda'} L \otimes_A M'_{\lambda'} \xrightarrow{\sim} L \otimes_A L'.$$

Par inspection directe, on voit que la composition de ces trois isomorphismes coïncide avec l'isomorphisme ϕ trouvé ci-dessus.

Exercice 3.16, partie (i) : Comme le A -module $(M \otimes_B N)_{[f]}$ est engendré par ses tenseurs élémentaires $(m \otimes n)_{[f]}$, il est clair que ϕ est surjective. Supposons maintenant que f soit surjectif; dans ce cas, montrons que l'application B -bilinéaire universelle $\omega' : M_{[f]} \times N_{[f]} \rightarrow M_{[f]} \otimes_A N_{[f]}$ est aussi une application B -bilinéaire $M \times N \rightarrow M \otimes_A N_{[f]}$. Cela revient à vérifier que

$$\omega'((bm)_{[f]}, n_{[f]}) = b \cdot \omega'(m_{[f]}, n_{[f]}) = \omega'(m_{[f]}, (bn)_{[f]}) \quad \forall b \in B, m \in M, n \in N.$$

Mais on a $\omega'((bm)_{[f]}, n_{[f]}) = (bm \otimes n)_{[f]} = (b \cdot (m \otimes n))_{[f]}$, d'où la première identité. Ensuite, choisissons $a \in A$ tel que $f(a) = b$; il vient :

$$\omega'(m_{[f]}, (bn)_{[f]}) = (m \otimes (bn))_{[f]} = (ma \otimes n)_{[f]} = (bm \otimes n)_{[f]}$$

d'où la deuxième identité. Par suite ω' se factorise de façon unique à travers une application B -linéaire

$$M \otimes_B N \rightarrow M \otimes_A N_{[f]} \quad m \otimes n \mapsto m \otimes n_{[f]}.$$

Cette dernière, après restriction des scalaires suivant f , fournit un inverse de ϕ .

Partie (ii) : Soit $e_\Lambda : \Lambda \rightarrow A^{(\Lambda)}$ l'application ensembliste telle que $\lambda \mapsto e_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et de même pour l'application ensembliste $e'_\Lambda : \Lambda \rightarrow B^{(\Lambda)}$; de plus, soit $1 \otimes e_\Lambda : \Lambda \rightarrow B \otimes_A A^{(\Lambda)}$ l'application ensembliste telle que $\lambda \mapsto 1 \otimes e_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On a vu que le couple $(B^{(\Lambda)}, e'_\Lambda)$ est universel pour le foncteur $(-)^{\Lambda} : B - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (exemple 2.5); grâce au lemme 2.4(i) il suffit donc de montrer que le couple $(B \otimes_A A^{(\Lambda)}, 1 \otimes e_\Lambda)$ est aussi universel pour ce même foncteur. Or, pour tout B -module N et toute application ensembliste $\phi : \Lambda \rightarrow N$ il existe une unique application A -linéaire $g_\phi : A^{(\Lambda)} \rightarrow N_{[f]}$ telle que $\phi = g_\phi \circ e_\Lambda$, et d'autre part il existe une unique application B -linéaire $h : B \otimes_A A^{(\Lambda)} \rightarrow N$ telle que g_ϕ soit la composition de $\iota_{A^{(\Lambda)}} : A^{(\Lambda)} \rightarrow (B \otimes_A A^{(\Lambda)})_{[f]}$ et $h_{[f]}$. Evidemment $\iota_{A^{(\Lambda)}} \circ e_\Lambda = 1 \otimes e_\Lambda$, donc $\phi = h \circ (1 \otimes e_\Lambda)$, d'où l'assertion.

Exercice 3.17, partie (i), (a) $\Rightarrow$ (c) : soit $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de A -modules; notons par $(u_\lambda : N_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ son co-cône universel construit comme dans l'exercice 2.31(iii), choisissons une surjection A -linéaire $\phi : L \rightarrow M$ avec L libre de rang fini et $\text{Ker } \phi$ de type fini, et fixons une base $e_1, \dots, e_r$ de L . Il faut montrer que $(\text{Hom}_A(M, u_\lambda) : \text{Hom}_A(M, N_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône universel pour le système induit $\text{Hom}_A(M, N_\bullet) := (\text{Hom}_A(M, N_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$. Or, soit $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire; pour tout $i = 1, \dots, r$ on peut trouver $\lambda_i \in \Lambda$ et $n_i \in N_{\lambda_i}$ tel que $f \circ \phi(e_i) = [n_i, \lambda_i]$, la classe du couple (n_i, λ_i) . Comme Λ est filtrant, on peut ensuite choisir $\lambda \geq \lambda_1, \dots, \lambda_r$ et remplacer chaque n_i par son image dans N_λ ; avec cette notation, évidemment $f \circ \phi = u_\lambda \circ g$, où $g : L \rightarrow N_\lambda$ est l'application A -linéaire telle que $g(e_i) := n_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Soit $x_1, \dots, x_t$ un système fini de générateurs de $\text{Ker } \phi$; comme $f \circ \phi(x_j) = 0$, il existe pour tout $j = 1, \dots, t$ un élément $\mu_j \geq \lambda$ de Λ tel que $g(x_j)$ soit dans le noyau du morphisme de transition $v_{\lambda\mu_j} : N_\lambda \rightarrow N_{\mu_j}$. On choisit $\mu \geq \mu_1, \dots, \mu_t$, de sorte que $v_{\lambda\mu} \circ g(x_j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, t$. Donc, $v_{\lambda\mu} \circ g$ se factorise à travers une application A -linéaire bien définie $f_\mu : M \rightarrow N_\mu$, et par construction on a

$$u_\mu \circ f_\mu \circ \phi = u_\mu \circ v_{\lambda\mu} \circ g = u_\lambda \circ g = f \circ \phi$$

d'où $u_\mu \circ f_\mu = f$. Cela montre que f est l'image dans $\text{Hom}_A(M, N)$ de la classe $[f_\mu, \mu]$ (cette dernière est un élément de la colimite du système $\text{Hom}_A(M, N_\bullet)$, construite comme à l'exercice 2.31(iii)). Il reste à montrer que deux classes $[f_\mu, \mu]$, $[f_{\mu'}, \mu']$ coïncident si et seulement si elles ont la même image dans $\text{Hom}_A(M, N)$, i.e. si et seulement si

$$(*) \quad u_\mu \circ f_\mu = u_{\mu'} \circ f_{\mu'}.$$

Mais on a $[f_\mu, \mu] = [f_{\mu'}, \mu']$ si et seulement s'il existe $\lambda \geq \mu, \mu'$ dans Λ tel que $v_{\mu\lambda} \circ f_\mu = v_{\mu'\lambda} \circ f_{\mu'}$. D'autre part, pour tout $i = 1, \dots, r$ notons $n_i := f_\mu \circ \phi(e_i)$ et $n'_i := f_{\mu'} \circ \phi(e_i)$; la condition $(*)$ veut dire que pour chaque $i \leq r$ on a $\lambda_i \geq \mu, \mu'$ tel que $v_{\mu\lambda_i}(n_i) = v_{\mu'\lambda_i}(n'_i)$. Il s'ensuit aussitôt que tout $\lambda \geq \lambda_1, \dots, \lambda_r$ convient.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Soit $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ le système filtrant des sous-modules de type fini de M . La condition (c) entraîne que le co-cône

$$(\text{Hom}_A(M, M_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M) \mid \lambda \in \Lambda)$$

induit par les inclusions $(M_\lambda \rightarrow M \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel, et avec la notation ci-dessus, il s'ensuit en particulier que Id_M est l'image dans $\text{Hom}_A(M, M)$ d'une classe $[f, \lambda]$, pour certains $\lambda \in \Lambda$ et $f \in \text{Hom}_A(M, M_\lambda)$; mais évidemment cela revient à dire que $M_\lambda = M$, i.e. M est de type fini. Soit donc $\phi : L \rightarrow M$ une surjection A -linéaire avec L libre de rang fini, et notons par $(K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ le système des sous-modules de type fini de $\text{Ker } \phi$. On déduit un système filtrant de A -modules $L/K_\bullet := (L/K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dont les

morphismes de transition sont les projections $\pi_{\lambda\mu} : L/K_\lambda \rightarrow L/K_\mu$ pour tout $\mu \geq \lambda$, i.e. pour $K_\lambda \subset K_\mu$. On voit aisément que le système $(\pi_\lambda : L/K_\lambda \rightarrow M \mid \lambda \in \Lambda)$ des projections naturelles forme un co-cône universel pour $L/K_\bullet$ (détails laissés au lecteur), d'où un co-cône universel

$$(\text{Hom}_A(M, \pi_\lambda) : \text{Hom}_A(M, L/K_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M) \mid \lambda \in \Lambda).$$

En particulier, Id_M est l'image dans $\text{Hom}_A(M, M)$ d'une classe $[g, \lambda]$, pour quelque $\lambda \in \Lambda$ et $g \in \text{Hom}_A(M, L/K_\lambda)$. Cela veut dire que $\pi_\lambda \circ g = Id_M$, donc g est injective, et plus généralement $\pi_{\lambda\mu} \circ g$ est injective pour tout $\mu \geq \lambda$. Il reste à montrer que $\pi_{\lambda\mu} \circ g$ est surjective pour μ convenable. Pour cela, soit $e_1, \dots, e_r$ une base de L ; on pose $\bar{x}_i := g \circ \phi(e_i) \in L/K_\lambda$ et on choisit un représentant arbitraire $x_i \in L$ de la classe $\bar{x}_i$, pour tout $i = 1, \dots, r$. Il s'ensuit aisément que $y_i := e_i - x_i \in \text{Ker } \phi$ pour tout $i = 1, \dots, r$, et on peut trouver $\mu \in \Lambda$ tel que $\mu \geq \lambda$ et $y_1, \dots, y_r \in K_\mu$; mais l'image de $\pi_{\lambda\mu} \circ g$ contient $\pi_{\lambda\mu}(\bar{x}_i)$ et cette dernière coïncide avec la classe de e_i dans L/K_μ , pour tout $i \leq r$. Donc $\pi_{\lambda\mu} \circ g$ est bien surjective, comme souhaité.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une petite famille de A -modules; on doit montrer que l'application naturelle

$$(\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \otimes_A M \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} (N_\lambda \otimes_A M) \quad (n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \otimes m \mapsto (n_\lambda \otimes m \mid \lambda \in \Lambda)$$

est un isomorphisme. Cela se voit aisément si M est libre de rang fini (détails laissés au lecteur); si M est de présentation finie, on trouve un complexe exact $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} (\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \otimes_A A^m & \longrightarrow & (\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \otimes_A A^n & \longrightarrow & (\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} (N_\lambda \otimes_A A^m) & \longrightarrow & \prod_{\lambda \in \Lambda} (N_\lambda \otimes_A A^n) & \longrightarrow & \prod_{\lambda \in \Lambda} (N_\lambda \otimes_A M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

à lignes horizontales exactes (proposition 3.11) et dont les flèches verticales à gauche et au milieu sont des isomorphismes; il suffit alors d'invoquer l'exercice 2.104.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in M^\Lambda$ un système de générateurs de M ; la condition (b) implique que l'application naturelle

$$\omega : A^\Lambda \otimes_A M \rightarrow M^\Lambda \quad (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \otimes m \mapsto (a_\lambda m \mid \lambda \in \Lambda)$$

est un isomorphisme; en particulier, il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et un système $(a_{\mu,\bullet} \mid \mu \in \Lambda')$ d'éléments de A^Λ tel que $\omega(\sum_{\mu \in \Lambda'} a_{\mu,\bullet} \otimes x_\mu) = x_\bullet$. Cela veut dire que $x_\lambda = \sum_{\mu \in \Lambda'} a_{\mu\lambda} x_\mu$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, ce qui montre déjà que M est de type fini. Soient donc $\phi : L \rightarrow M$ une surjection A -linéaire avec L libre de rang fini, et $N := \text{Ker } \phi$; on déduit, pour tout ensemble I , un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} A^I \otimes_A N & \longrightarrow & A^I \otimes_A L & \longrightarrow & A^I \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N^I & \longrightarrow & L^I & \longrightarrow & M^I \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes, et dont les flèches verticales à droite et au milieu sont des isomorphismes. Par le lemme du serpent, il s'ensuit que la flèche verticale à gauche est surjective; mais comme on vient de voir, cela entraîne que N est de type fini, i.e. M est de présentation finie.

Partie (ii) : On peut reprendre, *mutatis mutandis*, la preuve de (i) : supposons que B soit de présentation finie, et choisissons un homomorphisme surjectif $\phi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ de A -algèbres, tel que $\text{Ker } \phi$ soit un idéal de type fini; soit aussi $C_\bullet := (C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de A -algèbres, $(u_\lambda : C_\lambda \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel de base $C_\bullet$, construit comme dans l'exercice 2.31(iv), et $f : B \rightarrow C$ un homomorphisme de A -algèbres. On voit aisément qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $f \circ \phi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow C$ se factorise à travers u_λ et un homomorphisme de A -algèbres $g : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow C_\lambda$; ensuite, si $t_1, \dots, t_r$

est un système fini de générateurs de $\text{Ker } \phi$, on trouve $\mu \geq \lambda$ tel que $u_{\lambda\mu} \circ g(t_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$, où $u_{\lambda\mu} : C_\lambda \rightarrow C_\mu$ désigne le morphisme de transition. Donc $u_{\lambda\mu} \circ g$ se factorise à travers un homomorphisme de A -algèbres $f_\mu : B \rightarrow C_\mu$, et f est l'image dans $A - \text{Alg}(B, C)$ de la classe de $[f_\mu, \mu]$. En dernier lieu, en raisonnant comme dans la preuve de (i) on voit aisément que deux classes $[f_\mu, \mu]$ et $[f_{\mu'}, \mu']$ coïncident si et seulement si elles ont la même image dans $A - \text{Alg}(B, C)$; cela achève de vérifier que le foncteur $A - \text{Alg}(B, -)$ commute avec les limites directes filtrantes.

Réciproquement, si $A - \text{Alg}(B, -)$ vérifie cette condition, écrivons B comme la limite directe du système filtrant $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses A -sous-algèbres de type fini; en raisonnant comme dans la partie (i), on voit aisément que Id_B se factorise à travers B_λ pour quelque $\lambda \in \Lambda$, d'où $B = B_\lambda$, i.e. B est de type fini. Prenons ensuite un homomorphisme surjectif $\phi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ de A -algèbres, écrivons $\text{Ker } \phi$ comme la limite directe du système filtrant $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses sous-idéaux de type fini, et pour tout $\mu \geq \lambda$ soit

$$\pi_{\lambda\mu} : A[X_1, \dots, X_n]/I_\lambda \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]/I_\mu$$

la projection naturelle. En raisonnant comme dans la preuve de (i) on trouve $\lambda \in \Lambda$ tel que Id_B se factorise à travers un homomorphisme $g : B \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]/I_\lambda$ de A -algèbres, et en particulier $\pi_{\lambda\mu} \circ g : B \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]/I_\mu$ est injective pour tout $\mu \geq \lambda$. Il ne reste qu'à exhiber $\mu \in \Lambda$ tel que $\pi_{\lambda\mu} \circ g$ soit surjective; pour cela, on pose $\bar{P}_i := g \circ \phi(X_i)$ et on choisit un représentant $P_i \in A[X_1, \dots, X_n]$ de la classe $\bar{P}_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On a $X_i - P_i \in \text{Ker } \phi$ pour $i = 1, \dots, n$, et il suffit de prendre $\mu \geq \lambda$ tel que $X_i - P_i \in I_\mu$ pour tout $i \leq n$: les détails seront laissés au lecteur.

Partie (iii) : On est ramené aisément au cas où $B = A[X_1, \dots, X_n]$, pour lequel l'assertion a déjà été démontrée dans la solution de (ii).

Partie (iv) : Puisque C est de type fini, on trouve $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme surjectif $g : B[X_1, \dots, X_n] \rightarrow C$ de A -algèbres qui prolonge f ; d'après (iii), $\text{Ker}(g)$ est un idéal de type fini, d'où l'assertion.

Partie (v.a) : Evidemment, tout système fini de générateurs de $M_{[f]}$ engendre aussi le B -module M , d'où l'assertion.

Partie (v.b) : Si $B_{[f]}$ et M sont de type fini, soit $g : B^k \rightarrow M$ une surjection B -linéaire; alors $g_{[f]} : B_{[f]}^k \rightarrow M_{[f]}$ est une surjection A -linéaire, et $B_{[f]}^k$ est un A -module de type fini, donc de même pour $M_{[f]}$.

Ensuite, si $B_{[f]}$ et M sont de présentation finie, choisissons g comme ci-dessus; on sait déjà que $M_{[f]}$ est de type fini, et que $\text{Ker}(g)$ est un B -module de type fini (exercice 2.110(iv)), donc $\text{Ker}(g)_{[f]}$ est un A -module de type fini, par ce qui précède; par suite, $M_{[f]}$ est de présentation finie (exercice 2.110(iii)).

Partie (v.c) : Soit $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de B -modules, et fixons un co-cône universel $(u_\lambda : N_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$; au vu de (i), il suffit de vérifier que l'application induite $\phi : \text{colim}_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_B(M, N_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_B(M, N)$ est bijective. Mais noter que $\text{Hom}_B(M, -)$ est un sous-foncteur du foncteur $\text{Hom}_A(M_{[f]}, (-)_{[f]})$; par inspection de la construction des colimites filtrantes, on déduit aussitôt que $\text{colim}_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_B(M, N_\lambda)$ est une partie de $\text{colim}_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_A(M_{[f]}, (N_\lambda)_{[f]})$, et que le co-cône $(u_{[f]} : (N_\lambda)_{[f]} \rightarrow N_{[f]} \mid \lambda \in \Lambda)$ est encore universel pour le système filtrant induit de A -modules $((N_\lambda)_{[f]} \mid \lambda \in \Lambda)$; ainsi, sous ces identifications, ϕ est la restriction de l'application correspondante

$$\psi : \text{colim}_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_A(M_{[f]}, (N_\lambda)_{[f]}) \rightarrow \text{Hom}_A(M_{[f]}, N_{[f]}).$$

Mais d'après (i), ψ est bijective, car par hypothèse $M_{[f]}$ est un A -module de présentation finie; par suite, ϕ est injective. Afin de montrer la surjectivité de ϕ , soit $h \in \text{Hom}_B(M, N)$; on sait déjà qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ et $h_\lambda \in \text{Hom}_A(M_{[f]}, (N_\lambda)_{[f]})$ tels que $(u_\lambda)_{[f]} \circ h_\lambda = h_{[f]}$. Pour tout $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, notons par $h_\mu \in \text{Hom}_A(M_{[f]}, (N_\mu)_{[f]})$ la composition de h_λ avec l'homomorphisme de transition $N_\lambda \rightarrow N_\mu$; disons aussi que $B = A[b_1, \dots, b_k]$ et $M_{[f]} = Ax_1 + \dots + Ax_n$ pour des systèmes finis de générateurs $b_1, \dots, b_k \in B$ et $x_1, \dots, x_n \in M$. Puisque $h(b_i x_j) = b_i h(x_j)$ pour tous $i = 1, \dots, k$

et $j = 1, \dots, n$, il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $h_\mu(b_i x_j) = b_i h_\mu(x_j)$ pour tous tels i et j (les détails sont laissés aux soins du lecteur); par suite, $h_\mu \in \text{Hom}_B(M, N)$, et évidemment $u_\mu \circ h_\mu = h$, CQFD.

Partie (v.d) : Soit $(C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de A -algèbres, et fixons un co-cône universel $(u_\lambda : C_\lambda \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda)$; au vu de (ii), on doit vérifier que l'application induite $\phi : \text{colim}_{\lambda \in \Lambda} A - \text{Alg}(B, C_\lambda) \rightarrow A - \text{Alg}(B)$ est bijective. Pour cela, soit $F : A - \text{Alg} \rightarrow A - \text{Mod}$ le foncteur d'oubli; noter que $A - \text{Alg}(B, -)$ est un sous-foncteur du foncteur $\text{Hom}_A(B_{[f]}, F(-))$, et que $(Fu_\lambda : FC_\lambda \rightarrow FC \mid \lambda \in \Lambda)$ est encore un co-cône universel pour le système filtrant induit de A -modules $(FC_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. En raisonnant comme dans la preuve de (v.c), on déduit que ϕ est injectif. Ensuite, soit $h : B \rightarrow C$ un homomorphisme de A -algèbres; puisque $B_{[f]}$ est de présentation finie, il existe $\lambda \in \Lambda$ et une application A -linéaire $h_\lambda : B_{[f]} \rightarrow C_\lambda$ telle que $h_{[f]} = u_\lambda \circ h_\lambda$. Pour tout $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, notons par $h_\mu : B_{[f]} \rightarrow C_\mu$ la composition de h_λ avec l'homomorphisme de transition $C_\lambda \rightarrow C_\mu$; disons aussi que $B_{[f]} = Ab_1 + \dots + Ab_k$ pour un système fini de générateurs $b_1, \dots, b_k \in B$. Puisque $h(b_i b_j) = h(b_i) \cdot h(b_j)$ pour tous $i, j = 1, \dots, k$, il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $h_\mu(b_i b_j) = h_\mu(b_i) \cdot h_\mu(b_j)$ pour tous tels i et j ; par suite $h_\mu \in A - \text{Alg}(B, C_\mu)$, et évidemment $h = u_\mu \circ h_\mu$, d'où la surjectivité de ϕ .

Exercice 3.19 : Soit $\phi : P_{[g \circ f]} \rightarrow \text{Hom}_A(N_{[f]}, M)$ une application A -linéaire. On lui associe l'application A -bilinéaire

$$\beta_\phi : P_{[g \circ f]} \times N_{[f]} \rightarrow M \quad (p, n) \mapsto \phi(p)(n)$$

d'où une unique application A -linéaire

$$\phi' : P_{[g \circ f]} \otimes_A N_{[f]} \rightarrow M \quad \text{telle que} \quad \phi' \circ \omega_{P, N} = \beta_\phi$$

avec $\omega_{P, N} : P_{[g \circ f]} \times N_{[f]} \rightarrow P_{[g \circ f]} \otimes_A N_{[f]}$ l'application A -bilinéaire universelle. On a une application A -linéaire naturelle

$$P_{[g \circ f]} \otimes_A N_{[f]} \rightarrow (P_{[g]} \otimes_B N)_{[f]}$$

qui est surjective, par l'exercice 3.16(i), et par inspection directe de la construction du produit tensoriel, on voit que son noyau est engendré par les éléments

$$bp \otimes n - p \otimes bn \quad \forall b \in B, \forall p \in P, \forall n \in N.$$

Par suite ϕ' se factorise à travers $(P_{[g]} \otimes_B N)_{[f]} \Leftrightarrow \phi'(bp \otimes n) = \phi'(p \otimes bn) \Leftrightarrow \beta_\phi(bp, n) = \beta_\phi(p, bn) \Leftrightarrow \phi(bp)(n) = \phi(p)(bn)$ pour tous b, p, n comme ci-dessus. Autrement dit, ϕ' se factorise à travers $(P_{[g]} \otimes_B N)_{[f]}$ si et seulement si ϕ est une application B -linéaire $P_{[g]} \rightarrow \text{Hom}_A(N, M)$. Cela montre que l'on a bien une bijection comme souhaité :

$$\text{Hom}_B(P, \text{Hom}_A(N, M)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(P \otimes_B N, M).$$

Par inspection directe on voit que cette application est même (A, C) -linéaire.

Exercice 3.22 : Considérons une petite catégorie I et un foncteur

$$F : I \rightarrow \text{AlgMod} \quad i \mapsto (A_i, M_i) \quad (i \xrightarrow{\phi} j) \mapsto (A_i \xrightarrow{f_\phi} A_j, M_i \xrightarrow{g_\phi} (M_j)_{[f_\phi]}).$$

Soit aussi $\pi : \text{AlgMod} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg}$ comme dans §3.2.6. D'après l'exemple 2.44(ii), la composition $\pi \circ F : I \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg}$ admet une colimite A , et on choisit un co-cône universel $(\tau_i : A_i \rightarrow A \mid i \in \text{Ob}(I))$. Pour tout morphisme $\phi : i \rightarrow j$ de I , l'adjonction du §3.2.2 associe à l'application A_i -linéaire $g_\phi : M_i \rightarrow (M_j)_{[f_\phi]}$ l'application A_j -linéaire adjointe $g_\phi^* : A_j \otimes_{A_i} M_i \rightarrow M_j$; par extension des scalaires suivant l'homomorphisme d'anneaux τ_j (et compte tenu de la remarque 3.15), on déduit ainsi un homomorphisme A -linéaire

$$h_\phi : A \otimes_{A_i} M_i \xrightarrow{\sim} A \otimes_{A_j} (A_j \otimes_{A_i} M_i) \xrightarrow{A \otimes_{A_j} g_\phi^*} A \otimes_{A_j} M_j \quad a \otimes x \mapsto a \otimes g_\phi(x).$$

Evidemment les associations : $i \mapsto A \otimes_{A_i} M_i$ et $\phi \mapsto h_\phi$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ et tout morphisme ϕ de I , définissent un foncteur $G : I \rightarrow A - \text{Mod}$, dont la colimite est représentable dans la catégorie $A - \text{Mod}$, d'après l'exemple 2.44(i), et fixons un co-cône universel $\nu_\bullet := (\nu_i : A \otimes_{A_i} M_i \rightarrow M \mid i \in \text{Ob}(I))$. Sous l'adjonction du §3.2.2, l'application A -linéaire ν_i correspond à une application A_i -linéaire $\nu_i^* : M_i \rightarrow M_{[\tau_i]}$, pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et on voit aussitôt que la donnée

$$(\tau_\bullet, \nu_\bullet^*) := ((\tau_i, \nu_i^*) : (A_i, M_i) \rightarrow (A, M) \mid i \in \text{Ob}(I))$$

est un co-cône de base F et sommet (A, M) . Montrons que $(\tau_\bullet, \nu_\bullet^*)$ est un co-cône universel. En effet, soit $((\mu_i, t_i) : (A_i, M_i) \rightarrow (B, N) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un co-cône de base F et sommet $(B, N) \in \text{Ob}(\text{AlgMod})$; il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\mu : A \rightarrow B$ tel que

$$\mu_i = \mu \circ \tau_i \quad \forall i \in \text{Ob}(I)$$

et l'adjonction du §3.2.2 associe à $t_i : M_i \rightarrow N_{[\mu_i]} = (N_{[\mu]})_{[\tau_i]}$ une application A -linéaire $t_i^* : A \otimes_{A_i} M_i \rightarrow N_{[\mu]}$ telle que $t_i^*(a \otimes x) := \mu(a) \cdot t_i(x)$ pour tous $a \in A$ et $x \in M_i$. On voit aussitôt que $t_i^* = t_j^* \circ h_\phi$ pour tout morphisme $\phi : i \rightarrow j$ de I , i.e. la donnée $(t_i^* \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un co-cône de base G et de sommet $N_{[\mu]}$; d'où une unique application A -linéaire $t : M \rightarrow N_{[\mu]}$ telle que $t \circ \nu_i = t_i^*$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Il vient $(\mu_i, t_i) = (\mu, t) \circ (\tau_i, \nu_i^*)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et l'universalité de $\nu_\bullet$ entraîne aisément que (μ, t) est l'unique morphisme $(A, M) \rightarrow (B, N)$ de AlgMod vérifiant ces identités, d'où l'assertion. Cela achève de montrer que la catégorie AlgMod est cocomplète.

Ensuite, soit A une limite du foncteur $\pi \circ F$, et $(\tau_i : A \rightarrow A_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel; on déduit pour tout $\phi \in I(i, j)$ une application A -linéaire

$$(g_\phi)_{[\tau_i]} : (M_i)_{[\tau_i]} \rightarrow (M_{j[f_\phi]})_{[\tau_i]} = (M_j)_{[\tau_j]}$$

et évidemment les associations : $i \mapsto (M_i)_{[\tau_i]}$ et $\phi \mapsto (g_\phi)_{[\tau_i]}$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$ et tout tel ϕ , définissent un foncteur $G : I \rightarrow A - \text{Mod}$, dont la limite est représentable dans $A - \text{Mod}$, d'après l'exemple 2.44(i), et soit $\nu_\bullet := (\nu_i : M \rightarrow (M_i)_{[\tau_i]} \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel. Evidemment la donnée $((\tau_i, \nu_i) : (A, M) \rightarrow (A_i, M_i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ est un cône de base F et de sommet (A, M) , et il reste à vérifier qu'il s'agit d'un cône universel. Pour cela, soit $((\mu_i, t_i) : (B, N) \rightarrow (A_i, M_i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un autre cône de base F et de sommet $(B, N) \in \text{Ob}(\text{AlgMod})$; il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\mu : B \rightarrow A$ tel que $\tau_i \circ \mu = \mu_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et une unique application B -linéaire $t : N \rightarrow M_{[\mu]}$ telle que $(\nu_i)_{[\mu]} \circ t = t_i : N \rightarrow (M_i)_{[\mu_i]} = (M_{i[\tau_i]})_{[\mu]}$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Alors $(\tau_i, \nu_i) \circ (\mu, t) = (\mu_i, t_i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et l'universalité de $\nu_\bullet$ entraîne que (μ, t) est l'unique morphisme $(B, N) \rightarrow (A, M)$ de AlgMod vérifiant ces identités, d'où l'assertion.

Exercice 3.29 : Soient $j_{\overline{T}} : S^{-1}A \rightarrow \overline{T}^{-1}(S^{-1}A)$ et $j_{S \cup T} : A \rightarrow (S \cup T)^{-1}A$ les localisations; tout anneau B induit des injections :

$$\mathbb{Z} - \text{Alg}(\overline{T}^{-1}(S^{-1}A), B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} - \text{Alg}(S^{-1}A, B) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} - \text{Alg}(A, B)$$

telles que $\phi(f) := f \circ j_{\overline{T}}$ et $\psi(g) := g \circ j_S$ pour tous $f : \overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \rightarrow B$ et $g : S^{-1}A \rightarrow B$. L'image de ϕ (resp. ψ) est l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $g : S^{-1}A \rightarrow B$ (resp. $h : A \rightarrow B$) avec $g(\overline{T}) \subset B^\times$ (resp. $h(S) \subset B^\times$). Donc $\psi \circ \phi$ est injective, et son image est l'ensemble des homomorphismes $h : A \rightarrow B$ avec $h(S \cup T) \subset B^\times$; i.e. les couples $(\overline{T}^{-1}(S^{-1}A), j_{\overline{T}} \circ j_S)$ et $((S \cup T)^{-1}A, j_{S \cup T})$ sont universels pour le même foncteur, et il suffit alors d'invoquer le lemme 2.4(i).

Exercice 3.33, partie (i) : Soit $\tilde{S} \subset A$ la plus petite partie multiplicative contenant S . Montrons que si $a \notin A^\times$, alors $\tilde{S} \cap Aa = \emptyset$. D'abord, noter que tout élément de $\tilde{S} \setminus \{1\}$ est un produit $s_1 \cdots s_k$ d'éléments $s_1, \dots, s_k \in S$, pour quelque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et noter aussi que $1 \notin Aa$, car $a \notin A^\times$. On raisonne alors par l'absurde : soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le plus petit entier tel qu'il existe une suite $s_1, \dots, s_k$ de k éléments de S , et $b \in A$ avec $s_1 \cdots s_k = ab$;

puisque $S \nmid a$, il vient $s_k | b$, i.e. $b = s_k b'$ pour quelque $b' \in A$, d'où $s_1 \cdots s_{k-1} = b'a$, et cela contredit la minimalité de k . Par suite, si a est premier dans A , l'élément $a/1$ est premier dans $S^{-1}A$ (lemme 3.30(ii)). Pour la réciproque, il suffit de vérifier que $Aa = A \cap S^{-1}(Aa)$, si $a/1$ est premier dans $S^{-1}A$. Soit alors $b \in A \cap S^{-1}(Aa)$; ainsi, $b = ac/s$ pour certains $c \in A$ et $s \in \tilde{S}$. Montrons que l'on peut supposer que $\text{pgcd}(c, s) = 1$. Cela est trivial si $s = 1$; sinon, s est un produit $s_1 \cdots s_k$ d'éléments de S , et comme chaque s_i est premier, on voit aisément que tout diviseur de s est de la forme $u \cdot \prod_{j \in \Lambda} s_j$ pour une partie $\Lambda \subset \{1, \dots, k\}$ et avec $u \in A^\times$. En particulier, $d := \text{pgcd}(c, s)$ est de cette forme, de sorte que $s/d = vs'$ pour quelque $s' \in \tilde{S}$ et $v \in A^\times$, et quitte à remplacer c et s par $c/(dv)$ et s' , on obtient $\text{pgcd}(c, s) = 1$. Comme tout élément de S est premier, on déduit que $s | a$, et comme $S \nmid a$, il vient $s = 1$, d'où $b \in Aa$.

Partie (ii) : Si $a/1 \in (S^{-1}A)^\times$, il existe $b \in A$ et $s \in \tilde{S}$ avec $ab = s$; mais si $s = s_1 \cdots s_k$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $s_1, \dots, s_k \in S$, alors $s_k | b$, car $S \nmid a$. Ainsi, avec $b' := b/s_k \in A$ il vient $ab' = s_1 \cdots s_{k-1}$. Par suite, $ac = 1$ avec $c \in A$, i.e. $a \in A^\times$.

Exercice 3.35 : Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. D'abord, la proposition 3.31 montre que si f se factorise à travers $j_S : A \rightarrow S^{-1}A$, alors l'image de $\text{Spec } f$ est contenue dans U . De plus, la proposition 3.25 nous dit que si une telle factorisation existe, elle est unique. Il reste à montrer que, réciproquement, si l'image de $\text{Spec } f$ est contenue dans U , alors f se factorise à travers j_S . Pour cela, grâce à la proposition 3.25, il suffit de montrer que $f(s) \in B^\times$ pour tout $s \in S$. On raisonne par l'absurde : si $f(s)$ n'est pas inversible dans B , il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ tel que $f(s) \in \mathfrak{p}$ (corollaire 1.35(ii)); d'où, $s \in f^{-1}\mathfrak{p} = \text{Spec } f(\mathfrak{p})$. Mais par hypothèse on a $S \cap \text{Spec } f = \emptyset$ pour tout $\mathfrak{q}$ dans l'image de $\text{Spec } f$, contradiction.

Problème 3.36 : On raisonne par l'absurde; supposons donc que $j_U : A \rightarrow A_U$ représente la partie U . En particulier, j_U se factorise trivialement à travers A_U , donc la propriété universelle de j_U nous dit que

$$(*) \quad j_U^{-1}(\mathfrak{p}) = (\text{Spec } j_U)(\mathfrak{p}) \in U \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A_U.$$

En outre, comme l'image U' de $\text{Spec } A[X^{-1}]$ dans $\text{Spec } A$ ne contient pas $\mathfrak{m}$, la localisation $j_{U'} : A \rightarrow A[X^{-1}]$ se factorise à travers j_U ; comme $j_{U'}$ est injective, il en est de même pour j_U , et on peut donc voir A comme un sous-anneau de A_U .

Lemme 3.97. *Soit $a \in A_U$ et supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $X^n a = Y^m a = 0$. Alors a est un élément nilpotent de A_U .*

Démonstration. En vertu du théorème 1.50(ii), il suffit de montrer que a est contenu dans tout idéal premier de A_U . On raisonne par l'absurde : si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A_U$ et si $a \notin \mathfrak{p}$, il vient $X, Y \in \mathfrak{p}$. Par suite $X, Y \in j_U^{-1}(\mathfrak{p})$, donc $j_U^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$, et cela contredit (*). $\square$

Ensuite, notons $j_{U'|U} : A_U \rightarrow A_U[X^{-1}]$ la localisation; on remarque :

Lemme 3.98. *Si A_U existe, il existe aussi un unique isomorphisme de A -algèbres*

$$\omega_X : A[X^{-1}] \xrightarrow{\sim} A_U[X^{-1}] \quad \text{tel que} \quad \omega_X \circ j_{U'} = j_{U'|U} \circ j_U.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la composition $j_{U'|U} \circ j_U : A \rightarrow A_U[X^{-1}]$ représente la partie U' , car on sait déjà que $j_{U'}$ représente U' (exercice 3.35), et car cette propriété détermine $A[X^{-1}]$ à isomorphisme unique de A -algèbres près. Or, soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux qui admet une factorisation $f = \bar{f} \circ j_{U'|U} \circ j_U$; il faut montrer que cette factorisation est unique et que l'image de $\text{Spec } f$ est contenue dans U' . Pour cela, notons $g := \bar{f} \circ j_{U'|U}$; comme $f = g \circ j_U$, la propriété universelle de j_U nous dit que g est l'unique homomorphisme $A_U \rightarrow B$ qui factorise f . Ensuite, l'exercice 3.35 nous dit que $\bar{f}$ est l'unique homomorphisme $A_U[X^{-1}] \rightarrow B$ qui factorise g , et l'image de $\text{Spec } g$

est contenue dans $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A_U \mid X \notin \mathfrak{p}\}$. Cela montre déjà l'unicité de $\bar{f}$, et on voit aussi que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ on a $f^{-1}(\mathfrak{p}) = j_U^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{p}))$ et comme $X \notin g^{-1}(\mathfrak{p})$, on déduit que $X \notin f^{-1}(\mathfrak{p})$. En conclusion, l'image de $\text{Spec } f$ est dans $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid X \notin \mathfrak{p}\} = U'$, comme souhaité.

Réciproquement, si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme tel que l'image de $\text{Spec } f$ soit contenue dans U' , alors en particulier cette image est contenue dans U , et donc f se factorise à travers j_U et un homomorphisme $g : A_U \rightarrow B$; de l'autre côté, f se factorise à travers $A[X^{-1}]$ (encore grâce à l'exercice 3.35), et donc $f(X) \in B^\times$, d'où $g(X) \in B^\times$, et finalement g se factorise à travers $A_U[X^{-1}]$. $\square$

De la même façon on obtient aussi un unique isomorphisme de A -algèbres

$$\omega_Y : A[Y^{-1}] \xrightarrow{\sim} A_U[Y^{-1}].$$

Or, soit $b \in A_U$; par ce qui précède, on peut trouver $a, a' \in A$ et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{b}{1} = \frac{a'}{X^n} \quad \text{dans } A_U[X^{-1}] \quad \text{et} \quad \frac{b}{1} = \frac{a''}{Y^m} \quad \text{dans } A_U[Y^{-1}].$$

Donc, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$X^{n+p}b = X^p a' \quad \text{et} \quad Y^{m+q}b = Y^q a'' \quad \text{dans } A_U.$$

D'où : $Y^{m+q}X^p a' = X^{n+p}Y^q a''$ dans A_U . Mais on a déjà remarqué que j_U est injective, donc cette identité est déjà vérifiée dans le sous-anneau A de A_U , et il s'ensuit qu'il existe $c \in A$ tel que $a' = X^n c$ et $a'' = Y^m c$. On conclut que :

$$\frac{b-c}{1} = 0 \quad \text{dans } A_U[X^{-1}] \quad \text{et} \quad \frac{b-c}{1} = 0 \quad \text{dans } A_U[Y^{-1}].$$

Cela veut dire qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $X^r \cdot (b-c) = Y^s \cdot (b-c) = 0$ dans A_U . Par le lemme 3.97, on déduit finalement que $b-c$ est nilpotent dans A_U .

Or, soit $\mathcal{N}$ le radical nilpotent de A_U ; évidemment $j_U^{-1}\mathcal{N} = 0$, car A ne contient aucun élément nilpotent. Donc, la composition $\phi : A \rightarrow A_U/\mathcal{N}$ de j_U avec la projection $A_U \rightarrow A_U/\mathcal{N}$ est toujours injective; d'autre part, on vient de voir que tout $b \in A$ s'écrit sous la forme $c + x$ avec $x \in \mathcal{N}$ et $c \in A$. On conclut que ϕ est aussi surjective, et elle est donc un isomorphisme; en particulier, $\text{Spec } \phi : \text{Spec } A_U/\mathcal{N} \rightarrow \text{Spec } A$ doit être bijective. Mais évidemment $\text{Spec } \phi$ se factorise à travers $\text{Spec } j_U$, donc son image est contenue dans celle de cette dernière; cela contredit (*) et achève la solution du problème.

Exercice 3.37, partie (i) : Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ un idéal premier minimal, et posons $S := A \setminus \mathfrak{p}$, $T := f(S)$; alors S et T sont des parties multiplicatives de A et respectivement B , et d'après la proposition 3.25 la composition de f avec la localisation $j' : B \rightarrow B_{\mathfrak{p}} := T^{-1}B$ se factorise à travers la localisation $j : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ et un unique homomorphisme d'anneaux $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$. On déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Spec } j'} & \text{Spec } B \\ \text{Spec } f_{\mathfrak{p}} \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Spec } j} & \text{Spec } A. \end{array}$$

De plus, $\text{Spec } j$ identifie $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ avec la partie $\{\mathfrak{p}\} \subset \text{Spec } A$ (exemple 3.32(iii)). Donc, afin de montrer que $\mathfrak{p} \in \phi(\text{Spec } B)$, il suffit de vérifier que $\text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$, i.e. que $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$ (théorème 1.34), et comme $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$, on est ramené à prouver que $f_{\mathfrak{p}}$ est injectif. Ainsi, soit $a/s \in \text{Ker } f_{\mathfrak{p}}$; d'après la remarque 3.27(i), il existe $s' \in S$ tel que $f(s') \cdot f(a) = 0$ dans B ; comme f est injectif, il vient $s'a = 0$ dans A , d'où $a/s = 0$ dans $A_{\mathfrak{p}}$, toujours par la remarque 3.27(i), et l'assertion en découle aussitôt.

Ensuite, d'après l'exercice 1.61(ii), tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal ; par suite, la partie des idéaux premiers minimaux de A est dense dans $\text{Spec } A$, et *a fortiori* il en est de même pour la partie $\phi(\text{Spec } B)$.

Partie (ii) : Soit $I := \text{Ker } f$; puisque f se factorise par la projection $A \rightarrow A/I$, l'application ϕ se factorise à travers l'inclusion $V(I) \rightarrow \text{Spec } A$ (remarque 1.45(i)). Comme $\phi(\text{Spec } B)$ est dense dans $\text{Spec } A$, il vient $V(I) = \text{Spec } A$, donc $I \subset \mathcal{N}(A)$ (corollaire 1.51(i)). Par hypothèse $\mathcal{N}(A) = 0$, d'où $I = 0$, *i.e.* f est injectif.

Exercice 3.38 : On peut supposer que S soit une partie multiplicative. Evidemment $S^{-1}(I+J) \subset S^{-1}I + S^{-1}J$; réciproquement, si $x \in S^{-1}I + S^{-1}J$, il existe $a \in I$, $b \in J$ et $s, t \in S$ tels que $x = (a/s) + (b/t) = (at+bs)/st$ et $at+bs \in I+J$, d'où l'inclusion opposée. L'identité $S^{-1}(IJ) = S^{-1}I \cdot S^{-1}J$ suit aussitôt des définitions. Ensuite, évidemment $S^{-1}(I \cap J) \subset (S^{-1}I) \cap (S^{-1}J)$. Pour voir l'inclusion opposée, supposons que $a/s = b/t$ pour quelque $a \in I$, $b \in J$ et $s, t \in S$; par suite $atu = bsu$ pour quelque $u \in S$, et donc $atu \in I \cap J$, d'où $a/s = (atu)/(stu) \in S^{-1}(I \cap J)$. En dernier lieu, on voit aisément que $S^{-1}(\text{rad}(I)) \subset \text{rad}(S^{-1}I)$; d'autre part, si $(a/s)^n \in S^{-1}I$ pour quelque $a \in A$, quelque $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $b \in I$ et $s \in S$ avec $a^n/s^n = b/t$, d'où $a^n tu = bs^n u$ pour quelque $u \in S$, donc $(atu)^n \in I$, et finalement $a/s = (atu)/(stu) \in S^{-1}(\text{rad}(I))$. On a $\mathcal{N}(A) = \text{rad}(0)$ (théorème 1.50(i)), et de même pour $\mathcal{N}(S^{-1}A)$, donc la cinquième identité découle de la précédente.

Exercice 3.39 : On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, l'assertion est triviale, et si $n = 1$, l'assertion découle de l'exercice 1.46(ii). Donc, soit $n \geq 2$, et notons $j : K[T_n] \rightarrow K[T_1, \dots, T_n]$ l'inclusion. On va étudier les fibres de l'application

$$\phi := \text{Spec } j : \text{Spec } K[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{Spec } K[T_n].$$

D'abord, si $\mathfrak{m} \subset K[T_n]$ est un idéal maximal, soit $P \in K[T_n]$ l'unique polynôme irréductible unitaire qui engendre $\mathfrak{m}$; donc $E := K[T_n]/(P)$ est une extension algébrique finie de K (de degré égal au degré de P). Or, soit $\mathfrak{p} \subset K[T_1, \dots, T_n]$ un idéal premier tel que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$; comme $\mathfrak{m}$ est maximal, on déduit que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap K[T_n] = \phi(\mathfrak{p})$. Autrement dit, $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ est l'ensemble des idéaux premiers de $K[T_1, \dots, T_n]$ qui contiennent $\mathfrak{m}$. Par la bijection du lemme 1.7, ce dernier est identifié naturellement avec $\text{Spec } K[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{m}K[T_1, \dots, T_n] = \text{Spec } E[T_1, \dots, T_{n-1}]$. Par l'hypothèse de récurrence, on voit que toute chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est de longueur $\leq 2^{n-1}$.

Ensuite, soit $\mathfrak{q} := \{0\}$, le point générique de $\text{Spec } K[T_n]$. La fibre $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $K[T_1, \dots, T_n]$ tels que $\mathfrak{p} \cap K[T_n] = \{0\}$; si l'on pose $S := K[T_n] \setminus \{0\}$, on a $S^{-1}K[T_n] = K(T_n) := \text{Frac } K[T_n]$, et on peut aussi dire que

$$\phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } K[T_1, \dots, T_n] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Par la proposition 3.31, ce dernier est identifié naturellement avec

$$\text{Spec } S^{-1}K[T_1, \dots, T_n] = \text{Spec } K(T_n)[T_1, \dots, T_{n-1}].$$

Par l'hypothèse de récurrence, on déduit que, aussi dans ce cas, toute chaîne strictement croissante dans $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ est de longueur bornée par 2^{n-1} .

Soit maintenant $\mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_k$ une suite strictement croissante d'idéaux premiers de $K[T_1, \dots, T_n]$; on déduit une suite $\phi(\mathfrak{p}_1) \subset \dots \subset \phi(\mathfrak{p}_k)$ d'idéaux premiers de $K[T_n]$. Si cette dernière suite est constante, on voit que la suite des $\mathfrak{p}_i$ est contenue dans $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}_1))$, d'où $k \leq 2^{n-1}$. On peut donc supposer que $\phi(\mathfrak{p}_1) = \{0\}$ et $\mathfrak{m} := \phi(\mathfrak{p}_k)$ est un idéal maximal. Dans ce cas, la suite des $\mathfrak{p}_i$ est contenue dans $\phi^{-1}(\{0\}) \cup \phi^{-1}(\mathfrak{m})$, et donc sa longueur est $\leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$.

Remarque 3.99. L'estimation fournie par l'exercice 3.39 est loin d'être optimale : en fait, on montrera que $\dim K[T_1, \dots, T_n] = n$: voir le problème 6.82. On étudiera ces questions plus systématiquement dans la section 11.2.

Exercice 3.40 : Soit $\tilde{S} \subset A$ la plus petite partie multiplicative contenant S ; évidemment tout élément de $\tilde{S}$ est homogène. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $B_\gamma \subset B$ la partie des fractions a/s telles que $a \in A_\delta, s \in \tilde{S} \cap A_\lambda$, pour $\delta, \lambda \in \Gamma$ avec $\gamma = \delta - \lambda$. Noter que si $a/s, a'/s' \in B_\gamma$ avec $a \in A_\delta, a' \in A_{\delta'}, s \in \tilde{S} \cap A_\lambda, s' \in \tilde{S} \cap A_{\lambda'}$, et $\delta - \lambda = \delta' - \lambda' = \gamma$, alors $\delta'' := \delta + \lambda' = \delta' + \lambda$, donc $a/s + a'/s' = (as' + a's)/(ss')$ avec $as' + a's \in A_{\delta''}$ et $ss' \in \tilde{S} \cap A_{\lambda''}$ avec $\lambda'' := \lambda + \lambda'$, et on a $\delta'' - \lambda'' = \gamma$, par suite $a/s + a'/s' \in B_\gamma$. Cela montre que chaque B_γ est un sous-groupe additif de B ; en outre, évidemment $B = \sum_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, et $B_\gamma \cdot B_{\gamma'} \subset B_{\gamma+\gamma'}$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Soient ensuite $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$ deux à deux distincts, et $b_i \in B_{\gamma_i}$ pour $i = 1, \dots, k$, tels que $b_1 + \dots + b_k = 0$. Écrivons $b_i = a_i/s_i$ avec $a_i \in A_{\delta_i}, s_i \in \tilde{S} \cap A_{\lambda_i}$ et $\gamma_i = \delta_i - \lambda_i$ pour $i = 1, \dots, k$, et soit $s := s_1 \cdots s_k \in \tilde{S} \cap A_\lambda$, avec $\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_k$. Ainsi, $b_i = a'_i/s$ avec $a'_i := a_i s/s_i \in A_{\delta_i + \lambda - \lambda_i}$, et noter que $(\delta_i + \lambda - \lambda_i) - \lambda = \gamma_i$, pour tout $i = 1, \dots, k$. Ainsi, quitte à remplacer a_i et s_i par a'_i et s , on peut supposer que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$ et $s_1 = \dots = s_k$; il existe alors $t \in \tilde{S}$ tel que $t(a_1 + \dots + a_k) = 0$ dans A (remarque 3.27(i)), et comme t est homogène et $\delta_1, \dots, \delta_k$ sont deux à deux distincts, il vient alors $ta_1 = \dots = ta_k = 0$ dans A , d'où $b_1 = \dots = b_k = 0$. Cela montre que $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, et on voit aussitôt que la Γ -graduation sur B ainsi obtenue est l'unique telle que j soit un morphisme d'anneaux Γ -gradués.

Exercice 3.41 : Soient $(B, f : A \rightarrow B)$ une A -algèbre, $(f_{S'} : S'^{-1}A \rightarrow B \mid S' \in \mathcal{S})$ un co-cône de sommet B ; pour tout $S' \in \mathcal{S}$, l'existence de l'homomorphisme de A -algèbres $f_{S'}$ équivaut à la condition : $f(S') \subset B^\times$. Par suite $f(S) \subset B^\times$, d'où un unique homomorphisme $f_S : S^{-1}A \rightarrow B$ de A -algèbres; en particulier, $f_{S'} = f_S \circ j_{S'}$ pour tout $S' \in \mathcal{S}$, d'où l'assertion.

Problème 3.53, partie (i) : Si f est surjective, soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ un idéal premier arbitraire; l'application $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : k(\mathfrak{p})^n \rightarrow k(\mathfrak{p})^m$ est encore surjective (par la proposition 3.11). Mais cette dernière est une application $k(\mathfrak{p})$ -linéaire d'un $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel de dimension n dans un autre de dimension m , donc $n \geq m$.

Si f est bijective, $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f$ est encore bijective (car si g est l'inverse de f , $k(\mathfrak{p}) \otimes_A g$ est l'inverse de $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f$), donc on doit avoir $n = m$.

Soit maintenant f injective, et on souhaite montrer que $n \leq m$. On raisonne par l'absurde : si $n > m$, on pourrait composer f avec l'inclusion

$$j : A^m \rightarrow A^n \quad (a_1, \dots, a_m) \mapsto (a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0)$$

pour obtenir $g := j \circ f : A^n \rightarrow A^n$ toujours injective, et dont l'image est contenue dans le noyau de la projection $\pi_n : A^n \rightarrow A$ sur la dernière coordonnée. Par Cayley-Hamilton, g est racine d'un polynôme unitaire $P(T) \in A[T]$. On peut supposer que P soit de degré minimal k , et dans ce cas on remarque que $a := P(0) \neq 0$: en effet, on peut écrire $P(T) = T \cdot Q(T) + a$ pour un polynôme Q unitaire de degré $k-1$; si $a = 0$, cela donne $g \circ Q(g) = 0$, mais comme g est injectif, on aurait déjà $Q(g) = 0$, contradiction. Soit maintenant $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n ; on calcule :

$$0 = P(g)(e_n) = g \circ Q(g)(e_n) + a \cdot e_n.$$

Mais cela est absurde, car $g \circ Q(g)(e_n) \in \text{Ker } \pi_n$, alors que $\pi_n(a \cdot e_n) = a \neq 0$.

Partie (ii) : On munit M d'une structure de $A[T]$ -module telle que

$$(a_n T^n + \dots + a_0) \cdot m := a_n \cdot g^n(m) + \dots + a_0 m$$

pour tout $a_n T^n + \dots + a_0 \in A[T]$ et tout $m \in M$ (ici, $g^k := g \circ \dots \circ g$, la composition de k copies de g , pour tout $k \in \mathbb{N}$). Comme g est surjective, on a $TM = M$, donc le corollaire 3.48 nous dit qu'il existe $x \in A[T]$ tel que $x - 1 \in TA[T]$ et $xM = 0$. Disons $x = 1 + T \cdot P(T)$; or, si $g(m) = 0$, on obtient

$$0 = x \cdot m = (1 + T \cdot P(T))(m) = m + P(g) \circ g(m) = m.$$

Cette preuve est reprise de l'article [70] de W. Vasconcelos.

Partie (iii) : Par hypothèse, il existe $x_1, \dots, x_n \in h(M) \subset N$ dont les classes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ sont une base du $k(\mathfrak{m})$ -espace vectoriel $N/\mathfrak{m}N$; par la proposition 3.51, il s'ensuit que $x_\bullet$ est un système de générateurs de N , d'où l'assertion.

Exercice 3.56 : En vertu des hypothèses et de la compacité de $\text{Spec } A$, on peut trouver $f_1, \dots, f_n \in A$ tels que M_{f_i} soit de type fini pour $i = 1, \dots, n$ et $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec } A_{f_i}$. Pour chaque $i = 1, \dots, n$ choisissons un système fini $(x_{ij}/f_i^{d_j} \mid j = 1, \dots, k_i)$ de générateurs de M_{f_i} , et soit $\Sigma := \{x_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i\}$. On dénote par $(e_x \mid x \in \Sigma)$ la base canonique de $A^{(\Sigma)}$ et on considère l'application A -linéaire $\phi : A^{(\Sigma)} \rightarrow M$ telle que $\phi(e_x) := x$ pour tout $x \in \Sigma$. Il s'ensuit aisément que $\phi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}}^{(\Sigma)} \rightarrow M_{\mathfrak{p}}$ est surjective pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, donc ϕ est surjective, par la proposition 3.55; cela montre que M est de type fini. Si de plus chaque M_{f_i} est un A_{f_i} -module de présentation finie, $(\text{Ker } \phi)_{f_i}$ est un A_{f_i} -module de type fini pour $i = 1, \dots, n$, par l'exercice 2.110(iv), donc $\text{Ker } \phi$ est un A -module de type fini, par ce qui précède, et finalement, M est de présentation finie.

Exercice 3.61 : La loi de multiplication de la A -algèbre $(B_1 \otimes_A B_2) \otimes_A B_3$ est l'unique application A -bilinéaire telle que

$$((b_1 \otimes b_2) \otimes b_3) \cdot ((b'_1 \otimes b'_2) \otimes b'_3) = (b_1 b'_1 \otimes b_2 b'_2) \otimes b_3 b'_3 \quad \forall b_i, b'_i \in B_i \ (i = 1, 2, 3).$$

La loi de multiplication de $B_1 \otimes_A (B_2 \otimes_A B_3)$ est définie de même (quitte à changer la position des parenthèses). L'assertion concernant le deuxième isomorphisme suit aussitôt; on raisonne de même pour l'autre isomorphisme.

Exercice 3.63, partie (i) : On raisonne comme pour la solution de l'exercice 3.61 : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : L'unicité est claire. Pour montrer l'existence, remarquons que la proposition 3.18(i) et l'exercice 3.6(ii) fournissent des isomorphismes de D -modules

$$(B \otimes_A C) \otimes_C D \xrightarrow{\sim} B \otimes_A (C \otimes_C D) \xrightarrow{\sim} B \otimes_A D \quad (b \otimes c) \otimes d \mapsto b \otimes (c \otimes d) \mapsto b \otimes \phi(c) \cdot d$$

et on voit aisément que la composition est un homomorphisme de D -algèbres.

Partie (iii) : Considérons les applications ensemblistes

$$\chi_\Lambda : \Lambda \rightarrow A[X_\bullet] := A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda] \quad \text{et} \quad \chi'_\Lambda : \Lambda \rightarrow B[X_\bullet] := B[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$$

telles que $\lambda \mapsto X_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et soit aussi $1 \otimes \chi_\Lambda : \Lambda \rightarrow B \otimes_A A[X_\bullet]$ l'application ensembliste telle que $\lambda \mapsto 1 \otimes X_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Rappelons d'abord que le couple $(\chi_\Lambda, B[X_\bullet])$ est universel pour le foncteur $[-]^\Lambda : B - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$ (voir l'exemple 2.6); compte tenu du lemme 2.4(i), il suffit donc de montrer que le couple $(1 \otimes \chi_\Lambda, B \otimes_A A[X_\bullet])$ est aussi universel pour ce même foncteur. Or, soient $\iota_A : A \rightarrow A[X_\bullet]$ et $f : A \rightarrow B$ les morphismes structurels des A -algèbres $A[X_\bullet]$, respectivement B , et $\iota_B : B \rightarrow B \otimes_A A[X_\bullet]$ le morphisme structurel de la B -algèbre $B \otimes_A A[X_\bullet]$; pour toute B -algèbre $(C, g : B \rightarrow C)$, les homomorphismes de B -algèbres $h : B \otimes_A A[X_\bullet] \rightarrow C$ sont les homomorphismes de A -algèbres tels que $h \circ \iota_B = g$. D'autre part, la donnée d'un tel homomorphisme h de A -algèbres équivaut à celle d'un couple $(h_1 : A[X_\bullet] \rightarrow C, h_2 : B \rightarrow C)$ d'homomorphismes de A -algèbres : plus précisément, si $\iota_{A[X_\bullet]} : A[X_\bullet] \rightarrow B \otimes_A A[X_\bullet]$ est le morphisme structurel de la $A[X_\bullet]$ -algèbre $B \otimes_A A[X_\bullet]$, on a $h_1 = h \circ \iota_{A[X_\bullet]}$ et $h_2 = h \circ \iota_B$. On conclut que la donnée d'un homomorphisme de B -algèbres $h : B \otimes_A A[X_\bullet] \rightarrow C$ équivaut à celle de l'homomorphisme de A -algèbres $h \circ \iota_{A[X_\bullet]} : A[X_\bullet] \rightarrow C$. Evidemment $\iota_{A[X_\bullet]} \circ \chi_\Lambda = 1 \otimes \chi_\Lambda$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Pour toute A' -algèbre $(B, g : A' \rightarrow B)$ et toute A -algèbre $(C, h : A \rightarrow C)$ on doit exhiber une bijection naturelle :

$$A - \text{Alg}(C, B_{[f]}) \xrightarrow{\sim} A' - \text{Alg}(A' \otimes_A C, B).$$

Or, par définition, un homomorphisme $\phi : C \rightarrow B_{[f]}$ de A -algèbres est la donnée d'un diagramme commutatif d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

et il existe alors un unique homomorphisme d'anneaux $\phi' : A' \otimes_A C \rightarrow B$ tel que $\phi' \circ i_C = \phi$ et $\phi' \circ i_{A'} = g$ (avec $C \xrightarrow{i_C} A' \otimes_A C \xleftarrow{i_{A'}} A'$ les homomorphismes canoniques) ; cette dernière identité signifie que ϕ' est un homomorphisme de A' -algèbres. La naturalité de l'association $\phi \mapsto \phi'$ est vérifiée par inspection directe.

Exercice 3.64, partie (ii.a) : L'isomorphisme $(M \otimes_A M')_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M'_{\mathfrak{p}}$ du corollaire 3.44 pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, montre que $\text{Supp}_A(M \otimes_A M') \subset (\text{Supp}_A M) \cap (\text{Supp}_A M')$ pour toute paire de A -modules M, M' . Si M et M' sont de type fini, on a l'inclusion opposée grâce à la remarque 3.58(ii) et aux isomorphismes de $k(\mathfrak{p})$ -espaces vectoriels $(M \otimes_A M')(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} M(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\mathfrak{p})} M'(\mathfrak{p})$ (proposition 3.20).

Partie (ii.b) : Soient $\mathfrak{q} \subset B$ un idéal premier, et $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q})$; la proposition 3.18(i) et l'exercice 3.6(ii) fournissent des isomorphismes $k(\mathfrak{q})$ -linéaires :

$$(B \otimes_A M)(\mathfrak{q}) = k(\mathfrak{q}) \otimes_B (B \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} (k(\mathfrak{q}) \otimes_B B) \otimes_A M \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{q}) \otimes_A M$$

et l'extension de corps résiduels $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{q})$ induit une injection $M(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \otimes_A M \rightarrow k(\mathfrak{q}) \otimes_A M$, car $k(\mathfrak{q})$ est trivialement un $k(\mathfrak{p})$ -module libre ; en outre, il est clair que l'image de $M(\mathfrak{p})$ engendre le $k(\mathfrak{q})$ -espace vectoriel $k(\mathfrak{q}) \otimes_A M$. Ainsi, $M(\mathfrak{p}) = 0 \Leftrightarrow (B \otimes_A M)(\mathfrak{q}) = 0$, et on conclut encore avec la remarque 3.58(ii).

Partie (i) : Cela découle de (ii), et de l'isomorphisme B -linéaire

$$(B \otimes_{B'} M') \otimes_B (B \otimes_{B'} M'') \xrightarrow{\sim} M$$

fourni par la remarque 3.60(iii).

Exercice 3.66, partie (i) : On définit les éléments $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$ de A , et on remarque que

$$e_1 + e_2 = 1 \quad e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Par suite $e_1 M + e_2 M = M$ et $e_1 M \cap e_2 M = 0$, car si $e_1 m = e_2 m'$, on a $e_1 m = e_1^2 m = e_1 e_2 m' = 0$. Donc

$$M = e_1 M \oplus e_2 M.$$

De plus, on définit des structures de A_i -module sur $e_i M$ pour $i = 1, 2$, par :

$$a_1 \cdot e_1 m := (a_1, 0) \cdot m \quad \text{et} \quad a_2 \cdot e_2 \cdot m := (0, a_2) \cdot m \quad \forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2$$

et on voit aisément que la structure de A -module sur $e_i M$ est déduite de cette structure de A_i -module, après restriction des scalaires suivant la projection $\pi_i : A \rightarrow A_i$. Cela montre que tout A -module est (naturellement isomorphe au) produit direct d'un A_1 -module et un A_2 -module. De plus, toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ se restreint en des applications $e_i M \rightarrow e_i N$ qui sont évidemment A_i -linéaires.

Partie (ii) : La partie (i) montre, en particulier, que tout idéal de A est le produit $I_1 \times I_2$ d'un idéal de A_1 et un idéal de A_2 . Un idéal de telle forme est premier si et seulement si $A_1/I_1 \times A_2/I_2$ est un anneau intègre. Evidemment, cette dernière condition est satisfaite précisément dans les deux cas suivants : soit $I_1 \in \text{Spec } A_1$ et $I_2 = A_2$, soit $I_1 = A_1$ et $I_2 \in \text{Spec } A_2$; dans le premier cas, on a $I_1 \times I_2 = \pi_1^{-1} I_1$, et dans le deuxième cas on a $I_1 \times I_2 = \pi_2^{-1} I_2$. Cela achève de montrer que $\text{Spec } A$ est la réunion disjointe $\text{Spec } A_1 \sqcup \text{Spec } A_2$. De plus, on voit que chaque partie $\text{Spec } A_i$ est ouverte et fermée dans $\text{Spec } A$, et comme la projection π_i est surjective, on sait que la topologie de Zariski de $\text{Spec } A_i$ coïncide avec la topologie induite par celle de $\text{Spec } A$ via $\text{Spec } \pi_i$.

(remarque 1.45(i)). On conclut que la topologie de $\text{Spec } A$ est bien la réunion disjointe des topologies de $\text{Spec } A_1$ et $\text{Spec } A_2$.

Partie (iii) : Par hypothèse U_1 et U_2 sont ouverts et fermés à la fois, donc il existe des idéaux $I_1, I_2 \subset A$ tels que $U_i = V(I_i)$ pour $i = 1, 2$. La condition $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implique que $I_1 + I_2 = A$, donc par le lemme chinois, l'homomorphisme naturel

$$A \rightarrow A/I_1 \times A/I_2$$

est surjectif. Son noyau est $I_1 \cap I_2$, et on sait que $V(I_1 \cap I_2) = U_1 \cup U_2 = \text{Spec } A$, donc $I_1 \cap I_2 \subset \mathcal{N}(A)$, et tout élément de $I_1 \cap I_2$ est nilpotent, par le théorème 1.50(ii). On arrive donc à la question générale suivante. Soit A un anneau, $I \subset \mathcal{N}(A)$ un idéal de A tel que A/I se décompose sous la forme $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, le produit de deux anneaux ; montrer que l'on peut relever cette décomposition en une décomposition $A = A_1 \times A_2$, de sorte que $I = I_1 \times I_2$ pour des idéaux $I_i \subset A_i$, et $\bar{A}_i = A_i/I_i$, avec $i = 1, 2$. Or, la preuve de (i) a montré que la donnée d'une telle décomposition équivaut à celle d'un élément *idempotent* $e_1 \in A$ (et de son complémentaire $e_2 := 1 - e_1$) : à savoir, la décomposition fournit les idempotents $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et réciproquement, un idempotent e_1 fournit les idéaux $A_i := e_i A$ pour $i = 1, 2$, et ces derniers sont en effet des anneaux quotients de A , avec e_i pour unité, la projection $A \rightarrow A_i$ étant donnée par : $a \mapsto e_i a$ pour tout $a \in A$. Donc, notre question devient la suivante : avec les hypothèses ci-dessus sur I , soit $\bar{e}_1 \in A/I$ un élément idempotent ; montrer qu'il existe un idempotent $e_1 \in A$ dont l'image dans A/I coïncide avec $\bar{e}_1$. Voici une vieille astuce pour construire un tel relèvement : on choisit d'abord un représentant $x \in A$ pour la classe de $\bar{e}_1$; par construction, $a := x^2 - x \in I$, donc $a^n = 0$ pour un entier $n \geq 1$. On pose $y := 1 - x$, d'où $x^n y^n = 0$. On écrit

$$1 = (x + y)^{2n-1} = e + e'$$

avec

$$e := \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} x^{2n-1-i} y^i \quad e' := \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} x^i y^{2n-1-i}.$$

Le produit $e \cdot e'$ est une combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire des termes $x^{2n-1-i+j} y^{2n-1-j+i}$ avec $0 \leq i, j \leq n-1$. Mais tous ces termes sont nuls, donc $e \cdot e' = 0$, et on déduit

$$e = e \cdot (e + e') = e^2$$

i.e. e est idempotent. La classe de e dans A/I est $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} \bar{e}^{2n-1-i} \cdot (1-\bar{e})^i = \bar{e}^{2n-1} = \bar{e}$, donc e est le relèvement cherché.

Remarque 3.100. Soient A, B deux anneaux (unitaires), et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme *non unitaire* d'anneaux, i.e. $e := f(1)$ n'est pas forcément l'unité de B . On a

$$e^2 = f(1) \cdot f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) = e$$

donc e est un idempotent de B , et la discussion ci-dessus montre que B se décompose sous la forme $B = B_1 \times B_2$, de sorte que e correspond à l'élément $(1, 0)$ sous cette identification. Par suite f correspond à la donnée d'un homomorphisme *unitaire* d'anneaux $f_1 : A \rightarrow B_1$ et de l'homomorphisme *non unitaire* $f_2 : A \rightarrow B_2$ tel que $f_2(a) = 0$ pour tout $a \in A$. On voit donc que l'omission de la condition $f(1) = 1$ pour les homomorphismes d'anneaux (unitaires) ne conduit pas à un élargissement intéressant de l'algèbre commutative.

Exercice 3.67 : On reprend les notations de l'exemple 3.65. Soient $\sigma, \tau \in G$, tels que $\tau^{-1} \circ \sigma \in H$, et $x := \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in E \otimes_K F$ un élément ; on remarque :

$$x \in \mathfrak{m}_\sigma \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sigma(b_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \cdot \tau(b_i) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{m}_\tau.$$

Remarquons aussi que $\mathfrak{m}_\sigma \cap E \otimes_K F$ est le noyau de la restriction $\pi'_\sigma : E \otimes_K F \rightarrow E$ de π_σ , et π'_σ est évidemment surjective, pour tout $\sigma \in G$. Donc $\mathfrak{m}_\sigma \cap E \otimes_K F$ est un idéal maximal de $E \otimes_K F$ qui ne dépend que de la classe $\bar{\sigma}$ de σ dans G/H , et que l'on notera

$\mathfrak{n}_{\bar{\sigma}}$. On a déjà vu que $\bigcap_{\sigma \in G} \mathfrak{m}_{\sigma} = 0$, donc on peut trouver une partie minimale $S \subset G/H$ telle que $\bigcap_{\bar{\sigma} \in S} \mathfrak{n}_{\bar{\sigma}} = 0$. Par le lemme chinois, on déduit un isomorphisme de E -algèbres

$$E \otimes_K F \xrightarrow{\sim} E^{[S]}.$$

Il reste donc à montrer que $S = G/H$. Mais on a $d = \dim_E E \otimes_K F = \dim_E E^{[S]}$ (voir l'exercice 3.16(ii)), et G/H a cardinalité d , d'où l'assertion.

Problème 3.69, partie (i) : Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite finie $P_1, \dots, P_r \in A[X_1, \dots, X_n]$ telle que $B \simeq A[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_r)$. De même, on a $k \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme B -linéaire $B^k/N \xrightarrow{\sim} M$, pour un sous-module $N \subset B^k$ engendré par un système fini $x_1, \dots, x_t$; pour tout $i = 1, \dots, t$ on a alors des polynômes $Q_{i1}, \dots, Q_{ik} \in A[X_1, \dots, X_n]$ tels que $x_i = (\bar{Q}_{i1}, \dots, \bar{Q}_{ik})$ (où l'on désigne par $\bar{Q}_{ij} \in B$ la classe de Q_{ij} , pour tout $j = 1, \dots, k$). Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $j_{\lambda,n} := j_{\lambda}^A \otimes_{A_0} A_0[X_1, \dots, X_n] : A_{\lambda}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$; il existe alors $\lambda \in \Lambda$ et une suite de polynômes

$$P_{\lambda,1}, \dots, P_{\lambda,r}, Q_{\lambda,1,1}, \dots, Q_{\lambda,tk} \in A_{\lambda}[X_1, \dots, X_n]$$

tels que $P_i = j_{\lambda,n}(P_{\lambda,i})$ pour $i = 1, \dots, r$ et $Q_{il} = j_{\lambda,n}(Q_{\lambda,il})$ pour $i = 1, \dots, t$ et $l = 1, \dots, k$. Posons

$$B_{\lambda} := A_{\lambda}[X_1, \dots, X_n]/(P_{\lambda,1}, \dots, P_{\lambda,r}).$$

On a l'isomorphisme de A -algèbres : $A \otimes_{A_{\lambda}} B_{\lambda} \xrightarrow{\sim} B$ de l'exemple 3.62; de plus, pour tous $i \leq t$ et $j \leq k$, soit $\bar{Q}_{\lambda,ij} \in B_{\lambda}$ la classe de $Q_{\lambda,ij}$, et posons

$$x_{\lambda i} := (\bar{Q}_{\lambda,i1}, \dots, \bar{Q}_{\lambda,ik}) \in B_{\lambda}^k.$$

Soient $N_{\lambda} \subset B_{\lambda}^k$ le B_{λ} -sous-module engendré par $x_{\lambda 1}, \dots, x_{\lambda t}$, et $M_{\lambda} := B_{\lambda}^k/N_{\lambda}$. On déduit un isomorphisme B -linéaire évident $B \otimes_{B_{\lambda}} M_{\lambda} \xrightarrow{\sim} M$.

Partie (ii) : Noter que B représente la limite directe du système filtrant de A_0 -algèbres $(B_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$, et $(j_{\lambda}^B := j_{\lambda}^A \otimes_{A_0} B_0 : B_{\lambda} \rightarrow B \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône universel (exercice 3.63(iv) et proposition 2.49(ii)); par suite, le B_0 -module $N := B \otimes_{B_0} N_0$ représente la colimite du système de B_0 -modules $N_{\bullet} := (N_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$, avec le co-cône universel $(j_{\lambda}^N := j_{\lambda}^B \otimes_{B_0} N_0 : N_{\lambda} \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ (exercice 3.14). D'après l'exercice 3.17(i), on a alors une bijection naturelle

$$(\dagger) \quad \lim_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Hom}_{B_0}(M_0, N_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{B_0}(M_0, N).$$

Soit $j_0^M : M_0 \rightarrow M := B \otimes_{B_0} M_0$ l'application B_0 -linéaire avec $j_0^M(x) := 1 \otimes x$ pour tout $x \in M_0$; par suite, il existe $\lambda \in \Lambda$ et une application B_0 -linéaire $v : M_0 \rightarrow N_{\lambda}$ tels que $j_{\lambda}^N \circ v = u \circ j_0^M$. Sous l'adjonction du 3.2.2, v correspond à l'application B_{λ} -linéaire $u_{\lambda} : M_{\lambda} \rightarrow N_{\lambda}$ telle que $u_{\lambda}(1 \otimes x) = v(x)$ pour tout $x \in M_0$. Une inspection directe montre que u_{λ} convient : les détails sont laissés au lecteur.

Partie (iii) : On raisonne comme pour (ii) : d'abord, on a le co-cône universel de A_0 -algèbres $(j_{\lambda}^C := j_{\lambda}^A \otimes_{A_0} C_0 : C_{\lambda} \rightarrow C \mid \lambda \in \Lambda)$, d'où une bijection naturelle

$$(\dagger\dagger) \quad \lim_{\lambda \in \Lambda} A_0 - \operatorname{Alg}(B_0, C_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} A_0 - \operatorname{Alg}(B_0, C)$$

(exercice 3.17(ii)). Soit $j_0^B : B_0 \rightarrow B$ l'homomorphisme de A_0 -algèbres tel que $j_0^B(b) := 1 \otimes b$ pour tout $b \in B_0$; il existe alors $\lambda \in \Lambda$ et un homomorphisme de A_0 -algèbres $g : B_0 \rightarrow C_{\lambda}$ tel que $j_{\lambda}^C \circ g = f \circ j_0^B$. Par l'adjonction de l'exercice 3.63(iv), on déduit un homomorphisme de A_{λ} -algèbres $f_{\lambda} : B_{\lambda} \rightarrow C_{\lambda}$ qui convient.

Partie (iv) : Soient $v, v' : M_0 \rightarrow N_{\lambda}$ les applications B_0 -linéaires telles que $v(x) := u_{\lambda}(1 \otimes x)$ et $v'(x) := u'_{\lambda}(1 \otimes x)$ pour tout $x \in M_0$; pour tout $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, notons aussi par $j_{\lambda\mu}^N : N_{\lambda} \rightarrow N_{\mu}$ l'homomorphisme de transition du système $N_{\bullet}$. Par hypothèse, $j_{\lambda}^N \circ v = j_{\lambda}^N \circ v'$; la bijection $(\dagger)$ entraîne alors qu'il existe $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, tel que $j_{\lambda\mu}^N \circ v = j_{\lambda\mu}^N \circ v'$; cela équivaut à l'identité $B_{\mu} \otimes_{B_{\lambda}} u_{\lambda} = B_{\mu} \otimes_{B_{\lambda}} u'_{\lambda}$. De même, à l'aide

de la bijection $(\dagger\dagger)$ on vérifie l'assertion concernant f_λ et f'_λ : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (v) : Evidemment, si $u_\lambda : M_\lambda \xrightarrow{\sim} N_\lambda$ est un isomorphisme B_λ -linéaire pour quelque $\lambda \in \Lambda$, alors $B \otimes_{B_\lambda} u_\lambda : M \xrightarrow{\sim} N$ est un isomorphisme B -linéaire. Réciproquement, soit $u : M \xrightarrow{\sim} N$ un isomorphisme B -linéaire ; d'après (ii) il existe $\lambda \in \Lambda$ et des applications B_λ -linéaires $u_\lambda : M_\lambda \rightarrow N_\lambda, v_\lambda : N_\lambda \rightarrow M_\lambda$ telles que $B \otimes_{B_\lambda} u_\lambda = u$ et $B \otimes_{B_0} v_\lambda = u^{-1}$. Il vient $B \otimes_{B_\lambda} (v_\lambda \circ u_\lambda) = B \otimes_{B_\lambda} Id_{M_\lambda}$; d'après (iv) il existe alors $\mu \geq \lambda$ dans Λ tel que $B_\mu \otimes_{B_\lambda} (v_\lambda \circ u_\lambda) = Id_{M_\mu}$, et de même on peut supposer que $B_\mu \otimes_{B_\lambda} (u_\lambda \circ v_\lambda) = Id_{N_\mu}$. Cela montre que $B_\mu \otimes_{B_\lambda} u_\lambda : M_\mu \rightarrow N_\mu$ est un isomorphisme dont l'inverse est $B_\mu \otimes_{B_\lambda} v_\lambda$. Le même raisonnement s'applique, *mutatis mutandis*, pour l'assertion concernant B_0 et C_0 .

Exercice 3.72 : Evidemment $T' \subset (\text{Spec } g)^{-1}(T)$. Réciproquement, soit $t' \in \text{Spec } A'$ tel que $t := (\text{Spec } g)(t') \in T$; on doit montrer que $(\text{Spec } A' \otimes_A f)^{-1}(t') \neq \emptyset$, et cela revient à dire que $k(t') \otimes_{A'} B' \neq 0$ (théorème 1.34). Mais par hypothèse on a $k(t) \otimes_A B \neq 0$, et d'autre part on a des isomorphismes naturels d'anneaux :

$$k(t') \otimes_{A'} B' \simeq k(t) \otimes_{A'} (A' \otimes_A B) \simeq k(t') \otimes_A B \simeq k(t') \otimes_{k(t)} (k(t) \otimes_A B).$$

En particulier $\dim_{k(t')} k(t') \otimes_{A'} B' = \dim_{k(t)} k(t) \otimes_A B$, d'où l'assertion.

Exercice 3.75, partie (i) : Soit $a_1, \dots, a_n \in A$ un système fini de générateurs de I , et $\phi : M \rightarrow M^n$ l'application A -linéaire telle que $x \mapsto (a_1 x, \dots, a_n x)$ pour tout $x \in M$; évidemment $\text{Ker } \phi = \text{Ann}_M(I)$. Si B est une A -algèbre plate, il vient $\text{Ann}_{B \otimes_A M}(IB) = \text{Ker}(B \otimes_A \phi) = B \otimes_A \text{Ker } \phi$ (proposition 2.102(iii)), d'où l'assertion.

Partie (ii) : De même, soit $\psi : B \rightarrow B^n$ l'application A -linéaire telle que $\psi(b) := (f(a_1)b, \dots, f(a_n)b)$ pour tout $b \in B$; alors $\text{Ker } \psi = \text{Ann}_B(I)$ et si M est un A -module plat, $\text{Ker}(\psi) \otimes_A M = \text{Ker}(\psi \otimes_A M) = \text{Ann}_{B \otimes_A M}(IB)$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : C'est le cas particulier de (ii) avec $I = Aa$ et $B = A$.

Partie (iv) : Si A est intègre, on a $\text{Ann}_A(a) = 0$ pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, par suite $\text{Ann}_B(f(a)) = 0$ pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, d'après (i), d'où l'assertion.

Exercice 3.76, partie (i) : Soit $\phi : N \rightarrow N'$ un homomorphisme injectif de A -modules. On obtient un diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccc} (P \otimes_B M) \otimes_A N & \xrightarrow{\sim} & P \otimes_B (M \otimes_A N) \\ (P \otimes_B M) \otimes_A \phi \downarrow & & \downarrow P \otimes_B (M \otimes_A \phi) \\ (P \otimes_B M) \otimes_A N' & \xrightarrow{\sim} & P \otimes_B (M \otimes_A N') \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les isomorphismes de la proposition 3.18(i) (appliquée avec $C = B$ et $g = Id_B$). Comme $M_{[f]}$ est un A -module plat, $M \otimes_A \phi$ est une injection B -linéaire ; comme P est un B -module plat, $P \otimes_B (M \otimes_A \phi)$ est à son tour injective. Ainsi, $(P \otimes_B M) \otimes_A \phi$ est injective, d'où la première assertion, grâce à la remarque 3.74(ii). La deuxième assertion de (i) suit aussitôt, en faisant $M := B$, avec les isomorphismes naturels $P \otimes_B B \xrightarrow{\sim} M$ de l'exercice 3.6(ii). La partie (ii) de l'exercice est une conséquence immédiate de (i).

Partie (iii) : Soit $\Sigma := (0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de A -modules ; pour tout $\lambda \in \Lambda$ on obtient une suite $P_\lambda \otimes_A \Sigma := (0 \rightarrow P_\lambda \otimes_A M_1 \rightarrow P_\lambda \otimes_A M_2 \rightarrow P_\lambda \otimes_A M_3 \rightarrow 0)$, ainsi qu'une suite $L \otimes_A \Sigma$, après tensorisation de Σ avec la colimite L du système filtrant $P_\bullet$. De plus, si $u_\bullet := (u_\lambda : P_\lambda \rightarrow L \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône universel, on déduit un co-cône $u_\bullet \otimes_A \Sigma := (u_\lambda \otimes_A \Sigma \mid \lambda \in \Lambda)$ dans la catégorie $\mathbf{C}(A)$. Compte tenu de la proposition 2.102(ii), il suffit de montrer que $H_j(L \otimes_A \Sigma) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Or, on a déjà vu que les colimites de $\mathbf{C}(A)$ se calculent terme à terme (voir l'exercice 2.98(ii)), et pour $i = 1, 2, 3$ le foncteur $- \otimes_A M_i$ commute avec les colimites (proposition 2.49(ii)),

donc $u_\bullet \otimes_A \Sigma$ est un co-cône universel. De plus, le foncteur H_i commute avec les colimites filtrantes (exercice 2.100), donc on est ramené à vérifier que $H_j(P_\lambda \otimes_A \Sigma) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Mais cela découle de la proposition 2.102(iii), car chaque P_λ est plat.

Exercice 3.81, partie (i) : Montrons d'abord que la condition implique la platitude de P . Pour cela, soit $I \subset A$ un idéal de type fini quelconque, et x un élément du noyau de l'application $\phi_I : P \otimes_A I \rightarrow P$ induite par l'inclusion $I \rightarrow A$; compte tenu de la proposition 3.78, il suffit de montrer que $x = 0$. Écrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i$ pour certains $x_1, \dots, x_n \in P$ et $a_1, \dots, a_n \in I$, et soit aussi $J \subset I$ le sous-idéal engendré par la suite $a_\bullet$; évidemment x est dans l'image de l'application $P \otimes_A J \rightarrow P \otimes_A I$ induite par l'inclusion $J \rightarrow I$, et il suffira donc de vérifier que x s'annule déjà dans $P \otimes_A J$, i.e. on peut supposer que $a_\bullet$ engendre I . Par hypothèse, $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, et on trouve alors des suites d'éléments $y_\bullet$ de P et $b_{\bullet\bullet}$ de A vérifiant (*); on peut maintenant conclure avec l'exercice 3.12.

Réciproquement, si P est plat et si $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, l'élément $x := \sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i$ appartient au noyau de ϕ_I , où $I \subset A$ est l'idéal engendré par $a_1, \dots, a_n$; donc $x = 0$, et pour conclure il suffit d'invoquer à nouveau l'exercice 3.12.

Partie (ii) : Soient $I \subset A$ un idéal non nul, $a \in A$ un générateur de I ; l'application $A \rightarrow I : b \mapsto ab$ est un isomorphisme de A -modules, et l'isomorphisme induit $\psi_a : P \xrightarrow{\sim} P \otimes_A A \xrightarrow{\sim} P \otimes_A I$ est l'application telle que $\psi_a(x) = x \otimes a$ pour tout $x \in P$. La composition $\phi_I \circ \psi_a : P \rightarrow P$ est donc la multiplication scalaire par a ; cette dernière est injective pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ si et seulement si P est sans torsion. Pour conclure, il suffit maintenant d'invoquer la proposition 3.78.

Problème 3.83, partie (i.a) : Supposons que le foncteur $M \otimes_A -$ soit fidèle, et soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ un idéal premier; il s'ensuit en particulier que $M \otimes_A Id_{\kappa(\mathfrak{p})} \neq 0$, i.e. $M(\mathfrak{p}) \neq 0$. Réciproquement, supposons que M soit un A -module plat, et $M(\mathfrak{m}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$; on va montrer d'abord que $M \otimes_A N \neq 0$ pour tout A -module $N \neq 0$. Pour cela, soit $x \in N \setminus \{0\}$; par hypothèse, l'inclusion $Ax \rightarrow N$ induit une injection $M \otimes_A Ax \rightarrow M \otimes_A N$, donc il suffit de montrer que $M \otimes_A Ax \neq 0$. On est alors ramené au cas où $N = A/I$ pour un idéal $I \neq A$; mais il existe $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ tel que $I \subset \mathfrak{m}$ (corollaire 1.35(i)), et comme $M(\mathfrak{m}) \neq 0$, il vient $M/IM \neq 0$, d'où l'assertion. Or, soit $h : N \rightarrow N'$ une application A -linéaire telle que $M \otimes_A h = 0$; pour conclure, il suffit de montrer que $h = 0$. Pour cela, soit $K := \text{Ker } h$; la platitude de M implique que $M \otimes_A K = \text{Ker}(M \otimes_A h) = M \otimes_A N$, d'où $M \otimes_A (N/K) = 0$, et par ce qui précède on déduit que $N = K$, d'où l'assertion.

Partie (i.b) : Soit $x \in \text{Ker}(f \otimes_A M)$, et posons $N := Ax$; l'inclusion $N \rightarrow M$ induit une injection $B \otimes_A N \rightarrow B \otimes_A M$, car f est plat, donc $1 \otimes x = 0$ dans $B \otimes_A N$. Mais le B -module $B \otimes_A N$ est engendré par $1 \otimes x$, donc $B \otimes_A N = 0$, et comme f est fidèlement plat, la preuve de (i.a) montre que $N = 0$, d'où l'assertion.

Partie (i.c) : Si f est fidèlement plat, on a vu que $B(\mathfrak{p}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; mais $\text{Spec } B(\mathfrak{p})$ s'identifie naturellement avec $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$ (voir §3.4.2), donc ce dernier est $\neq \emptyset$, et ainsi $\text{Spec } f$ est surjective. La réciproque suit aussitôt de (i.a), et la dernière implication est un cas particulier de (i.b).

Partie (i.d) : Évidemment $A^\times \subset f^{-1}f(A^\times) \subset f^{-1}(B^\times)$; pour la réciproque, noter que $a \in A^\times \Leftrightarrow \text{Ker}(aId_A) = \text{Coker}(aId_A) = 0$, et de même on caractérise les éléments de $B^\times$. Donc, soit $a \in A$ tel que $b := f(a) \in B^\times$; il vient $0 = \text{Ker}(bId_B) = B \otimes_A \text{Ker}(aId_A)$, d'où $\text{Ker}(aId_A) = 0$, d'après (i.b), et de même on montre que $\text{Coker}(aId_A) = 0$. Par suite $a \in A^\times$, d'où l'assertion.

Partie (ii.a) : En effet, $C \otimes_A f$ est plat par la remarque 3.74(vi), et $\text{Spec } (C \otimes_A f)$ est surjectif par l'exercice 3.72.

Partie (ii.b) : Supposons que $B \otimes_A M$ soit un B -module plat; soit aussi $\phi : N' \rightarrow N$ un homomorphisme injectif de A -modules. Comme B est une A -algèbre plate, $B \otimes_A \phi$ est

encore injectif, et de même pour $(B \otimes_A M) \otimes_B (B \otimes_A \phi)$, par la platitude de $B \otimes_A M$. Mais les isomorphismes naturels de la proposition 3.20 identifient ce dernier homomorphisme de B -modules avec $B \otimes_A (M \otimes_A \phi)$; la preuve de (i.a) montre alors que $\text{Ker}(M \otimes_A \phi) = 0$. Cela achève de vérifier que M est plat. L'assertion réciproque suit de la remarque 3.74(vi).

Ensuite, si M est de type fini, évidemment $B \otimes_A M$ est de type fini. Réciproquement, si $B \otimes_A M$ est de type fini, on peut trouver un système fini $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de M tel que $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n$ engendre le B -module $B \otimes_A M$. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n , et $\phi : A^n \rightarrow M$ l'application telle que $e_i \mapsto x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$; on a $B \otimes_A \text{Coker } \phi \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(B \otimes_A \phi) = 0$. La preuve de (i.a) montre alors que $\text{Coker } \phi = 0$, et donc M est de type fini.

Soit M de présentation finie; donc M est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\phi : A^n \rightarrow A^m$ de A -modules libres de rang fini. Alors $B \otimes_A M$ est isomorphe au conoyau de $B \otimes_A \phi$, et il est ainsi de présentation finie. Réciproquement, si $B \otimes_A M$ est de présentation finie, on sait par ce qui précède que M est de type fini; soit donc $\phi : A^n \rightarrow M$ une surjection A -linéaire. L'exercice 2.110(iv) nous dit que $\text{Ker}(B \otimes_A \phi) = B \otimes_A \text{Ker } \phi$ est un B -module de type fini, donc $\text{Ker } \phi$ est un A -module de type fini, par le cas précédent; par suite, M est de présentation finie.

Partie (ii.c) : Supposons que $B \otimes_A C$ soit de type fini; on a alors $x_1, \dots, x_n \in C$ tels que le système $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n$ engendre la B -algèbre $B \otimes_A C$. On considère l'homomorphisme de A -algèbres $\phi : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow C$ tel que $T_i \mapsto x_i$ pour $i = 1, \dots, n$; par construction $B \otimes_A \phi$ est surjectif, et en raisonnant comme dans (ii.b) on déduit que ϕ est surjectif, i.e. B est de type fini.

En dernier lieu, si $B \otimes_A C$ est de présentation finie, on sait déjà que B est de type fini, donc soit $\phi : A' := A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow C$ un homomorphisme surjectif de A -algèbres, et $I := \text{Ker } \phi$; au vu de l'exercice 3.17(iii), il s'ensuit que $B \otimes_A I = \text{Ker}(B \otimes_A \phi)$ est un idéal de type fini de $B' := B \otimes_A A'$. Mais d'un côté on a un isomorphisme naturel de B' -modules $B' \otimes_{A'} I \simeq B \otimes_A I$, et de l'autre côté l'homomorphisme $f \otimes_A A' : A' \rightarrow B'$ est fidèlement plat, d'après (ii.a); au vu de (ii.b) il s'ensuit que I est un idéal de type fini, donc C est de présentation finie.

Partie (ii.d) : D'après la proposition 2.102(i), $B \otimes_A \text{Ker}(\phi)$ (resp. $B \otimes_A \text{Coker}(\phi)$) représente le noyau (resp. le conoyau) de $B \otimes_A \phi$; d'autre part, (i.b) montre que $B \otimes_A \text{Ker}(\phi) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\phi) = 0$, et de même pour $B \otimes_A \text{Coker}(\phi)$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : D'après (i.a), la A -algèbre plate B est fidèlement plate si et seulement si $B_{[f]}(\mathfrak{m}_A) \neq 0$, i.e. si et seulement si $\mathfrak{m}_A B \neq B$, d'où l'assertion.

Problème 3.89, partie (i) : Soit M un A -module; on pose

$$\text{Tens}_A^0(M) := A \quad \text{et} \quad \text{Tens}_A^{n+1}(M) := \text{Tens}_A^n(M) \otimes_A M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On va définir une loi de multiplication A -bilinéaire et associative sur le A -module

$$\text{Tens}_A^\bullet(M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Tens}_A^n(M).$$

Soient donc $m, n \in \mathbb{N}$; on a un isomorphisme canonique d'associativité

$$\gamma_M^{m,n} : \text{Tens}_A^m(M) \otimes_A \text{Tens}_A^n(M) \xrightarrow{\sim} \text{Tens}_A^{m+n}(M)$$

(voir la remarque 3.9) dont l'action consiste à changer la position des parenthèses nécessaires pour expliciter un produit tensoriel de deux tenseurs élémentaires donnés; par exemple, un tenseur élémentaire de $\text{Tens}_A^2(M)$ s'écrit sous la forme $(a \otimes m_1) \otimes m_2$ avec $a \in A$ et $m_1, m_2 \in M$, donc $\gamma_M^{2,2}$ est l'application :

$$((a \otimes m_1) \otimes m_2) \otimes ((a' \otimes m'_1) \otimes m'_2) \mapsto (((aa' \otimes m_1) \otimes m_2) \otimes m'_1) \otimes m'_2.$$

L'application A -linéaire $\gamma_M^{m,n}$ correspond donc à une application A -bilinéaire

$$\bar{\gamma}_M^{m,n} : \text{Tens}_A^m(M) \times \text{Tens}_A^n(M) \rightarrow \text{Tens}_A^{m+n}(M)$$

et la loi de multiplication souhaitée pour $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ sera la somme directe de toutes ces applications. L'associativité de cette loi peut être vérifiée sur les produits de tenseurs élémentaires, où elle est évidente, et on a donc une A -algèbre associative $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ bien définie (dont l'unité est $1 \in \text{Tens}_A^0(M)$) et munie d'une application A -linéaire naturelle

$$i_M : M \xrightarrow{\sim} \text{Tens}_A^1(M) \rightarrow \text{Tens}_A^\bullet(M).$$

Il reste à montrer que le couple $(\text{Tens}_A^\bullet(M), i_M)$ est universel pour le foncteur

$$A - \text{AlgAss} \rightarrow \text{Ens} \quad B \mapsto \text{Hom}_A(M, GB).$$

Soient donc $(B, f : A \rightarrow B)$ une A -algèbre associative avec $f(A) \subset Z(B)$, et $\phi : M \rightarrow B$ une application A -linéaire ; on dénote par $\mu_B : B \otimes_A B \rightarrow B$ l'application A -linéaire telle que $b \otimes b' \mapsto bb'$ pour tous $b, b' \in B$, et on pose

$$\bar{\phi}_0 := f : \text{Tens}_A^0(M) \rightarrow B \quad \bar{\phi}_{n+1} := \mu_B \circ (\bar{\phi}_n \otimes_A \phi) : \text{Tens}_A^{n+1}(M) \rightarrow B \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, $\bar{\phi}_n(a \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f(a) \cdot \phi(m_1) \cdots \phi(m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout tenseur élémentaire $a \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ de $\text{Tens}_A^n(M)$. Il s'ensuit aussitôt que la somme directe $\bar{\phi} : \text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow B$ des applications $\bar{\phi}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous donne un homomorphisme de A -algèbres associatives tel que $\bar{\phi} \circ i_M = \phi$; comme la A -algèbre associative $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ est engendrée par son facteur direct $\text{Tens}_A^1(M)$, on voit que cette dernière identité détermine $\bar{\phi}$, d'où l'assertion. Explicitons l'homomorphisme de A -algèbres associatives

$$\text{Tens}_A^\bullet(h) : \text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow \text{Tens}_A^\bullet(N)$$

associé à une application A -linéaire donnée $h : M \rightarrow N$ de A -modules : l'adjonction entre G et $\text{Tens}_A^\bullet$ est le système des bijections $\vartheta_{M,B}$ qui associent à tout homomorphisme de A -algèbres associatives $\psi : \text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow B$ l'application A -linéaire $\psi \circ i_M : M \rightarrow GB$, et la naturalité de $\vartheta_{\bullet,\bullet}$ se traduit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A - \text{AlgAss}(\text{Tens}_A^\bullet(N), B) & \xrightarrow{\vartheta_{N,B}} & \text{Hom}_A(N, GB) \\ \downarrow A - \text{AlgAss}(\text{Tens}_A^\bullet(h), B) & & \downarrow \text{Hom}_A(h, GB) \\ A - \text{AlgAss}(\text{Tens}_A^\bullet(M), B) & \xrightarrow{\vartheta_{M,B}} & \text{Hom}_A(M, GB) \end{array}$$

où la flèche verticale à gauche est l'application telle que $\phi \mapsto \phi \circ \text{Tens}_A^\bullet(h)$ pour tout homomorphisme de A -algèbres associatives $\phi : \text{Tens}_A^\bullet(N) \rightarrow B$. Si l'on fait $B := \text{Tens}_A^\bullet(N)$ et $\phi := 1_B$, on obtient :

$$\text{Tens}_A^\bullet(h) \circ i_M = i_N \circ h$$

i.e. $\text{Tens}_A^\bullet(h)$ se restreint en une application A -linéaire $M \xrightarrow{\sim} \text{Tens}_A^1(M) \rightarrow \text{Tens}_A^1(N) \xrightarrow{\sim} N$ qui coïncide avec h ; donc finalement

$$\text{Tens}_A^\bullet(a \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = a \otimes h(m_1) \otimes \cdots \otimes h(m_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout tenseur élémentaire $a \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ de $\text{Tens}_A^n(M)$. En particulier, $\text{Tens}_A^\bullet(h)$ est la somme directe de ses composantes

$$\text{Tens}_A^n(h) : \text{Tens}_A^n(M) \rightarrow \text{Tens}_A^n(N).$$

Ensuite, soit $I \subset \text{Tens}_A^\bullet(M)$ l'idéal bilatère engendré par le système

$$\Sigma := \{1 \otimes m \otimes n - 1 \otimes n \otimes m \mid m, n \in M\} \subset \text{Tens}_A^2(M).$$

Donc, les éléments de I sont toutes les sommes de produits $x \cdot y \cdot z$ avec $x, z \in \text{Tens}_A^\bullet(M)$ arbitraires et $y \in \Sigma$. On pose

$$\text{Sym}_A^\bullet(M) := \text{Tens}_A^\bullet(M)/I.$$

Noter que la multiplication de $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ induit une loi de multiplication sur $\text{Sym}_A^\bullet(M)$, qui fait de ce quotient une A -algèbre associative, et la projection $\pi : \text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow \text{Sym}_A^\bullet(M)$ est un homomorphisme de A -algèbres associatives. Noter aussi que I est la somme directe de ses A -sous-modules $I_n := I \cap \text{Tens}_A^n(M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$\text{Sym}_A^\bullet(M)$ est à son tour la somme directe des images $\text{Sym}_A^n(M) := \pi(\text{Tens}_A^n(M)) = \text{Tens}_A^n(M)/I_n$ (les détails sont confiés au lecteur). Aussi, $I_0 = I_1 = 0$, d'où

$$\text{Sym}_A^0(M) = A \quad \text{et} \quad \text{Sym}_A^1(M) \xrightarrow{\sim} M$$

et on pose $j_M := \pi \circ i_M : M \rightarrow \text{Sym}_A^\bullet(M)$. De plus, pour tout $m \in M$ notons $\bar{m} := \pi(1 \otimes m) \in \text{Sym}_A^1(M)$; évidemment $\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{n} \cdot \bar{m}$ pour tous $m, n \in M$, et comme le système $(\bar{m} \mid m \in M)$ engendre la A -algèbre $\text{Sym}_A^\bullet(M)$, on conclut que cette dernière est associative et *commutative*. En dernier lieu, soit B une A -algèbre (commutative); évidemment tout homomorphisme $\text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow B$ de A -algèbres associatives se factorise à travers $\text{Sym}_A^\bullet(M)$ de façon unique. Compte tenu de la propriété universelle de $\text{Tens}_A^\bullet(M)$, il s'ensuit aussitôt que le couple $(\text{Sym}_A^\bullet(M), j_M)$ est universel pour le foncteur

$$A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens} \quad B \mapsto \text{Hom}_A(M, FB).$$

On obtient ainsi le foncteur $\text{Sym}_A^\bullet$ souhaité, adjoint à gauche de F . À toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$, ce foncteur associe un homomorphisme de A -algèbres $\text{Sym}_A^\bullet(h) : \text{Sym}_A^\bullet(M) \rightarrow \text{Sym}_A^\bullet(N)$ déterminé comme ci-dessus par l'identité :

$$\text{Sym}_A^\bullet(h) \circ j_M = j_N \circ h$$

qui permet de l'expliciter par une formule analogue à celle pour $\text{Tens}_A^\bullet(h)$: les détails seront laissés encore au lecteur.

Partie (ii) : L'assertion pour F découle de l'exercice 2.31(iii,iv). Ensuite, soient

$$(B_\lambda, g_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \mu \geq \lambda)$$

un système filtrant de A -algèbres associatives, et S la réunion disjointe $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$; d'après l'exercice 2.31(iii), la colimite du système des A -modules sous-jacents aux B_λ est représentée par le A -module $B := S/\sim$ des classes d'équivalence $[x, \lambda]$ des éléments de S , pour la relation d'équivalence $\sim$ détaillée par l'exercice 2.31(i). En raisonnant comme dans la solution de l'exercice 2.31(iv), on munit B d'une structure naturelle de A -algèbre associative, et on vérifie aisément que B représente la colimite du système de A -algèbres associatives $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. Cette construction explicite montre bien que G commute avec les colimites filtrantes.

Partie (iii) : $\text{Tens}_A^\bullet$ et $\text{Sym}_A^\bullet$ commutent avec toute colimite, car ils admettent des adjoints à droite (proposition 2.49(ii)); avec (ii) et la remarque 3.88, on est alors ramené à montrer que $\text{Tens}_A^\bullet(L)$ et $\text{Sym}_A^\bullet(L)$ sont des A -modules plats, pour tout A -module libre L de rang $r \in \mathbb{N}$. Pour $\text{Tens}_A^\bullet(L)$, on remarque que $\text{Tens}_A^n(L)$ est libre de rang r^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on conclut grâce à la remarque 3.74(iv).

Ensuite, pour toute A -algèbre B , remarquons les bijections naturelles :

$$A - \text{Alg}(\text{Sym}_A^\bullet(A^{(\Lambda)}), B) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(A^{(\Lambda)}, FB) \xrightarrow{\sim} (FB)^\Lambda \quad \forall \Lambda \in \text{Ob}(\text{Ens})$$

où la première flèche est l'adjonction pour le couple de foncteurs $(\text{Sym}_A^\bullet, F)$ et la deuxième est l'adjonction pour le couple de foncteurs $(A^{(-)}, F')$, avec $F' : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli (voir le problème 2.10(ii)). Donc le foncteur

$$\text{Sym}_A^\bullet(A^{(-)}) : \text{Ens} \rightarrow A - \text{Alg} \quad \Lambda \mapsto \text{Sym}_A^\bullet(A^{(\Lambda)})$$

composition de $A^{(-)}$ et $\text{Sym}_A^\bullet$, est adjoint à gauche de $F' \circ F : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$. Or, la composition $F' \circ F$ est bien entendu le foncteur d'oubli évident. Mais on a déjà exhibé un autre adjoint à gauche pour ce même foncteur : à savoir, le foncteur qui associe à tout ensemble Λ l'algèbre de polynômes $A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ (voir le problème 2.10(iii)); ce dernier est donc isomorphe au foncteur $\text{Sym}_A^\bullet(A^{(-)})$ (voir l'exercice 2.14(i)). Plus précisément, le lemme 2.4(i) fournit pour tout ensemble Λ un isomorphisme naturel de A -algèbres

$$\text{Sym}_A^\bullet(A^{(\Lambda)}) \xrightarrow{\sim} A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda] \quad e_\lambda \mapsto X_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

où $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dénote la base canonique de $A^{(\Lambda)} = \text{Sym}_A^1(A^{(\Lambda)})$. Mais on voit aisément que $A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ est un A -module libre, avec pour base l'ensemble de ses monômes

unitaires, CQFD.

Problème 3.91, partie (i) : Pour tout A -module M , soit $J \subset \text{Tens}_A^\bullet(M)$ l'idéal bilatère engendré par le système

$$\{1 \otimes m \otimes m \mid m \in M\} \subset \text{Tens}_A^2(M).$$

Donc, les éléments de J sont toutes les sommes de produits $x \cdot (1 \otimes m)^2 \cdot y$ avec $x, y \in \text{Tens}_A^\bullet(M)$ et $1 \otimes m \in \text{Tens}_A^1(M)$. On pose :

$$\Lambda_A^\bullet(M) := \text{Tens}_A^\bullet(M)/J.$$

Comme déjà pour la construction de l'algèbre symétrique, on remarque que la loi de multiplication de l'algèbre tensorielle induit une loi de multiplication associative et A -bilineaire sur $\Lambda_A^\bullet(M)$, et que J est la somme directe de ses sous-modules $J_n := J \cap \text{Tens}_A^n(M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\Lambda_A^\bullet(M)$ est la somme directe des A -modules $\Lambda_A^n(M) := \text{Tens}_A^n(M)/J_n$. On a de plus

$$\Lambda_A^0(M) = A \quad \text{et} \quad \Lambda_A^1(M) \xrightarrow{\sim} M.$$

Par construction, on a aussi $m^2 = 0$ dans $\Lambda_A^\bullet(M)$ pour tout $m \in \Lambda_A^1(M)$; il vient :

$$0 = (m + n)^2 = m^2 + n^2 + m \cdot n + n \cdot m = m \cdot n + n \cdot m \quad \forall m, n \in \Lambda_A^1(M).$$

Soient $m_1, \dots, m_k \in \Lambda_A^1(M)$, et rappelons que le groupe symétrique S_k est engendré par le système de cycles $\{(i, i+1) \mid i = 1, \dots, k-1\}$; on déduit que :

$$(*) \quad m_{\sigma(1)} \cdot m_{\sigma(2)} \cdots m_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) \cdot m_1 m_2 \cdots m_k \quad \forall \sigma \in S_k$$

où $\varepsilon(\sigma)$ dénote la signature de σ : les détails sont laissés aux soins du lecteur. En particulier, si $k \in \mathbb{N}$ est impair, et $x, y \in \Lambda_A^k(M)$ sont des *tenseurs élémentaires*, i.e. de la forme $x = x_1 \cdots x_k$, $y = y_1 \cdots y_k$ pour certains $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \Lambda_A^1(M)$, il vient $x \cdot y = -y \cdot x$. On déduit que $t^2 = 0$ pour tout $t \in \Lambda_A^k(M)$: en effet, on peut écrire $t = t_1 + \cdots + t_n$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$ et une suite $t_1, \dots, t_n$ de tenseurs élémentaires de $\Lambda_A^k(M)$; on procède alors par récurrence sur n . Si $n = 1$, l'assertion découle aussitôt de $(*)$ (et même pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), car $x_1 \cdots x_k \cdot x_1 \cdots x_k = (-1)^{k-1} \cdot x_1^2 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_2 \cdots x_k = 0$ pour tous $x_1, \dots, x_k \in \Lambda_A^1(M)$. Supposons donc que $n > 1$ et que l'assertion soit déjà connue pour les sommes d'au plus $n-1$ tenseurs élémentaires; on calcule :

$$t^2 = (t_1 + \cdots + t_{n-1})^2 + t_n^2 + (t_1 + \cdots + t_{n-1}) \cdot t_n + t_n \cdot (t_1 + \cdots + t_{n-1}) = 0$$

car par hypothèse de récurrence $(t_1 + \cdots + t_{n-1})^2 = t_n^2 = 0$, et $t_i \cdot t_n + t_n \cdot t_i = 0$ car k est impair. Ensuite, remarquons que $b \cdot b' = (-1)^{nn'} b' \cdot b$ pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$, $b \in \Lambda_A^n(M)$ et $b' \in \Lambda_A^{n'}(M)$. En effet, si b et b' sont des tenseurs élémentaires, cette identité suit aussitôt de $(*)$; le cas général découle par la bilinéarité de la multiplication. Cela achève de montrer que $\Lambda_A^\bullet(M)$ est une A -algèbre alternée.

En dernier lieu, soient $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ une A -algèbre alternée, et $\phi : M \rightarrow B_1$ une application A -linéaire; évidemment ϕ se prolonge en un morphisme unique de A -algèbres associatives $\phi_\bullet : \text{Tens}_A^\bullet(M) \rightarrow B$ tel que $\phi_\bullet(\text{Tens}_A^n(M)) \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\phi_\bullet$ se factorise à travers un unique morphisme $\Lambda_A^\bullet(M) \rightarrow B$ de A -algèbres alternées. Autrement dit, si $j_M : M \rightarrow \Lambda_A^\bullet(M)$ est l'identification naturelle de M avec $\Lambda_A^1(M)$, le couple $(\Lambda_A^\bullet(M), j_M)$ est universel pour le foncteur

$$A - \text{AlgAlt} \rightarrow \text{Ens} \quad B \mapsto \text{Hom}_A(M, B_1).$$

On obtient ainsi le foncteur $\Lambda_A^\bullet$ souhaité, adjoint à gauche de $(-)_1$. A toute application A -linéaire $h : M \rightarrow N$, ce foncteur associe un morphisme de A -algèbres alternées $\Lambda_A^\bullet(h) : \Lambda_A^\bullet(M) \rightarrow \Lambda_A^\bullet(N)$ déterminé par la condition :

$$\Lambda_A^1(h) = h.$$

Partie (ii) : Les isomorphismes souhaités ont déjà été remarqués lors de la construction des foncteurs $\text{Tens}_A^\bullet$, $\text{Sym}_A^\bullet$ et $\Lambda_A^\bullet$.

Partie (iii) : On considère l'unique application A -bilinéaire

$$(**) \quad (B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \rightarrow B \otimes_A C \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

dont la restriction $(B_i \otimes_A C_j) \times (B_{i'} \otimes_A C_{j'}) \rightarrow B_{i+i'} \otimes_A C_{j+j'}$ est donnée par :

$$(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') := (-1)^{i'j} \cdot (bb' \otimes cc') \quad \forall b \in B_i, b' \in B_{i'}, c \in C_j, c' \in C_{j'}.$$

L'existence et unicité d'une telle application bilinéaire se montrent comme dans la section 3.4, pour la loi de multiplication du produit tensoriel de deux A -algèbres associatives : les détails sont laissés au lecteur. L'associativité de cette loi de multiplication peut être vérifiée sur des produits de tenseurs élémentaires, où elle découle d'un calcul direct, qu'on laissera également au lecteur. Vérifions l'antisymétrie de la multiplication : soient donc $b \otimes c$ et $b' \otimes c'$ comme ci-dessus ; on a

$$\begin{aligned} (b' \otimes c') \cdot (b \otimes c) &= (-1)^{ij'} \cdot (b'b \otimes c'c) \\ &= (-1)^{ij'} \cdot (-1)^{ii'} \cdot (-1)^{jj'} \cdot (bb' \otimes cc') \\ &= (-1)^{i(i'+j')} \cdot (-1)^{j(i'+j')} \cdot (-1)^{i'j} \cdot (bb' \otimes cc') \\ &= (-1)^{(i+j)(i'+j')} \cdot (b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') \end{aligned}$$

comme souhaité. Ensuite, si $i+j$ est impair, soit i est impair, soit j l'est ; il vient aussitôt que $(b \otimes c)^2 = (-1)^{ij} \cdot b^2 \otimes c^2 = 0$ pour tous $b \in B_i$ et $c \in C_j$ avec $i+j$ impair. On déduit alors comme dans (i) que $t^2 = 0$ pour tout k impair et tout $t \in (B \otimes_A C)_k$: on écrit $t = t_1 + \dots + t_n$ pour une suite $t_1, \dots, t_n$ de tenseurs élémentaires, et on raisonne par récurrence sur n . Cela achève de montrer que $B \otimes_A C$ est une A -algèbre alternée avec la loi de multiplication $(**)$, et il est aussi évident que i_B et i_C sont des morphismes de A -algèbres alternées. En dernier lieu, soient D une autre A -algèbre alternée et $h : B \rightarrow D$, $k : C \rightarrow D$ deux morphismes de A -algèbres alternées ; l'application A -bilinéaire $B \times C \rightarrow D$ telle que $(b, c) \mapsto h(b) \cdot k(c)$ se factorise à travers une application A -linéaire unique $f : B \otimes_A C \rightarrow D$ telle que $b \otimes c \mapsto h(b) \cdot k(c)$, et un calcul direct montre aisément que f est un morphisme de A -algèbres alternées, et par construction on a $f \circ i_B = h$ et $f \circ i_C = k$, et comme les images de i_B et i_C engendrent la A -algèbre alternée $B \otimes_A C$, il s'ensuit que f est l'unique tel morphisme vérifiant ces identités. Donc $B \otimes_A C$ représente le coproduit de B et C , et (i_B, i_C) est un co-cône universel.

Partie (iv) : Notons par $M \xrightarrow{i_M} M \oplus N \xleftarrow{i_N} N$ les injections canoniques, et par $\text{Sym}_A^\bullet(M) \xrightarrow{j_M} \text{Sym}_A^\bullet(M) \otimes_A \text{Sym}_A^\bullet(N) \xleftarrow{j_N} \text{Sym}_A^\bullet(N)$ les morphismes de A -algèbres tels que $j_M(m) := m \otimes 1$ et $j_N(n) := 1 \otimes n$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$. D'un côté, le foncteur $\text{Sym}_A^\bullet$ commute avec les coproduits, car il admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii)) ; de l'autre côté, on a vu dans la section 3.4 que les produits tensoriels de A -algèbres représentent les coproduits de $A - \text{Alg}$, et (j_M, j_N) est un co-cône universel. Donc il existe un unique isomorphisme de A -algèbres

$$\omega : \text{Sym}_A^\bullet(M \oplus N) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_A^\bullet(M) \otimes_A \text{Sym}_A^\bullet(N)$$

tel que $\text{Sym}_A^\bullet(i_M) \circ \omega = j_M$ et $\text{Sym}_A^\bullet(i_N) \circ \omega = j_N$. De même, soient les morphismes canoniques de A -algèbres alternées $\Lambda_A^\bullet(M) \xrightarrow{j'_M} \Lambda_A^\bullet(M) \otimes_A \Lambda_A^\bullet(N) \xleftarrow{j'_N} \Lambda_A^\bullet(N)$; compte tenu de (iii) on déduit un isomorphisme unique de A -algèbres alternées

$$\omega' : \Lambda_A^\bullet(M \oplus N) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^\bullet(M) \otimes_A \Lambda_A^\bullet(N)$$

tel que $\Lambda_A^\bullet(i_M) \circ \omega' = j'_M$ et $\Lambda_A^\bullet(i_N) \circ \omega' = j'_N$.

Partie (v) : Soit $(B_\lambda, g_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \mu \geq \lambda)$ un système filtrant de A -algèbres alternées. La solution du problème 3.89(ii) exhibe un représentant explicite B pour la colimite du système filtrant sous-jacent de A -algèbres associatives : on a $B := S/\sim$, où $\sim$ est une

relation d'équivalence sur la réunion disjointe $S := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, détaillée par l'exercice 2.31(i). Or, soient $(b, \lambda), (b', \lambda') \in S$ avec $(b, \lambda) \sim (b', \lambda')$, et écrivons

$$b = \sum_{j \in T} b_j \quad b' = \sum_{j \in T} b'_j$$

pour une partie finie $T \subset \mathbb{N}$, et $b_j \in B_{\lambda, j}, b'_j \in B_{\lambda', j}$ pour tout $j \in T$; par inspection directe, on voit que $(b_j, \lambda) \sim (b'_j, \lambda')$ pour tout $j \in T$, et il s'ensuit aisément que B est une somme directe $\oplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ de A -modules, avec $B_n := S_n / \sim$, où $S_n := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda, n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, toujours par inspection directe de la solution de l'exercice 2.31(iv), on vérifie aussitôt que B est une A -algèbre alternée, et que B représente la colimite du système $(B_\bullet, g_{\bullet\bullet})$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Au vu de l'exercice 2.31(iii), cette construction montre que chaque foncteur $(-)_n$ commute avec les colimites filtrantes.

Partie (vi) : Il suffit de montrer que $\Lambda_A^n(P) = (-)_n \circ \Lambda_A^\bullet(P)$ est un A -module plat pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $\Lambda_A^\bullet$ commute avec toute colimite (proposition 2.49(ii)) ; avec (v), il s'ensuit que $(-)_n \circ \Lambda_A^\bullet$ commute avec toute colimite filtrante. Par suite, en raisonnant comme pour la solution du problème 3.89(iii), on se ramène au cas où P est un A -module libre de rang fini. Puis, au vu de (iv), on peut même supposer que $P = A$. Mais une inspection directe de la construction montre que $\Lambda_A^i(A) = 0$ pour tout $i \geq 2$, et comme on sait aussi que $\Lambda_A^0(A) = \Lambda_A^1(A) = A$, l'assertion s'ensuit.

Exercice 3.93 : Avec la notation de la solution du problème 3.91(i), on a $\Lambda_A^k(M) = \text{Tens}_A^k(M)/J_n$, avec $J_n = J \cap \text{Tens}_A^k(M)$; par inspection directe des définitions, on voit que J_n est l'ensemble des sommes finies de tenseurs élémentaires de la forme :

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes m \otimes m \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_k$$

pour tout $i = 1, \dots, k$ et tout $x_1, \dots, x_{i-1}, m, x_{i+2}, \dots, x_k \in M$. Or, soit $\beta : M \times \cdots \times M \rightarrow N$ une application A -multilinéaire du produit cartésien $M^k = M \times \cdots \times M$, à valeurs dans un A -module N quelconque ; d'après la remarque 3.10, β se factorise à travers une unique application A -linéaire $b : \text{Tens}_A^k(M) \rightarrow N$, et il est clair que si β est alternée, on a $J_n \subset \text{Ker}(b)$, donc b se factorise à son tour à travers une unique application A -linéaire $\bar{b} : \Lambda_A^k(M) \rightarrow N$. De l'autre côté, la solution du problème 3.91(i) montre que $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k = 0$ dans $\Lambda_A^k(M)$, pour tous $m_1, \dots, m_k \in M$ tels que la cardinalité de l'ensemble $\{m_1, \dots, m_k\}$ soit $< k$; par suite, toute application A -multilinéaire $M^k \rightarrow N$ qui se factorise à travers $\Lambda_A^k(M)$, doit être alternée, d'où l'assertion.

Problème 3.94, partie (i) : On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 1$ et si x_1 est lié, il existe $u \in A \setminus \{0\}$ avec $u \cdot x_1 = 0$ et donc $u \cdot f(x_1) = 0$ pour tout $f \in \text{Hom}_A(A^n, A)$. Réciproquement si $u \cdot f(x_1) = 0$ pour toute forme A -linéaire f , alors l'image de $u \cdot x_1$ par l'isomorphisme de bidualité $A^n \xrightarrow{\sim} (A^n)^{\vee\vee}$ est nulle, donc $u \cdot x_1 = 0$ et x_1 est lié.

Soit maintenant $k > 1$, et on suppose que l'assertion soit déjà connue pour tout système de $k - 1$ vecteurs. Si $u_1 \cdot x_1 + \cdots + u_k \cdot x_k = 0$ est une combinaison A -linéaire avec par exemple u_1 non nul, on a pour toute k -forme linéaire alternée f sur A^n :

$$u_1 \cdot f(x_1, \dots, x_k) = f(u_1 \cdot x_1, x_2, \dots, x_k) = 0.$$

Supposons réciproquement que $u \cdot f(x_1, \dots, x_k) = 0$ pour tout $f \in \text{Alt}_A^k(A^n, A)$; soient $g \in \text{Alt}_A^{k-1}(A^n, A)$ et $L \in \text{Hom}_A(A^n, A)$, et pour tous $y_1, \dots, y_k \in A^n$ posons

$$f(y_1, \dots, y_k) := \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot L(y_i) \cdot g(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k).$$

On voit aisément que f est une k -forme linéaire alternée sur A^n . Il existe donc par l'hypothèse $u \in A$ non nul tel que pour toute g et L comme ci-dessus on a

$$0 = u \cdot \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot L(x_i) \cdot g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k).$$

Comme l'application de bidualité $A^n \rightarrow (A^n)^{\vee\vee}$ est injective, et que l'énoncé est vrai pour tous les L , on obtient l'identité dans A^n :

$$0 = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} u \cdot g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \cdot x_i.$$

Si maintenant on suppose que $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont libres, on en déduit en particulier

$$u \cdot g(x_2, \dots, x_k) = 0 \quad \forall g \in \text{Alt}_A^{k-1}(A^n, A).$$

Par hypothèse de récurrence, $x_2, \dots, x_k$ sont alors liés, contradiction.

Partie (ii) : Or, si $f : A^{n+1} \rightarrow A^n$ était injective, le A -module A^n contiendrait le système libre de $n+1$ vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_{n+1})$ (où $e_1, \dots, e_{n+1}$ est la base canonique de A^{n+1}) ; d'autre part, toute $(n+1)$ -forme A -linéaire alternée sur A^n est nulle (remarque 3.92(ii) et exercice 3.93), donc on obtient une contradiction avec (i).

Exercice 3.95 : On a un diagramme commutatif de foncteurs :

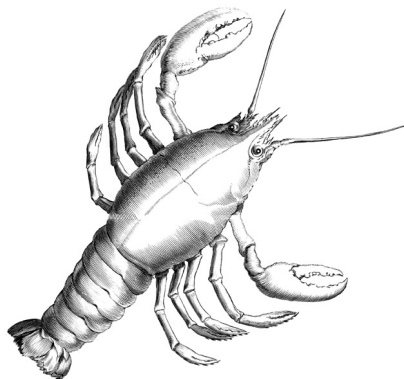
$$\begin{array}{ccc} A' - \text{Alg} & \xrightarrow{(-)_{[f]}} & A - \text{Alg} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' - \text{Mod} & \xrightarrow{(-)_{[f]}} & A - \text{Mod} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli ; soit $F : A' - \text{Alg} \rightarrow A - \text{Mod}$ la composition commune des deux couples des flèches du diagramme. Pour chacun de ces quatre foncteurs on a déjà exhibé des adjoints à gauche ; compte tenu de l'exercice 2.17(i), on a alors deux façons différentes de former un adjoint à gauche de F : la première donne le foncteur $M \mapsto A' \otimes_A \text{Sym}_A^\bullet(M)$ et la deuxième donne le foncteur $M \mapsto \text{Sym}_A^\bullet(A' \otimes_A M)$. Au vu de l'exercice 2.14(i), ces deux foncteurs sont isomorphes ; plus précisément, il existe un unique isomorphisme naturel

$$A' \otimes_A \text{Sym}_A^\bullet(M) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_{A'}^\bullet(A' \otimes_A M)$$

dont la restriction $A' \otimes_A M = A' \otimes_A \text{Sym}_A^1(M) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_{A'}^1(A' \otimes_A M) = A' \otimes_A M$ coïncide avec $\text{Id}_{A' \otimes_A M}$. *Mutatis mutandis*, le même argument donne l'isomorphisme naturel souhaité d'algèbres extérieures.

4. CANCER ☞



DANS cette leçon on continue à bâtir l'infrastructure de notre édifice algébrique. On n'est pas pressé : en effet, des premières cinq sections, seulement une peut s'inscrire à plein titre dans l'algèbre commutative, à savoir la quatrième, dédiée aux modules projectifs et aux groupes de Picard. Plus généralement, la classe des *objets projectifs* d'une catégorie abélienne arbitraire est introduite au début de la première section, en termes d'une certaine propriété de *relèvement* de morphismes, et son étude dans ce contexte abstrait est parfaitement équivalente à celle des *objets injectifs*, définis par une propriété duale de *prolongement* de morphismes. Mais pour tout anneau A , les objets projectifs de la catégorie $A - \text{Mod}$ sont aussi caractérisés tout simplement comme les facteurs directs des modules libres ; par contre, les modules injectifs n'admettent aucune caractérisation simple alternative, et sont en général assez difficiles à saisir, surtout car le plus souvent ils ne sont pas de type fini. Dès lors, il est un peu surprenant que l'introduction des modules injectifs remonte aux travaux de Baer autour de 1940, et donc précède de loin celle des modules projectifs, qui n'ont été baptisés qu'en 1956, dans le livre [12] de Cartan et Eilenberg. Quoi qu'il en soit, dans les engrenages de l'algèbre homologique moderne, les objets projectifs et les objets injectifs accomplissent des fonctions symétriques et également éminentes : ils fournissent les *résolutions* projectives et respectivement injectives dont on s'occupera en détail à la section 5.1, et qui nous serviront dans la section 7.5 pour construire les *foncteurs dérivés* des foncteurs additifs.

D'un point de vue plus géométrique, les modules projectifs sont distingués surtout par la liaison étroite qu'ils entretiennent avec la notion topologique de *fibré vectoriel* : d'un côté, d'après le théorème 4.103, un module de type fini sur un anneau quelconque A est projectif si et seulement s'il est *localement libre* pour la topologie de Zariski de $\text{Spec } A$; de l'autre côté, par le théorème de Swan 4.128, la catégorie des fibrés vectoriels sur un espace topologique compact et séparé T est équivalente à celle des $\mathcal{C}(T)$ -modules projectifs de type fini. Ce thème topologique -- la continuation naturelle d'une étude amorcée dès la première leçon -- sera développé avec soin à la section 4.5 ; notamment, on présente une variante de la preuve du théorème de Swan évitant le recours aux métriques sur les fibrés, en s'appuyant plutôt sur le lemme de Stone.

A tout anneau A on peut associer son *groupe de Picard* $\text{Pic } A$, formé des classes d'isomorphisme des A -modules projectifs *inversibles*, *i.e.* de rang constant égal à 1 ; comme on sait que deux modules inversibles sont toujours localement isomorphes, la structure de $\text{Pic } A$ sera plutôt à mettre en relation avec les propriétés algébriques et géométriques de nature *globale* de A ou de son spectre premier : cette interaction est l'objet du §4.4.2, dont le clou est le théorème 4.120, affirmant que le groupe de Picard de tout anneau *factoriel* est trivial. Des résultats plus précis pour le cas des anneaux intègres *noethériens* seront établis dans les leçons suivantes.

La deuxième section est une longue digression topologique portant sur les *parties constructibles* des spectres premiers, et les topologies qui s'en déduisent.

La section 4.3 est une exposition des aspects élémentaires de la théorie des faisceaux. Ce formalisme, à la confluence de la topologie générale et de la théorie des catégories, trouve ses racines dans des travaux d'analyse fonctionnelle de Leray, concernant la monodromie locale des solutions de certaines équations différentielles non linéaires ; depuis -- surtout sous l'impulsion de Cartan, Grothendieck et Serre -- il a grandement élargi son domaine d'application et il est aujourd'hui une sorte de *lingua franca*, d'aide inestimable dans toute question où il s'agit de l'interaction entre *structure locale* et *propriétés globales* d'objets géométriques. Bien qu'extrêmement important, il est pour nous un sujet plutôt périphérique : on y reviendra à la section 5.2, lors de notre discussion des schémas.

4.1. Les théorèmes de Gabriel-Popescu et de Freyd-Mitchell. Le but de cette section est de démontrer un remarquable théorème dû à Freyd et Mitchell, qui représente toute petite catégorie abélienne comme une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie de modules sur un anneau convenable (en général non commutatif) ; cela permet notamment de ramener, dans une certaine mesure, l'étude de l'algèbre homologique des catégories abéliennes au cas plus accessible des catégories de modules. Chemin faisant on établira aussi un théorème voisin de Gabriel et Popescu (théorème 4.29), et des autres résultats importants, tels que l'existence des enveloppes injectives dans les catégories de Grothendieck (théorème 4.31). J'ai suivi d'assez près la présentation de [26], et j'ai aussi emprunté plusieurs observations utiles du traité [44], qui propose un point de vue plus moderne sur ces questions et ses développements plus récents.

4.1.1. Objets injectifs, projectifs, et générateurs. A toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, le lemme 2.82(ii,iii) associe la catégorie abélienne complète et cocomplète

$$\mathcal{A}^\dagger := \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathbb{Z} - \text{Mod})$$

des foncteurs additifs à valeurs dans les groupes abéliens ; d'après le lemme de Yoneda additif (lemme 2.82(iv)), on a un *foncteur de Yoneda additif* plein et fidèle

$$h^\dagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\dagger \quad X \mapsto (h_X^\dagger : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod})$$

où $h_X^\dagger(Y) := \mathcal{A}(Y, X)$ pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Avec les propositions 2.102(i) et 2.103(ii), on voit aisément que $h^\dagger$ est exact à gauche.

Définition 4.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

- (i) On dit que X est *injectif* si le foncteur $h_X^\dagger$ est exact.
- (ii) On dit que X est un *cogénérateur* de $\mathcal{A}$ si $h_X^\dagger$ est fidèle.
- (iii) On dit que X est *projectif* (resp. un *générateur* de $\mathcal{A}$) si X^{op} est projectif dans $\mathcal{A}^{\text{op}}$ (resp. si X^{op} est un cogénérateur de $\mathcal{A}^{\text{op}}$).
- (iv) On dit qu'une sous-catégorie abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est *exacte*, si le foncteur d'inclusion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est exact.

Remarque 4.2. (i) D'après la remarque 2.83, le foncteur $h_X^\dagger$ est exact à gauche pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Au vu de la proposition 2.102(ii), il s'ensuit que X est injectif si et seulement si tout monomorphisme $f: Y \rightarrow Y'$ de $\mathcal{A}$ induit une *surjection* :

$$\mathcal{A}(Y', X) \rightarrow \mathcal{A}(Y, X) \quad (g: Y' \rightarrow X) \mapsto (g \circ f: Y \rightarrow X).$$

(ii) Duale, X est projectif $\Leftrightarrow$ tout épimorphisme $f: Y \rightarrow Y'$ de $\mathcal{A}$ induit une surjection $\mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{A}(X, Y') : (g: X \rightarrow Y) \mapsto (f \circ g: X \rightarrow Y')$.

(iii) La condition de (i) (resp. de (ii)) caractérise les objets injectifs I (les objets projectifs P) par la propriété de *prolongement* (resp. de *relèvement*) suivante. Pour tout monomorphisme $i: Y \rightarrow Y'$ (resp. tout épimorphisme $p: Z \rightarrow Z'$), tout morphisme

$f : Y \rightarrow I$ (resp. $g : P \rightarrow Z'$) se factorise à travers i (resp. à travers p) :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & I \\ i \downarrow & \nearrow & \\ Y' & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow & \downarrow p \\ P & \xrightarrow{g} & Z'. \end{array}$$

(iv) Soit $(I_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ une petite famille d'objets de $\mathcal{A}$, et supposons que le produit $I := \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ soit représentable dans $\mathcal{A}$. Alors I est injectif $\Leftrightarrow$ chaque I_λ est injectif. En effet, soit $i : Y \rightarrow Y'$ un monomorphisme de $\mathcal{A}$; on a un diagramme commutatif de groupes abéliens dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(Y', I) & \xrightarrow{h_I^\dagger(i)} & \mathcal{A}(Y, I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(Y', I_\lambda) & \xrightarrow{\prod_{\lambda \in \Lambda} h_{I_\lambda}^\dagger(i)} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(Y, I_\lambda). \end{array}$$

Donc $h_I^\dagger(i)$ est surjective $\Leftrightarrow$ chaque $h_{I_\lambda}^\dagger(i)$ est surjective, d'où l'assertion.

(v) Dualement, si $(P_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ est une petite famille d'objets de $\mathcal{A}$ tel que la somme directe $P := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ soit représentable dans $\mathcal{A}$, alors P est projectif $\Leftrightarrow$ chaque P_λ est projectif.

(vi) En vertu de l'exercice 2.101(ii) et de la proposition 2.102(ii), une sous-catégorie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est exacte $\Leftrightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$ est une sous-catégorie exacte de $\mathcal{A}^{\text{op}}$.

Exercice 4.3. (i) Montrer qu'un objet X de $\mathcal{A}$ est un générateur $\Leftrightarrow$ pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout sous-objet propre $Y' \subsetneq Y$ il existe $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ avec $\text{Im}(f) \not\subseteq Y'$.

(ii) Soit X un objet projectif de $\mathcal{A}$. Montrer que X est un générateur $\Leftrightarrow \mathcal{A}(X, Y) \neq \{0_{XY}\}$ pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ qui n'est pas un objet zéro de $\mathcal{A}$.

(iii) Montrer que si $X \rightarrow X'$ est un monomorphisme, et si X est un cogénérateur de $\mathcal{A}$, alors il en est de même pour X' . Dualement, si $p : X' \rightarrow X$ est un épimorphisme, et si X est un générateur de $\mathcal{A}$, alors il en est de même pour X' .

(iv) Soient P un générateur projectif de $\mathcal{A}$, et $\Sigma := (0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow 0)$ une suite de morphismes de $\mathcal{A}$. Montrer que Σ est une suite exacte courte de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{A}(P, \Sigma) := (0 \rightarrow \mathcal{A}(P, X') \rightarrow \mathcal{A}(P, X) \rightarrow \mathcal{A}(P, X'') \rightarrow 0)$ est une suite exacte courte de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$.

Exemple 4.4. (i) Soient A un anneau associatif unitaire, et S un ensemble ; alors le A -module libre $A^{(S)}$ est projectif dans $A - \text{Mod}$, car on a les bijections naturelles :

$$\text{Hom}_A(A^{(S)}, M) \xrightarrow{\sim} M^S \quad (A^{(S)} \xrightarrow{\psi} M) \mapsto (\psi(e_s) | s \in S) \quad \forall M \in \text{Ob}(A - \text{Mod})$$

où l'on a noté $(e_s | s \in S)$ la base canonique de $A^{(S)}$. Si $\phi : M \rightarrow N$ est une application A -linéaire, ces bijections identifient $\phi_* : \text{Hom}_A(A^{(S)}, M) \rightarrow \text{Hom}_A(A^{(S)}, N)$ avec l'application A -linéaire

$$\phi^S : M^S \rightarrow N^S \quad (m_s | s \in S) \mapsto (\phi(m_s) | s \in S).$$

Or, si ϕ est surjective, il en est de même pour ϕ^S , d'où l'assertion (remarque 4.2(ii)).

(ii) En outre, $A^{(S)}$ est un générateur de $A - \text{Mod}$ si $S \neq \emptyset$: car dans ce cas $M^S \neq 0$ pour tout A -module $M \neq 0$, d'où l'assertion, d'après (i) et l'exercice 4.3(ii).

Lemme 4.5. Un objet $I \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ est injectif si et seulement si toute suite exacte courte $0 \rightarrow I \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Y \rightarrow 0$ de $\mathcal{A}$ est scindée (voir la remarque 2.99(iii)).

Démonstration. Si I est injectif, pour toute telle suite il existe un morphisme $s : X \rightarrow I$ avec $s \circ i = \mathbf{1}_I$ (remarque 4.2(iii)) ; on considère alors le diagramme commutatif à lignes

horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(s) & \xlongequal{\quad} & \text{Ker}(s) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow q \\
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{p} & Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où j dénote le monomorphisme universel, et avec $q := p \circ j$. D'après la proposition 2.106, il vient une suite exacte :

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ker}(q) \xrightarrow{\partial} I \xrightarrow{\alpha} \text{Coker}(j) \xrightarrow{\beta} \text{Coker}(q) \rightarrow 0.$$

Mais s est un épimorphisme, car il est scindé à droite (exercice 1.119(i)), donc il est la composition d'un isomorphisme $\gamma : \text{Coker}(j) \xrightarrow{\sim} I$ avec l'épimorphisme universel $\pi : X \rightarrow \text{Coker}(j)$ (remarque 2.93(ii)); par construction, on a $\alpha = \pi \circ i$, de sorte que $\gamma \circ \alpha = \mathbf{1}_I$, donc α est un isomorphisme, d'où $\text{Ker}(q) = \text{Coker}(q) = 0_{\mathcal{A}}$, i.e. q est un isomorphisme (lemme 2.75(iv.c)), et le scindage cherché est $j \circ q^{-1} : Y \rightarrow X$.

Réciproquement, si la condition du lemme est vérifiée, soient $f : A \rightarrow B$ un monomorphisme de $\mathcal{A}$, et $g : A \rightarrow I$ un morphisme quelconque; considérons le diagramme cocartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 g \downarrow & & \downarrow g' \\
 I & \xrightarrow{f'} & C.
 \end{array}$$

D'après l'exercice 2.95(i), f' est un monomorphisme, donc par hypothèse il existe $h \in \mathcal{A}(C, I)$ tel que $h \circ f' = \mathbf{1}_I$; avec $k := h \circ g' : B \rightarrow I$, il vient $k \circ f = h \circ g' \circ f = h \circ f' \circ g = g$, et cela achève de vérifier que I est injectif. $\square$

Exercice 4.6. (i) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact qui admet un adjoint à droite $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, et I un objet injectif de $\mathcal{B}$. Montrer que GI est un objet injectif de $\mathcal{A}$.

(ii) Dualelement, si le foncteur exact $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ admet l'adjoint à gauche $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, et si P est un objet projectif de $\mathcal{B}$, alors HP est projectif dans $\mathcal{A}$.

Exemple 4.7. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux associatifs unitaires, et E un A -module injectif; alors la coextension de scalaires $E^{[f]}$ est un B -module injectif (voir le §3.2.1). En effet, le foncteur $(-)^{[f]}$ de restriction de scalaires est évidemment exact, donc l'assertion découle de l'exercice 4.6(i).

4.1.2. Foncteurs de représentation linéaire. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et X un objet de $\mathcal{A}$. Noter que $R_X := \mathcal{A}(X, X)$ est un anneau associatif unitaire, avec loi de multiplication donnée par la composition d'endomorphismes :

$$f \cdot g := f \circ g \quad \forall f, g : X \rightarrow X$$

(et loi d'addition donnée par la structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}(X, X)$). En outre, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ le groupe abélien $\mathcal{A}(X, A)$ est un R_X -module à droite, avec multiplication scalaire $\mu_A : \mathcal{A}(X, A) \times R_X \rightarrow \mathcal{A}(X, A)$ telle que :

$$x \cdot f := x \circ f \quad \forall x : X \rightarrow A, \forall f : X \rightarrow X$$

et pour tout morphisme $\phi : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$, l'application induite

$$\mathcal{A}(X, A) \rightarrow \mathcal{A}(X, B) \quad x \mapsto \phi \circ x$$

est évidemment R_X -linéaire. On obtient ainsi un foncteur additif

$$\Phi_X : \mathcal{A} \rightarrow R_X^{\text{op}} - \text{Mod} \quad A \mapsto \Phi_X(A) := (\mathcal{A}(X, A), \mu_A).$$

Lemme 4.8. Si $\mathcal{A}$ est cocomplète, le foncteur Φ_X admet un adjoint à gauche.

Démonstration. Pour tout ensemble S , et tout $s \in S$, soient $R_{X,s} := R_X$ et $X_s := X$; posons $R_X^{(S)} := \bigoplus_{s \in S} R_{X,s}$ et $X^{(S)} := \bigoplus_{s \in S} X_s$, les sommes directes dans $\mathcal{A}$ et dans $R_X^{\text{op}} - \text{Mod}$ des petites familles $(R_{X,s} \mid s \in S)$ et respectivement $(X_s \mid s \in S)$. Soient $(e_s^S \mid s \in S)$ la base canonique de $R_X^{(S)}$, et $(\varepsilon_s^S : X_s \rightarrow X^{(S)} \mid s \in S)$ un co-cône universel ; à tout couple d'ensembles S, T , et toute application R_X^{op} -linéaire $f : R_X^{(S)} \rightarrow R_X^{(T)}$ on associe un morphisme $f_* : X^{(S)} \rightarrow X^{(T)}$ comme suit. Pour tout $s \in S$ il existe une partie finie $\Delta(s) \subset T$ et une suite $(a_{st} \mid t \in \Delta(s))$ d'éléments de R_X^{op} tels que $f(e_s^S) = \sum_{t \in \Delta(s)} e_s^T \cdot a_{st}$; soit alors $f_* : X^{(S)} \rightarrow X^{(T)}$ l'unique morphisme avec

$$f_* \circ \varepsilon_s^S = \sum_{t \in \Delta(s)} \varepsilon_t^T \cdot a_{st} \quad \forall s \in S.$$

Pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout ensemble S on a ainsi des bijections :

$$\omega_{S,A} : \text{Hom}_{R_X^{\text{op}}}(R_X^{(S)}, \Phi_X(A)) \xrightarrow{\sim} \Phi_X(A)^S \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X^{(S)}, A)$$

naturelles par rapport aux morphismes $h : A \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$, et aux applications R_X^{op} -linéaires $f : R_X^{(S)} \rightarrow R_X^{(T)}$, de sorte que :

$$\omega_{S,A}(\Phi_X(h) \circ g \circ f) = h \circ \omega_{T,A'}(g) \circ f_* \quad \forall g : R_X^{(S)} \rightarrow \Phi_X(A).$$

Or, soit M un R_X^{op} -module, et choisissons une présentation de M par des R_X^{op} -modules libres, *i.e.* des ensembles S et T , et une suite exacte $R_X^{(S)} \xrightarrow{f} R_X^{(T)} \rightarrow M \rightarrow 0$ de R_X^{op} -modules ; on déduit une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R_M^{\text{op}}}(M, \Phi_X(A)) \rightarrow \text{Hom}_{R_X^{\text{op}}}(R_X^{(T)}, \Phi_X(A)) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{R_X^{\text{op}}}(R_X^{(S)}, \Phi_X(A))$$

où f^* dénote l'application induite par f (proposition 2.103(i)). Cette suite est naturellement identifiée avec la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R_M^{\text{op}}}(M, \Phi_X(A)) \rightarrow \mathcal{A}(X^{(T)}, A) \xrightarrow{h_A^\dagger(f_*)} \mathcal{A}(X^{(S)}, A).$$

Posons $\Psi_X(M) := \text{Coker}(f_*)$; le noyau de $h_A^\dagger(f_*)$ est à son tour naturellement identifié avec $\mathcal{A}(\Psi_X(M), A)$. En résumé, on a obtenu un système de bijections :

$$\text{Hom}_{R_M^{\text{op}}}(M, \Phi_X(A)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\Psi_X(M), A) \quad \forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$$

naturelles par rapport aux morphismes $A \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$. L'association : $M \mapsto \Psi_X(M)$ se prolonge alors en un foncteur $\Psi_X : R_X^{\text{op}} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A}$ adjoint à gauche de Φ_X (problème 2.10(i)). $\square$

Plus tard on étudiera les objets projectifs des catégories de modules d'un point de vue algèbro-géométrique ; dans cette section, toutefois, notre intérêt est plutôt motivé par le résultat remarquable suivant :

Théorème 4.9. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne cocomplète, munie d'un générateur projectif, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une sous-catégorie abélienne pleine petite exacte. Il existe $Q \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ tel que la restriction à $\mathcal{B}$ de Φ_Q soit un foncteur exact, plein et fidèle*

$$F : \mathcal{B} \rightarrow R_Q^{\text{op}} - \text{Mod}.$$

Démonstration. Soit P un générateur projectif de $\mathcal{A}$; pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on pose $Q_A := \bigoplus_{f \in \mathcal{A}(P,A)} P_f$, avec $P_f := P$ pour tout $f \in \mathcal{A}(P,A)$ (rappelons que $\mathcal{A}(P,A)$ est un ensemble pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, donc cette somme directe est représentable dans $\mathcal{A}$), et soit $(i_f : P_f \rightarrow Q_A \mid f \in \mathcal{A}(P,A))$ le co-cône universel. On dénote par $\psi_A : Q_A \rightarrow A$ l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $\psi_A \circ i_f = f$ pour tout $f \in \mathcal{A}(P,A)$. Remarquons :

Affirmation 4.10. ψ_A est un épimorphisme, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\text{Coker}(\psi_A) = 0_{\mathcal{A}}$ (lemme 2.75(ii)) ; soit alors $h : A \rightarrow X$ un morphisme tel que $h \circ \psi_A$ soit le morphisme nul. Il vient $\text{Im}(\psi_A) \subset \text{Ker}(h)$, d'où $\text{Im}(f) = \text{Im}(\psi_A \circ i_f) \subset \text{Im}(\psi_A) \subset \text{Ker}(h)$ pour tout $f \in \mathcal{A}(P,A)$. D'après l'exercice

4.3(i), il s'ensuit que $\text{Ker}(h)$ n'est pas un sous-objet propre de A , *i.e.* $\text{Ker}(h) = A$, et donc $h = 0_{AX}$, d'où l'assertion. $\diamond$

Soit $Q := \bigoplus_{B \in \text{Ob}(\mathcal{B})} Q_B$ (comme par hypothèse $\text{Ob}(\mathcal{B})$ est un *ensemble*, cette somme directe est bien représentable dans $\mathcal{A}$). Vérifions d'abord que le foncteur correspondant $\Phi_Q : \mathcal{A} \rightarrow R_Q^{\text{op}} - \text{Mod}$ ainsi obtenu est exact et fidèle (notation du §4.1.2). Pour cela, soit $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}$, et supposons que $\Phi_Q(\phi) : \Phi_Q(A) \rightarrow \Phi_Q(B)$ soit l'homomorphisme nul; cela revient à dire que $\phi \circ f = 0_{QB}$ pour tout morphisme $f : Q \rightarrow A$, *i.e.* $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\phi)$ pour tout tel f . Mais puisque P est un générateur de $\mathcal{A}$, il en est de même pour Q , donc $\text{Ker}(\phi)$ n'est pas un sous-objet propre de A (exercice 4.3(i,iii)), *i.e.* $\text{Ker}(\phi) = A$, et finalement $\phi = 0_{AB}$. Cela achève de vérifier que Φ_Q est fidèle.

Ensuite, noter que Q est un objet projectif de $\mathcal{A}$ (remarque 4.2(v)), *i.e.* le foncteur $h_{Q^{\text{op}}}^{\dagger} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ est exact; en outre, ce foncteur est la composition de Φ_Q avec le foncteur d'oubli $T : R_Q^{\text{op}} - \text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$. D'autre part, il est clair qu'une suite $\Sigma := (0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0)$ de R_Q^{op} -modules est exacte si et seulement la suite $T(\Sigma)$ des groupes abéliens sous-jacents est exacte; au vu de la proposition 2.102(ii), on conclut que Φ_Q est exact.

En dernier lieu, soient $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, et $g : \Phi_Q(A) \rightarrow \Phi_Q(B)$ une application R_Q -linéaire. Notons par $\pi_A : Q \rightarrow Q_A$ la projection naturelle; par l'observation 4.10, $\alpha := \psi_A \circ \pi_A : Q \rightarrow A$ est un épimorphisme. Posons $K := \text{Ker}(\alpha)$, et soit $\gamma : K \rightarrow Q$ le monomorphisme universel. Noter que $\Phi_Q(Q) = R_Q$; par suite, $g \circ \Phi_Q(\alpha) : R_Q \rightarrow \Phi_Q(B)$ correspond à un élément $x \in \Phi_Q(B)$, *i.e.* un morphisme $x : Q \rightarrow B$, et noter que $\Phi_Q(x \circ \gamma) = g \circ \Phi_Q(\alpha) \circ \Phi_Q(\gamma) = g \circ \Phi_Q(\alpha \circ \gamma) = 0$, d'où $x \circ \gamma = 0_{KB}$, car Φ_Q est fidèle. Ainsi, il existe un morphisme $f : A \rightarrow B$ avec $f \circ \alpha = x$. Il vient $\Phi_Q(f) \circ \Phi_Q(\alpha) = g \circ \Phi_Q(\alpha)$, et $\Phi_Q(\alpha)$ est un épimorphisme, car α est un épimorphisme et Φ_Q est exact (exercice 2.66(iv)); donc $\Phi_Q(f) = g$, et cela achève de montrer que la restriction $F : \mathcal{B} \rightarrow R - \text{Mod}$ de Φ_Q est un foncteur plein. Puisque Φ_Q est fidèle, il en est de même pour F , et puisqu'à la fois Φ_Q et le foncteur d'inclusion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ sont exacts, il en est de même pour F . $\square$

Remarque 4.11. Signalons qu'il n'y a aucun espoir de pouvoir simplifier l'énoncé du théorème 4.9, par exemple en ajoutant la condition que $\mathcal{A}$ soit elle-même une petite catégorie, car on voit aisément qu'aucune catégorie abélienne non triviale ne peut être à la fois cocomplète et petite. D'autre part, on a le résultat suivant :

Lemme 4.12. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $\Sigma \subset \text{Ob}(\mathcal{A})$ une petite partie. Il existe une sous-catégorie abélienne pleine petite exacte $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ avec $\Sigma \subset \text{Ob}(\mathcal{B})$.*

Démonstration. Soient $0_{\mathcal{A}}$ un objet zéro de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine avec $\text{Ob}(\mathcal{B}_0) := \Sigma \cup \{0_{\mathcal{A}}\}$; évidemment $\mathcal{B}_0$ est petite. Ensuite, pour toute sous-catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, notons par $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}$ une sous-catégorie définie comme suit. Pour tout morphisme ϕ de $\mathcal{C}$ on choisit deux objets de $\mathcal{A}$ représentant respectivement le noyau et le conoyau de ϕ , et pour tous $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on choisit un objet de $\mathcal{A}$ représentant $A \oplus A'$; soient $\Sigma' \subset \text{Ob}(\mathcal{A})$ la partie ainsi obtenue, et $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ avec $\text{Ob}(\mathcal{C}') := \Sigma' \cup \text{Ob}(\mathcal{C})$. On vérifie aisément que si $\mathcal{C}$ est petite, il en est de même pour $\mathcal{C}'$. On définit par récurrence $\mathcal{B}_{n+1} := \mathcal{B}'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; compte tenu de la proposition 2.102(ii), $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ convient. $\square$

Le but de cette section est de généraliser le théorème 4.9 à toute catégorie abélienne. Pour cela, la première étape est l'observation suivante :

Proposition 4.13. *Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie abélienne, la catégorie abélienne $\mathcal{A}^{\dagger}$ admet un générateur projectif.*

Démonstration. Posons $P := \bigoplus_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})} h_A^{\dagger}$ (notation de la définition 4.1; noter que cette somme directe est représentable dans $\mathcal{A}^{\dagger}$, car $\text{Ob}(\mathcal{A})$ est un ensemble et car $\mathcal{A}^{\dagger}$

est cocomplète). Il vient un isomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\mathrm{Nat}(P, F) \xrightarrow{\sim} \prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \mathrm{Nat}(\mathbf{h}_A^\dagger, F) \xrightarrow{\sim} \prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} FA \quad \forall F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\dagger)$$

par le lemme 2.82(iv) et par la propriété universelle de la somme directe. Autrement dit, P représente le foncteur $\Phi : \mathcal{A}^\dagger \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ tel que : $F \mapsto \prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} FA$ et $\eta \mapsto \prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \eta_A$ pour tout foncteur additif $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ et toute transformation naturelle $\eta : F \rightarrow G$. Or, rappelons que les noyaux et les conoyaux dans $\mathcal{A}^\dagger$ se calculent terme à terme (voir la preuve du lemme 2.82(ii)) ; donc une suite $\Sigma := (0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0)$ de foncteurs additifs $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ est exacte si et seulement si la suite induite $\Sigma_A := (0 \rightarrow F'A \rightarrow FA \rightarrow F''A \rightarrow 0)$ est exacte pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, et cela revient à dire que le produit terme à terme $\prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \Sigma_A := (0 \rightarrow \Phi(F') \rightarrow \Phi(F) \rightarrow \Phi(F'') \rightarrow 0)$ est une suite exacte de groupes abéliens. Avec la proposition 2.102(ii), cela montre que Φ est exact, *i.e.* P est un objet projectif de $\mathcal{A}^\dagger$; en outre, Φ est évidemment fidèle, d'où l'assertion. $\square$

4.1.3. Enveloppes injectives. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie abélienne, le lemme de Yoneda additif nous fournit un foncteur plein et fidèle $\mathbf{h}^\dagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\dagger$; avec la proposition 4.13, $\mathcal{A}$ s'identifie alors avec une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne cocomplète ayant un générateur projectif. Malheureusement, le foncteur $\mathbf{h}^\dagger$ n'est pas exact en général, donc on ne peut pas utiliser directement cette construction pour généraliser le théorème 4.9 à la catégorie $\mathcal{A}$. L'idée clef pour la preuve du théorème de Freyd-Mitchell est d'extraire de $\mathcal{A}^\dagger$ une sous-catégorie pleine cocomplète $\mathcal{A}^\ddagger$ contenant l'image du foncteur $\mathbf{h}^\dagger$, et telle que $\mathbf{h}^\dagger$ identifie $\mathcal{A}$ avec une sous-catégorie exacte de $\mathcal{A}^\ddagger$. Pour mener à bout cette stratégie, il nous faudra dégager quelques propriétés spéciales de la catégorie $\mathcal{A}^\dagger$.

Définition 4.14. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec objet zéro $0_{\mathcal{A}}$.

(i) On dit qu'un monomorphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est une *extension essentielle* de A , si $A \cap B' \neq 0_{\mathcal{A}}$ pour tout sous-objet $B' \neq 0_{\mathcal{A}}$ de B .

(ii) On dit qu'un morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est une *enveloppe injective* de A , si f est une extension essentielle et si B est un objet injectif de $\mathcal{A}$.

(iii) On dit que $\mathcal{A}$ est une *catégorie de Grothendieck*, si $\mathcal{A}$ est cocomplète, et si la condition suivante est vérifiée pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. La classe $\mathrm{Sub}(A)$ est un ensemble, et pour toute famille filtrante $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de sous-objets de A on a :

$$(*) \quad A' \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A' \cap B_\lambda) \quad \forall A' \in \mathrm{Sub}(A).$$

Remarque 4.15. (i) Certaines références exigent aussi que toute catégorie de Grothendieck soit munie d'un générateur. Noter d'ailleurs que si une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est munie d'un générateur X , alors $\mathrm{Sub}(A)$ est un ensemble pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, car dans ce cas, compte tenu de l'exercice 4.3(i), on a une application injective associant à tout sous-foncteur représentable $F \subset \mathbf{h}_{A^{\mathrm{op}}}$ la partie $FX \subset \mathcal{A}(X, A)$; les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(ii) On pourrait postuler seulement que la condition (*) de la définition 4.14(iii) soit vérifiée pour toute famille *totale ordonnée* $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de sous-objets de A , voire même pour toute famille *totale bien ordonnée* de sous-objets. En raisonnant comme pour la solution du problème 2.45, on voit que ces conditions apparemment plus faibles, sont toutefois équivalentes à celle de la définition 4.14(iii).

Exemple 4.16. Si $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ pour un anneau associatif unitaire A , et si $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, évidemment les sous-objets de M sont les sous-modules, et l'intersection et la réunion catégorique d'une famille filtrante de sous-modules sont respectivement l'intersection et la réunion ensembliste, donc la condition (*) de la définition 4.14(iii) est trivialement vérifiée pour tout objet de $A\text{-Mod}$. Compte tenu de l'exemple 2.44(i), on conclut que $A\text{-Mod}$ est une catégorie de Grothendieck.

Exercice 4.17. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie, et si $\mathcal{B}$ est une catégorie de Grothendieck, alors la catégorie $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est de Grothendieck, et si $\mathcal{A}$ est en outre pré-additive, alors $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est de Grothendieck. En particulier, $\mathcal{A}^\dagger$ est une catégorie de Grothendieck, pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Proposition 4.18. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck, et $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) E est un objet injectif de $\mathcal{A}$.
- (b) Toute extension essentielle $E \rightarrow X$ est un isomorphisme.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : La suite exacte courte $0 \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow X/E \rightarrow 0$ est scindée, d'après le lemme 4.5, d'où un isomorphisme $E \oplus (X/E) \xrightarrow{\sim} X$ (remarque 2.99(iii)), et puisque l'extension $E \rightarrow X$ est essentielle, il vient $X/E = 0_{\mathcal{A}}$, d'où (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $\Sigma := (0 \rightarrow E \xrightarrow{i} A \rightarrow B \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de $\mathcal{A}$, et posons $\mathcal{F} := \{S \in \text{Sub}(A) \mid S \cap E = 0_{\mathcal{A}}\}$; observons :

Affirmation 4.19. Pour toute chaîne totalement ordonnée $S_\bullet := (S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'éléments de $\mathcal{F}$ on a $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \in \mathcal{F}$.

Preuve : L'existence de la réunion S de $S_\bullet$ est assurée par la proposition 2.94, et on a $E \cap S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \cap S_\lambda) = 0_{\mathcal{A}}$, car $\mathcal{A}$ est de Grothendieck, d'où $S \in \mathcal{F}$. $\diamond$

Avec l'observation 4.19 et le lemme de Zorn, on déduit que $\mathcal{F}$ admet un élément maximal S , correspondant à un monomorphisme $t : Y \rightarrow A$; on pose $Z := A/Y$ et on dénote par $p : A \rightarrow Z$ la projection canonique. Montrons que $j := p \circ i : E \rightarrow Z$ est un monomorphisme. En effet, soit $f : C \rightarrow E$ un morphisme de $\mathcal{A}$ avec $j \circ f = 0_{CZ}$; alors $i \circ f = t \circ g$ pour un morphisme $g : C \rightarrow Y$ (remarque 2.93(ii)), d'où $\text{Im}(f) \subset E \cap S = 0_{\mathcal{A}}$, i.e. f est le morphisme nul. Cela montre que $\text{Ker}(j) = 0_{\mathcal{A}}$, et on conclut avec le lemme 2.75(i). Montrons ensuite que l'extension $j : E \rightarrow Z$ est essentielle. En effet, soit $u : Z' \rightarrow Z$ un monomorphisme tel que $E \cap Z' = 0_{\mathcal{A}}$, et considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{t'} & A' & \xrightarrow{p'} & Z' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow u \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{t} & A & \xrightarrow{p} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont le carré de droite est cartésien, et où t' est l'unique morphisme tel que $p' \circ t' = 0_{YZ'}$ et $v \circ t' = t$. On a une identification naturelle : $E \times_{(i,v)} A' \xrightarrow{\sim} E \times_{(j,u)} Z'$ (remarque 2.24(i)), et par hypothèse $E \times_Z Z' = 0_{\mathcal{A}}$ (lemme 2.47(ii)); en outre, v est un monomorphisme (exemple 2.23(iii)), donc la classe de $v : A' \rightarrow A$ est dans $\mathcal{F}$. Par maximalité de S , il s'ensuit que t' est un isomorphisme; mais noter que la ligne horizontale en haut est exacte courte (exercice 2.105(i)), donc $Z' = 0_{\mathcal{A}}$, d'où l'assertion. D'après (b), j est alors un isomorphisme, donc la suite exacte courte $0 \rightarrow Y \xrightarrow{t} A \xrightarrow{j^{-1} \circ p} E \rightarrow 0$ est scindée, i.e. les morphismes i et t induisent un isomorphisme $E \oplus Y \xrightarrow{\sim} A$, et on conclut aisément que Σ est scindée, d'où l'assertion, compte tenu du lemme 4.5. $\square$

Problème 4.20. (Critère de Baer) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur G , et $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Montrer que E est injectif $\Leftrightarrow$ pour tout sous-objet $I \subset G$, tout morphisme $I \rightarrow E$ est la restriction d'un morphisme $G \rightarrow E$.

Exemple 4.21. Soient A un anneau associatif unitaire, et E un A -module.

(i) Avec les exemples 4.4(ii) et 4.16, et le problème 4.20, on voit que E est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche $I \subset A$, toute application A -linéaire $I \rightarrow E$ est la restriction d'une application A -linéaire $A \rightarrow E$.

(ii) Si A est commutatif, intègre et principal, le critère de Baer nous dit que E est injectif si et seulement s'il est *divisible*, i.e. si pour tout $x \in E$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$ il existe $y \in E$ tel que $x = ay$. En effet, l'idéal Aa est un A -module libre de rang un, car A est

intègre, et donc il existe une unique application A -linéaire $\phi : Aa \rightarrow E$ avec $\phi(a) = x$; or, l'existence d'un prolongement $A \rightarrow E$ de ϕ équivaut à la condition énoncée pour x . Par exemple, le corps des fractions K de A est un A -module injectif, et de même pour son quotient K/A . Si l'on fait $A = \mathbb{Z}$, on trouve que les $\mathbb{Z}$ -modules $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont injectifs.

4.1.4. Dualité de Pontryagin. Soit A un anneau associatif unitaire; tout A -module P admet une structure unique de $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule, et de même tout $\mathbb{Z}$ -module admet une structure unique de $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -bimodule (voir le §3.2.1); ainsi

$$P^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est naturellement un $(\mathbb{Z}, A)$ -bimodule, *i.e.* un A^{op} -module, selon la remarque 1.15(i). On appelle P^* le *dual de Pontryagin* de P . Toute application A -linéaire $\phi : P \rightarrow Q$ induit une *application A^{op} -linéaire duale*

$$\phi^* : Q^* \rightarrow P^* \quad f \mapsto f \circ \phi.$$

On obtient ainsi un foncteur additif contravariant

$$(-)^* : (A - \text{Mod})^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}} - \text{Mod} \quad P \mapsto P^*.$$

Exercice 4.22. Soient A un anneau associatif unitaire, et M un A -module.

- (i) Montrer que $M = 0 \Leftrightarrow M^* = 0$. Dédurre que le foncteur $(-)^*$ est exact et fidèle.
- (ii) Montrer que si M est un A -module libre, M^* est un A^{op} -module injectif.

• On peut utiliser le dual de Pontryagin afin d'exhiber pour tout A -module M un A -module injectif E avec une injection A -linéaire $M \rightarrow E$. Pour cela, notons d'abord que l'on a une injection A -linéaire naturelle

$$\omega_M : M \rightarrow M^{**} \quad x \mapsto ((f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto f(x)).$$

En effet, pour tout $x \in M$, soit $\mathbb{Z}x \subset M$ le $\mathbb{Z}$ -sous-module engendré par x ; si $x \neq 0$ il existe une application $\mathbb{Z}$ -linéaire non nulle $g : \mathbb{Z}x \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$ -module injectif, on peut prolonger g en une application $\mathbb{Z}$ -linéaire $f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Par construction $f(x) \neq 0$, donc $x \notin \text{Ker } \omega_M$. Or, soit L un A^{op} -module libre avec une surjection A^{op} -linéaire $h : L \rightarrow M^*$; d'après l'exercice 4.22, la composition

$$\varepsilon : M \xrightarrow{\omega_M} M^{**} \xrightarrow{h^*} E := L^*$$

est injective, et E est un A -module injectif.

- Généralisant la définition 3.73, on dira qu'un A -module P est *plat* si le foncteur

$$- \otimes_A P : A^{\text{op}} - \text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod} \quad M \mapsto M \otimes_A P$$

est exact (ici on regarde M comme un $(\mathbb{Z}, A)$ -bimodule et P comme un $(A, \mathbb{Z})$ -bimodule). A certains égards, les modules injectifs sont plutôt à considérer comme les *duaux* des A -modules plats; un premier indice est le critère de Baer de l'exemple 4.21(i), qui est analogue à la proposition 3.78; le problème 4.23(i) ci-dessous est une autre manifestation de cette dualité.

Problème 4.23. Soient A un anneau associatif unitaire, M et P deux A -modules.

- (i) Montrer que P^* est un A^{op} -module injectif $\Leftrightarrow P$ est un A -module plat.
- (ii) Montrer qu'il existe une application $\mathbb{Z}$ -linéaire unique

$$\sigma_{P,M} : P^* \otimes_A M \rightarrow \text{Hom}_A(M, P)^* \quad \text{telle que} \quad f \otimes m \mapsto (h \mapsto f \circ h(m)).$$

Montrer aussi que l'association $M \mapsto \sigma_{P,M}$ définit une transformation naturelle

$$\sigma_P : P^* \otimes_A - \rightarrow \text{Hom}_A(-, P)^*.$$

- (iii) Montrer que $\sigma_{P,M}$ est un isomorphisme si M est de présentation finie.

L'application suivante de la dualité de Pontryagin est empruntée à l'article [35] de L.Gruson et M.Raynaud.

Problème 4.24. (i) Soit $\Sigma := (0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \rightarrow 0)$ un complexe de A -modules. On dit que Σ est une *suite universellement exacte* si le complexe $N \otimes_A \Sigma$ est exact pour tout A^{op} -module N . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) Σ est une suite universellement exacte.
- (b) $M_1^* \otimes_A \phi$ est une application injective (notation de §4.1.4).
- (c) La suite $\Sigma^* := (0 \rightarrow M_3^* \xrightarrow{\psi^*} M_2^* \xrightarrow{\phi^*} M_1^* \rightarrow 0)$ est scindée.
- (d) La suite Σ^* est universellement exacte.
- (e) Tout A -module de présentation finie N induit une surjection

$$\text{Hom}_A(N, \psi) : \text{Hom}_A(N, M_2) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M_3).$$

- (f) Σ est la colimite d'un système filtrant de suites exactes courtes scindées de A -modules.
- (ii) Soit Σ comme dans (i). Montrer les assertions suivantes :
 - (a) Si M_3 est un A -module plat, Σ est une suite universellement exacte.
 - (b) Si M_2 est un A -module plat et si Σ est universellement exacte, M_1 et M_3 sont des A -modules plats.

Exercice 4.25. (i) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$ deux extensions essentielles de $\mathcal{A}$. Montrer que $j \circ i : X \rightarrow Z$ est une extension essentielle.

- (ii) Dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$, considérons un diagramme cartésien :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Montrer que si i est une extension essentielle, alors $g = 0_{X'X}$, $\Leftrightarrow f = 0_{Y'Y}$.

(iii) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $(f_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i = 1, \dots, n)$ une famille finie de morphismes de $\mathcal{A}$. Montrer que $f := \bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n X_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ est une extension essentielle si et seulement s'il en est de même pour chaque f_i .

(iv) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck, $i : X \rightarrow Y$ un monomorphisme, $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille filtrante de sous-objets de Y , tels que $X \subset Z_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et supposons que chaque Z_λ soit une extension essentielle de X . Montrer qu'alors $Z := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ est une extension essentielle de X .

(v) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; considérons une enveloppe injective $i : A \rightarrow E$, et un monomorphisme $j : A \rightarrow J$ avec J injectif. Montrer que :

- (a) Il existe un monomorphisme $f : E \rightarrow J$ avec $j = f \circ i$.
- (b) Si j est aussi une enveloppe injective, alors f est un isomorphisme.

Proposition 4.26. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck, $X_\bullet := (X_i \mid i \in I)$ une petite famille filtrante d'objets de $\mathcal{A}$, telle que pour tous $i, j \in I$ avec $i \leq j$ le morphisme de transition $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ soit un monomorphisme. Soient en outre X la colimite de $X_\bullet$, et $(g_i : X_i \rightarrow X \mid i \in I)$ un co-cône universel. Alors chaque g_i est un monomorphisme.

Démonstration. Soit J l'ensemble des couples $(i, j) \in I \times I$ avec $i \leq j$; on pose $Y_I := \bigoplus_{i \in I} X_i$, $X_{ij} := X_i$ pour tout $(i, j) \in J$, et $Y_J := \bigoplus_{(i, j) \in J} X_{ij}$. Notons aussi par

$$(e_i : X_i \rightarrow Y_I \mid i \in I) \quad \text{et} \quad (e_{(i, j)} : X_i \rightarrow Y_J \mid (i, j) \in J)$$

les co-cônes universels respectifs. On a deux morphismes uniques $\alpha, \beta : Y_J \rightarrow Y_I$ tels que :

$$\alpha \circ e_{(i, j)} = e_i \quad \beta \circ e_{(i, j)} = e_j \circ f_{ij} \quad \forall (i, j) \in J$$

et la preuve de la proposition 2.40 montre que la colimite de $X_\bullet$ est représentée par le coégaliseur de α et β , i.e. par $\text{Coker}(\gamma)$, avec $\gamma := \alpha - \beta$, et sous cette identification, g_i correspond à la composition de e_i avec l'épimorphisme universel $\pi : Y_I \rightarrow \text{Coker}(\gamma)$. Soit $J(k) := \{(i, j) \in J \mid j \leq k\}$ pour tout $k \in I$, et posons $Y_{J(k)} := \bigoplus_{(i, j) \in J(k)} X_{ij}$ et

$Y_{I,k} := \bigoplus_{i \leq k} X_i$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont les monomorphismes naturels :

$$\begin{array}{ccc} Y_{J,k} & \xrightarrow{\gamma_k} & Y_{I,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_J & \xrightarrow{\gamma} & Y_I \end{array} \quad \text{et } \gamma_k = \alpha_k - \beta_k \text{ pour } \alpha_k, \beta_k : Y_{J,k} \rightarrow Y_{I,k}.$$

On voit aisément que $Y_J = \bigcup_{k \in I} Y_{J,k}$, et alors $\text{Ker}(\pi) = \bigcup_{k \in I} \text{Im}(\gamma_k)$. On doit vérifier que $\text{Ker}(\pi \circ e_i) = 0_{\mathcal{A}}$ pour tout $i \in I$, et puisque e_i est un monomorphisme, cela revient à montrer que $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(e_i) = 0_{\mathcal{A}}$ pour tout tel i . Comme $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, on est alors ramené à vérifier que $\text{Im}(\gamma_k) \cap \text{Im}(e_i) = 0_{\mathcal{A}}$ pour tous $i, k \in I$. Si $k < i$, l'assertion est évidente ; soit donc $k \geq i$, et considérons l'unique morphisme $\phi_k : Y_{I,k} \rightarrow X_k$ tel que $\phi_k \circ e_l = f_{lk}$ pour tout $l \leq k$ (par abus de notation, on dénote aussi par $(e_l : X_l \rightarrow Y_{I,k} \mid l \leq k)$ le co-cône universel). Il vient : $\phi_k \circ \alpha_k \circ e_{(j,l)} = \phi_k \circ e_j = f_{jk}$ et $\phi_k \circ \beta_k \circ e_{(j,l)} = \phi_k \circ e_l \circ f_{jl} = f_{lk} \circ f_{jl} = f_{jlk}$, donc $\phi_k \circ \gamma_k$ est le morphisme nul. D'autre part, $\phi_k \circ e_i = f_{ik}$ est un monomorphisme, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 4.27. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck, et $(I, \leq)$ un ensemble filtrant. Alors le foncteur $\text{Colim}_I : \text{Fun}(I, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ est exact.*

Démonstration. On sait déjà que Colim_I est exact à droite (proposition 2.49(ii)) et que $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$ est une catégorie de Grothendieck (exercice 4.17) ; la proposition 2.102(i,ii), nous ramène alors à vérifier que $\text{Colim}_I(\lambda) : \text{Colim}_I Z_{\bullet} \rightarrow \text{Colim}_I X_{\bullet}$ est un monomorphisme, pour tout monomorphisme $\lambda : Z_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ de $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$. Posons $K := \text{Ker}(\text{Colim}_I \lambda)$, et choisissons des co-cônes universels

$$(\varepsilon_i^Z : Z_i \rightarrow Z := \text{Colim}_I Z_{\bullet} \mid i \in I) \quad (\varepsilon_i^X : X_i \rightarrow X := \text{Colim}_I X_{\bullet} \mid i \in I).$$

La preuve de la proposition 2.94 montre que $Z = \bigcup_{i \in I} \text{Im}(\varepsilon_i^Z)$; puisque $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, il suffit alors de vérifier que $K \cap \text{Im}(\varepsilon_i^Z) = 0_{\mathcal{A}}$ pour tout $i \in I$. Posons $K_i := K \times_Z Z_i$, notons par $K \xleftarrow{p_i} K_i \xrightarrow{q_i} Z_i$ les projections canoniques, et définissons $J, \gamma : Y_I \rightarrow Y_J$, $(\gamma_k : Y_{J,k} \rightarrow Y_{I,k} \mid k \in I)$, $(\phi_k : Y_{I,k} \rightarrow X_k \mid k \in I)$ et $\pi : Y_I \rightarrow X$ comme dans la preuve de la proposition 4.26, de sorte que $\text{Ker}(\pi) = \bigcup_{k \in I} \text{Im}(\gamma_k)$; soit aussi $(e_i : X_i \rightarrow Y_I \mid i \in I)$ le co-cône universel. D'après l'exercice 2.95(i), l'image de la projection $p_i : K_i \rightarrow K$ est $K \cap \text{Im}(\varepsilon_i^Z)$, donc il suffit de montrer que p_i est le morphisme nul. Par construction, $\text{Im}(\lambda_i \circ q_i) \subset \text{Ker}(\varepsilon_i^X)$, donc $\overline{K}_i := \text{Im}(e_i \circ \lambda_i \circ q_i) \subset X_i \cap \text{Ker}(\pi)$. Posons $\overline{K}_{ik} := \overline{K}_i \cap \text{Im}(\gamma_k)$ et $K_{ik} := K_i \times_{\overline{K}_i} \overline{K}_{ik}$ pour tout $k \geq i$; puisque $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, on a $\overline{K}_i = \bigcup_{k \geq i} \overline{K}_{ik}$, et $K_i = \bigcup_{k \geq i} K_{ik}$. Or, par construction la composition $X_i \xrightarrow{e_i} Y_{I,k} \xrightarrow{\phi_k} X_k$ est le morphisme de transition f_{ik} du système filtrant $X_{\bullet}$, et d'autre part la la preuve de la proposition 4.26 montre que la composition $Y_{J,k} \xrightarrow{\gamma_k} Y_{I,k} \xrightarrow{\phi_k} X_k$ est le morphisme nul. En résumé, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} K_{ik} & \longrightarrow & K_i & \xrightarrow{q_i} & Z_i & \xrightarrow{g_{ik}} & Z_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \lambda_i & & \downarrow \lambda_k \\ \overline{K}_{ik} & \longrightarrow & \overline{K}_i & \longrightarrow & X_i & \xrightarrow{f_{ik}} & X_k \\ \parallel & & & & \downarrow e_i & & \parallel \\ \overline{K}_{ik} & \longrightarrow & Y_{J,k} & \xrightarrow{\gamma_k} & Y_{I,k} & \xrightarrow{\phi_k} & X_k \end{array}$$

où g_{ik} est le morphisme de transition du système filtrant $Z_{\bullet}$. Par hypothèse, λ_k est un monomorphisme, donc l'image de K_{ik} est $0_{\mathcal{A}}$ dans Z_k , donc aussi dans K . Mais l'image de p_i est la réunion des images des K_{ik} , d'où finalement $p_i = 0_{K_i K}$. $\square$

Problème 4.28. (i) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur, et $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Montrer que F est représentable si et seulement s'il commute avec les petites limites de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ (voir la définition 2.38(vi)).

(ii) Dédurre de (i) que $\mathcal{A}$ est complète.

Théorème 4.29. (Gabriel-Popescu) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur G . Alors on a :

(i) Le foncteur $\Phi_G : \mathcal{A} \rightarrow R_G^{\text{op}} - \mathbf{Mod}$ est plein et fidèle.

(ii) L'adjoint à gauche $\Psi_G : R_G^{\text{op}} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{A}$ de Φ_G est exact.

Démonstration. (i) : Par le lemme 4.8, Φ_G admet un adjoint à gauche Ψ_G ; pour vérifier que Φ_G est plein et fidèle, il suffit alors de montrer que la coïmité $\varepsilon : \Psi_G \circ \Phi_G \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ de l'adjonction pour (Ψ_G, Φ_G) est un isomorphisme ; en outre, comme G est un générateur, le foncteur $\mathbf{h}_{G^{\text{op}}}^{\dagger} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ est fidèle, donc de même pour Φ_G , et alors ε_A est un épimorphisme pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ (proposition 2.16(i)). Soient $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $\mathcal{F}$ l'ensemble filtrant des R_G^{op} -sous-modules de type fini de $M := \Phi_G A$, et pour tout $N \in \mathcal{F}$ soit $i_N : N \rightarrow M$ l'inclusion ; on est ramené à vérifier que ε_A est un monomorphisme, et noter que ε_A est la colimite du système de morphismes $(\varepsilon_A \circ \Psi_G(i_N) : \Psi_G N \rightarrow A \mid N \in \mathcal{F})$, car Ψ_G commute avec toute colimite (proposition 2.49(ii)). D'après le corollaire 4.27, il suffit alors de vérifier :

Affirmation 4.30. $f_N := \varepsilon_A \circ \Psi_G(i_N)$ est un monomorphisme pour tout $N \in \mathcal{F}$.

Preuve : Soient $\pi : R_G^n \rightarrow N$ une surjection R_G^{op} -linéaire, et $(b_i \mid i = 1, \dots, n)$ la base canonique de R_G^n ; posons $K := \text{Ker}(\pi)$, et soient $(e_i : G \rightarrow G^n \mid i = 1, \dots, n)$ et $(e_y^K : G \rightarrow G^{(K)} \mid y \in K)$ les co-cônes universels. La preuve du lemme 4.8 fournit une suite exacte de $\mathcal{A}$:

$$G^{(K)} \xrightarrow{j} G^n \xrightarrow{p} \Psi_G N \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad f_N \circ p \circ e_i = \pi(b_i) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

En outre, j est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $j \circ e_y^K = y$ pour tout $y \in K$, où l'on identifie $\Phi_G(G^n)$ avec le R_G^{op} -module R_G^n , via l'isomorphisme

$$R_G^n \xrightarrow{\sim} \Phi_G(G^n) \quad b_i \mapsto e_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Il suffit donc de montrer que $\text{Ker}(f_N \circ p \varepsilon) \subset \text{Im}(j)$. Soit alors $x : G \rightarrow G^n$ un morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $f_N \circ p \circ x = 0_{GA}$; on a $x = \sum_{i=1}^n e_i a_i$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in R_G$, et il vient $y := \sum_{i=1}^n b_i a_i \in K$, d'où $x = j \circ e_y^K$. Puisque G est un générateur de $\mathcal{A}$, on conclut avec l'exercice 4.3(i). $\diamond$

(ii) : On sait déjà que Ψ_G est exact à droite et additif (proposition 2.49(ii) et problème 2.76(ii)) ; compte tenu de la proposition 2.102(iii), il suffit de vérifier que pour tout homomorphisme injectif $f : N \rightarrow M$ de R_G^{op} -modules, $\Psi_G(f)$ est un monomorphisme. Soit $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ la famille filtrante des R_G^{op} -sous-modules de type fini de N , et pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $f_\lambda : N_\lambda \rightarrow M$ la restriction de f ; puisque Ψ_G commute avec toute colimite, $\Psi_G(f)$ s'identifie avec la colimite du système $(\Psi_G(f_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$. Si chaque $\Psi_G(f_\lambda)$ est un monomorphisme, il en est alors de même pour $\Psi_G(f)$ (corollaire 4.27) ; ainsi, on peut supposer que N soit un R_G^{op} -module de type fini. De même, soit $(M_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ la famille filtrante des R_G^{op} -sous-modules de type fini de M contenant l'image de f , et pour tout $\lambda' \in \Lambda'$ soit $g_{\lambda'} : N \rightarrow M_{\lambda'}$ l'unique application R_G^{op} -linéaire dont la composition avec l'inclusion $M_{\lambda'} \rightarrow M$ est f ; par le même raisonnement, on est ramené aussitôt à vérifier que chaque $\Psi_G(g_{\lambda'})$ est un monomorphisme, donc on peut supposer que M et N soient de type fini. Soient alors $p : R_G^n \rightarrow M$ une surjection R_G^{op} -linéaire, et $K := \text{Ker}(p)$; d'après l'exercice 2.105(i) on a un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & R_G^n & \xrightarrow{p} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

et dont le carré à droite est cartésien. Soit X (resp. Y) l'image de $\Psi_G(K)$ dans $\Psi_G(Q)$ (resp. dans $\Psi_G(R_G^n) = G^n$); puisque Ψ_G est exact à droite, on déduit un diagramme commutatif de $\mathcal{A}$ à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \Psi_G(Q) & \longrightarrow & \Psi_G(N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi \downarrow & & \Psi_G(f') \downarrow & & \downarrow \Psi_G(f) & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & G^n & \xrightarrow{\Psi_G(p)} & \Psi_G(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où ϕ est un épimorphisme, et noter que f' est un monomorphisme (exemple 2.23(iii)). Par le lemme du serpent (proposition 2.106), on déduit que si $\Psi_G(f')$ est un monomorphisme, il en est de même pour $\Psi_G(f)$. On est ainsi ramené au cas où $M = R_G^n$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$. Noter que Q n'est pas forcément de type fini, mais en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène à nouveau au cas d'une injection R_G^{op} -linéaire $f : N \rightarrow R_G^n$ avec N de type fini. Mais d'après la preuve de (i) on sait aussi que la coïunité ε est un isomorphisme; l'assertion est alors un cas particulier de l'observation 4.30, avec $A := G^n$, car $\Phi_G(A) = R_G^n$. $\square$

Théorème 4.31. (Grothendieck) *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur. Alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une enveloppe injective.*

Démonstration. Soient G un générateur de $\mathcal{A}$, et $R_G := \mathcal{A}(G, G)$; d'après le théorème 4.29, le foncteur $\Phi_G : \mathcal{A} \rightarrow R_G^{\text{op}} - \text{Mod}$ est plein et fidèle.

Affirmation 4.32. Si $i : A \rightarrow B$ est une extension essentielle de $\mathcal{A}$, alors $\Phi_G(i) : \Phi_G A \rightarrow \Phi_G B$ est une extension essentielle de R_G^{op} -modules.

Preuve : Soit $x \in \Phi_G(B) \setminus \{0\}$; on doit vérifier que $xR_G \cap \text{Im}(\Phi_G i) \neq 0$. Or, $x : G \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{A}$; considérons le produit fibré $C := A \times_{(i,x)} G$, avec ses projections canoniques $A \xleftarrow{x'} C \xrightarrow{i'} G$. D'après l'exercice 4.25(ii) on a $x' \neq 0_{CA}$, d'où $i \circ x' \neq 0_{CB}$, car i est un monomorphisme; puisque G est un générateur de $\mathcal{A}$, il existe un morphisme $y : G \rightarrow C$ de $\mathcal{A}$ tel que $z := i \circ x' \circ y \neq 0_{GB}$. Alors $z \in \text{Im}(\Phi_G i)$, et d'autre part $z \in xR_G$, car $z = x \circ i' \circ y$. $\diamond$

D'après le §4.1.4, il existe un R_G^{op} -module injectif avec un homomorphisme injectif $\omega : \Phi_G A \rightarrow E$ de R_G^{op} -modules; pour toute extension essentielle $i : A \rightarrow B$ il existe une application R_G^{op} -linéaire $f : \Phi_G B \rightarrow E$ avec $\omega = f \circ \Phi_G(i)$, et noter que f est injective, car $\Phi_G(i)$ est une extension essentielle, d'après l'observation 4.32. Soit alors $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les sous-modules $M \subset E$ de la forme $M = f(\Phi_G B)$ pour une telle extension essentielle B et une telle application R_G^{op} -linéaire f . Pour tout $M \in \mathcal{F}$ choisissons une extension essentielle $i_M : A \rightarrow B_M$ et un diagramme commutatif de R_G^{op} -modules :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_G A & \xrightarrow{\Phi_G(i_M)} & \Phi_G(B_M) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega_M \\ E & \xleftarrow{l_M} & M \end{array}$$

dont l_M est l'inclusion, et ω_M est un isomorphisme. Munissons $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel donné par l'inclusion de sous-modules; noter que si $M, N \in \mathcal{F}$ et si $M \subset N$, puisque Φ_G est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $i_{MN} : B_M \rightarrow B_N$ tel que $\omega_N \circ \Phi_G(i_{MN}) \circ \omega_M^{-1} : M \rightarrow N$ soit l'inclusion, et on voit aussitôt que $i_{MN} \circ i_M = i_N$. En outre, puisque B_M est une extension essentielle de A , on vérifie aisément que i_{MN} est un monomorphisme pour tous tels M et N .

Soit ensuite $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une partie non vide totalement ordonnée de $\mathcal{F}$; posons

$$B_\lambda := B_{M_\lambda} \quad i_\lambda := i_{M_\lambda} \quad f_\lambda := l_{M_\lambda} \circ \omega_{M_\lambda} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

de sorte que l'on obtient un système $(i_\lambda : A \rightarrow B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de morphismes de $\mathcal{A}$, indexé par l'ensemble totalement ordonné $(\Lambda, \leq)$, avec les morphismes de transition $i_{\lambda\mu} :=$

$i_{M_\lambda M_\mu} : B_\lambda \rightarrow B_\mu$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$. Soient L la colimite dans $\mathcal{A}$ de la famille $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, et $(j_\lambda : B_\lambda \rightarrow L \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel; évidemment $i := j_\lambda \circ i_\lambda : A \rightarrow L$ est indépendant de λ , et d'après la proposition 4.26, chaque j_λ est un monomorphisme, donc de même pour i . On voit aussi aisément que L est la réunion de la famille de ses sous-objets $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$; avec l'exercice 4.25(iv), il s'ensuit alors que L est une extension essentielle de A . Posons $H := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Im}(\Phi_G(j_\lambda)) \subset \Phi_G L$; noter que $f_\mu \circ \Phi_G(i_{\lambda\mu}) = f_\lambda$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, de sorte qu'il existe une unique application R_G^{op} -linéaire $h : H \rightarrow E$ telle que $h(\Phi_G(j_\lambda)(x)) = f_\lambda(x)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in \Phi_G B_\lambda$. Puisque chaque f_λ est injective, il en est de même pour h , et puisque E est un R_G^{op} -module injectif, on trouve ensuite une application R_G^{op} -linéaire $f : \Phi_G L \rightarrow E$ qui prolonge h ; en particulier il vient $\omega = f \circ \Phi_G(i)$, de sorte que $N := f(\Phi_G L) \in \mathcal{F}$. Par construction, on a $M_\lambda \subset N$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; le lemme de Zorn nous dit alors que $\mathcal{F}$ admet un élément maximal M_0 , et posons $i_0 := i_{M_0} : A \rightarrow B_0$.

Affirmation 4.33. B_0 n'admet aucune extension essentielle non triviale.

Preuve : Soit $v : B_0 \rightarrow C$ une extension essentielle; puisque E est un R_G^{op} -module injectif, l'injection R_G^{op} -linéaire $l_{M_0} \circ \omega_{M_0} : \Phi_G B_0 \rightarrow E$ se factorise à travers $\Phi_G(v)$ et une application R_G^{op} -linéaire $f_C : \Phi_G C \rightarrow E$, de sorte que $f_C \circ \Phi_G(v \circ i_0) = \omega$, et noter que $v \circ i_0 : A \rightarrow C$ est une extension essentielle, d'après l'exercice 4.25(i). Mais par construction $M_0 \subset Q := f_C(\Phi_G C)$, donc $M_0 = Q$, par maximalité de M_0 . Cela revient à dire que $\Phi_G(v)$ est un isomorphisme, donc de même pour v , car Φ_G est plein et fidèle (exercice 1.124(i.a)), d'où l'assertion. $\diamond$

Par la proposition 4.18 et l'observation 4.33, B_0 est injectif, et la preuve est achevée. $\square$

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne; d'après le théorème 4.31, la proposition 4.13 et l'exercice 4.17, tout objet de $\mathcal{A}^\dagger$ a une enveloppe injective. D'autre part :

Lemme 4.34. Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, et $E : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ un foncteur additif. Si E est un objet injectif de $\mathcal{A}^\dagger$, alors il est exact à droite.

Démonstration. Soit $A'^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}} \rightarrow A''^{\text{op}} \rightarrow 0$ une suite exacte à droite de $\mathcal{A}^{\text{op}}$; d'après le §4.1.1, la suite induite $0 \rightarrow h_{A''}^\dagger \rightarrow h_A^\dagger \rightarrow h_{A'}^\dagger$ est exacte à gauche dans $\mathcal{A}^\dagger$. Puisque E est injectif dans $\mathcal{A}^\dagger$, on déduit une suite exacte à droite de groupes abéliens $\text{Nat}(h_{A'}^\dagger, E) \rightarrow \text{Nat}(h_A^\dagger, E) \rightarrow \text{Nat}(h_{A''}^\dagger, E) \rightarrow 0$. D'après le lemme 2.82(iv), cette dernière s'identifie naturellement avec la suite $EA' \rightarrow EA \rightarrow EA'' \rightarrow 0$; on conclut alors avec la proposition 2.102(i). $\square$

D'après le lemme 4.34, un objet injectif E de $\mathcal{A}^\dagger$ est un foncteur exact si et seulement s'il transforme les épimorphismes de $\mathcal{A}$ en monomorphismes de groupes abéliens. Cette condition s'avère cruciale pour notre discussion; faisons alors la :

Définition 4.35. Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, et $F \in \text{Ob}(\mathcal{A}^\dagger)$.

(i) On dit que F est *épique* s'il transforme tout épimorphisme $A \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$ en une injection $FA' \rightarrow FA$ de groupes abéliens.

(ii) On dénote par $E(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}^\dagger$ dont les objets sont les foncteurs épiques.

Proposition 4.36. Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, et $F \rightarrow E$ une extension essentielle dans $\mathcal{A}^\dagger$. Si F est épique, il en est de même pour E .

Démonstration. Si par l'absurde, E n'est pas épique, alors il existe un épimorphisme $f : A \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$ et $x \in \text{Ker}(Ef) \setminus \{0\}$. On voit aisément que l'association :

$$B \mapsto GB := \{Eg(x) \mid g \in \mathcal{A}(B, A')\} \quad \forall B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$$

définit un sous-foncteur de E . Montrons que GB est un sous-groupe de EB , pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$: en effet, évidemment $0 \in GB$, et si $y, z \in GB$, on a $y = g(x)$, $z =$

$h(x)$ pour certains morphismes $g, h : B \rightarrow A'$ de $\mathcal{A}$, et puisque E est additif, il vient $E(g - h)(x) = (Eg - Eh)(x) = y - z$, d'où l'assertion. Puisque $x \in GA'$, on a $G \neq 0$, et comme l'extension $F \rightarrow E$ est essentielle, on a donc $F \cap G \neq 0$. Soient alors $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et $y \in (FB \cap GB) \setminus \{0\}$. Ainsi, on a $y = Eg(x)$ pour quelque $g \in \mathcal{A}(B, A')$, et on considère le diagramme cartésien de $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & A'. \end{array}$$

D'après l'exercice 2.95(i), f' est un épimorphisme, donc Ff' est injectif, car F est épique ; par suite, $z := Ff'(y) \neq 0$. Mais $z = E(f \circ g')(x) = E(g') \circ E(f)(x) = 0$, contradiction. $\square$

Corollaire 4.37. (i) Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, et $F \rightarrow G$ un monomorphisme de $\mathcal{A}^\dagger$. Si G est un foncteur exact, alors F est épique.

(ii) Si F est un objet épique de $\mathcal{A}^\dagger$, il existe un foncteur exact $G : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ avec un monomorphisme $F \rightarrow G$ de $\mathcal{A}^\dagger$.

Démonstration. (i) : Si G est exact, alors G est épique, donc de même pour F .

(ii) : On a déjà remarqué que F admet une enveloppe injective $F \rightarrow G$, et G est épique, par la proposition 4.36, donc G est exact. $\square$

Avec les résultats ci-dessus, on peut déjà démontrer un premier théorème de représentation : toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est équivalente à une sous-catégorie exacte de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$. On considère la somme directe suivante dans $(\mathcal{A}^{\text{op}})^\dagger$:

$$F := \bigoplus_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})} h_{A^{\text{op}}}^\dagger.$$

Tout monomorphisme $X' \rightarrow X$ de $\mathcal{A}$ induit une injection $\mathcal{A}(A, X') \rightarrow \mathcal{A}(A, X)$, pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, donc F est épique. D'après le corollaire 4.37, il existe alors un monomorphisme $F \rightarrow G$ avec un foncteur exact $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$, et puisque F est évidemment fidèle, il en est de même pour G , d'où l'assertion.

Plusieurs étapes ultérieures nous conduiront à un foncteur $\mathcal{A} \rightarrow R - \text{Mod}$ exact, plein et fidèle, pour un anneau associatif unitaire R convenable. D'abord, noter que le produit (dans $\mathcal{A}^\dagger$) de toute petite famille de foncteurs épiques est épique, et de même pour tout sous-objet de tout foncteur épique. En grand partie, l'étude de $E(\mathcal{A})$ ne s'appuie que sur ces propriétés élémentaires ; pour poursuivre notre discussion, il est ainsi utile d'introduire le cadre abstrait plus général suivant :

Définition 4.38. (i) Soient $\mathcal{B}$ une catégorie de Grothendieck complète, telle que tout objet de $\mathcal{B}$ admet une enveloppe injective dans $\mathcal{B}$, et $\mathcal{E}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{E}$ est *épique*, si elle vérifie les conditions suivantes :

- (a) le produit (dans $\mathcal{B}$) de toute petite famille d'objets de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$
- (b) tout sous-objet, et toute extension essentielle d'un objet de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$.
- (ii) On dit que $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ est de *$\mathcal{E}$ -torsion* si $\mathcal{B}(B, E) = 0$ pour tout $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$.
- (iii) Soit $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$; on dit qu'un sous-objet $E' \subset E$ est *pur* si $E/E' \in \text{Ob}(\mathcal{E})$.
- (iv) On dit qu'un objet $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ est *absolument pur* si pour tout monomorphisme $E \rightarrow F$ de $\mathcal{B}$ avec $F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, on a $F/E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$.

Exemple 4.39. (i) Soient R un anneau intègre, et $\mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine de $R - \text{Mod}$ dont les objets sont les R -modules sans torsion (voir le §1.1.4). Evidemment tout produit de R -modules sans torsion est sans torsion, et de même pour tout sous-module d'un R -module sans torsion. Si $M \rightarrow N$ est une extension essentielle de R -modules, avec M sans torsion, et si $x \in N \setminus \{0\}$, on a $Ax \cap M \neq 0$, donc il existe $a \in A$ avec $ax \in M \setminus \{0\}$,

d'où $\text{Ann}_A(x) \subset \text{Ann}_A(ax) = 0$, de sorte que N est sans torsion. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une sous-catégorie épique de $R - \text{Mod}$. En outre, on voit aussitôt qu'un R -module M est de $\mathcal{E}$ -torsion $\Leftrightarrow M = M_{\text{tor}} := \{x \in M \mid \text{Ann}_A(x) \neq 0\}$; cette observation est à l'origine de la définition 4.38(ii).

(ii) Dans la situation de la définition 4.38(i), soient $\mathcal{E}$ une sous-catégorie épique de $\mathcal{B}$, et $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ qui est injectif dans $\mathcal{B}$; alors E est absolument pur. Car, si $E \rightarrow F$ est un monomorphisme de $\mathcal{B}$ avec $F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, alors E/F est un sous-objet de F (lemme 4.5 et remarque 2.99(iii)), donc $E/F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, d'où l'assertion.

Exercice 4.40. Soient $\mathcal{B}$ comme dans la définition 4.38, et $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ une sous-catégorie épique. Montrer que le foncteur d'inclusion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ admet un adjoint à gauche.

Revenons à la situation de l'exemple 4.39, et soit M un R -module; on voit aisément que M_{tor} est un sous-module de M , que $E(M) := M/M_{\text{tor}}$ est sans torsion, et que pour tout quotient sans torsion M' de M , le noyau de la projection $M \rightarrow M'$ contient M_{tor} . Par inspection de la solution de l'exercice 4.40, on déduit que l'association $M \mapsto E(M)$ définit l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{E} \rightarrow R - \text{Mod}$.

Lemme 4.41. (i) Soient $\mathcal{B}$ comme dans la définition 4.38, et $\mathcal{E}$ une sous-catégorie épique de $\mathcal{B}$; soient aussi $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, et $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, fourni par l'exercice 4.40. Alors le noyau de l'unité d'adjonction $\eta_B : B \rightarrow E(B)$ est le plus grand sous-objet de $\mathcal{E}$ -torsion de B .

(ii) Si en outre, $\Sigma := (0 \rightarrow E_1 \rightarrow B \rightarrow E_2 \rightarrow 0)$ est une suite exacte courte de $\mathcal{B}$ avec $E_1, E_2 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, alors $B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$.

(iii) Tout sous-objet pur d'un objet absolument pur de $\mathcal{E}$ est absolument pur.

Démonstration. (i) : Si $T \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ est un objet de $\mathcal{E}$ -torsion, on a $\eta_B \circ f = 0$ pour tout morphisme $f : T \rightarrow B$ de $\mathcal{B}$, donc f se factorise à travers $\text{Ker } \eta_B$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que $\text{Ker } \eta_B$ est de $\mathcal{E}$ -torsion. Soient donc $F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et $g : \text{Ker } \eta_B \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{B}$; par hypothèse, F admet une enveloppe injective $h : F \rightarrow J$, et $J \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. La composition $h \circ g : \text{Ker } \eta_B \rightarrow J$ se prolonge en un morphisme $k : B \rightarrow J$ (remarque 4.2(i)), et par adjonction, ce dernier se factorise à travers l'unité η_B et un unique morphisme $\bar{k} : E(B) \rightarrow J$; mais alors $\text{Ker } \eta_B \subset \text{Ker } k$, donc $g = 0$, d'où l'assertion.

(ii) : Soit $i : E_1 \rightarrow J$ une enveloppe injective; d'après l'exercice 2.105(i) on a un diagramme commutatif de $\mathcal{B}$ dont les lignes horizontales sont exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \Sigma & & 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow i & & \downarrow f & & \parallel & & \\ i_*\Sigma & & 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & X & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par le lemme du serpent (proposition 2.106), $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{B}}$, i.e. f est un monomorphisme (lemme 2.75(i)); mais $J \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ car $E_1 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et on a un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} J \oplus E_2$ (lemme 4.5 et remarque 2.99(iii)), donc $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, d'où l'assertion.

(iii) : On considère à nouveau la suite exacte courte Σ de (ii), et le morphisme de complexes $\Sigma \rightarrow i_*\Sigma$ ci-dessus, où maintenant $i : E_1 \rightarrow J$ est un monomorphisme quelconque de $\mathcal{B}$ avec $J \in \text{Ob}(\mathcal{E})$; on suppose que B soit absolument pur, et afin de vérifier qu'il en est de même pour E_1 , il suffit de montrer que $J/E_1 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Mais le lemme du serpent nous donne un isomorphisme $J/E_1 \xrightarrow{\sim} X/B$, et d'autre part $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ d'après (ii); par suite $X/B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, d'où l'assertion. $\square$

Proposition 4.42. Soient $\mathcal{B}$ comme dans la définition 4.38, et $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ une sous-catégorie épique; notons par $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les objets absolument purs de $\mathcal{E}$. Alors le foncteur d'inclusion $i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ admet un adjoint à gauche fidèle $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$.

Démonstration. Remarquons d'abord :

Affirmation 4.43. Soit $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p} T \rightarrow 0$ une suite exacte courte de $\mathcal{B}$, avec $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, $P \in \text{Ob}(\mathcal{P})$, et T de $\mathcal{E}$ -torsion. Alors, pour tout morphisme $g : E \rightarrow Q$ de $\mathcal{B}$ avec $Q \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ il existe un unique morphisme $h : P \rightarrow Q$ tel que $g = h \circ f$.

Preuve : Soit $j : Q \rightarrow J$ une enveloppe injective dans $\mathcal{B}$; il existe alors un morphisme $k : P \rightarrow J$ avec $k \circ f = j \circ g$, et on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{p} & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow k & & \downarrow t \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{j} & J & \longrightarrow & \text{Coker}(j) \longrightarrow 0. \end{array}$$

On a $J \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, car $Q \in \text{Ob}(\mathcal{E})$; par suite, $\text{Coker}(j) \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, car Q est absolument pur, et donc t est le morphisme nul, car T est de torsion. Ainsi, k est la composition de j et d'un unique morphisme $h : P \rightarrow Q$, et puisque j est un monomorphisme, on a bien $g = h \circ f$. Vérifions l'unicité d'un morphisme h vérifiant cette dernière identité : en effet, si l'on a aussi $g = h' \circ f$ pour un deuxième morphisme $h' : P \rightarrow Q$, il vient $(h - h') \circ f = 0_{EQ}$, donc il existe un unique morphisme $u : T \rightarrow Q$ avec $u \circ p = h - h'$; mais comme T est de $\mathcal{E}$ -torsion, et que $Q \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, on a $u = 0_{TQ}$, d'où finalement $h = h'$. $\diamond$

Or, soit $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, choisissons une enveloppe injective $E \rightarrow J$, et posons $F := J/E$, de sorte que l'on a une suite exacte $\Sigma := (0 \rightarrow E \rightarrow J \xrightarrow{p} F \rightarrow 0)$ de $\mathcal{B}$; d'après le lemme 4.41(i), F admet un sous-objet de $\mathcal{E}$ -torsion maximal $j : T \rightarrow F$ avec $F/T \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et l'exercice 2.105(i) nous donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} j^*\Sigma & & 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & P \longrightarrow T \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & & \parallel & & \downarrow j' & & \downarrow j \\ \Sigma & & 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & J & \xrightarrow{p} & F \longrightarrow 0 \end{array}$$

à lignes horizontales exactes courtes. D'après le lemme du serpent (proposition 2.106), on a $\text{Ker}(j') = 0_{\mathcal{B}}$, et p induit un isomorphisme $\text{Coker}(j') \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(j)$; en particulier, $\text{Coker}(j') \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, i.e. P est un sous-objet pur de J . Mais J est absolument pur (exemple 4.39(ii)), donc de même pour P (lemme 4.41(iii)); ainsi, la ligne $j^*\Sigma$ du diagramme satisfait les hypothèses de l'observation 4.43. En résumant, pour tout $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ on trouve $P(E) \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ et un morphisme $\eta_E : E \rightarrow P(E)$ tel que tout morphisme $E \rightarrow Q$ de $\mathcal{E}$ avec $Q \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ est la composition de η_E et d'un unique morphisme $P(E) \rightarrow Q$; cela revient à dire que $P(E)$ représente le foncteur $\mathbf{h}_E \circ i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{Ens}$. D'après le problème 2.10(i), l'association $E \mapsto P(E)$ se prolonge alors en un foncteur $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ adjoint à gauche de i , et l'association $E \mapsto \eta_E$ définit l'unité d'une telle adjonction. Mais par construction, η_E est un monomorphisme pour tout $E \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, donc P est fidèle (proposition 2.16(ii)). $\square$

Théorème 4.44. Avec la notation de la proposition 4.42, la catégorie $\mathcal{P}$ est abélienne, et tout objet de $\mathcal{P}$ admet une enveloppe injective dans $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ l'adjoint à gauche de l'inclusion $i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$, et notons par η (resp ε) l'unité (resp. la coïunité) de l'adjonction pour le couple (P, i) .

Affirmation 4.45. $\text{Ob}(\mathcal{P}) = \{X \in \text{Ob}(\mathcal{E}) \mid \eta_X : X \rightarrow iPX \text{ est un isomorphisme}\}$.

Preuve : Comme i est plein et fidèle, $\varepsilon_Q : PiQ \rightarrow Q$ est un isomorphisme pour tout $Q \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ (proposition 2.16(iii)), donc de même pour $\eta_{iQ} : iQ \rightarrow iPiQ$, au vu des identités triangulaires du problème 2.13(ii); d'autre part, si $X \in \text{Ob}(\mathcal{E}) \setminus \text{Ob}(\mathcal{P})$, évidemment $\eta_X : X \rightarrow iPX$ n'est pas un isomorphisme. $\diamond$

• Les catégories $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ sont évidemment pré-additives, avec la loi d'addition des morphismes héritée de la catégorie abélienne $\mathcal{B}$; en outre, par hypothèse $\mathcal{E}$ contient le produit de toute petite famille d'objets de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ contient l'objet zéro $0_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$

(remarque 2.27(ii)) et le biproduit $E_1 \oplus E_2$, pour tous $E_1, E_2 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est additive, et évidemment $0_{\mathcal{B}}$ est absolument pur, donc aussi $\mathcal{P}$ a un objet zéro. De plus, le foncteur P est exact à droite, car il est un adjoint à gauche (proposition 2.49(ii)), donc il est additif (problème 2.76(ii)), et par suite le biproduit $Q_1 \oplus Q_2$ est représentable dans $\mathcal{P}$, pour tous $Q_1, Q_2 \in \text{Ob}(\mathcal{P})$; ainsi, $\mathcal{P}$ est additive.

- Ensuite, soit $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ un morphisme de $\mathcal{P}$, et $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$) l'image (resp. le noyau) de f dans $\mathcal{B}$; puisque $Q_1, Q_2 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, on a $\text{Im}(f), \text{Ker}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et la suite exacte courte $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow Q_1 \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow 0$ de $\mathcal{B}$ montre que $\text{Ker}(f)$ est un sous-objet pur de Q_1 , de sorte que $\text{Ker}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ (lemme 4.41(iii)). Par suite, $\text{Ker}(f)$ représente aussi le noyau de f dans $\mathcal{P}$, et compte tenu du lemme 2.75(i) on voit en outre que f est un monomorphisme dans $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est un monomorphisme dans $\mathcal{B}$.

- Soit $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ un monomorphisme de $\mathcal{P}$, et C le conoyau de f dans $\mathcal{B}$; alors $C \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, car Q_1 est absolument pur. Notons par $g : Q_2 \rightarrow PC$ la composition de la projection $p : Q_2 \rightarrow C$ avec $\eta_C : C \rightarrow PC$; puisque P est fidèle (proposition 4.42), η_C est un monomorphisme (proposition 2.16(ii)), et alors $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(p) = Q_1$ dans $\mathcal{B}$ et aussi dans $\mathcal{P}$, par ce qui précède. Donc, tout monomorphisme de $\mathcal{P}$ est le noyau d'un morphisme de $\mathcal{P}$.

- Soit $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ un morphisme de $\mathcal{P}$; le conoyau C de f dans $\mathcal{B}$ n'est pas forcément dans $\mathcal{E}$, mais rappelons que l'inclusion $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ elle aussi admet un adjoint à gauche $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ (exercice 4.40), et soit $(\eta'_B : B \rightarrow PEB \mid B \in \text{Ob}(\mathcal{B}))$ l'unité de l'adjonction pour le couple de foncteurs adjoints $(j \circ i, PE)$ (exercice 2.17(i)). Or, soit $X \in \text{Ob}(\mathcal{P})$, et $g : Q_2 \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{P}$ avec $g \circ f = 0_{Q_1, X}$; alors g est la composition de la projection $p : Q_2 \rightarrow C$ avec un unique morphisme $h : C \rightarrow X$ de $\mathcal{B}$, et par adjonction, h est la composition de $\eta'_C : C \rightarrow PEC$ avec un unique morphisme $PEC \rightarrow X$ de $\mathcal{P}$. Cela montre que PEC représente le conoyau de f dans $\mathcal{P}$, et $\eta'_C \circ p : Q_2 \rightarrow PEC$ est la projection canonique correspondante.

- La discussion ci-dessus montre en particulier que f est un épimorphisme de $\mathcal{P}$ si et seulement si $PEC = 0_{\mathcal{B}}$, et comme P est fidèle, cela se vérifie si et seulement si $EC = 0_{\mathcal{B}}$; à son tour, cette dernière condition revient à dire que C est un objet de $\mathcal{E}$ -torsion (lemme 4.41(i)). Dans ce cas, notons par Q_0 (resp. E_2) le noyau (resp. l'image) de f dans $\mathcal{B}$, de sorte que l'on a des suites exactes de $\mathcal{B}$

$$\Sigma := (Q_0 \xrightarrow{g} Q_1 \rightarrow E_2 \rightarrow 0) \quad \text{et} \quad \Sigma' := (0 \rightarrow E_2 \xrightarrow{u} Q_2 \rightarrow C \rightarrow 0)$$

et on a déjà vu que Q_0 représente aussi le noyau de f dans $\mathcal{P}$. Puisque $Q_2 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, il vient $E_2 \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et d'après l'observation 4.43, on a alors un isomorphisme $Q_2 \xrightarrow{\sim} PE_2$ de $\mathcal{P}$ qui identifie u avec l'unité d'adjonction $\eta_{E_2} : E_2 \rightarrow PE_2$; d'autre part, comme P est exact à droite, la suite $P(\Sigma)$ est exacte dans $\mathcal{P}$, et compte tenu de l'observation 4.45, elle s'identifie avec la suite $Q_0 \xrightarrow{g} Q_1 \xrightarrow{f} Q_2 \rightarrow 0$. Cela achève de montrer que tout épimorphisme de $\mathcal{P}$ est le conoyau d'un morphisme de $\mathcal{P}$; avec le théorème 2.89, on conclut finalement que $\mathcal{P}$ est une catégorie abélienne.

- Ensuite, soient $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ un monomorphisme de $\mathcal{P}$, et J un objet de $\mathcal{P}$ qui est injectif dans $\mathcal{B}$; puisque f est aussi un monomorphisme dans $\mathcal{B}$, tout morphisme $Q_1 \rightarrow J$ se factorise à travers f , i.e. J est aussi injectif dans $\mathcal{P}$. En outre, si f est une extension essentielle dans $\mathcal{B}$, et si $Q_0 \subset Q_2$ est un sous-objet non nul (avec $Q_0 \in \text{Ob}(\mathcal{P})$), rappelons que l'intersection $Q_0 \cap Q_1$ (dans $\mathcal{P}$) est représentée par le produit fibré $Q_0 \times_{Q_2} Q_1$ de $\mathcal{P}$; mais puisque le foncteur d'inclusion $j \circ i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ est un adjoint à droite, il est exact à gauche, donc $j \circ i(Q_0 \times_{Q_2} Q_1)$ représente le produit fibré $Q_0 \times_{Q_2} Q_1$ dans $\mathcal{B}$. Ce dernier est non nul, car f est essentiel dans $\mathcal{B}$, et donc $Q_0 \cap Q_1 \neq 0_{\mathcal{P}}$ dans $\mathcal{P}$; cela montre que f est aussi une extension essentielle dans $\mathcal{P}$. Or, soient $Q \in \text{Ob}(\mathcal{P})$, et $h : Q \rightarrow J$ une enveloppe injective dans $\mathcal{B}$, de sorte que $J \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, et donc $J \in \text{Ob}(\mathcal{P})$, d'après l'exemple 4.39(ii); par ce qui précède, h est une enveloppe injective de Q . $\square$

On est maintenant prêt pour revenir à la catégorie abélienne $\mathcal{A}^\dagger$:

Proposition 4.46. *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, $E(\mathcal{A})$ la sous-catégorie épique de $\mathcal{A}^\dagger$ de la définition 4.35(ii), et $E \in \text{Ob}(E(\mathcal{A}))$. Alors E est absolument pur si et seulement s'il est un foncteur exact à gauche.*

Démonstration. Soient $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ une suite exacte à droite de $\mathcal{A}$, et $i : E \rightarrow F$ une enveloppe injective dans $\mathcal{A}^\dagger$; avec $Q := F/E$, on obtient un diagramme commutatif de groupes abéliens, à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & EA'' & \xrightarrow{i_{A''}} & FA'' & \longrightarrow & QA'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow Eg & & \downarrow Fg & & \downarrow Qg \\ 0 & \longrightarrow & EA & \xrightarrow{i_A} & FA & \longrightarrow & QA \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow Ef & & \downarrow Ff & & \\ 0 & \longrightarrow & EA' & \xrightarrow{i_{A'}} & FA' & & \end{array}$$

D'après la proposition 4.36, on a $F \in \text{Ob}(E(\mathcal{A}))$, donc F est absolument pur (exemple 4.39(ii)), et il est un foncteur exact (lemme 4.34). Or, si E est exact à gauche, Ef se factorise à travers un monomorphisme $\text{Coker}(Eg) \rightarrow EA'$; puisque $i_{A'}$ est un monomorphisme, il en est de même alors pour sa restriction $\text{Coker}(Eg) \rightarrow \text{Coker}(Fg)$. En outre, $\text{Ker}(Fg) = 0$; par le lemme du serpent (proposition 2.106), il vient $\text{Ker}(Qg) = 0$, donc $Q \in \text{Ob}(E(\mathcal{A}))$, i.e. E est un sous-objet pur de F , par suite E est absolument pur (lemme 4.41(iii)).

Réciproquement, si E est absolument pur, alors $Q \in \text{Ob}(E(\mathcal{A}))$, donc $\text{Ker}(Qg) = 0$, et on a déjà observé que $\text{Ker}(Fg) = 0$; par le lemme du serpent, il vient $\text{Ker}(Eg) = 0$, et i_A induit un monomorphisme $\text{Coker}(Eg) \rightarrow \text{Coker}(Fg)$. En outre, Ff se factorise à travers un monomorphisme $\text{Coker}(Fg) \rightarrow FA'$, car F est exact ; par suite, Ef se factorise à travers un monomorphisme $\text{Coker}(Eg) \rightarrow EA'$, et cela achève de vérifier que E est exact à gauche. $\square$

4.1.5. Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, notons alors par :

$$\mathcal{A}^\ddagger$$

la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}^\dagger$ dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ exacts à gauche ; d'après la proposition 4.46 et le théorème 4.44, la catégorie $\mathcal{A}^\ddagger$ est abélienne, et tout objet de $\mathcal{A}^\ddagger$ admet une enveloppe injective dans $\mathcal{A}^\ddagger$. En outre, d'après la remarque 4.2(i), le foncteur $h^\ddagger$ du §4.1.1 se factorise à travers l'inclusion $\mathcal{A}^\ddagger \rightarrow \mathcal{A}^\dagger$ et un unique foncteur plein et fidèle

$$h^\ddagger : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\ddagger \quad A \mapsto h_A^\ddagger.$$

Théorème 4.47. (i) *Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{A}^\ddagger$ est complète, cocomplète, munie d'un générateur et d'un cogénérateur injectif.*

(ii) *En outre, le foncteur $h^\ddagger$ est exact, plein et fidèle.*

Démonstration. (i) : On voit aisément que le produit et la somme directe d'une famille de foncteurs exacts à gauche $\mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ sont encore exacts à gauche ; en outre, $\mathcal{A}^\ddagger$ est finiment complète et finiment cocomplète (théorème 2.89(ii)), donc elle est complète et cocomplète (proposition 2.40). En outre, on vérifie comme dans la preuve de la proposition 4.13 que $G := \bigoplus_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})} h_A^\ddagger$ est un générateur de $\mathcal{A}^\ddagger$ (mais il n'est pas forcément projectif dans $\mathcal{A}^\ddagger$). Compte tenu des remarques 4.15(i) et 2.93(ii), $\text{Quot}(G)$ est alors un ensemble ; on pose $P := \prod_{Q \in \text{Quot}(G)} Q$, et on choisit une enveloppe injective $P \rightarrow E$. Montrons que E est un cogénérateur injectif de $\mathcal{A}^\ddagger$: en effet, soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme non nul de $\mathcal{A}^\ddagger$, de sorte qu'il existe un morphisme $g : G \rightarrow A$ avec $f \circ g \neq 0_{GB}$ (exercice 4.3(i)), donc $Q := \text{Im}(f \circ g) \subset B$ est un quotient non nul de G ; il vient alors

un monomorphisme $j : Q \rightarrow P \rightarrow E$, qui se factorise à travers un morphisme $h : B \rightarrow E$, car E est injectif. On a $h \circ f \neq 0$, car $h \circ f \circ g$ est la composition de j avec l'épimorphisme canonique $G \rightarrow Q$; l'assertion découle alors du dual de l'exercice 4.3(i).

(ii) : On sait déjà que $h^\dagger$ est plein et fidèle. Soit $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de $\mathcal{A}$; il reste à vérifier que la suite induite $0 \rightarrow h_A^\dagger \rightarrow h_{A'}^\dagger \rightarrow h_{A''}^\dagger \rightarrow 0$ est exacte dans $\mathcal{A}^\dagger$, et d'après le (dual de) l'exercice 4.3(iv), il suffit de montrer qu'il en est de même pour la suite de groupes abéliens $0 \rightarrow \text{Nat}(h_{A''}^\dagger, E) \rightarrow \text{Nat}(h_A^\dagger, E) \rightarrow \text{Nat}(h_{A'}^\dagger, E) \rightarrow 0$, et cette dernière est identifiée avec la suite $0 \rightarrow EA'' \rightarrow EA \rightarrow EA' \rightarrow 0$, d'après le lemme 2.82(iv). Or, la preuve du théorème 4.44 montre que le cogénérateur injectif E de $\mathcal{A}^\dagger$ est aussi un objet injectif de $\mathcal{A}^\dagger$, et il est alors un foncteur exact (lemme 4.34), d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 4.48. (Théorème de Freyd-Mitchell) *Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$ il existe un anneau associatif unitaire R avec un foncteur exact, plein et fidèle*

$$\mathcal{A} \rightarrow R - \text{Mod}.$$

Démonstration. Posons $\mathcal{B} := (\mathcal{A}^{\text{op}})^\dagger$, et $F := (h^\dagger)^{\text{op}} : \mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\text{op}})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$; d'après le théorème 4.47 et la remarque 2.81(ii), $\mathcal{B}^{\text{op}}$ est une catégorie abélienne complète et cocomplète, avec un générateur projectif, et F est un foncteur exact plein et fidèle, identifiant $\mathcal{A}$ avec une sous-catégorie pleine, petite et exacte de $\mathcal{B}^{\text{op}}$. L'assertion découle alors du théorème 4.9. $\square$

4.2. Espaces spectraux. Soit A un anneau; l'exemple 3.32(i) entraîne que $D(f)$ est une partie compacte de $\text{Spec } A$, pour tout $f \in A$. Noter aussi que

$$(*) \quad D(f) \cap D(g) = D(fg) \quad \forall f, g \in A.$$

Dans sa thèse doctorale (voir [38]), l'algébriste M. Hochster s'est servi de ces propriétés afin de caractériser en termes purement topologiques les spectres premiers des anneaux; pour cela il a introduit la définition suivante.

Définition 4.49. (i) On dit qu'un espace topologique T est *spectral*, si :

- T est compact
- T admet une base d'ouverts compacts, stable par intersections finies
- toute partie fermée irréductible Z de T est l'adhérence d'un point unique $z \in Z$, qu'on appelle le *point générique* de Z .

(ii) On dit que T est *localement spectral*, si tout $t \in T$ admet un voisinage ouvert dans T qui est un espace spectral, pour la topologie induite par l'inclusion dans T .

Or, $(*)$ montre que la base $(D(f) \mid f \in A)$ de $\text{Spec } A$ est stable par intersections finies; de plus, si $Z = V(\mathfrak{p})$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$, le point générique unique de Z est $\mathfrak{p}$, donc $\text{Spec } A$ est un espace topologique spectral. Réciproquement, Hochster a démontré que tout espace spectral est homéomorphe au spectre d'un anneau. Nous n'utiliserons pas ce résultat, qui serait probablement relégué aujourd'hui au rang d'une curiosité mathématique : avec le recul, on peut dire que la vraie contribution de [38] a été de mettre en évidence une classe d'espaces topologiques, qui ont fait depuis leur apparition dans plusieurs questions différentes, assez éloignées de celle qui leur a donné naissance. L'ubiquité et vitalité des espaces spectraux est imputable en bonne mesure aux agréables propriétés de leurs *parties constructibles* : surtout, les parties constructibles d'un espace spectral engendrent une topologie compacte et séparée. Dans cette section on expliquera ce théorème dû à Hochster, ainsi que quelques-uns de ses nombreux corollaires, et quelques applications. On verra plus tard que les spectres premiers ne sont pas la seule source d'espaces spectraux : notamment, les *spectres valuatifs* et les *spectres réels* des anneaux nous fourniront des exemples remarquables.

Définition 4.50. Soit $T := (T, \mathcal{T}_T)$ un espace spectral.

(i) On dit qu'une partie $X \subset T$ est *constructible*, si elle s'écrit comme réunion finie de parties de la forme $U \setminus V$, avec U et V ouverts et compacts dans T (en particulier, X est compact pour la topologie induite par l'inclusion dans T).

(ii) La *topologie constructible* de T est la topologie $\mathcal{T}_T^c$ engendrée par la famille des parties constructibles de T . On notera T^c l'ensemble T muni de la topologie $\mathcal{T}_T^c$. Noter que $\mathcal{T}_T^c$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_T$. Une partie $X \subset T$ est dite *pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) si elle est fermée (resp. ouverte) dans T^c ; i.e. X est une intersection (resp. une réunion) de parties constructibles de T .

Remarque 4.51. Soient T un espace spectral, et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts compacts de T , stable par intersections finies.

(i) Si $U, U' \subset T$ sont deux parties ouvertes compactes, il en est de même pour $U \cap U'$ et $U \cup U'$. En effet, cela est clair pour $U \cup U'$ (et même pour tout espace topologique T); pour voir que $U \cap U'$ est compact, on remarque que -- de leur compacité -- U et U' s'écrivent comme réunions *finies* d'éléments de $\mathcal{B}$; on est donc ramené au cas $U, U' \in \mathcal{B}$, où l'assertion est vérifiée par hypothèse.

(ii) Evidemment, toute réunion finie de parties constructibles est constructible. De même pour les intersections finies : car si $X = \bigcup_{i=1}^n U_i \setminus V_i$ et $X' = \bigcup_{j=1}^m U'_j \setminus V'_j$, on a $X \cap X' = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (U_i \setminus V_i) \cap (U'_j \setminus V'_j) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (U_i \cap U'_j) \setminus (V_i \cup V'_j)$, et d'après (i), chaque partie $U_i \cap U'_j$ et $V_i \cup V'_j$ est ouverte et compacte, d'où l'assertion. En particulier, les parties constructibles de T forment une base de $\mathcal{T}_T^c$.

(iii) Le complémentaire $T \setminus X$ d'une partie constructible X est constructible. Car, si $X = \bigcup_{i=1}^n U_i \setminus V_i$, on a $T \setminus X = \bigcap_{i=1}^n (T \setminus (U_i \setminus V_i))$, et (ii) nous ramène à montrer que si U, V sont des parties ouvertes et compactes de T , alors $T \setminus (U \setminus V)$ est constructible; mais $T \setminus (U \setminus V) = (T \setminus U) \cup V$, d'où l'assertion.

(iv) Remarquons aussi que T est *de type* T_0 (définition 1.25(i)). En effet, soient $x, y \in T$ distincts, et notons par Z_y l'adhérence de $\{y\}$ dans T ; comme y est l'unique point générique de Z_y , quitte à échanger les rôles de x et y on peut supposer que $x \notin Z_y$, et alors $T \setminus Z_y$ est une partie ouverte contenant x et ne contenant pas y .

Exercice 4.52. Soient T un espace topologique, $\{U_1, \dots, U_n\}$ un recouvrement fini de T , et munissons chaque U_i de la topologie induite par T . On suppose que :

(a) U_i est un espace spectral pour tout $i = 1, \dots, n$.

(b) $U_{ij} := U_i \cap U_j$ est une partie compacte de T , pour tous $i, j = 1, \dots, n$.

Montrer que T est un espace spectral.

4.2.1. Fonctions continues à valeurs discrètes. Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments, que l'on munit de sa topologie discrète, et pour tout espace topologique T notons

$$\mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$$

l'anneau des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{F}_2$. Tout comme dans la section 1.2, on a une application canonique

$$\phi_T : T \rightarrow \text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$$

qui associe à tout $t \in T$ l'idéal maximal $\mathfrak{m}_t := \{f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2) \mid f(t) = 0\}$, et on voit aisément que ϕ_T est continue pour la topologie de Zariski de $\text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$.

Remarque 4.53. (i) Noter que si $f : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ est continue, la partie $V(f) := f^{-1}(0)$ est ouverte et fermée dans T , car $\{0\}$ est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{F}_2$. Réciproquement, si $Z \subset T$ est une partie ouverte et fermée, l'unique application $g_Z : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ avec $g_Z^{-1}(0) = Z$ est continue. Donc, la donnée d'un élément de $\mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$ équivaut à celle d'une partie ouverte et fermée de T .

(ii) Soit $\mathfrak{m} \in \text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$; on peut s'inspirer de la solution du problème 1.44 pour définir l'ensemble

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) := \{V(f) \mid f \in \mathfrak{m}\}$$

qui est un *ultrafiltre de parties ouvertes et fermées* de T ; en effet :

- (a) $\emptyset \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, car $g_\emptyset = 1$
- (b) si $Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ et si Z' est une partie ouverte et fermée de T avec $Z \subset Z'$, alors $Z' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, car $g_{Z'} = g_{Z'} \cdot g_Z \in \mathfrak{m}$
- (c) si $Z, Z' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, alors $Z \cap Z' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, car $Z \cap Z' = V(g_Z + g_{Z'} + g_Z \cdot g_{Z'})$
- (d) $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ est maximal avec ces propriétés (a)–(c), car si $\mathcal{Z}'$ est une famille de parties ouvertes et fermées de T contenant strictement $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ et vérifiant (b) et (c), soit $Z \in \mathcal{Z}' \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$; on a $g_Z \notin \mathfrak{m}$, et comme $\mathfrak{m}$ est maximal, on peut trouver $f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$ et $h \in \mathfrak{m}$ tels que $f \cdot g_Z + h = 1$, d'où $\emptyset = Z \cap V(h) \in \mathcal{Z}'$.

(iii) Noter aussi que pour tout espace topologique T on a :

$$\text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2) = \text{Spec } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2).$$

En particulier, $\text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$ est un espace spectral. En effet, soit $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$ un idéal premier ; pour tout $h \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$ on a $h^2 - h = 0$, donc la classe $\bar{h}$ de h dans $\mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)/\mathfrak{p}$ doit être soit 0, soit 1. Autrement dit, $\mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_2$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$, d'où l'assertion, grâce à la proposition 1.5.

Le résultat suivant -- un analogue combinatoire du lemme de Stone -- est la clef de la théorie des espaces spectraux :

Théorème 4.54. *Soit $(T, \mathcal{T}_T)$ un espace spectral. Alors :*

- (i) *L'application $\phi_{T^c} : T^c \rightarrow \text{Max } \mathcal{C}(T^c, \mathbb{F}_2)$ est un homéomorphisme.*
- (ii) (Hochster) *En particulier, T^c est un espace topologique compact et séparé.*

Démonstration. On dira qu'une fonction $f : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ est *constructible* si $f^{-1}(0)$ est une partie constructible de T ; compte tenu de la remarque 4.51(ii,iii), on voit aisément que l'ensemble des fonctions constructibles

$$\text{Cons}(T, \mathbb{F}_2)$$

est un sous-anneau de $\mathcal{C}(T^c, \mathbb{F}_2)$, et le raisonnement de la remarque 4.53(iii) montre de même que $\text{Spec } \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2) = \text{Max } \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2)$; si $i : \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{C}(T^c, \mathbb{F}_2)$ est l'inclusion, on a donc l'application continue

$$\phi'_T := \text{Max}(i) \circ \phi_T : T^c \rightarrow \text{Max } \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2)$$

et on montrera d'abord que ϕ'_T est un homéomorphisme. Pour l'injectivité de ϕ'_T , soient $x, y \in T$ deux points distincts ; il suffit de trouver $f : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ constructible avec $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$. Cela revient à exhiber une partie constructible X de T telle que $x \in X$ et $y \notin X$, car on pourra alors prendre l'unique l'application $f_X : T^c \rightarrow \mathbb{F}_2$ avec $f_X^{-1}(1) = X$. Cela montrera en même temps que T^c est séparé.

Or, par la remarque 4.51(iv), on peut trouver soit une partie ouverte U avec $x \in U$ et $y \notin U$, soit une partie ouverte U' telle que $y \in U'$ et $x \notin U'$; évidemment, dans le premier cas on peut aussi supposer que U soit compacte, et on prendra alors $X := U$. Dans le deuxième cas, on peut de même supposer U' compacte, et on prendra alors $X := T \setminus U'$.

Ensuite, on remarque que la topologie de T^c est induite via l'application ϕ'_T par la topologie de $\text{Max } \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2)$: en effet, pour toute partie constructible X de T , soit $f_X : T^c \rightarrow \mathbb{F}_2$ la fonction continue définie comme ci-dessus ; évidemment $\phi'^{-1}_T(D(f_X)) = X$, d'où l'assertion. Pour conclure, il ne reste qu'à montrer la surjectivité de ϕ'_T . Soit donc $\mathfrak{m} \in \text{Max } \text{Cons}(T, \mathbb{F}_2)$; en raisonnant comme dans la remarque 4.53(ii), on voit que $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) := \{V(f) \mid f \in \mathfrak{m}\}$ est un *ultrafiltre de parties constructibles* de T . Pour tout $f \in \mathfrak{m}$, on munit $V(f)$ de la topologie induite par T ; on rappelle que $V(f)$ est compact pour cette topologie, et on considère la famille $\mathcal{F}$ des systèmes $Z_\bullet := (Z_f \mid f \in \mathfrak{m})$ de parties de T , soumises aux conditions suivantes :

- Z_f est une partie fermée non vide de $V(f)$ pour tout $f \in \mathfrak{m}$
- $Z_g \subset Z_f$ pour tous $f, g \in \mathfrak{m}$ tels que $V(g) \subset V(f)$.

On munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel tel que $Z_\bullet \leq Z'_\bullet$ si et seulement si $Z_f \subset Z'_f$ pour tout $f \in \mathbf{m}$. Evidemment l'ultrafiltre $\mathcal{Z}(\mathbf{m})$ est un élément de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$. De plus, si $(Z_\bullet^\lambda | \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$ avec $\Lambda \neq \emptyset$, posons

$$C_f := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_f^\lambda \quad \forall f \in \mathbf{m}.$$

Affirmation 4.55. $(C_f | f \in \mathbf{m}) \in \mathcal{F}$.

Preuve : Il est clair que $C_g \subset C_f$ si $V(g) \subset V(f)$. Il reste à montrer que $C_f \neq \emptyset$ pour tout $f \in \mathbf{m}$. Mais observons que toute partie finie non vide $\Lambda' \subset \Lambda$ admet un élément minimal λ_0 , et on a $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} Z_f^\lambda = Z_f^{\lambda_0} \neq \emptyset$; l'assertion vient alors de la compacité de $V(f)$ et de la propriété de l'intersection finie (exercice 1.26(i)). $\diamond$

Compte tenu de l'observation 4.55, le lemme de Zorn nous dit que $\mathcal{F}$ admet un élément minimal $M_\bullet$; pour tout $f \in \mathbf{m}$ soit $\overline{M}_f$ l'adhérence de M_f dans T .

Affirmation 4.56. (a) M_f est irréductible pour tout $f \in \mathbf{m}$.

(b) $\overline{M}_g = \overline{M}_f$ pour tous $f, g \in \mathbf{m}$.

(c) Soit t le point générique commun des $\overline{M}_f$. On a $t \in V(f)$ pour tout $f \in \mathbf{m}$.

Preuve. (a) : Soient, par l'absurde, $f \in \mathbf{m}$ et $Z_1, Z_2 \neq \emptyset$ deux parties fermées strictement contenues dans M_f , telles que $M_f = Z_1 \cup Z_2$. On définit des systèmes $M_\bullet^1$ et $M_\bullet^2$ par :

$$M_g^i := \begin{cases} Z_i \cap M_g & \text{si } V(g) \subset V(f) \\ M_g & \text{sinon.} \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

La minimalité de $M_\bullet$ implique que $M_\bullet^1, M_\bullet^2 \notin \mathcal{F}$, donc il existe $g, g' \in \mathbf{m}$ tels que $M_g^1 = M_{g'}^2 = \emptyset$. Posons $h := g + g' + g \cdot g'$, de sorte que $V(h) = V(g) \cap V(g')$; il vient $M_h = M_h^1 \cup M_h^2 \subset M_g^1 \cup M_{g'}^2 = \emptyset$, contradiction.

(b) : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $f, g \in \mathbf{m}$ tels que $\overline{M}_g \neq \overline{M}_f$; quitte à échanger éventuellement les rôles de f et g , et remplacer g par $g + f + g \cdot f$, on peut supposer que $V(g) \subset V(f)$, et donc $\overline{M}_g \subset \overline{M}_f$. On définit un système $M'_\bullet$ par :

$$M'_h := \begin{cases} \overline{M}_g \cap M_h & \text{si } V(h) \subset V(f) \\ M_h & \text{sinon.} \end{cases}$$

Noter que $M_{h+g+h \cdot g} \subset M'_h$ pour tout $h \in \mathbf{m}$; par suite $M'_\bullet \in \mathcal{F}$, ce qui contredit la minimalité de $M_\bullet$.

(c) : Supposons, par l'absurde, que $t \notin V(f)$ pour quelque $f \in \mathbf{m}$. On écrit $V(f) = \bigcup_{i=1}^n (U_i \setminus U'_i)$ pour certaines parties ouvertes $U_1, U'_1, \dots, U_n, U'_n$ de T , et disons que $t \in U_1 \cap \dots \cap U_k$ et $t \notin U_{k+1} \cup \dots \cup U_n$. Dans ce cas, on a $M_f = \overline{M}_f \cap V(f) = \overline{M}_f \cap \bigcup_{i=1}^k (U_i \setminus U'_i)$, et $t \in U' := U'_1 \cap \dots \cap U'_k$. Posons $N := \overline{M}_f \setminus U'$; il vient $M_f \subset N \subset \overline{M}_f$. Mais N est une partie fermée de $\overline{M}_f$ qui ne contient pas t , contradiction. $\diamond$

L'observation 4.56(c) implique que $\mathcal{Z}(\mathbf{m})$ est contenu dans le filtre $\mathcal{Z}(\phi'_T(t))$ des parties constructibles de T contenant t ; mais on a observé que $\mathcal{Z}(\mathbf{m})$ est maximal, donc $\mathcal{Z}(\mathbf{m}) = \mathcal{Z}(\phi'_T(t))$, et finalement $\mathbf{m} = \phi'_T(t)$.

(ii) : On a déjà observé que T^c est séparé, et comme on vient de montrer que ϕ'_T est un homéomorphisme, la compacité vient de la proposition 1.42.

(i) : Il ne reste qu'à montrer que $\text{Cons}(T, \mathbb{F}_2) = \mathcal{C}(T^c, \mathbb{F}_2)$; cela revient à dire que pour tout $f \in \mathcal{C}(T^c, \mathbb{F}_2)$ la partie $Z := f^{-1}(0)$ est constructible; mais Z est ouverte et fermée dans l'espace compact T^c , i.e. Z est une partie ouverte compacte de T^c , donc réunion finie de parties constructibles de T , d'où l'assertion. $\square$

Voici un critère simple qui est parfois utile pour construire des espaces spectraux :

Proposition 4.57. Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et séparé, $\mathcal{U}$ une famille de parties ouvertes et fermées de T , et notons par $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ la topologie sur T engendrée par $\mathcal{U}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ est de type T_0 .

(b) $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ est spectral.

En outre, si ces conditions sont vérifiées, on a $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})^c = (T, \mathcal{T})$.

Démonstration. On sait déjà que (b) $\Rightarrow$ (a), en vertu de la remarque 4.51(iv).

Supposons donc que $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ soit de type T_0 , et notons par $\mathcal{U}'$ l'ensemble des intersections finies arbitraires d'éléments de $\mathcal{U}$. Evidemment tout $U \in \mathcal{U}'$ est une partie ouverte et fermée de $(T, \mathcal{T})$, donc U est une partie compacte de $(T, \mathcal{T})$, et *a fortiori*, U est compact par rapport à la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ (qui est moins fine que $\mathcal{T}$). Donc, $\mathcal{U}'$ est une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ qui est stable par intersections finies et dont les éléments sont des parties compactes. Pour montrer que $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ est spectral, il ne reste ainsi qu'à vérifier que toute partie fermée irréductible Z de $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ a un unique point générique. Pour cela, on pose

$$\mathcal{U}_Z := \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap Z \neq \emptyset\} \quad Z' := Z \cap \bigcap_{U \in \mathcal{U}_Z} U.$$

La propriété T_0 de $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ implique aisément que Z' contient au plus un point, et il suffit de montrer que $Z' \neq \emptyset$. Or, notons que Z est aussi fermée dans la topologie $\mathcal{T}$, donc de même pour toute intersection finie $Z \cap U_1 \cap \dots \cap U_k$ avec $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_Z$ (pour tout entier $k \in \mathbb{N}$); par la propriété de l'intersection finie (exercice 1.26(i)), on est donc ramené à montrer que chaque intersection finie de ce type est non vide. On raisonne par l'absurde : si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_Z$ et $Z \cap U_1 \cap \dots \cap U_k = \emptyset$, posons $V_i := Z \setminus U_i$ pour $i = 1, \dots, k$; il vient $Z = V_1 \cup \dots \cup V_k$, et comme Z est irréductible, on doit avoir $Z = V_i$ pour quelque $i \leq k$, i.e. $Z \cap U_i = \emptyset$, contradiction.

En dernier lieu, montrons que si $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ est spectral, $(T, \mathcal{T})$ est la topologie constructible de $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$; pour cela, remarquons d'abord que l'application identique $(T, \mathcal{T}) \rightarrow (T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})^c$ est continue. L'assertion revient à dire que toute partie constructible X de $(T, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ est ouverte dans la topologie $\mathcal{T}$, et on est ramené aisément au cas où X est de la forme $U \setminus V$, pour U, V deux ouverts compacts de $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Mais alors U et V sont réunions finies d'éléments de $\mathcal{U}'$, en particulier U et V sont des parties ouvertes et fermées de $(T, \mathcal{T})$, et finalement $U \setminus V$ est de même ouverte (et fermée) dans $(T, \mathcal{T})$, comme souhaité. L'assertion suit maintenant du théorème 4.54(ii) et de l'exercice 1.26(iii). $\square$

Exemple 4.58. Soient T un espace spectral, $Z \subset T$ une partie pro-constructible, munie de la topologie $\mathcal{T}_Z$ induite par l'inclusion dans T . Alors Z est un espace spectral. En effet, soit $\mathcal{T}'_Z$ la topologie induite sur Z par la topologie de T^c ; or, T^c est compact et séparé, et Z est une partie fermée de T^c , donc $\mathcal{T}'_Z$ est compacte et séparée. De plus, $\mathcal{T}_Z$ est de type T_0 (car T est de type T_0) et engendrée par une famille de parties ouvertes et fermées de T^c . L'assertion découle donc aussitôt de la proposition 4.57, qui montre aussi que $\mathcal{T}'_Z$ est la topologie constructible de Z .

Remarque 4.59. (i) Une application continue $f : T \rightarrow S$ entre deux espaces spectraux n'est pas forcément continue pour les topologies constructibles de T et S .

(ii) Toutefois, si f est compacte (voir la définition 1.25(v)), alors f est aussi une application continue compacte $f^c : T^c \rightarrow S^c$: en effet, les parties ouvertes et compactes de S^c sont les parties constructibles de S , donc l'assertion revient à dire que si $Z \subset S$ est une partie constructible, alors $f^{-1}Z$ est constructible dans T . Pour cela, on se ramène aisément au cas où $Z = U \setminus U'$ avec U, U' des parties ouvertes compactes de S ; mais dans ce cas $f^{-1}Z = (f^{-1}U) \setminus (f^{-1}U')$ est la différence de deux parties ouvertes compactes, donc constructible.

(iii) Par exemple, pour tout homomorphisme d'anneaux $g : A \rightarrow B$, l'application continue $\text{Spec } g : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est compacte, car on a $(\text{Spec } g)^{-1}D(a) = D(g(a))$ pour tout $a \in A$.

(iv) Soit $(T_\lambda, f_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu)$ un système d'espaces spectraux T_λ et d'applications continues et compactes $f_{\lambda\mu} : T_\lambda \rightarrow T_\mu$, indexé par un ensemble cofiltrant $(\Lambda, \leq)$, et soit T la limite de $(T_\bullet, f_{\bullet\bullet})$ dans la catégorie **Top**. D'après (ii) et le théorème 4.54(ii), on obtient

un système $(T_\lambda^c, f_{\lambda\mu}^c \mid \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu)$ d'espaces topologiques compacts et séparés ; soit L la limite de ce système. Comme les ensembles sous-jacents à T_λ et T_λ^c sont égaux pour tout $\lambda \in \Lambda$, la construction des limites de **Top** montre que les ensembles sous-jacents à T et L sont aussi égaux (voir la solution du problème 2.25(iii.a)) ; avec le problème 2.32(i) on déduit aussitôt que $T \neq \emptyset \Leftrightarrow T_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Parfois on peut détecter la compacité d'une application continue $T \rightarrow S$ localement sur T ou sur S :

Lemme 4.60. *Soient T, S des espaces topologiques, $f : T \rightarrow S$ une application continue, et $\{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ (resp. $\{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$) un recouvrement de S (resp. de T) avec $fT_\lambda \subset S_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Munissons chaque S_λ et T_λ des topologies induites par les inclusions $i_\lambda : S_\lambda \rightarrow S$ et $j_\lambda : T_\lambda \rightarrow T$, et supposons que chaque restriction $f_\lambda : T_\lambda \rightarrow S_\lambda$ de f soit compacte, et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(a) S_λ est localement spectral et $T_\lambda = f^{-1}S_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

(b) Λ est un ensemble fini, et i_λ est une application compacte, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Alors f est une application compacte.

Démonstration. Soit $U \subset S$ une partie ouverte compacte ; si (a) est vérifiée, on peut trouver pour tout $x \in U$ un indice $\lambda(x) \in \Lambda$ tel que $x \in S_{\lambda(x)}$, et un voisinage ouvert compact $U_x \subset U \cap S_{\lambda(x)}$ de x dans $S_{\lambda(x)}$; par suite $W_x := f_{\lambda(x)}^{-1}(U_x)$ est une partie ouverte compacte de $T_{\lambda(x)}$. Puisque U est compact, il existe une partie finie $\Sigma \subset U$ telle que $U = \bigcup_{x \in \Sigma} U_x$, donc $f^{-1}U = \bigcup_{x \in \Sigma} W_x$ est une partie ouverte compacte de T , d'où l'assertion dans ce cas. Si (b) est vérifiée, $U_\lambda := U \cap S_\lambda$ est une partie ouverte compacte de S_λ , pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc à nouveau $f^{-1}U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^{-1}U_\lambda$ est une partie ouverte compacte de T . $\square$

Définition 4.61. (i) Soient T un espace topologique, $x, y \in T$ deux points. On dit que x est une *spécialisation* de y , si x appartient à l'adhérence de $\{y\}$ dans T . Dans ce cas, on dit aussi que y est une *générisation* de x . La spécialisation x de y est *stricte*, si $x \neq y$; dans ce cas, on dira aussi que y est une *générisation stricte* de x . On dit que x est une *spécialisation immédiate* de y (ou que y est une *générisation immédiate* de x) si x est une spécialisation stricte de y et si aucun point de T n'est à la fois une spécialisation stricte de y et une générisation stricte de x .

(ii) Soient T, S deux espaces topologiques et $f : T \rightarrow S$ une application continue. On dit que f est *générisante* (resp. *spécialisante*) si pour tout $t \in T$ et toute générisation (resp. toute spécialisation) s de $f(t)$ il existe une générisation (resp. une spécialisation) $t' \in T$ de t telle que $f(t') = s$.

Remarque 4.62. (i) Pour tout espace topologique T on obtient une relation $\leq$ réflexive et transitive sur T par :

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est une spécialisation de } y.$$

Si T est spectral, cette relation est aussi antisymétrique, car si $x \leq y$ et $y \leq x$, les adhérences de $\{x\}$ et $\{y\}$ coïncident, d'où $x = y$. Donc, à tout T spectral on associe ainsi un ensemble partiellement ordonné $(T, \leq)$. On notera

$$\text{Max } T \quad \text{et} \quad \text{Min } T$$

les ensembles des points maximaux et respectivement minimaux de $(T, \leq)$.

(ii) Noter aussi que toute application continue $f : T \rightarrow S$ entre espaces spectraux est aussi un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$f : (T, \leq) \rightarrow (S, \leq).$$

En effet, si $x \leq y$ dans T , notons Z l'adhérence de $\{f(y)\}$ dans S ; la partie $f^{-1}Z$ est fermée dans T et contient y , donc $x \in f^{-1}Z$, d'où $f(x) \leq f(y)$.

(iii) Toute application continue fermée $f : T \rightarrow S$ d'espaces topologiques est spécialisante : car si $x \in T$ et si z est une spécialisation de $y := f(x)$ dans S , alors z est dans l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de $\{y\}$ dans S , mais puisque f est fermée, $\overline{\{y\}}$ est l'image $f(\overline{\{x\}})$ de l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de $\{x\}$ dans T (exercice 1.21(iv)), d'où l'assertion.

Exercice 4.63. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues entre espaces topologiques, avec f surjective et $g \circ f$ générissante (resp. spécialisante). Montrer que g est générissante (resp. spécialisante).

Définition 4.64. (i) La *dimension (de Krull)* d'un espace spectral T , notée :

$$\dim T \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$$

est le supremum des longueurs k des chaînes de spécialisations strictes de points de T :

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_k.$$

On pose $\dim \emptyset := -\infty$.

(ii) Plus généralement, soient T un espace localement spectral, et $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties ouvertes $U \subset T$ qui sont spectrales, pour la topologie induite par l'inclusion $U \rightarrow T$. La *dimension* de T est $\dim T := \sup(\dim U \mid U \in \mathcal{U})$.

Exemple 4.65. (i) Soient T un espace spectral, et $t \in T$. La partie

$$T(t) := \{t' \in T \mid t' \geq t\}$$

est pro-constructible, car elle est l'intersection de tous les voisinages ouverts compacts de t dans T . En particulier, $T(t)$ est spectral, pour la topologie induite par l'inclusion dans T (voir l'exemple 4.58), et on définit la *hauteur de t*

$$\boxed{\text{ht}(t) := \dim T(t)}$$

i.e. $\text{ht}(t)$ est le supremum des longueurs des chaînes de générations strictes de t .

(ii) Soient $f : T \rightarrow S$ une application continue entre espaces spectraux, et $t \in T$. D'après la remarque 4.62(ii), f induit par restriction une application continue :

$$f_t : T(t) \rightarrow S(s) \quad \text{avec } s := f(t).$$

(iii) Soit A un anneau, et prenons $T := \text{Spec } A$; on voit que pour $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in T$ on a $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ si et seulement si $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{q})$, si et seulement si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Donc l'ordre de $(T, \leq)$ est l'opposé de l'ordre défini par l'inclusion d'idéaux premiers, et on a :

$$\text{Max}(\text{Spec } A) = \text{Min } A \quad \text{Min}(\text{Spec } A) = \text{Max } A.$$

La dimension de $\text{Spec } A$ est aussi appelée la *dimension de A* , et notée

$$\dim A.$$

Il s'agit donc du supremum des longueurs k des chaînes strictement croissantes $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k$ d'idéaux premiers de A . Pour tout $\mathfrak{p} \in T$ on a $T(\mathfrak{p}) = \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ (voir l'exemple 3.32(iii)). En particulier, $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ est une partie pro-constructible de $\text{Spec } A$. Noter aussi que l'on a $\dim A = -\infty \Leftrightarrow A = \{0\}$. Plus généralement, soit M un A -module ; noter que le support de M contient toutes les spécialisations de ses points, car si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers de A , on a $(M_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$, donc $M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Rightarrow M_{\mathfrak{q}} \neq 0$. Si en outre M est de type fini, alors $\text{Supp}_A M$ est une partie fermée de $\text{Spec } A$ (remarque 3.58(ii)), et on définit la *dimension de M* par

$$\boxed{\dim M := \dim(\text{Supp}_A M)}.$$

Avec la remarque 3.58(i), il vient : $\dim M = -\infty \Leftrightarrow M = 0$.

(iv) Evidemment $\dim \mathbb{Z} = 1$, et $\dim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$ pour tout entier $n > 1$.

Exercice 4.66. Soit A un anneau de dimension $\dim A$ finie. Montrer que

$$1 + \dim A \leq \dim A[T] \leq 1 + 2 \cdot \dim A.$$

(Pour le cas où $A = K$ est un corps, cette estimation est moins bonne que celle de l'exercice 3.39; mais en fait on verra dans la suite que $\dim K[T_1, \dots, T_k] = k$.)

Corollaire 4.67. Soient T un espace spectral, $X \subset T$ une partie pro-constructible, $Y \subset T$ une partie ind-constructible, et notons $\bar{X}$ l'adhérence de X dans T . On a :

- (i) $\bar{X}$ est l'ensemble de toutes les spécialisations des points de X .
- (ii) Y est ouverte dans $T \Leftrightarrow Y$ contient toutes les générations de ses points.

Démonstration. (i) : Evidemment, $\bar{X}$ contient l'ensemble X^s des spécialisations des points de X . D'autre part, soit $x \in T \setminus X^s$, et notons par $\mathcal{F}$ la famille des parties ouvertes compactes de T contenant x . Comme $x \notin X^s$, on a

$$\bigcap_{W \in \mathcal{F}} (W \cap X) = \emptyset.$$

Or, tout élément de $\mathcal{F}$, ainsi que X , est fermé dans T^c ; par le théorème 4.54(ii) et l'exercice 1.26(i), il s'ensuit qu'il existe $W_1, \dots, W_k \in \mathcal{F}$ tels que $W_1 \cap \dots \cap W_k \cap X = \emptyset$. Mais $W_1 \cap \dots \cap W_k$ est une partie ouverte de T contenant x , d'où $x \notin \bar{X}$.

(ii) découle aisément de (i). $\square$

Corollaire 4.68. Soient $f : T \rightarrow S$ une application continue entre deux espaces spectraux, $X \subset T$ et $Y \subset S$ deux parties pro-constructibles. On a :

- (i) Si f est compacte, $f(X)$ est pro-constructible dans S .
- (ii) Si f est générissante, l'adhérence de $f^{-1}Y$ dans T est l'image réciproque de l'adhérence de Y dans S .

Démonstration. (i) : X est une partie fermée de T^c , donc X est compacte, par le théorème 4.54(ii); compte tenu la remarque 4.59(ii) et de l'exercice 1.26(ii.c), il s'ensuit que $f(X)$ est une partie compacte de S^c , et donc $f(X)$ est fermée dans S^c , encore en vertu du théorème 4.54(ii) et l'exercice 1.26(ii.a).

(ii) : Soit $\bar{Y}$ l'adhérence de Y dans S ; évidemment l'adhérence de $f^{-1}Y$ est contenue dans $f^{-1}\bar{Y}$, donc il suffit de montrer l'inclusion opposée. Soit ainsi $x \in f^{-1}\bar{Y}$; par le corollaire 4.67(i), le point $f(x)$ admet une génération $y \in Y$, et comme f est générissante, on trouve une génération $t \in T$ de x telle que $f(t) = y$, i.e. x est une spécialisation d'un point de $f^{-1}Y$, d'où l'assertion. $\square$

Proposition 4.69. Soient T, S deux espaces spectraux, $f : T \rightarrow S$ une application continue et compacte. On a :

- (i) f est spécialisante $\Leftrightarrow f$ est fermée (voir la définition 1.19(vi)).
- (ii) Si f est surjective et spécialisante (resp. générissante), alors la topologie de S coïncide avec la topologie induite par T via f .
- (iii) Si f est ouverte, alors f est générissante.

Démonstration. (i) : On sait déjà que si f est fermée, elle est spécialisante (remarque 4.62(iii)). Pour la réciproque, soit $X \subset T$ une partie fermée; en particulier, X est pro-constructible dans T , donc $f(X)$ est pro-constructible dans S (corollaire 4.68(i)), et grâce au corollaire 4.67(i) on est ramené à vérifier que pour tout $s \in f(X)$ et toute spécialisation s' de s dans S , on a $s' \in f(X)$. Or, soit $x \in X$ tel que $s = f(x)$; comme f est spécialisante, il existe une spécialisation x' de x avec $f(x') = s'$, et $x' \in X$, car X est fermée, d'où l'assertion.

(ii) : Soit $X \subset S$ une partie telle que $f^{-1}X$ est fermée dans T ; on doit vérifier que X est fermée dans S . Or, $f(f^{-1}X) = X$ car f est surjective; si f est spécialisante l'assertion découle alors de (i). Si f est générissante, notons par $\bar{X}$ l'adhérence de X dans S . Remarquons que $X = f(f^{-1}X)$ est une partie pro-constructible de S , par le corollaire

4.68(i); compte tenu du corollaire 4.68(ii) on déduit que $f^{-1}X = f^{-1}\overline{X}$, et comme f est surjective, il vient $X = \overline{X}$, d'où, à nouveau, l'assertion.

(iii) : Soient $x \in T$ et $y \geq f(x)$ dans S ; pour tout voisinage U de x dans T , la partie $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$ dans S , car f est ouverte, donc $y \in f(U)$. Par suite x est dans l'adhérence $\overline{f^{-1}(y)}$ de $f^{-1}(y)$ dans T , car sinon $U := T \setminus \overline{f^{-1}(y)}$ serait un voisinage de x avec $y \notin f(U)$. Mais $\{y\}$ est une partie pro-constructible de S (car S^c est séparé, par le théorème 4.54(ii)), donc de même pour $f^{-1}(y)$ (remarque 4.59(ii)), et alors x est une spécialisation d'un point de $f^{-1}(y)$ (corollaire 4.67(i)); cela achève de montrer que f est générissante. $\square$

Exercice 4.70. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'espaces spectraux, $x \in X$, et $y := f(x)$. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Si f est générissante, munissons $f_x^{-1}(y)$ de la topologie induite par l'inclusion dans X (notation de l'exemple 4.65(ii)); alors $\text{ht}(x) \geq \text{ht}(y) + \dim f_x^{-1}(y)$.
- (ii) Si f est spécialisante munissons l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de $\{x\}$ dans X , et $f^{-1}(y) \cap \overline{\{x\}}$ des topologies induites par X , et l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de $\{y\}$ dans Y de la topologie induite par Y ; alors $\dim \overline{\{x\}} \geq \dim \overline{\{y\}} + \dim(f^{-1}(y) \cap \overline{\{x\}})$.

Exercice 4.71. (Involution de Hochster) Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace spectral, et notons par $(T, \leq)$ l'ensemble T partiellement ordonné par spécialisation (remarque 4.62(i)).

- (i) Montrer qu'il existe une topologie $\mathcal{T}^*$ sur T telle que

$$T^* := (T, \mathcal{T}^*)$$

soit un espace spectral avec $(T^*, \leq) = (T, \leq)^{\text{op}}$ et $(T^*)^c = T^c$.

- (ii) Montrer que $((T, \mathcal{T})^*)^* = (T, \mathcal{T})$.
- (iii) Soit $f : T \rightarrow S$ une application continue et compacte d'espaces spectraux.
 - (a) Montrer que $f : T^* \rightarrow S^*$ est aussi continue et compacte.
 - (b) Montrer que f est spécialisante $\Leftrightarrow f^*$ est générissante.

L'exercice 4.71 admet le corollaire suivant, qui redémontre à la fois la proposition 1.42 et l'exercice 1.61 par une voie purement topologique :

Corollaire 4.72. Soit T un espace spectral. On a :

- (i) Tout $t \in T$ a une spécialisation $t' \in \text{Min } T$ et une générisation $t'' \in \text{Max } T$.
- (ii) La topologie de T induit une topologie compacte sur la partie $\text{Min } T$.
- (iii) La topologie de T induit une topologie séparée sur $\text{Max } T$.

Démonstration. (i) : Vérifions d'abord l'existence de t' ; pour cela, grâce à l'exemple 4.58 on peut remplacer T par l'adhérence de $\{t\}$, et on est ramené à montrer que $\text{Min } T \neq \emptyset$ si $T \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des parties fermées non vides de T , partiellement ordonnée par inclusion; si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une partie totalement ordonnée non vide, on a $\bigcap_{X \in \mathcal{G}} X \in \mathcal{F}$, par la propriété de l'intersection finie (exercice 1.26(i)). Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors un élément minimal Z , et il suffit de montrer que Z contient un seul point. Pour cela, soient $t', t'' \in Z$, et notons Z' et Z'' les adhérences de $\{t'\}$ et $\{t''\}$ dans T ; évidemment $Z', Z'' \subset Z$, donc $Z' = Z = Z''$, par minimalité de Z , d'où finalement $t' = t''$ est l'unique point générique de Z .

Ensuite, pour voir que t admet une générisation maximale t'' , on peut remplacer T par l'espace spectral T^* de l'exercice 4.71, et t'' devient alors une spécialisation minimale de t , dont l'existence est connue par ce qui précède.

(ii) : Soit $(U_i \mid i \in I)$ une famille de parties ouvertes de T telle que $\text{Min } T \subset \bigcup_{i \in I} U_i$; compte tenu de (i), on voit aisément que $\bigcup_{i \in I} U_i = T$, et comme T est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ avec $\bigcup_{i \in J} U_i = T$, d'où l'assertion.

(iii) : Soient $x, y \in \text{Max } T$ deux points distincts; on a $T(x) = \{x\}$ et $T(y) = \{y\}$, et rappelons que $T(x)$ (resp. $T(y)$) est l'intersection de tous les voisinages ouverts compacts de x (resp. de y) dans T (voir l'exemple 4.65(i)). Chaque tel voisinage est une partie

fermée de T^c ; au vu du théorème 4.54(ii) et de l'exercice 1.26(i) il existe alors des parties ouvertes compactes $U, V \subset T$ avec $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Le corollaire suivant est une contrepartie topologique de l'exercice 3.37(i) :

Corollaire 4.73. *Soit $f : T \rightarrow S$ une application continue et compacte d'espaces spectraux, telle que $f(T)$ soit une partie dense de S . Alors $\text{Max } S \subset f(\text{Max } T)$.*

Démonstration. Pour tout $s \in S$, soit $\mathcal{U}(s)$ l'ensemble des voisinages ouverts compacts de s dans S ; puisque $f(T)$ est une partie dense de S , on a $f^{-1}U \neq \emptyset$ pour tout tel s et tout $U \in \mathcal{U}(s)$; en outre $f^{-1}U$ est une partie fermée de T^c , car f est compacte, et $\bigcap_{U \in \mathcal{F}} f^{-1}U = f^{-1}(\bigcap_{U \in \mathcal{F}} U) \neq \emptyset$ pour toute partie finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}(s)$. D'après le théorème 4.54(ii) et l'exercice 1.26(i), on a alors $Z(s) := f^{-1}(\bigcap_{U \in \mathcal{U}(s)} U) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(s)} f^{-1}U \neq \emptyset$ pour tout $s \in S$. Mais noter que si $s \in \text{Max } S$, alors $\bigcap_{U \in \mathcal{U}(s)} U = \{s\}$, d'où $Z(s) = f^{-1}(s)$; de l'autre côté, noter que $Z(s)$ contient toutes les générations de ses points, et donc $Z(s) \cap \text{Max } T \neq \emptyset$, d'après le corollaire 4.72(i), d'où l'assertion. $\square$

Exercice 4.74. (i) Soient T un espace spectral, $S \subset T$ une partie, et supposons que S soit filtrante, pour l'ordre induit par $(T, \leq)$. Montrer que la partie $\bigcap_{s \in S} \{t \in T \mid t \geq s\}$ admet un unique élément minimal t_0 .

(ii) Duale, si $S \subset T$ est une partie cofiltrante pour l'ordre induit par $(T, \leq)$, alors la partie $\bigcap_{s \in S} \{t \in T \mid t \leq s\}$ admet un unique élément maximal t_1 .

On dit que t_0 (resp. t_1) est le *supremum* (resp. *l'infimum*) de S dans T .

Remarque 4.75. (i) Soit T un espace spectral, et pour toute partie $Z \subset T$, munissons l'adhérence $\overline{Z}$ de Z dans T de la topologie induite par l'inclusion dans T ; compte tenu du corollaire 4.72(i), on voit aisément que :

$$\dim T = \sup\{\text{ht}(t) \mid t \in \text{Min } T\} = \sup\{\dim \overline{\{t\}} \mid t \in \text{Max } T\}.$$

(ii) En outre, soit $t \in T$; si $t_0 < t_1 < \dots < t_k := t$ est une chaîne de longueur k de spécialisations strictes de t , et si $t_k := t < t_{k+1} < \dots < t_{k+h}$ est une chaîne de longueur h de générations strictes de t , alors $t_0 < \dots < t_{k+h}$ est une chaîne de spécialisations strictes dans T de longueur $k + h$, d'où :

$$\dim T \geq \text{ht}(t) + \dim \overline{\{t\}} \quad \forall t \in T.$$

(iii) On dit qu'une chaîne $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ de générations de points de T est *saturée*, si t_{i+1} est une génération immédiate de t_i , pour tout $i = 0, \dots, k-1$ (voir la définition 4.61(i)). On dit que T est *caténaire*, s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) $\dim Z(z) < +\infty$ pour toute partie fermée irréductible $Z \subset T$ et tout $z \in Z$.

(b) Deux chaînes saturées de T ayant mêmes extrémités ont la même longueur.

De même, un anneau A est *caténaire*, si $\text{Spec } A$ est un espace spectral caténaire ; ces définitions jouent un rôle important dans l'étude fine des anneaux noethériens : notamment, on verra que les anneaux de Cohen-Macaulay sont caténaires.

Exercice 4.76. (i) Soit T un espace spectral tel que $\dim Z(z) < +\infty$ pour toute partie fermée irréductible Z de T et tout $z \in Z$; montrer que T est caténaire si et seulement s'il vérifie la condition suivante. Si X, Y, Z sont trois parties fermées irréductibles de T quelconques telles que $X \subset Y \subset Z$, et si x et y sont les points génériques de X et respectivement Y , alors $\dim Z(x) = \dim Z(y) + \dim Y(x)$.

(ii) Soit T un espace spectral tel que (a) : $\text{ht}(t) < +\infty$ pour tout $t \in T$, et (b) : pour toute partie fermée irréductible $Z \subset T$ de point générique z , et tout $t \in Z$, on a $\text{ht}(t) = \text{ht}(z) + \dim Z(t)$. Montrer que T est caténaire.

Problème 4.77. (Compactifications canoniques) On dit qu'un espace topologique $(T, \mathcal{T})$ est *totalement disconnexe*, s'il est séparé et si la famille des parties ouvertes et fermées

de T est une base de $\mathcal{T}$. Notons

$$\mathbf{TDisc} \quad \text{et} \quad \mathbf{cTDisc}$$

les sous-catégories pleines de $\mathbf{Top}$ dont les objets sont respectivement les espaces totalement disconnexes et les espaces totalement disconnexes et compacts; on a un foncteur d'inclusion naturel $i : \mathbf{cTDisc} \rightarrow \mathbf{TDisc}$. On dénote

$$\phi_T : T \rightarrow \alpha(T) := \text{Max } \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$$

l'application continue naturelle (voir §4.2.1).

(i) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) T est un espace topologique compact et totalement disconnexe
- (b) T est un espace spectral séparé
- (c) T est un espace spectral avec $\dim T \in \{0, -\infty\}$

et si ces conditions sont remplies, alors $T = T^c$. En déduire que $\alpha(X)$ est totalement disconnexe et compact, pour tout espace topologique X .

(ii) Soit T un espace totalement disconnexe. Montrer que :

- (a) l'image de ϕ_T est dense dans $\alpha(T)$
- (b) la topologie de T coïncide avec celle induite par $\alpha(T)$ via ϕ_T
- (c) toute application continue $f : T \rightarrow S$ avec S totalement disconnexe, induit une application continue $\alpha(f) : \alpha(T) \rightarrow \alpha(S)$, de sorte que les associations $T \mapsto \alpha(T)$ et $f \mapsto \alpha(f)$ définissent un foncteur $\alpha : \mathbf{TDisc} \rightarrow \mathbf{cTDisc}$, et les associations $T \mapsto \phi_T$ définissent une transformation naturelle $\phi : \mathbf{1}_{\mathbf{TDisc}} \rightarrow i \circ \alpha$.

- (d) Conclure que α est adjoint à gauche de i .

(iii) Soit $\mathbf{TopSp}$ la sous-catégorie de $\mathbf{Top}$ dont les objets sont les espaces spectraux, et dont les morphismes sont les applications continues et compactes. Montrer que :

- (a) $\mathbf{cTDisc}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{TopSp}$.

(b) Le foncteur $(-)^c : \mathbf{TopSp} \rightarrow \mathbf{cTDisc} : T \mapsto T^c$ qui associe à toute application continue et compacte $f : T \rightarrow S$ d'espaces spectraux, l'application $f^c := f : T^c \rightarrow S^c$ (voir la remarque 4.59(ii)), est adjoint à droite de l'inclusion $i' : \mathbf{cTDisc} \rightarrow \mathbf{TopSp}$.

Problème 4.78. (i) Soient I une catégorie, $T_\bullet : I \rightarrow \mathbf{TopSp} : i \mapsto T_i$ un foncteur, et $j : \mathbf{TopSp} \rightarrow \mathbf{Top}$ le foncteur d'inclusion (notation du problème 4.77(ii)). Montrer que la limite L de $j \circ T_\bullet$ est un espace spectral, et que le cône universel $v_\bullet := (v_i : L \rightarrow T_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ est formé d'applications v_i compactes.

(ii) Dans la situation de (i), montrer que le cône $v_\bullet$ est aussi universel dans la catégorie $\mathbf{TopSp}$, et le cône induit $v_\bullet^c := (v_i^c : L^c \rightarrow T_i^c \mid i \in \text{Ob}(I))$ est universel à la fois dans la catégorie $\mathbf{Top}$ et la catégorie $\mathbf{cTDisc}$.

On a vu (exemple 4.58) que toute partie pro-constructible d'un espace spectral T est aussi spectrale, pour la topologie induite par l'inclusion dans T . Toutefois, dans certaines applications on trouve des parties d'un espace spectral qui ne sont pas forcément pro-constructibles. Pour ces cas, le critère suivant est parfois utile :

Problème 4.79. Soient T un espace spectral, $\mathcal{S} \subset T \times T$ un ensemble de spécialisations de T , i.e. pour tout $(x, y) \in \mathcal{S}$ on a $x \leq y$. On dira que x est une spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible de y si $(x, y) \in \mathcal{S}$. On dira aussi qu'une partie $X \subset T$ est $\mathcal{S}$ -fermée, si X contient toutes les spécialisations $\mathcal{S}$ -admissibles de tous ses points. On pose

$$S := \{t \in T \mid t \text{ n'admet aucune spécialisation } \mathcal{S}\text{-admissible stricte}\}$$

que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans T . On suppose que :

- (S1) pour tout $s \in S$ et tout voisinage U de s dans T il existe une partie $U' \subset U$ ouverte, constructible et $\mathcal{S}$ -fermée contenant s
- (S2) tout $t \in T$ admet une spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible $s \in S$.

(i) Montrer que tout $t \in T$ a une unique spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible $r(t) \in S$.

(ii) Montrer que S est un espace spectral, et la rétraction $r : T \rightarrow S$ est une application continue et compacte.

(iii) Plus précisément, montrer qu'une partie $Z \subset S$ est constructible dans S si et seulement si $r^{-1}Z$ est constructible dans T .

Dans le même esprit, signalons le résultat suivant :

Corollaire 4.80. *Soit T un espace spectral, et munissons $\text{Min } T$ de la topologie induite par T . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Tout point de T admet une spécialisation unique dans $\text{Min } T$.*

(b) *Il existe une rétraction continue $r : T \rightarrow \text{Min } T$.*

En outre, si ces conditions sont vérifiées, $\text{Min } T$ est séparé.

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $t \in T$, et $u \in \text{Min } T$ une spécialisation de t ; il vient $u = r(u) \leq r(t)$ (voir la remarque 4.62(ii)), d'où $u = r(t)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Evidemment, pour tout $t \in T$, l'image $r(t)$ doit être l'unique spécialisation minimale de t , et il reste à vérifier que l'application ainsi définie est continue. Pour cela, soit U une partie ouverte de T ; on pose $Z := (\text{Min } T) \setminus U$, et notons aussi par Z' l'ensemble de toutes les générations des points de Z ; on remarque :

Affirmation 4.81. Z' est une partie fermée de T .

Preuve : Notons d'abord que Z' contient toutes les spécialisations de tous ses points; en effet, si $t \in Z'$ et $t' \leq t$, par construction il existe $s \in Z$ tel que $s \leq t$; soit maintenant $s' \in \text{Min } T$ l'unique spécialisation minimale de t' ; donc $s' \leq t$, d'où $s = s'$, et finalement $t' \in Z'$. Compte tenu du corollaire 4.67(i), on est alors ramené à montrer que Z' est pro-constructible. Pour cela, on montre plus précisément que Z' est l'intersection de toutes les parties ouvertes compactes de T contenant Z . En effet, évidemment Z' est contenu dans cette intersection. D'un autre côté, si $t \in T \setminus Z'$, soit W l'adhérence de $\{t\}$ dans T ; on voit aisément que $W \cap Z = \emptyset$. Donc, tout $z \in Z$ admet un voisinage ouvert et compact U_z avec $U_z \cap W = \emptyset$; comme $\text{Min } T$ est compact (corollaire 4.72(ii)), Z l'est aussi, donc il existe une partie finie $X \subset Z$ telle que $Z \subset U := \bigcup_{z \in X} U_z$. Par construction, $W \cap U = \emptyset$, en particulier $t \notin U$, d'où l'assertion. $\diamond$

En vertu de l'observation 4.81, $U' := U \setminus Z'$ est une partie ouverte de T , et par construction on a $U' = r^{-1}(U \cap \text{Min } T)$, d'où l'assertion.

En dernier lieu, montrons que $\text{Min } T$ est séparé si (b) est vérifiée. Pour tout $t \in \text{Min } T$ on dénote $\mathcal{U}_t$ la famille des voisinages ouverts compacts de t dans T ; par l'exemple 4.65(i), on a $r^{-1}(t) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_t} U$. Soient $t, t' \in \text{Min } T$ deux points distincts; il vient $\bigcap_{U \in \mathcal{U}_t \cup \mathcal{U}_{t'}} U = r^{-1}(t) \cap r^{-1}(t') = \emptyset$. De l'autre côté, les éléments de $\mathcal{U}_t \cup \mathcal{U}_{t'}$ sont des parties fermées de l'espace compact T^c ; par l'exercice 1.26(i), il existe donc $U \in \mathcal{U}_t$ et $U' \in \mathcal{U}_{t'}$ avec $U \cap U' = \emptyset$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 4.82. La situation contemplée dans le corollaire 4.80 apparaît notablement dans la théorie des *anneaux w -locaux*, développée dans l'article récent [5] de B.Bhatt et P.Scholze. Voir le problème 8.45 pour une application de ce corollaire.

4.3. Préfaisceaux et faisceaux. Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique; à toute partie ouverte $U \subset T$ on a associé l'anneau $\mathcal{C}(U)$ des fonctions à valeurs réelles sur U (voir la section 1.2), et toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes induit une application de restriction

$$\rho_{UU'} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U') \quad s \mapsto s_{U'}.$$

Evidemment on a $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$ si $U'' \subset U'$ est une troisième partie ouverte, et $\rho_{UU} = \text{Id}_{\mathcal{C}(U)}$ pour toute partie ouverte U . On reconnaît ici les identités définissant un foncteur sur une catégorie naturellement associée à l'espace T : en effet, munissons la topologie $\mathcal{T}$ de l'ordre partiel défini par l'inclusion, *i.e.* tel que $U' \leq U$ si et seulement si

$U' \subset U$; à cet ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{T}, \leq)$ on associe comme dans l'exemple 1.114(vii) une catégorie que l'on notera :

$$\mathbf{Ouv}(T).$$

Donc, $\mathbf{Ob}(\mathbf{Ouv}(T)) = \mathcal{T}$, et pour $U, U' \in \mathcal{T}$, l'ensemble $\mathbf{Ouv}(T)(U', U)$ est vide si $U' \not\subset U$, alors que si $U' \subset U$, l'inclusion $U' \rightarrow U$ est l'unique morphisme de U' vers U dans la catégorie $\mathbf{Ouv}(T)$. Avec cette notation, les associations : $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ pour tout $U \in \mathcal{T}$, et $(U, U') \mapsto \rho_{UU'}$ pour $U' \subset U$ fournissent un foncteur de $\mathbf{Ouv}(T)^{\text{op}}$ vers la catégorie des $\mathbb{R}$ -algèbres.

Considérons ensuite une famille arbitraire $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ de parties ouvertes de T , et soit $U := \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$; soit aussi $s^\bullet := (s^V \mid V \in \mathcal{U})$ une famille avec $s^V \in \mathcal{C}(V)$ pour tout $V \in \mathcal{U}$, et vérifiant la *condition de recollement* :

$$(*) \quad (s^V)_{V \cap V'} = (s^{V'})_{V \cap V'} \quad \forall V, V' \in \mathcal{U}.$$

On peut associer à $s^\bullet$ une suite cohérente au sens de l'exemple 2.22(i) : pour cela, munissons l'ensemble

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{U} := \{V \cap V' \mid V, V' \in \mathcal{U}\}$$

de l'ordre partiel défini par l'inclusion, de sorte que $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}, \leq)$ est un sous-ensemble partiellement ordonné de $(\mathcal{T}, \leq)$; noter que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$. Pour tous $V, V' \in \mathcal{U}$ posons $s^{V \cap V'} := (s^V)_{V \cap V'}$. Remarquons que cette définition ne dépend que de la famille $s^\bullet$ et de l'intersection $Q := V \cap V'$: en effet, si $Q = W \cap W'$ pour un autre couple W, W' d'éléments de $\mathcal{U}$, on a $Q \subset V \cap V'$, et avec $(*)$ on déduit :

$$(s^V)_Q = ((s^V)_{V \cap W})_Q = ((s^W)_{V \cap W})_Q = (s^W)_Q.$$

De même, si $Q, Q' \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ et si $Q' \subset Q$, on vérifie aisément que $(s^Q)_{Q'} = s^{Q'}$. Ainsi la famille $\mathcal{C}(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}) := (\mathcal{C}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est un système de $\mathbb{R}$ -algèbres indexé par $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}, \leq)^{\text{op}}$, dont les morphismes de transition sont les applications de restriction $\rho_{QQ'}$ pour tout $Q' \subset Q$, et la famille de sections $s^\bullet$ induit une suite cohérente $(s^Q \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ d'éléments du système $\mathcal{C}(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$. De l'autre côté, d'après l'exercice 1.21(ii) il existe une unique fonction continue $s : U \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction coïncide avec s^Q pour tout $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$; on dit que s est obtenue *par recollement* de la famille $s^\bullet$. En résumé : toute suite cohérente d'éléments du système $\mathcal{C}(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ se recolle en une unique fonction continue sur U ; cela revient à dire que les restrictions $\rho_{U,Q}$ induisent un isomorphisme :

$$\mathcal{C}(U) \xrightarrow{\sim} \lim_{Q \in (\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}}} \mathcal{C}(Q) \quad s \mapsto (s_Q \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$$

de $\mathbb{R}$ -algèbres. Autrement dit : le cône $(\rho_{U,Q} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est universel.

Définition 4.83. Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une catégorie.

(i) Un *préfaisceau* sur T à valeurs dans $\mathcal{A}$ (ou brièvement : un *$\mathcal{A}$ -préfaisceau* sur T) est un foncteur :

$$\mathbf{Ouv}(T)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Un préfaisceau à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles est appelé simplement un *préfaisceau* sur T . De même, un *préfaisceau d'anneaux* (resp. *de groupes*, resp. *de A-modules*, pour un anneau A associatif unitaire arbitraire) est un préfaisceau à valeurs dans $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ (resp. dans la catégorie $\mathbf{Grp}$ des groupes, resp. dans $A - \mathbf{Mod}$).

(ii) Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur T , et tout $U \in \mathcal{T}$, les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont appelés les *sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U* , ou brièvement les *U -sections de $\mathcal{F}$* . Pour toute inclusion $i : U' \rightarrow U$ de parties ouvertes de T , l'application $\mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ est aussi appelée la *restriction à U' des U -sections de $\mathcal{F}$* , et on utilise aussi la notation $s \mapsto s_{U'}$ pour l'action de cette application sur les sections $s \in \mathcal{F}(U)$. On appelle $\mathcal{F}(T)$ l'ensemble des *sections globales de $\mathcal{F}$* . Cette terminologie s'applique aussi évidemment aux préfaisceaux d'anneaux, de groupes, ou de A -modules.

(iii) On dit que le $\mathcal{A}$ -préfaisceau $\mathcal{F}$ est *séparé* si pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout recouvrement $\mathcal{U}$ de U , et tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, les restrictions induisent une *injection* :

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{F}(U)) \rightarrow \prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{A}(X, \mathcal{F}(V)) \quad (X \xrightarrow{f} \mathcal{F}(U)) \mapsto (X \xrightarrow{\rho_{UV} \circ f} \mathcal{F}(V) \mid V \in \mathcal{U}).$$

Si le produit $\prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(V)$ est représentable dans $\mathcal{A}$, cette condition revient à dire que les restrictions induisent un *monomorphisme* :

$$\varepsilon_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(V).$$

Si $\mathcal{A} = \text{Ens}, \mathbb{Z} - \text{Alg}, \text{Grp}$ ou $A - \text{Mod}$, l'application ε_U associe à tout $s \in \mathcal{F}(U)$ la suite $(s_V \mid V \in \mathcal{U})$, et la condition revient à dire que cela est une *injection*.

(iv) Un *faisceau sur T à valeurs dans $\mathcal{A}$* (ou brièvement : un $\mathcal{A}$ -faisceau sur T) est un $\mathcal{A}$ -préfaisceau $\mathcal{F}$ sur T tel que pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout recouvrement $\mathcal{U}$ de U , le cône des restrictions $(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est universel. Un **Ens**-faisceau sur T est appelé simplement un *faisceau sur T* . De même, un *faisceau d'anneaux* (resp. *de groupes*, resp. *de A -modules*) sur T est un faisceau à valeurs dans la catégorie des anneaux (resp. des groupes, resp. des A -modules).

(v) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{A}$ -préfaisceaux sur T ; un *morphisme de $\mathcal{A}$ -préfaisceaux* $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une transformation naturelle de foncteurs, i.e. la donnée, pour toute partie ouverte $U \subset T$ d'un morphisme

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \quad \text{tel que} \quad \mathcal{G}(i) \circ \alpha_U = \alpha_{U'} \circ \mathcal{F}(i)$$

pour toute inclusion $i : U' \rightarrow U$ de parties ouvertes; pour des préfaisceaux d'ensembles, cela s'écrit aussi : $(\alpha_U(s))_{U'} = \alpha_{U'}(s_{U'})$ pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$. Si $\mathcal{A} = \text{Ens}, \mathbb{Z} - \text{Alg}, \text{Grp}$ ou $A - \text{Mod}$, on dira que α est un *morphisme de préfaisceaux d'anneaux* (resp. *de groupes*, resp. *de A -modules*). Les préfaisceaux d'ensembles (resp. d'anneaux, resp. de A -modules) sur T avec leur morphismes forment évidemment une catégorie que l'on notera :

$$\widehat{T} := \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \text{Ens}) \quad (\text{resp. } \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg} \quad \text{resp. } A_{\widehat{T}} - \text{Mod}).$$

La sous-catégorie pleine de $\widehat{T}$ (resp. de $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg}$, resp. de $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$) dont les objets sont les faisceaux d'ensembles (resp. d'anneaux, resp. de A -modules) sur T sera notée :

$$\widetilde{T} \quad (\text{resp. } \mathbb{Z}_{\widetilde{T}} - \text{Alg} \quad \text{resp. } A_{\widetilde{T}} - \text{Mod}).$$

(vi) On a un *foncteur des sections globales* :

$$\Gamma : \widehat{T} \rightarrow \text{Ens} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(T) \quad (\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}') \mapsto (\mathcal{F}(T) \xrightarrow{\phi_T} \mathcal{F}'(T)).$$

De même, on a de manière analogue des foncteurs des sections globales $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg}$ et $A_{\widehat{T}} - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}$, ainsi que leurs restrictions aux sous-catégories de faisceaux respectives, que l'on notera tous indifféremment par Γ .

Exemple 4.84. Sur tout espace topologique $(T, \mathcal{T})$ on a donc un faisceau de $\mathbb{R}$ -algèbres

$$\mathcal{C}_T : \text{Ouv}(T)^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{R} - \text{Alg} \quad U \mapsto \mathcal{C}(U)$$

appelé le *faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur T* .

Remarque 4.85. (i) Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{A}$ une catégorie, $\mathcal{U}$ un recouvrement d'une partie ouverte U de T , et $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Supposons que le cône des restrictions $\rho_{U\bullet} := (\rho_{UQ} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ soit universel, et soient $f, g \in \mathcal{A}(X, \mathcal{F}(U))$ tels que $\rho_{UV} \circ f = \rho_{UV} \circ g$ pour tout $V \in \mathcal{U}$. Alors, pour tous $V, V' \in \mathcal{U}$ on a :

$$\rho_{U, V \cap V'} \circ f = \rho_{V, V \cap V'} \circ \rho_{UV} \circ f = \rho_{V, V \cap V'} \circ \rho_{UV} \circ g = \rho_{U, V \cap V'} \circ g$$

d'où $f = g$, par l'universalité de $\rho_{U\bullet}$. Cela montre que *tout $\mathcal{A}$ -faisceau est un $\mathcal{A}$ -préfaisceau séparé*.

(ii) Remarquons en outre que U représente dans la catégorie $\text{Ouv}(T)$ la limite directe du système partiellement ordonné $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}, \leq)$: en effet, pour tout partie ouverte V de

T , l'existence (et unicité) d'un co-cône $(Q \rightarrow V \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ équivaut à dire que $Q \subset V$ pour tout $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, i.e. que $U \subset V$, et à son tour cela équivaut à l'existence (et unicité) d'un morphisme $U \rightarrow V$ de $\text{Ouv}(T)$. Dans la catégorie opposée, on obtient alors un cône universel $(U^{\text{op}} \rightarrow Q^{\text{op}} \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ représentant la limite inverse du foncteur d'inclusion

$$i_{\mathcal{U}}^{\text{op}} : (\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}} \rightarrow \text{Ouv}(T)^{\text{op}}.$$

On conclut que les $\mathcal{A}$ -faisceaux sur T sont précisément les $\mathcal{A}$ -préfaisceaux qui commutent avec la limite du foncteur d'inclusion $i_{\mathcal{U}}^{\text{op}}$, pour toute famille $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$.

(iii) La partie vide $\emptyset$ de T est ouverte, et admet le recouvrement vide $\mathcal{U}_{\emptyset} := \emptyset$. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur T avec $\mathcal{F}(\emptyset) = \emptyset$, on doit avoir $\mathcal{F}(U) = \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{T}$, car sinon on n'aurait aucune restriction $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\emptyset)$. Noter que $X := \prod_{V \in \mathcal{U}_{\emptyset}} \mathcal{F}(V)$ est un objet final de Ens , i.e. un ensemble avec un seul élément (remarque 2.27(ii,iv)); si $\mathcal{F}$ est séparé, les restrictions induisent une injection $\mathcal{F}(\emptyset) \rightarrow X$, donc $\mathcal{F}(\emptyset)$ a au plus un élément. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, cette même injection doit être une bijection, donc $\mathcal{F}(\emptyset)$ est un ensemble de cardinalité un.

(iv) Soit $T = \{t\}$ un espace topologique avec un seul élément, de sorte que $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$. Compte tenu de (iii), on voit aisément que tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\{t\}$ est déterminé à isomorphisme unique près par la donnée de $\mathcal{F}(\{t\})$, et réciproquement, pour tout ensemble E il existe un faisceau $\mathcal{F}_E$ avec $\mathcal{F}_E(\{t\}) = E$. Plus précisément, le foncteur des sections globales est une équivalence de catégories :

$$\widehat{\{t\}} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}.$$

Exercice 4.86. Soient T un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une catégorie complète. Montrer que la catégorie $\mathcal{A}_{\widehat{T}}$ des faisceaux sur T est complète et que l'inclusion $i : \mathcal{A}_{\widehat{T}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{T}} := \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathcal{A})$ commute avec toutes les petites limites.

4.3.1. *Cribles.* Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique et $U \in \mathcal{T}$. On dit qu'une partie $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ est un *crible de T couvrant U* , si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de U et si la condition suivante est vérifiée. Pour tout $V \in \mathcal{U}$ et toute partie ouverte $V' \subset V$, on a $V' \in \mathcal{U}$. Noter que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \mathcal{U}$ pour tout crible $\mathcal{U}$ de T . On dénote :

$$\text{Crib}_T \quad \text{et} \quad \text{Crib}(U)$$

respectivement l'ensemble de tous les cribles de T , et l'ensemble des cribles de T couvrant U , partiellement ordonnés par l'inclusion de cribles ; noter que $(\text{Crib}_T, \leq)$ et $(\text{Crib}(U), \leq)$ sont des ensembles *cofiltrants*, car l'intersection de toute famille de cribles est évidemment un crible, et l'intersection de toute famille finie de cribles couvrant U couvre encore U . Dans la suite on identifiera aussi Crib_T et $\text{Crib}(U)$ avec les catégories associées à $(\text{Crib}_T, \leq)$ et $(\text{Crib}(U), \leq)$, suivant l'exemple 1.114(vii). On a deux foncteurs évidents :

$$\text{Ouv}(T) \xrightarrow{\lambda_T} \text{Crib}_T \xrightarrow{\mu_T} \text{Ouv}(T).$$

A savoir, $\lambda_T(U) := \{V \in \mathcal{T} \mid V \subset U\}$ pour tout $U \in \mathcal{T}$, et $\mu_T(\mathcal{U}) := \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ pour tout crible $\mathcal{U}$ de T . Evidemment $\mathcal{U} \subset \lambda_T(U) \Leftrightarrow \mu_T(\mathcal{U}) \subset U$; cela revient à dire que (μ_T, λ_T) est un couple de foncteurs adjoints. Rappelons que, d'après le théorème 2.62, le foncteur $\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens})$ admet un adjoint à droite, et $\text{Fun}(\mu_T^{\text{op}}, \text{Ens})$ admet un adjoint à gauche, notés respectivement :

$$\widehat{T} \xrightarrow{\int \lambda_T^{\text{op}}} \text{Fun}(\text{Crib}_T^{\text{op}}, \text{Ens}) \xrightarrow{\int \mu_T^{\text{op}}} \widehat{T}.$$

On a aussi un adjoint à gauche $\int \lambda_T^{\text{op}}$ pour $\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens})$ et un adjoint à droite $\int \mu_T^{\text{op}}$ pour $\text{Fun}(\mu_T^{\text{op}}, \text{Ens})$, mais puisque $(\lambda_T^{\text{op}}, \mu_T^{\text{op}})$ est un couple de foncteurs adjoints, $\int \lambda_T^{\text{op}}$ (resp. $\int \mu_T^{\text{op}}$) s'identifie naturellement avec $\text{Fun}(\mu_T^{\text{op}}, \text{Ens})$ (resp. avec $\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens})$), par la

remarque 2.15(i,ii) et l'exercice 2.14(iii). Avec cette notation, on pose :

$$(-)^+ := \int^{\mu_T^{\text{op}}} \circ \int_{\lambda_T^{\text{op}}} : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$$

et de même $\phi \mapsto \phi^+ := \int^{\mu_T^{\text{op}}} \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \phi$ pour tout morphisme ϕ de préfaisceaux sur T .

La preuve du théorème 2.62 exhibe des adjonctions canoniques pour les couples

$$(\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens}), \int_{\lambda_T^{\text{op}}}) \quad \text{et} \quad (\int^{\mu_T^{\text{op}}}, \text{Fun}(\mu_T^{\text{op}}, \text{Ens})).$$

Soient alors $(\eta^{\lambda_T}, \varepsilon^{\lambda_T})$ et $(\eta^{\mu_T}, \varepsilon^{\mu_T})$ les unités et coïunités respectives. Noter que λ_T est plein et fidèle, donc de même pour λ_T^{op} , et par suite $\varepsilon^{\lambda_T} : \text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens}) \circ \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{1}_{\widehat{T}}$ est un isomorphisme (exercice 2.64 et proposition 2.16(iii)); en outre, $\mu_T \circ \lambda_T = \mathbf{1}_{\text{Ouv}(T)}$, d'où :

$$\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens}) \circ \text{Fun}(\mu_T^{\text{op}}, \text{Ens}) = \mathbf{1}_{\widehat{T}}$$

(remarque 1.130(ii)). On déduit une transformation naturelle

$$j^T := (\text{Fun}(\lambda_T^{\text{op}}, \text{Ens}) * \eta^{\mu_T} * \int_{\lambda_T^{\text{op}}}) \circ \varepsilon^{\lambda_T}{}^{-1} : \mathbf{1}_{\widehat{T}} \rightarrow (-)^+.$$

Remarque 4.87. (i) Soit $\mathcal{U}$ un crible de T ; noter que la tranche $\mathcal{U}/\lambda_T^{\text{op}}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}})$ de λ_T^{op} au-dessous de $\mathcal{U}$ est la catégorie des couples $(V, \lambda_T(V) \rightarrow \mathcal{U})$ formés d'une partie ouverte V de T et un morphisme $\lambda_T(V) \rightarrow \mathcal{U}$ de Crib_T (voir la remarque 2.12(iii)). Cela revient à dire que $V \in \mathcal{U}$ pour tout tel couple, et la tranche au-dessous de $\mathcal{U}$ s'identifie alors naturellement avec la sous-catégorie pleine $\mathcal{U}^{\text{op}}$ de $\text{Ouv}(T)^{\text{op}}$. Par inspection de la preuve du théorème 2.62, on voit par suite que

$$\int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \lim_{V \in \mathcal{U}^{\text{op}}} \mathcal{F}(V) \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ob}(\widehat{T}).$$

On choisira pour cette limite son représentant canonique explicité par l'exemple 2.22(i) : i.e. l'ensemble des suites cohérentes $(s^V \mid V \in \mathcal{U})$ avec $s^V \in \mathcal{F}(V)$ pour tout $V \in \mathcal{U}$, et $(s^V)_{V'} = s^{V'}$ pour tous $V, V' \in \mathcal{U}$ avec $V' \subset V$. Toute inclusion $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de cribles de T induit l'application

$$\int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}') \quad s^\bullet := (s^Q \mid Q \in \mathcal{U}) \mapsto s_{\mathcal{U}'}^\bullet := (s^Q \mid Q \in \mathcal{U}').$$

(ii) Pour $\mathcal{U} := \lambda_T(U)$, une simple inspection montre que $\varepsilon_U^{\lambda_T} : \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$ est la projection $(s^V \mid V \subset U) \mapsto s^U$. Son inverse est alors la bijection

$$\varepsilon_U^{\lambda_T}{}^{-1} : \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \quad s \mapsto (s_V \mid V \subset U) \quad \forall s \in \mathcal{F}(U).$$

(iii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$, la tranche $\mu_T^{\text{op}}(\text{Crib}_T^{\text{op}})/U$ au-dessus de U est la catégorie des couples $(\mathcal{U}, U \rightarrow \mu_T(\mathcal{U}))$ formés d'un crible $\mathcal{U}$ de T et d'un morphisme $U \rightarrow \mu_T(\mathcal{U})$ de $\text{Ouv}(T)$, i.e. $U \subset \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ pour tout tel couple. La tranche au-dessus de U s'identifie alors avec le sous-ensemble partiellement ordonné de $(\text{Crib}_T, \leq)^{\text{op}}$ formé des cribles $\mathcal{U}$ couvrant les parties ouvertes de T contenant U ; mais noter que pour tout tel $\mathcal{U}$, la partie

$$\mathcal{U}/U := \{V \in \mathcal{U} \mid V \subset U\}$$

est évidemment un crible couvrant U . Donc $\text{Crib}(U)^{\text{op}}$ est cofinale dans l'ensemble filtrant $\mu_T^{\text{op}}(\text{Crib}_T^{\text{op}})/U$, et au vu de l'exercice 2.53(iv), on conclut que

$$\int^{\mu_T^{\text{op}}} G(U) = \text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{Crib}(U)^{\text{op}}} G(\mathcal{U}) \quad \forall G : \text{Crib}_T^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}.$$

On choisira pour cette colimite son représentant canonique fourni par l'exercice 2.31 : i.e. l'ensemble des classes d'équivalence $[s, \mathcal{U}]$ des couples $(s, \mathcal{U})$ avec $\mathcal{U} \in \text{Crib}(U)$ et $s \in G(\mathcal{U})$. Comme dans (ii), on voit que $\eta_{\mathcal{U}}^{\mu_T} : G(\mathcal{U}) \rightarrow \int^{\mu_T^{\text{op}}} G(U)$ est l'application $s \mapsto [s, \mathcal{U}]$, pour tout $\mathcal{U} \in \text{Crib}(U)^{\text{op}}$ et tout $s \in G(\mathcal{U})$.

(iv) Ainsi, pour tout $U \in \mathcal{T}$, l'ensemble $\mathcal{F}^+(U)$ est formé des classes d'équivalence $[s^\bullet, \mathcal{U}]$ des couples $(s^\bullet, \mathcal{U})$ avec $\mathcal{U} \in \text{Crib}(U)$ et $s^\bullet \in \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U})$. Toute inclusion $U' \subset$

U de parties ouvertes de T induit un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés $\text{Crib}(U) \rightarrow \text{Crib}(U') : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}/U'$, et une inspection directe montre que la restriction correspondante des U -sections de $\mathcal{F}^+$ est l'application :

$$\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U') \quad [s^\bullet, \mathcal{U}] \mapsto [s^\bullet_{\mathcal{U}/U'}, \mathcal{U}/U'].$$

Pour tout morphisme $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de préfaisceaux, tout crible $\mathcal{U}$ de T , et tout $U \in \mathcal{T}$, on voit en outre que $(\int_{\lambda_T^{\text{op}}} \phi)_{\mathcal{U}}$ et ϕ_U^+ sont respectivement les applications :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) &\rightarrow \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{G}(\mathcal{U}) & s^\bullet &\mapsto \phi_{\mathcal{U}}(s^\bullet) := (\phi_Q(s^Q) \mid Q \in \mathcal{U}) \\ \mathcal{F}^+(U) &\rightarrow \mathcal{G}^+(U) & [s^\bullet, \mathcal{U}] &\mapsto [(\phi_{\mathcal{U}}(s^\bullet), \mathcal{U}). \end{aligned}$$

(v) En dernier lieu, la transformation naturelle $j_{\mathcal{F}}^T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ est donnée par :

$$j_{\mathcal{F},U}^T : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U) \quad s \mapsto [(s_V \mid V \subset U), \lambda_T(U)] \quad \forall U \in \mathcal{T}$$

pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur T . Cela posé, on a :

Problème 4.88. Soit T un espace topologique. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur T , le préfaisceau $\mathcal{F}^+$ est séparé.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau séparé, $\mathcal{F}^+$ est un faisceau.
- (iii) Les associations :

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^a := (\mathcal{F}^+)^+ \quad (\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}) \mapsto \phi^a := (\phi^+)^+ : \mathcal{F}^a \rightarrow \mathcal{G}^a$$

définissent un foncteur $(-)^a : \hat{T} \rightarrow \tilde{T}$ adjoint à gauche de l'inclusion de catégories $i_T : \tilde{T} \rightarrow \hat{T}$. Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ on appelle $\mathcal{F}^a$ le *faisceau associé* à $\mathcal{F}$.

(iv) L'association : $\mathcal{F} \mapsto u_{\mathcal{F}}^T := j_{\mathcal{F}^+}^T \circ j_{\mathcal{F}}^T$ pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\hat{T})$ est l'unité d'une adjonction pour le couple de foncteurs $((-)^a, i_T)$, et le foncteur $(-)^a$ est exact.

(v) Les catégories $\hat{T}$ et $\tilde{T}$ sont complètes et cocomplètes.

Remarque 4.89. (i) Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur T . Par inspection des constructions du §4.3.1, on peut extraire la description suivante du faisceau associé $\mathcal{F}^a$. Pour toute partie ouverte $U \subset T$, toute section de $\mathcal{F}^a(U)$ est représentée par une $\mathcal{F}$ -donnée localement recollée $(s^\bullet, \mathcal{U})$ sur U , formée d'un crible $\mathcal{U}$ de T couvrant U , et d'un système $s^\bullet := (s^V \mid V \in \mathcal{U})$ avec $s^V \in \mathcal{F}(V)$ pour tout $V \in \mathcal{U}$, vérifiant la *condition de recollement local* :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } V, V' \in \mathcal{U} \text{ il existe } \mathcal{U}_{V,V'} \in \text{Crib}(V \cap V') \text{ tel que} \\ (s^V)_W = (s^{V'})_W \quad \forall W \in \mathcal{U}_{V,V'}. \end{aligned}$$

En effet, à toute telle donnée $(s^\bullet, \mathcal{U})$ on associe la section $[\hat{s}^\bullet, \mathcal{U}] \in \mathcal{F}^a(U)$, où $\hat{s}^V \in \mathcal{F}^+(V)$ est la classe de la suite cohérente $((s^V)_W \mid W \in \mathcal{U}/V)$, pour tout $V \in \mathcal{U}$. On dira que deux $\mathcal{F}$ -données $(s^\bullet, \mathcal{U})$ et $(s'^\bullet, \mathcal{U}')$ sont *équivalentes* si $[\hat{s}^\bullet, \mathcal{U}] = [\hat{s}'^\bullet, \mathcal{U}']$; cela revient à dire qu'il existe un crible $\mathcal{U}'' \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ couvrant U , et pour tout $W \in \mathcal{U}''$ un crible $\mathcal{U}_W''$ couvrant W , avec $(s^V)_W = (s'^V)_W$ pour tout $W \in \mathcal{U}_W''$. Notons aussi par $\langle s^\bullet, \mathcal{U} \rangle$ la classe d'équivalence de $(s^\bullet, \mathcal{U})$.

Réciproquement, à tout $[t^\bullet, \mathcal{U}] \in \mathcal{F}^a(U)$ on associe une $\mathcal{F}$ -donnée localement recollée $(\tilde{t}^\bullet, \mathcal{U}')$, comme suit. Par définition, $t^V \in \mathcal{F}^+(V)$ pour tout $V \in \mathcal{U}$, i.e. t^V est la classe d'une suite cohérente $(t^{V,W} \mid W \in \mathcal{U}_V)$, pour un certain crible $\mathcal{U}_V$ couvrant V ; alors $\mathcal{U}' := \bigcup_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_V$ est encore un crible couvrant U , et pour tout $W \in \mathcal{U}'$ on choisit $V \in \mathcal{U}$ avec $W \in \mathcal{U}_V$ et on pose $\tilde{t}^W := t^{V,W}$. On vérifie aisément que la classe $\langle \tilde{t}^\bullet, \mathcal{U}' \rangle$ dépend seulement de $[t^\bullet, \mathcal{U}]$ (et elle est indépendante des choix effectués); en outre, l'association $[t^\bullet, \mathcal{U}] \mapsto \langle \tilde{t}^\bullet, \mathcal{U}' \rangle$ établit une bijection entre $\mathcal{F}^a(U)$ et l'ensemble des classes de $\mathcal{F}$ -données localement recollées sur U , dont l'inverse est l'association $\langle s^\bullet, \mathcal{U} \rangle \mapsto [\hat{s}^\bullet, \mathcal{U}]$: les détails sont confiés au lecteur.

(ii) Si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de $\hat{T}$, alors pour tout $U \in \mathcal{T}$, l'application $\phi_U^a : \mathcal{F}^a(U) \rightarrow \mathcal{G}^a(U)$ correspond, sous les identifications de (i), à l'application qui envoie

chaque $\mathcal{F}$ -donnée localement recollée $\langle s^\bullet, \mathcal{U} \rangle$ sur U , vers la $\mathcal{G}$ -donnée localement recollée $\langle \phi(s)^\bullet, \mathcal{U} \rangle$, avec $\phi(s)^V := \phi_V(s^V)$ pour tout $V \in \mathcal{U}$. De même, l'unité $u_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$ de l'adjonction fournie par le problème 4.88(iv) associe à tout $U \in \mathcal{T}$ l'application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^a(U)$ telle que $a \mapsto \langle a^\bullet, \lambda_T(U) \rangle$, avec $a^\bullet := (a_V \mid V \subset U)$ pour tout $a \in \mathcal{F}(U)$.

(iii) Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'anneaux sur T , et notons par $\mathcal{F}_0$ le préfaisceau d'ensembles obtenu en oubliant la loi d'anneau sur les sections de $\mathcal{F}$. On voit aisément que le préfaisceau $\mathcal{F}_0^+$ hérite de $\mathcal{F}$ une structure naturelle de préfaisceau d'anneaux ; il en est alors de même pour $\mathcal{F}_0^a$, et ce dernier est ainsi un faisceau d'anneaux que l'on notera $\mathcal{F}^a$. En termes des identifications de (i) : si $\langle a^\bullet, \mathcal{U} \rangle$ et $\langle b^\bullet, \mathcal{U}' \rangle$ sont des $\mathcal{F}$ -données localement recollées sur $U \in \mathcal{T}$, alors $\langle a^\bullet, \mathcal{U} \rangle + \langle b^\bullet, \mathcal{U}' \rangle := \langle (a+b)^\bullet, \mathcal{U}'' \rangle$, avec $(a+b)^V := a^V + b^V$ pour tout $V \in \mathcal{U}'' := \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, et de même pour la loi de multiplication sur $\mathcal{F}^a(U)$. En outre, si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux, $\phi^a : \mathcal{F}^a \rightarrow \mathcal{G}^a$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux, que l'on peut expliciter comme dans (ii).

(iv) L'unité d'adjonction $u_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$ du problème 4.88(iv) est un morphisme de $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg}$, et noter que la coïunité correspondante est $u_{\mathcal{G}}^{-1} : \mathcal{G}^a \rightarrow \mathcal{G}$ pour tout faisceau $\mathcal{G}$; donc aussi $u_{\mathcal{G}}^{-1}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux, si $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg})$. Au vu du problème 2.13(iii), on déduit que l'association $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^a$ définit un adjoint à gauche de l'inclusion $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg}$, et l'unité et la coïunité pour cette adjonction sont encore $u_\bullet$ et $u_\bullet^{-1}$. De même on obtient un adjoint à gauche de l'inclusion $A_{\widehat{T}} - \text{Mod} \rightarrow A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$, pour tout anneau associatif unitaire A : les détails seront confiés aux soins du lecteur.

Exercice 4.90. (i) Pour tout espace topologique T et tout anneau associatif unitaire A , montrer que les catégories $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg}$, $\mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg}$, $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$ et $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$ sont complètes et cocomplètes.

(ii) Montrer en outre que $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$ (resp. $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$) est une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur projectif (resp. d'un générateur).

4.3.2. *Images directes et inverses de préfaisceaux.* Toute application continue $f : T \rightarrow S$ d'espaces topologiques induit un foncteur évident :

$$\text{Ouv}(f) : \text{Ouv}(S) \rightarrow \text{Ouv}(T) \quad U \mapsto f^{-1}U.$$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. Pour tout $\mathcal{A}$ -préfaisceau $\mathcal{F}$ sur T , on notera :

$$f_*\mathcal{F} := \mathcal{F} \circ \text{Ouv}(f)^{\text{op}}.$$

Il s'agit donc du $\mathcal{A}$ -préfaisceau sur S tel que $(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}U)$ pour toute partie ouverte $U \subset S$; si $U' \subset U$ est une autre partie ouverte, la restriction des $(f^{-1}U)$ -sections $\mathcal{F}(f^{-1}U) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}U')$ définit évidemment la restriction à U' des U -sections de $f_*\mathcal{F}$. On appelle $f_*\mathcal{F}$ l'image directe de $\mathcal{F}$ suivant l'application f . On voit aussitôt que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur T , alors $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur S : la vérification détaillée sera laissée aux soins du lecteur. De plus, tout morphisme de $\mathcal{A}$ -préfaisceaux $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ induit un morphisme $f_*\phi : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}'$; à savoir, on pose

$$(f_*\phi)_U := \phi_{f^{-1}U} : (f_*\mathcal{F})(U) \rightarrow (f_*\mathcal{F}')(U) \quad \forall U \in \text{Ob}(\text{Ouv}(S)).$$

Evidemment, les foncteurs ainsi obtenus ne sont rien d'autre que

$$\text{Fun}(\text{Ouv}(f)^{\text{op}}, \mathcal{A}) : \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\text{Ouv}(S)^{\text{op}}, \mathcal{A})$$

et sa restriction aux $\mathcal{A}$ -faisceaux. Pour $\mathcal{A} = \text{Ens}$, on les notera respectivement

$$\widehat{f}_* : \widehat{T} \rightarrow \widehat{S} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}_* : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{S}.$$

- Si $\mathcal{A}$ est cocomplète, $\text{Fun}(\text{Ouv}(f)^{\text{op}}, \mathcal{A})$ admet un adjoint à gauche :

$$\text{Fun}(\text{Ouv}(S)^{\text{op}}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathcal{A}) \quad \mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G}$$

en vertu du théorème 2.62(ii). On appelle $f^{-1}\mathcal{G}$ l'image inverse de $\mathcal{G}$ suivant f , et pour tout morphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ on notera aussi par $f^{-1}\phi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}'$ le morphisme induit. Explicitons cette construction : pour toute partie ouverte $V \subset T$ soit $U(f, V)$

l'ensemble des parties ouvertes $U \subset S$ avec $fV \subset U$; il est cofiltrant pour l'ordre partiel défini par l'inclusion de parties ouvertes, et on a

$$(f^{-1}\mathcal{G})(V) := \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}(f,V)^{\text{op}}} \mathcal{G}(U) \quad \forall \mathcal{G} : \mathbf{Ouv}(S)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$ (resp. si $\mathcal{A} = \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ ou $\mathcal{A} = A - \mathbf{Mod}$, pour un anneau associatif unitaire A), on choisira pour cette colimite le représentant canonique de l'exercice 2.31(ii) (resp. de l'exercice 2.31(iii,iv)) : *i.e.* $f^{-1}\mathcal{G}(V)$ sera formé des classes d'équivalence $[s, U]_V$ des couples (s, U) avec $U \in \mathcal{U}(f, V)$ et $s \in \mathcal{G}(U)$, pour la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que

$$(s, U) \sim (s_{U'}, U') \quad \forall U, U' \in \mathcal{U}(f, V) \text{ avec } U' \subset U.$$

Avec cette notation, pour toute inclusion $V' \subset V$ de parties ouvertes de S , la restriction à V' des V -sections de $f^{-1}\mathcal{G}$ est l'application

$$f^{-1}\mathcal{G}(V) \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}(V') \quad [s, U]_V \mapsto [s, U]_{V'}.$$

Et pour tout $\phi \in \widehat{S}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, le morphisme $f^{-1}\phi$ est donné par les applications

$$(f^{-1}\phi)_V : (f^{-1}\mathcal{G})(V) \rightarrow (f^{-1}\mathcal{G}')(V) \quad [s, U]_V \mapsto [\phi_U(s), U]_V \quad \forall V \subset T.$$

- Pour $\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$, on a ainsi un adjoint à gauche de $\widehat{f}_*$, qui sera désigné par

$$\widehat{f}^{-1} : \widehat{S} \rightarrow \widehat{T}.$$

En outre, la preuve du théorème 2.62 exhibe une adjonction canonique pour le couple $(\widehat{f}^{-1}, \widehat{f}_*)$, dont l'unité $\eta_{\mathcal{G}}^f : \mathcal{G} \rightarrow f_* f^{-1}\mathcal{G}$ et la coïunité $\varepsilon_{\mathcal{F}}^f : f^{-1} f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ sont respectivement les applications :

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{G}}^f : \mathcal{G}(U) &\rightarrow f_* f^{-1}\mathcal{G}(U) & s &\mapsto [s, U]_{f^{-1}U} & \forall U \subset S \\ \varepsilon_{\mathcal{F}, V}^f : f^{-1} f_* \mathcal{F}(V) &\rightarrow \mathcal{F}(V) & [s, U]_V &\mapsto s_V & \forall V \subset T. \end{aligned}$$

- On déduit aisément que le foncteur

$$\widetilde{f}^{-1} : \widetilde{S} \rightarrow \widetilde{T} \quad \mathcal{G} \mapsto (f^{-1}\mathcal{G})^a$$

(*i.e.* la composition de l'inclusion $i_S : \widetilde{S} \rightarrow \widehat{S}$ avec $\widehat{f} : \widehat{S} \rightarrow \widehat{T}$ et $(-)^a : \widehat{T} \rightarrow \widetilde{T}$) est adjoint à gauche de $\widetilde{f}_* : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{S}$: plus précisément, le couple $(\widetilde{f}^{-1}, \widetilde{f}_*)$ admet une adjonction canonique, dont l'unité et la coïunité sont les compositions

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}^f} f_* f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*(u_{f^{-1}\mathcal{G}}^T)} f_* \widetilde{f}^{-1}\mathcal{G} & \forall \mathcal{G} \in \mathbf{Ob}(\widetilde{S}) \\ \widetilde{f}^{-1} f_* \mathcal{F} &\xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{F}}^f)^a} (i_T \mathcal{F})^a \xrightarrow{u_{\mathcal{F}}^{T^{-1}}} \mathcal{F} & \forall \mathcal{F} \in \mathbf{Ob}(\widetilde{T}) \end{aligned}$$

où $u_{f^{-1}\mathcal{G}}^T : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow i_T(f^{-1}\mathcal{G})^a$ est l'unité de l'adjonction pour le couple $((-)^a, i_T)$ fournie par le problème 4.88(iv), et de même pour $u_{\mathcal{F}}^T : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (i_T \mathcal{F})^a$.

- Pour $\mathcal{A} = \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$, on notera également par

$$\widehat{f}^{-1} : \mathbb{Z}_{\widehat{S}} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \mathbf{Alg} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}^{-1} : \mathbb{Z}_{\widetilde{S}} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widetilde{T}} - \mathbf{Alg}$$

les adjoints à gauche du foncteur d'image directe $\widehat{f}_* : \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widehat{S}} - \mathbf{Alg}$, et respectivement de sa restriction $\widetilde{f}_* : \mathbb{Z}_{\widetilde{T}} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widetilde{S}} - \mathbf{Alg}$ aux faisceaux d'anneaux. Comme pour les faisceaux d'ensembles, ce dernier est donné par l'association : $\mathcal{F} \mapsto (f^{-1}\mathcal{F})^a$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathbf{Ob}(\mathbb{Z}_{\widetilde{S}} - \mathbf{Alg})$, où $(-)^a$ désigne le foncteur de la remarque 4.89(iv). En particulier, noter les diagrammes commutatifs de catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\widehat{S}} - \mathbf{Alg} & \xrightarrow{\widehat{f}^{-1}} & \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \mathbf{Alg} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{S} & \xrightarrow{\widehat{f}^{-1}} & \widehat{T} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\widetilde{S}} - \mathbf{Alg} & \xrightarrow{\widetilde{f}^{-1}} & \mathbb{Z}_{\widetilde{T}} - \mathbf{Alg} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{S} & \xrightarrow{\widetilde{f}^{-1}} & \widetilde{T} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli évidents. On a de même des adjonctions et des diagrammes commutatifs analogues pour les préfaisceaux et les faisceaux de A -modules, que le lecteur industriel n'omettra pas d'expliciter.

Remarque 4.91. Le théorème 2.62(i) fournit aussi des adjoints à droite des foncteurs $\widehat{f}_*$ d'image directe pour préfaisceaux d'ensembles, d'anneaux et de A -modules. Toutefois, ces foncteurs ne sont pas utiles pour notre discussion, car ils ne conduisent pas à des adjoints à droite pour les sous-catégories de faisceaux respectives.

Exemple 4.92. (i) Soient T un espace topologique, $\mathcal{A}$ une catégorie *arbitraire*, et $j : U \rightarrow T$ l'inclusion d'une partie ouverte de T ; notons par $\mathcal{A}_{\widehat{T}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\widehat{U}}$) la catégorie des $\mathcal{A}$ -préfaisceaux sur T (resp. sur U). D'après le §4.3.2, j induit un foncteur $\text{Ouv}(j) : \text{Ouv}(T) \rightarrow \text{Ouv}(U) : V \mapsto U \cap V$; d'autre part, soit $i : \text{Ouv}(U) \rightarrow \text{Ouv}(T)$ l'inclusion. Noter que pour tout $V \in \text{Ob}(\text{Ouv}(T))$ et tout $W \in \text{Ob}(\text{Ouv}(U))$, la donnée d'un morphisme $iW \rightarrow V$ de $\text{Ouv}(T)$ revient à l'inclusion $W \subset V$, i.e. $W \subset U \cap V$, et cela équivaut à son tour à la donnée d'un morphisme $W \rightarrow \text{Ouv}(j)(V)$ de $\text{Ouv}(U)$; autrement dit $(i, \text{Ouv}(j))$ est un couple de foncteurs adjoints, muni d'une adjonction canonique. D'après la remarque 2.15(i,ii), il s'ensuit que $j_* = \text{Fun}(\text{Ouv}(j)^{\text{op}}, \mathcal{A}) : \mathcal{A}_{\widehat{U}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{T}}$ est adjoint à droite de $\text{Fun}(i^{\text{op}}, \mathcal{A}) : \mathcal{A}_{\widehat{T}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{U}}$, et on a une adjonction canonique pour ce couple de foncteurs. Explicitement, $\text{Fun}(i^{\text{op}}, \mathcal{A})$ associe à tout $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathcal{A}_{\widehat{T}})$ sa restriction $\mathcal{G}_U$ à U , i.e. la restriction du foncteur $\mathcal{G}$ à la sous-catégorie $\text{Ouv}(U)^{\text{op}}$, et à tout morphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ de $\mathcal{A}_{\widehat{T}}$ sa restriction $\phi|_U : \mathcal{G}_U \rightarrow \mathcal{G}'_U$; en outre, l'unité de l'adjonction associe à tout tel $\mathcal{G}$ le morphisme de $\mathcal{A}$ -préfaisceaux $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow j_*(\mathcal{G}_U)$ tel que $\eta_{\mathcal{G},V} : \mathcal{G}(V) \rightarrow j_*(\mathcal{G}_U) = \mathcal{G}(U \cap V)$ soit la restriction à $U \cap V$ des V -sections de $\mathcal{G}$, pour toute partie ouverte $V \subset T$. En dernier lieu, noter que $(j_*\mathcal{F})|_U = \mathcal{F}$ pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{A}_{\widehat{U}})$; la coïtité canonique $\varepsilon_{\mathcal{F}} : (j_*\mathcal{F})|_U \rightarrow \mathcal{F}$ n'est alors rien d'autre que l'identité de $\mathcal{F}$. D'après l'exercice 2.14(i), si $\mathcal{A}$ est cocomplète, cet adjoint à gauche $(-)|_U$ de j_* doit coïncider à isomorphisme près avec l'image inverse suivant j considérée au §4.3.2.

(ii) Notons aussi par $\mathcal{A}_{\widehat{T}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\widehat{U}}$) la catégorie des $\mathcal{A}$ -faisceaux sur T (resp. sur U); on a déjà remarqué que j_* se restreint en un foncteur $\mathcal{A}_{\widehat{U}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{T}}$, et il est clair que $(-)|_U$ se restreint en un foncteur $\mathcal{A}_{\widehat{T}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{U}}$; ces restrictions sont donc encore un couple de foncteurs adjoints, généralisant ainsi, dans cette situation, la construction des foncteurs $\widehat{j}^{-1}$ vus ci-dessus pour les cas où $\mathcal{A} = \text{Ens}, \mathbb{Z} - \text{Alg}, A - \text{Mod}$.

(iii) En outre, si $\mathcal{A} = \text{Ens}, \mathbb{Z} - \text{Alg}, A - \text{Mod}$, on voit aussitôt que :

$$(\mathcal{G}^a)|_U = (\mathcal{G}_U)^a \quad \forall \mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathcal{A}_{\widehat{T}}).$$

Exercice 4.93. (i) Soient T, S des espaces topologiques, $f : T \rightarrow S$ une application continue. Montrer que les foncteurs $\widehat{f}^{-1} : \widehat{S} \rightarrow \widehat{T}$ et $\widetilde{f}^{-1} : \widetilde{S} \rightarrow \widetilde{T}$ sont exacts.

(ii) Si en outre la topologie de T est induite par celle de S via f , montrer que les foncteurs $\widehat{f}_* : \widehat{T} \rightarrow \widehat{S}$ et $\widetilde{f}_* : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{S}$ sont pleins et fidèles.

Remarque 4.94. Soient $T \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T''$ deux applications continues entre trois espaces topologiques. Par inspection directe des définitions on voit que

$$(\widehat{g \circ f})_* = \widehat{g}_* \circ \widehat{f}_* \quad \text{et} \quad (\widetilde{g \circ f})_* = \widetilde{g}_* \circ \widetilde{f}_*.$$

Au vu des exercices 2.14(i) et 2.17(i), on déduit des isomorphismes de foncteurs :

$$\widehat{\gamma}^{f,g} : \widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \xrightarrow{\sim} (\widehat{g \circ f})^{-1} \quad \text{et} \quad \widetilde{\gamma}^{f,g} : \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{g \circ f})^{-1}.$$

On obtient plus explicitement de tels isomorphismes comme suit. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur T'' , et $U \subset T$ une partie ouverte; rappelons que $(g \circ f)^{-1}\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des classes d'équivalence -- qu'on notera ici $[s, W]_{g \circ f}$ -- des couples (s, W) avec $W \in \text{U}(g \circ f, U)$ et $s \in \mathcal{F}(W)$. De même, $f^{-1}g^{-1}\mathcal{F}(U)$ consiste en les classes d'équivalence $[\sigma, V]_f$ des couples (σ, V) avec $V \in \text{U}(f, U)$ et $\sigma \in g^{-1}\mathcal{F}(V)$; la section σ est à son tour la classe d'équivalence $\sigma = [t, W]_g$ d'un couple (t, W) avec $W \in \text{U}(g, V)$ et $t \in \mathcal{F}(W)$. Pour

$V \in \mathbf{U}(f, U)$ fixé, l'inclusion d'ensembles partiellement ordonnés $\mathbf{U}(g, V) \subset \mathbf{U}(g \circ f, U)$ induit, d'après la remarque 2.29(i), une application

$$\gamma_{\mathcal{F}}^V : g^{-1}\mathcal{F}(V) \rightarrow (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}(U) \quad [t, W]_g \mapsto [t, W]_{g \circ f}.$$

Evidemment, pour toute inclusion $V' \subset V$ de parties $V, V' \in \mathbf{U}(f, U)$ on a :

$$\gamma_{\mathcal{F}}^V(\sigma) = \gamma_{\mathcal{F}}^{V'}(\sigma_{V'}) \quad \forall \sigma \in g^{-1}\mathcal{F}(V).$$

Autrement dit, le système d'applications $(\gamma_{\mathcal{F}}^V \mid V \in \mathbf{U}(f, U))$ est un co-cône de sommet $(g \circ f)^{-1}\mathcal{F}(U)$, induisant une application bien définie

$$\gamma_{\mathcal{F}, U} : f^{-1}g^{-1}\mathcal{F}(U) \rightarrow (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}(U) \quad [[t, W]_g, V]_f \mapsto [t, W]_{g \circ f}.$$

On voit aussitôt que l'association : $U \mapsto \gamma_{\mathcal{F}, U}$ pour toute partie ouverte $U \subset T$, définit un morphisme de préfaisceaux $\gamma_{\mathcal{F}} : f^{-1}g^{-1}\mathcal{F} \rightarrow (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}$, et l'association : $\mathcal{F} \mapsto \gamma_{\mathcal{F}}$ pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\widehat{T}'')$, définit une transformation naturelle $\hat{\gamma}^{f, g} : \hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1} \rightarrow \widehat{(g \circ f)}^{-1}$. Il est aussi clair que $\gamma_{\mathcal{F}, U}$ est une application surjective, pour toute telle U ; pour conclure, il ne reste qu'à vérifier l'injectivité de $\gamma_{\mathcal{F}, U}$. Soient ainsi $[\sigma, V]_f, [\sigma', V']_f \in f^{-1}g^{-1}\mathcal{F}(U)$ tels que $\gamma_{\mathcal{F}, U}([\sigma, V]_f) = \gamma_{\mathcal{F}, U}([\sigma', V']_f)$; on a $[\sigma, V]_f = [\sigma_{V \cap V'}, V \cap V']_f$ et de même pour $[\sigma', V']_f$, donc quitte à remplacer V et V' par $V \cap V'$ on peut supposer que $V = V'$. Disons que $\sigma = [t, W]_g$ et $\sigma' = [t', W']_g$; par hypothèse il vient $[t, W]_{g \circ f} = [t', W']_{g \circ f}$, et cela veut dire qu'il existe $W'' \in \mathbf{U}(g \circ f, U)$ avec $W'' \subset W \cap W'$ et tel que $t_{W''} = t'_{W''}$; on déduit :

$$[\sigma, V]_f = [[t_{W''}, W'']_g, V \cap g^{-1}W'']_f = [[t'_{W''}, W'']_g, V \cap g^{-1}W'']_f = [\sigma', V]_f$$

d'où l'assertion. Avec $\hat{\gamma}^{f, g}$ on peut ensuite construire $\tilde{\gamma}^{f, g}$: voir l'exercice 4.98(ii).

4.3.3. Fibres d'un préfaisceau. Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique et $t \in T$; munissons l'ensemble $\{\emptyset\}$ de son unique topologie $\mathcal{T}_{\emptyset} := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, et soit $j_t : \{\emptyset\} \rightarrow T$ telle que $j_t(\emptyset) := t$; puisque j_t est continue pour les topologies $\mathcal{T}_{\emptyset}$ et $\mathcal{T}$, on peut poser

$$\mathcal{F}_t := \Gamma(j_t^{-1}\mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ob}(\widehat{T})$$

où $\Gamma : \widehat{\{\emptyset\}} \rightarrow \text{Ens}$ est le foncteur des sections globales. On appelle $\mathcal{F}_t$ la *fibre de $\mathcal{F}$ au point t* . De même, à tout morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ on associe l'application $\phi_t := \Gamma(j_t^{-1}\phi) : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{F}'_t$. Explicitement, ce *foncteur fibre*

$$(-)_t := \Gamma \circ \hat{j}_t^{-1} : \widehat{T} \rightarrow \text{Ens}$$

peut se décrire comme suit. Notons par $\mathcal{U}_t$ l'ensemble des voisinages ouverts de t dans T , muni de l'ordre partiel défini par l'inclusion de voisinages ; on déduit un système d'ensembles $(\mathcal{F}(U) \mid U \in \mathcal{U}_t^{\text{op}})$ indexé par l'ensemble *filtrant* $\mathcal{U}_t^{\text{op}}$, dont les morphismes de transition $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ sont les restrictions, pour toute inclusion $U' \subset U$ de voisinages de t ; par inspection directe des définitions il vient :

$$\mathcal{F}_t = \text{colim}_{U \in \mathcal{U}_t^{\text{op}}} \mathcal{F}(U)$$

et la colimite est représentée par l'ensemble des classes d'équivalence $[s, U]_t$ des (s, U) avec $U \in \mathcal{U}_t$ et $s \in \mathcal{F}(U)$, pour la relation d'équivalence telle que $(U, f) \sim (U', f') \Leftrightarrow$ les restrictions de f et f' coïncident sur un voisinage de t contenu dans $U \cap U'$: voir l'exercice 2.31(ii) ; on dit que $[s, U]$ est le *germe de s au point t* . De même, ϕ_t est l'application :

$$\text{colim}_{U \in \mathcal{U}_t^{\text{op}}} \phi_U : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{F}'_t \quad [s, U]_t \mapsto [\phi_U(s), U]_t.$$

Il est aussi clair que si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau d'anneaux (resp. de A -modules, pour un anneau associatif unitaire A), alors $\mathcal{F}_t$ hérite de $\mathcal{F}$ une structure naturelle d'anneau (resp. de A -module) ; on a ainsi un foncteur fibre $(-)_t : \mathbb{Z}_{\widehat{T}} - \text{Alg} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg}$, et de même pour les préfaisceaux de A -modules.

Exercice 4.95. Soient T un espace topologique, $t \in T$ un point, et $\mathcal{C}_T$ le faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur T (voir l'exemple 4.84). La fibre $\mathcal{C}_{T,t}$ de $\mathcal{C}_T$ au point t est appelée l'anneau des *germes des fonctions continues autour de t* . On a un homomorphisme naturel d'anneaux :

$$(*) \quad \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathcal{C}_{T,t} \quad f \mapsto [f, T]_t$$

qui associe à toute fonction continue $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ son germe au point t . Or, soit T complètement régulier (voir l'exercice 1.119(v)), et soit $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(T)$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en t . Montrer que $(*)$ se factorise à travers la localisation $\mathcal{C}(T) \rightarrow \mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}}$ et un unique isomorphisme unique d'anneaux : $\mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{T,t}$.

Exercice 4.96. Soit T un espace topologique ; montrer les assertions suivantes :

(i) Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux préfaisceaux séparés sur T , et $\phi, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes de préfaisceaux tels que $\phi_t = \psi_t$ pour tout $t \in T$. Alors $\phi = \psi$.

(ii) L'unité d'adjonction $u_{\mathcal{F}}^T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$ du problème 4.88(iv) induit une bijection

$$(u_{\mathcal{F}}^T)_t : \mathcal{F}_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_t^a \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ob}(\widehat{T}), \forall t \in T.$$

Avec la remarque 4.89(iii,iv), on déduit que si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau d'anneaux (resp. de A -modules, pour un anneau A), alors $(u_{\mathcal{F}}^T)_t$ est même un isomorphisme d'anneaux (resp. de A -modules).

Théorème 4.97. Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique. On a :

(i) Un morphisme de $\widehat{T}$ (resp. de $\widetilde{T}$) est un isomorphisme si et seulement s'il est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

(ii) Un morphisme ϕ de $\widehat{T}$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) si et seulement si sa fibre ϕ_t est une injection (resp. une surjection, resp. une bijection) pour tout $t \in T$.

Démonstration. On considère d'abord un monomorphisme (resp. épimorphisme) $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de préfaisceaux. L'exercice 2.66(v), nous dit que $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) d'ensembles pour tout $U \in \mathcal{T}$, i.e. il est une injection (resp. surjection) (exercice 1.119(iii,iv)). Si ϕ est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, ϕ_U est alors bijectif pour tout U , donc ϕ est un isomorphisme.

(ii) : Soient $i_T : \widetilde{T} \rightarrow \widehat{T}$ l'inclusion de catégories, $t \in T$ et $j_t : \{t\} \rightarrow T$ l'inclusion. D'après l'exercice 4.96(ii), on a une bijection naturelle $\Gamma(\widehat{j}_t^{-1}\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widetilde{j}_t^{-1}\mathcal{F})$ pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de T . On déduit un isomorphisme de foncteurs :

$$(-)_t \circ i_T = \Gamma \circ \widehat{j}_t^{-1} \circ i_T \xrightarrow{\sim} \Gamma \circ \widetilde{j}_t^{-1} \quad : \quad \widetilde{T} \rightarrow \text{Ens}.$$

Or, $\Gamma : \widetilde{\{t\}} \rightarrow \text{Ens}$ est une équivalence (remarque 4.85(iv)), et $\widetilde{j}_t^{-1} : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{\{t\}}$ est exact (exercice 4.93(i)) ; on conclut que tout foncteur fibre $(-)_t \circ i_T : \widetilde{T} \rightarrow \text{Ens}$ est exact. En particulier, si ϕ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme), il en est de même pour chaque ϕ_t , en vertu de l'exercice 2.66(ii,iv). Réciproquement, soit $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de $\widehat{T}$ tel que ϕ_t est un monomorphisme pour tout $t \in T$, et soient $\psi, \psi' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ deux morphismes de faisceaux sur T tels que $\phi \circ \psi = \phi \circ \psi'$; il vient $\phi_t \circ \psi_t = \phi_t \circ \psi'_t$, d'où $\psi_t = \psi'_t$ pour tout $t \in T$, donc $\psi = \psi'$ (exercice 4.96(i)) ; cela montre que ϕ est un monomorphisme. De même on montre que si chaque ϕ_t est un épimorphisme, il en est de même pour ϕ . En dernier lieu, si chaque ϕ_t est un isomorphisme, on sait déjà que ϕ est un monomorphisme par ce qui précède. Rappelons que l'inclusion de catégories $i_T : \widetilde{T} \rightarrow \widehat{T}$ est exacte à gauche, car elle admet un adjoint à gauche (proposition 2.49(i)) ; donc $i_T(\phi) : i_T(\mathcal{F}) \rightarrow i_T(\mathcal{F}')$ est un monomorphisme de préfaisceaux (exercice 2.66(ii)), i.e. $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$ est une injection pour tout $U \in \mathcal{T}$. Pour un tel U , soit $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$; par hypothèse, pour tout $t \in U$ le germe en t de la section σ est dans

$\phi_t(\mathcal{F}_t)$. Cela veut dire qu'il existe un voisinage ouvert U_t de t dans U et $\tau^{(t)} \in \mathcal{F}(U_t)$ tel que $\phi_{U_t}(\tau^{(t)}) = \sigma_{U_t}$. Pour tous $t, t' \in U$, posons $U_{t,t'} := U_t \cap U_{t'}$; on a ainsi

$$\phi_{U_{t,t'}}(\tau_{U_{t,t'}}^{(t)}) = (\phi_{U_t}(\tau^{(t)}))_{U_{t,t'}} = \sigma_{U_{t,t'}} = (\phi_{U_{t'}}(\tau^{(t')}))_{U_{t,t'}} = \phi_{U_{t,t'}}(\tau_{U_{t,t'}}^{(t')})$$

d'où $\tau_{U_{t,t'}}^{(t)} = \tau_{U_{t,t'}}^{(t')}$, par l'injectivité de $\phi_{U_{t,t'}}$. Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, il existe alors une unique section $\tau \in \mathcal{F}(U)$ avec $\tau_{U_t} = \tau^{(t)}$ pour tout $t \in U$; il vient $\phi(\tau)_{U_t} = \phi_{U_t}(\tau_{U_t}) = \sigma_{U_t}$ pour tout $t \in U$, d'où $\phi(\tau) = \sigma$, car $\mathcal{F}'$ est un faisceau. Cela achève de montrer que ϕ_U est bijectif pour tout $U \in \mathcal{T}$, i.e. ϕ est un isomorphisme. On peut maintenant compléter la preuve de (i) : en effet, si ϕ est un morphisme de faisceaux qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, on vient de voir que ϕ_t est à la fois injectif et surjectif, i.e. bijectif pour tout $t \in T$, donc ϕ est un isomorphisme, par ce qui précède. $\square$

Exercice 4.98. (i) Soient S, T deux espaces topologiques, $f : T \rightarrow S$ une application continue, et $t \in T$; exhiber pour tout $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\hat{S})$ une bijection naturelle :

$$\omega_{f,\mathcal{G}}^t : (f^{-1}\mathcal{G})_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{f(t)}$$

i.e. un isomorphisme de foncteurs $\hat{\omega}_f^t : (-)_t \circ \hat{f}^{-1} \xrightarrow{\sim} (-)_{f(t)}$.

(ii) Notons encore par $(-)_t : \hat{T} \rightarrow \text{Ens}$ et $(-)_{f(t)} : \hat{S} \rightarrow \text{Ens}$ les restrictions des foncteurs fibre. Avec (i) et l'exercice 4.96(ii), il vient un isomorphisme de foncteurs

$$\tilde{\omega}_f^t : (-)_t \circ \tilde{f}^{-1} \xrightarrow{\sim} (-)_{f(t)}.$$

Soient ensuite W un troisième espace topologique et $g : S \rightarrow W$ une deuxième application continue; montrer qu'il existe un isomorphisme unique de foncteurs

$$\tilde{\gamma}^{f,g} : \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}^{-1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{(g \circ f)}^{-1}$$

qui fait commuter le diagramme suivant pour tout $t \in T$ et tout $\mathcal{H} \in \text{Ob}(\widetilde{W})$:

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}^{-1} \mathcal{H})_t & \xrightarrow{(\tilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})_t} & (\widetilde{(g \circ f)}^{-1} \mathcal{H})_t \\ \tilde{\omega}_{f,\tilde{g}^{-1}\mathcal{H}}^t \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega}_{g \circ f,\mathcal{H}}^t \\ (\tilde{g}^{-1} \mathcal{H})_{f(t)} & \xrightarrow{\tilde{\omega}_{g,\mathcal{H}}^{f(t)}} & \mathcal{H}_{g \circ f(t)}. \end{array}$$

4.4. Modules projectifs et groupes de Picard. Dans cette section on va s'intéresser de plus près aux modules projectifs sur un anneau A donné, i.e. aux objets projectifs de la catégorie abélienne $A - \text{Mod}$.

Lemme 4.99. Soit P un A -module. On a :

- (i) P est projectif si et seulement s'il est un facteur direct d'un A -module libre.
- (ii) Si P est projectif et de type fini, il est un facteur direct d'un A -module libre de rang fini. En particulier, P est de présentation finie.

Démonstration. Soient Q un A -module tel que $P \oplus Q$ est libre, $\pi : P \oplus Q \rightarrow P$ la projection, et $i : P \rightarrow P \oplus Q$ l'inclusion canonique. Soient aussi $\phi : M \rightarrow N$ une surjection A -linéaire, $\psi \in \text{Hom}_A(P, N)$, et posons $\psi' := \psi \circ \pi$; d'après l'exemple 4.4(i), ψ' admet un relèvement $\psi'' : P \oplus Q \rightarrow M$, de sorte que $\phi \circ \psi'' = \psi'$, et alors $\psi'' \circ i : P \rightarrow M$ relève ψ .

De l'autre côté, si P est projectif, choisissons un ensemble S avec une surjection A -linéaire $\phi : A^{(S)} \rightarrow P$; si P est de type fini, on prendra pour un S un ensemble fini. Par hypothèse, $\text{Id}_P : P \rightarrow P$ se relève en une application A -linéaire $\phi' : P \rightarrow A^{(S)}$, et il vient $A^{(S)} = \text{Im}(\phi') \oplus \text{Ker}(\phi)$. Si S est fini, la surjection induite $A^{(S)} \rightarrow \text{Ker} \phi$ montre que $\text{Ker} \phi$ est de type fini, d'où la dernière assertion de (ii). $\square$

Corollaire 4.100. (i) Tout A -module projectif est plat.

(ii) Un A -module de présentation finie est plat si et seulement s'il est projectif.

Démonstration. (i) : Soit P un module projectif; par le lemme 4.99(i) on peut trouver un A -module Q tel que $P \oplus Q$ soit un A -module libre. La remarque 3.74(iv) nous dit que $P \oplus Q$ est plat, et alors P est plat, d'après la remarque 3.74(iii).

(ii) : Par (i), on peut supposer que P soit plat et de présentation finie; par le lemme 3.85, l'identité $\text{Id}_P : P \rightarrow P$ est la composition d'applications A -linéaires $\phi : P \rightarrow L$ et $\psi : L \rightarrow P$ avec L libre de rang fini; il s'ensuit aisément que $L = \text{Im}(\phi) \oplus \text{Ker}(\psi)$, et compte tenu du lemme 4.99(i), on conclut que P est projectif. $\square$

Remarque 4.101. On peut aussi démontrer le corollaire 4.100(ii) avec la dualité de Pontryagin du §4.1.4. En effet, soit $p : N_1 \rightarrow N_2$ un homomorphisme surjectif de A -modules. On déduit aisément un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N_2^* \otimes_A M & \xrightarrow{\sigma_{N_2, M}} & \text{Hom}_A(M, N_2)^* \\ p^* \otimes_A M \downarrow & & \downarrow (p_*)^* \\ N_1^* \otimes_A M & \xrightarrow{\sigma_{N_1, M}} & \text{Hom}_A(M, N_1)^* \end{array}$$

où $\sigma_{N_1, M}$ et $\sigma_{N_2, M}$ sont comme dans le problème 4.23(ii), et $(p_*)^*$ est le dual de Pontryagin de l'application

$$p_* : \text{Hom}_A(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N_2) \quad f \mapsto p \circ f.$$

Or, si M est de présentation finie, $\sigma_{N_2, M}$ et $\sigma_{N_1, M}$ sont des isomorphismes, par le problème 4.23(iii). De plus, par l'exercice 4.22(i) on sait que p^* est injectif, car p est surjectif, et si M est plat, il s'ensuit que $p^* \otimes_A M$ est injectif, donc de même pour $(p_*)^*$. Alors p_* est surjectif (en vertu de l'exercice 4.22(i)), donc M est projectif.

Exercice 4.102. Soient $S \subset A$ une partie multiplicative, P un A -module projectif.

- (i) Montrer que $S^{-1}P$ est un $S^{-1}A$ -module projectif.
- (ii) Pour toute A -algèbre B , montrer que $B \otimes_A P$ est un B -module projectif.
- (iii) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux fidèlement plat (voir la définition 3.73(ii)), et M un A -module. Montrer que $B \otimes_A M$ est un B -module projectif de type fini $\Leftrightarrow M$ est un A -module projectif de type fini.

On a déjà remarqué que tout A -module M détermine une sorte de “fibré vectoriel” sur $\text{Spec } A$, dont la fibre en chaque point $\mathfrak{p}$ est le $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel $M(\mathfrak{p})$. Si M est de type fini, le rang rk_M de M (voir le §3.2.7) est une application à valeurs entières qui n'est pas forcément localement constante. Si maintenant P est un A -module projectif de type fini, le résultat suivant nous dit que le rang rk_P est bien localement constant sur $\text{Spec } A$, car dans ce cas P est “localement libre sur la topologie de Zariski de $\text{Spec } A$ ”. Les modules projectifs de type fini sont donc la vraie incarnation algébrique des fibrés vectoriels de la géométrie différentielle.

Théorème 4.103. Soit P un A -module. Alors P est projectif de type fini si et seulement si pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ il existe $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $P_f := A_f \otimes_A P$ soit un A_f -module libre de rang fini.

Démonstration. Si P est projectif de type fini, alors $P_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre (théorème 3.82 et corollaire 4.100(i)); choisissons donc une base $x_1/s_1, \dots, x_d/s_d$ de $P_{\mathfrak{p}}$. On voit aisément que $x_1/1, \dots, x_d/1$ est aussi une base de $P_{\mathfrak{p}}$, et on considère l'application A -linéaire $\pi : A^d \rightarrow P$ telle que $\pi(e_i) := x_i$ pour $i = 1, \dots, d$ (où $e_1, \dots, e_d$ est la base canonique de A^d). Par construction, la localisation $\pi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}}^d \rightarrow P_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme, donc $0 = \text{Coker } \pi_{\mathfrak{p}} = (\text{Coker } \pi)_{\mathfrak{p}}$, i.e. $\mathfrak{p} \notin \text{Supp}_A(\text{Coker } \pi)$. Mais le support de $\text{Coker } \pi$ est une partie fermée de $\text{Spec } A$ (voir la remarque 3.58(ii)), donc il existe un voisinage ouvert $\text{Spec } A_s \subset \text{Spec } A$ de $\mathfrak{p}$ tel que $\text{Spec } A_s \cap \text{Supp}_A(\text{Coker } \pi) = \emptyset$. Au vu de la remarque 3.58(i,iii), il vient $A_s \otimes_A \text{Coker } \pi = \text{Coker}(A_s \otimes_A \pi) = 0$, i.e. $\pi_s := A_s \otimes_A \pi : A_s^d \rightarrow P_s$ est surjectif. Posons $Q := \text{Ker } \pi_s$; d'après l'exercice 4.102(i), P_s est un A_s -module projectif,

donc de présentation finie (lemme 4.99(ii)), et alors Q est un A_s -module de type fini (exercice 2.110(iv)). Puisque $(\pi_s)_\mathfrak{p} = \pi_\mathfrak{p}$ est un isomorphisme, on a $Q_\mathfrak{p} = 0$, donc $\mathfrak{p} \notin \text{Supp}_{A_s} Q$, et à nouveau on trouve un voisinage ouvert $\text{Spec } A_{ss'} \subset \text{Spec } A$ de $\mathfrak{p}$ tel que $\text{Spec } A_{ss'} \cap \text{Supp}_{A_s} Q = \emptyset$. Si l'on pose $f := ss'$, on voit que $\text{Supp}_{A_f}(A_f \otimes_{A_s} Q) = \emptyset$, donc $A_f \otimes_{A_s} Q = 0$, et $\pi_f := A_f \otimes_{A_s} \pi : A_f^d \rightarrow P_f$ est un isomorphisme.

Réciproquement, si l'hypothèse est vérifiée, $P_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$ -module libre pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, donc P est plat (proposition 3.77). En outre, P est de présentation finie, par l'exercice 3.56, donc l'assertion découle du corollaire 4.100(ii). $\square$

Remarque 4.104. Soit A un anneau local. D'après le théorème 4.103, tout A -module projectif de type fini est libre. Mais plus généralement, d'après un théorème de Kaplansky, si A est local, tout A -module projectif est libre : voir [55, Th.2.5]. On n'utilisera pas ce résultat.

Exemple 4.105. (Le ruban de Möbius) Soit A l'anneau des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et périodiques de période 2π (c'est l'anneau des fonctions continues sur le cercle S^1). Soit P le groupe additif des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + 2\pi) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evidemment, si $f \in P$ et $g \in A$, on a $g \cdot f \in P$, donc P est un A -module.

(i) On va exhiber un isomorphisme A -linéaire $A^2 \xrightarrow{\sim} P \oplus P$ afin de vérifier que P est projectif de type fini. Pour cela, on considère les fonctions

$$v_1(x) := \sin(x/2) \quad v_2(x) := \cos(x/2).$$

Evidemment, $v_1, v_2 \in P$, donc $\phi := (v_1, v_2)$ et $\psi := (-v_2, v_1)$ sont des éléments de $P \oplus P$. On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le couple $(\phi(t), \psi(t))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ (par rapport au produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^2$). Donc, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ on a

$$(*) \quad f(t) = \langle f(t), \phi(t) \rangle \cdot \phi(t) + \langle f(t), \psi(t) \rangle \cdot \psi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si maintenant $f \in P \oplus P$, les fonctions $t \mapsto \langle f(t), \phi(t) \rangle$ et $t \mapsto \langle f(t), \psi(t) \rangle$ sont des éléments de A , car $\langle f(t + 2\pi), \phi(t + 2\pi) \rangle = \langle -f(t), -\phi(t) \rangle = \langle f(t), \phi(t) \rangle$ (et de même pour l'autre fonction). De plus, $(*)$ est l'unique écriture de f comme combinaison linéaire de ϕ et ψ à coefficients dans A , i.e. on obtient l'isomorphisme cherché en posant $e_1 \mapsto \phi$ et $e_2 \mapsto \psi$ (où (e_1, e_2) est la base canonique de A^2).

(ii) La discussion de (i) implique aisément que (v_1, v_2) est un système de générateurs de P . Pour conclure, on va montrer que P n'est pas un A -module libre. Or, si P était libre, il serait de rang 1, car on vient de voir que $P \oplus P$ est libre de rang 2. Donc, supposons par l'absurde que P soit engendré par quelque $f \in P$. Puisque $f \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$; comme $f(x + 2\pi) = -f(x)$, il s'ensuit que f s'annule en un point $y \in]x, x + 2\pi[$; donc, tout multiple $g \cdot f$ de f (avec $g \in A$) s'annule aussi au point y . D'autre part, évidemment P contient des fonctions qui ne s'annulent pas au point y (une telle fonction est $h(t) := f(t - y + x)$), CQFD.

Remarque 4.106. (i) L'exemple précédent nous montre qu'un A -module projectif de type fini sur un anneau non local n'est pas forcément libre. On a des exemples semblables dans la théorie des nombres et la géométrie algébrique : par exemple, si K est un corps de nombres, et si $\mathcal{O}_K$ est son anneau des entiers, alors les conditions suivantes sont équivalentes : (a) tout $\mathcal{O}_K$ -module projectif de type fini est libre, et (b) le nombre de classes h_K de K est égal à 1 (voir le problème 7.48(iv)).

(ii) Soit K un corps arbitraire. Un théorème standard assez élémentaire montre que tout $K[X]$ -module de type fini est somme directe d'un $K[X]$ -module libre et un $K[X]$ -module de torsion. D'autre part, un $K[X]$ -module de torsion ne peut pas être facteur direct d'un $K[X]$ -module libre. Donc, tout $K[X]$ -module projectif de type fini est libre.

(iii) Autour 1955, Serre a conjecturé que le même résultat s'étend aux K -algèbres de polynômes $K[X_\bullet] := K[X_1, \dots, X_n]$ à un nombre (fini) arbitraire d'indéterminées : tout $K[X_\bullet]$ -module projectif de type fini est libre. Cette conjecture a été démontrée indépendamment par Quillen et par Suslin en 1976 : voir [48].

(iv) On a déjà vu que si P est projectif de type fini, le rang de P est localement constant sur $\text{Spec } A$. En particulier, si $\text{Spec } A$ est connexe (e.g. si A est intègre : voir l'exercice 3.66(iii)), rk_P est constant sur $\text{Spec } A$. La sous-catégorie pleine de $A - \text{Mod}$ dont les objets sont les A -modules projectifs de type fini sera notée :

$$A - \text{Modptf}.$$

Exercice 4.107. Soit $A := \mathcal{C}([0, 1])$ l'anneau des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit $I \subset A$ l'idéal des fonctions telles que $f^{-1}(0)$ soit un voisinage de 0 dans $[0, 1]$ (il s'agit de l'idéal noté I_0 dans l'exemple 1.54).

(i) Exhiber un système dénombrable de générateurs de l'idéal I , et en déduire une surjection A -linéaire $\phi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow I$.

(ii) Montrer que ϕ admet un inverse à droite $I \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$ et déduire que I est un A -module projectif.

(iii) Montrer que I n'est pas un A -module libre.

Exercice 4.108. Soient A un anneau, P un A -module projectif de type fini, $r \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $\text{Sym}_A^r P$ et $\Lambda_A^r P$ sont des A -modules projectifs de type fini.

(ii) On suppose que $\text{rk}_P(\mathfrak{p}) \leq r$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Montrer que $\Lambda_A^{r+1} P = 0$.

Problème 4.109. Soient A un anneau, et P un A -module.

(i) Si P est projectif et si $P = \mathcal{J}(A) \cdot P$, montrer que $P = 0$ (voir la définition 1.48(i)).

(ii) On considère les conditions suivantes :

(a) P est projectif de type fini.

(b) P est projectif, et rk_P est localement constante, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) P est de type fini, et la fonction $\text{rk}_P : \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{N}$ est localement constante.

Montrer que (a) $\Leftrightarrow$ (b), et si A est réduit (voir la définition 1.48(ii)), alors (a) $\Leftrightarrow$ (c).

4.4.1. Soient A un anneau, et M, N, P trois A -modules. On a une application A -bilinéaire $N \times \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N \otimes_A M)$ qui associe à chaque $(n, \phi) \in N \times \text{Hom}_A(P, M)$ l'homomorphisme $f_{(n, \phi)} : P \rightarrow N \otimes_A M$ tel que $x \mapsto n \otimes \phi(x)$ pour tout $x \in P$. On en déduit une application A -linéaire

$$\rho_{M, N, P} : N \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N \otimes_A M) \quad n \otimes x \mapsto f_{(n, \phi)}.$$

Evidemment toute donnée d'applications A -linéaires

$$f : P_2 \rightarrow P_1 \quad g : N_1 \rightarrow N_2 \quad h : M_1 \rightarrow M_2$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N_1 \otimes_A \text{Hom}_A(P_1, M_1) & \xrightarrow{\rho_{M_1, N_1, P_1}} & \text{Hom}_A(P_1, N_1 \otimes_A M_1) \\ g \otimes_A \text{Hom}_A(f, h) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(f, g \otimes_A h) \\ N_2 \otimes_A \text{Hom}_A(P_2, M_2) & \xrightarrow{\rho_{M_2, N_2, P_2}} & \text{Hom}_A(P_2, N_2 \otimes_A M_2) \end{array}$$

où $\text{Hom}_A(f, h)$ est l'application telle que : $(k : P_1 \rightarrow M_1) \mapsto h \circ k \circ f$, et de même pour $\text{Hom}_A(f, g \otimes_A h)$. Autrement dit, l'association $(M, N, P) \mapsto \rho_{M, N, P}$ est une transformation naturelle :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{- \otimes_A \text{Hom}_A(-, -)} & \\ (A - \text{Mod}) \times (A - \text{Mod}) \times (A - \text{Mod})^{\text{op}} & \Downarrow \rho & A - \text{Mod}. \\ & \xrightarrow{\text{Hom}_A(-, - \otimes_A -)} & \end{array}$$

Exercice 4.110. (i) Avec la notation du §4.4.1, montrer que $\rho_{M,N,P}$ est un isomorphisme dans les cas suivants :

- (a)_{N,P} Si P est projectif de type fini
- (b)_{N,P} Si N est projectif de type fini
- (c)_{N,P} Si P est de présentation finie et si N est plat
- (d)_{N,P} Si N est de présentation finie et si P est projectif
- (e)_{N,P} Si P est de type fini et si N est projectif.

(ii) Soit B une A -algèbre telle que l'une des conditions (a)_{B,P} – (e)_{B,P} soit vérifiée ; déduire de (i) que pour tout A -module M l'application B -linéaire naturelle

$$B \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_B(B \otimes_A P, B \otimes_A M) \quad b \otimes \phi \mapsto b \cdot (B \otimes_A \phi)$$

est un isomorphisme.

(iii) Soit P un A -module projectif de type fini. Montrer que l'application de bidualité $\beta_P : P \rightarrow P^{\vee\vee}$ est un isomorphisme A -linéaire (voir l'exemple 1.132).

Problème 4.111. (Trace d'un module projectif) Soient P un A -module projectif de type fini, et $P^\vee := \text{Hom}_A(P, A)$. L'exercice 4.110(i) fournit un isomorphisme

$$\omega_{P/A} := \rho_{A,P,P}^{-1} : \text{End}_A(P) \xrightarrow{\sim} P \otimes_A P^\vee$$

(notation de la remarque 1.14(ii)). Soit aussi $\text{ev}_{P/A} : P \otimes_A P^\vee \rightarrow A$ l'application d'évaluation telle que $x \otimes \beta \mapsto \beta(x)$ pour tous $x \in P$ et $\beta \in P^\vee$. La trace du A -module projectif P est la composition

$$\text{tr}_{P/A} := \text{ev}_{P/A} \circ \omega_{P/A} : \text{End}_A(P) \rightarrow A.$$

(i) Soient P, Q deux A -modules projectifs de type fini. Montrer que :

- (a) $\text{tr}_{Q/A}(\phi \circ \psi) = \text{tr}_{P/A}(\psi \circ \phi) \quad \forall \phi \in \text{Hom}_A(P, Q), \forall \psi \in \text{Hom}_A(Q, P)$.
- (b) $\text{tr}_{P \otimes_A Q/A}(\phi \otimes_A \psi) = \text{tr}_{P/A}(\phi) \cdot \text{tr}_{Q/A}(\psi) \quad \forall \phi \in \text{End}_A(P), \forall \psi \in \text{End}_A(Q)$.

(ii) Soit B une A -algèbre. Montrer que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A \text{End}_A(P) & \xrightarrow{\sim} & \text{End}_B(B \otimes_A P) \\ & \searrow B \otimes_A \text{tr}_{P/A} & \swarrow \text{tr}_{B \otimes_A P/B} \\ & B & \end{array}$$

dont la flèche horizontale en haut est l'isomorphisme de l'exercice 4.110(ii).

(iii) Soient $(P_\bullet, d_\bullet) := (0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow 0)$ un complexe exact de longueur finie n , formé de A -modules projectifs de type fini, et $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow P_\bullet$ un endomorphisme de $P_\bullet$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \text{tr}_{P_i/A}(f_i) = 0.$$

Pour une application, voir le problème 11.92.

4.4.2. Groupes de Picard. Soient A un anneau, et P, Q deux A -modules projectifs ; compte tenu du lemme 4.99(i), on voit aisément que le A -module $P \otimes_A Q$ est projectif. Si de plus P et Q sont de type fini, évidemment leur produit tensoriel l'est aussi, et grâce à l'exercice 3.6(iii) on a la relation :

$$\text{rk}_{P \otimes_A Q}(\mathfrak{p}) = \text{rk}_P(\mathfrak{p}) \cdot \text{rk}_Q(\mathfrak{p}) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A.$$

Définition 4.112. Soit P un A -module. On dit que P est *inversible* s'il est projectif de type fini, et si son rang est la fonction constante sur $\text{Spec } A$ de valeur 1 ; par suite, le produit tensoriel de deux A -modules inversibles est inversible. On écrit $[P]$ pour la classe d'isomorphisme d'un A -module inversible P , et on dénote aussi par

l'ensemble des classes d'isomorphisme des A -modules inversibles. Le produit tensoriel munit $\text{Pic } A$ d'une loi d'addition bien définie :

$$[P] + [Q] := [P \otimes_A Q] \quad \forall [P], [Q] \in \text{Pic } A$$

et compte tenu de l'exercice 3.6(ii) et des propositions 3.18(i) et 3.20 on voit aussitôt que cette loi est commutative et associative, et admet l'élément neutre $[A]$.

Remarque 4.113. (i) A vrai dire, la définition 4.112 présente les mêmes difficultés de nature logique qui ont été signalées lors de l'introduction des classes $\text{Sub}(X)$ et $\text{Quot}(X)$ (voir la définition 2.8(ii) et la remarque 2.9(ii)) : à savoir, la classe des modules inversibles n'est pas un ensemble, et de même pour chaque classe d'isomorphisme de modules inversibles. Toutefois, noter que tout A -module inversible engendré par n éléments est isomorphe à un quotient de A^n , et les quotients inversibles de A^n forment évidemment un ensemble $\mathcal{Q}_n$, donc $\mathcal{Q} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n$ est de même un ensemble, et on peut ainsi (re-)définir plus précisément $\text{Pic } A$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des éléments de $\mathcal{Q}$; tout A -module inversible P admet alors une classe bien définie $[P]$ dans ce quotient de $\mathcal{Q}$.

(ii) On peut montrer qu'un A -module M est inversible si et seulement s'il existe un A -module N avec un isomorphisme $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} A$: voir [30, Lemma 4.1.5].

Lemme 4.114. Avec la notation de la définition 4.112, la donnée $(\text{Pic } A, +, [A])$ est un groupe abélien, qu'on appelle le groupe de Picard de A .

Démonstration. Soit P un A -module inversible; il suffit de montrer que $[P] + [P^\vee] = [A]$, avec $P^\vee := \text{Hom}_A(P, A)$. Mais l'exercice 4.110(i.a) nous donne un isomorphisme naturel $P \otimes_A P^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(P, P)$, et d'autre part on a l'application A -linéaire

$$\iota_P : A \rightarrow \text{Hom}_A(P, P) \quad a \mapsto a \cdot \text{Id}_P.$$

On est alors ramené à montrer que ι_P est un isomorphisme, et au vu de la proposition 3.55, il suffit de vérifier que $(\iota_P)_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, P_{\mathfrak{p}})$ est un isomorphisme pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Mais comme P est de présentation finie (par le lemme 4.99(ii)) l'exercice 4.110(ii) nous donne aussi un isomorphisme naturel

$$\rho_{P, \mathfrak{p}} : \text{Hom}_A(P, P)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, P_{\mathfrak{p}})$$

et on voit aisément que $\rho_{P, \mathfrak{p}} \circ (\iota_P)_{\mathfrak{p}} = \iota_{P_{\mathfrak{p}}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, P_{\mathfrak{p}})$. On peut donc supposer que A soit un anneau local et P libre de rang un (théorème 3.82), et dans ce cas l'assertion est évidente. $\square$

Exemple 4.115. (i) Pour tout anneau local A , on a $\text{Pic } A = 0$ (théorème 3.82).

(ii) Pour A et P comme dans l'exemple 4.105, noter que $\Lambda_A^2 P = 0$ (voir l'exercice 4.108(ii)); au vu du problème 3.91(iv), on déduit un isomorphisme de A -modules :

$$A \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^2(A^2) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^2(P \oplus P) \xrightarrow{\sim} P \otimes_A P$$

qui nous donne un élément non trivial $[P] \in \text{Pic } A$ avec $2 \cdot [P] = 0$.

Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux; on a vu que si P est un A -module projectif, $B \otimes_A P$ est un B -module projectif (exercice 4.102(ii)). De plus, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ il existe un unique homomorphisme d'anneaux locaux $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{q}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$, avec $\mathfrak{q} := (\text{Spec } f)(\mathfrak{p}) = f^{-1}\mathfrak{p}$, qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les localisations. Compte tenu de la proposition 3.18(i), il vient une identification naturelle de $B_{\mathfrak{p}}$ -modules :

$$(B \otimes_A P)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}} \otimes_A P \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, si P est de type fini, on a :

$$\mathrm{rk}_{B \otimes_A P} = \mathrm{rk}_P \circ (\mathrm{Spec} f).$$

Si P est un A -module inversible, $B \otimes_A P$ est alors un B -module inversible, et au vu de la proposition 3.20, on obtient ainsi un *homomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Pic}(f) : \mathrm{Pic} A \rightarrow \mathrm{Pic} B \quad [P] \mapsto [B \otimes_A P].$$

En dernier lieu, si $g : B \rightarrow C$ est un deuxième homomorphisme d'anneaux, on voit aisément que $\mathrm{Pic}(g \circ f) = \mathrm{Pic}(g) \circ \mathrm{Pic}(f)$, *i.e.* le groupe de Picard est un foncteur

$$\mathrm{Pic} : \mathbb{Z} - \mathrm{Alg} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$$

de la catégorie des anneaux dans la catégorie des groupes abéliens.

4.4.3. Idéaux fractionnaires. Si A est un anneau intègre, on peut donner une description alternative du groupe de Picard de A en termes de certains sous-modules du corps des fractions K de A . A savoir, on dira qu'un A -sous-module $I \subset K$ est un *idéal fractionnaire* de A si $I \neq 0$ et s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aI \subset A$. Si I et J sont deux idéaux fractionnaires de A , on dénote par $IJ \subset K$ le A -sous-module engendré par $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$; noter que si $aI, bJ \subset A$, on a $abIJ \subset A$, donc IJ est un idéal fractionnaire. Pour un A -sous-module $I \subset K$ on pose $I^{-1} := \{x \in K \mid xI \subset A\}$; noter que si I est un idéal fractionnaire on a $I^{-1} \neq 0$, et $xI^{-1} \subset A$ pour tout $x \in I$, et comme $I \cap A \neq 0$, il s'ensuit que I^{-1} est de même un idéal fractionnaire. On dira que I est *inversible* si $I^{-1}I = A$.

Lemme 4.116. (i) Soit $0 \neq I \subset K$ un A -sous-module. L'application

$$I^{-1} \rightarrow \mathrm{Hom}_A(I, A) \quad x \mapsto (a \mapsto ax)$$

est un isomorphisme de A -modules.

(ii) Si de plus I est de type fini, alors I est un idéal fractionnaire de A , et on a

$$(I_{\mathfrak{p}})^{-1} := \{x \in K \mid xI_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{p}}\} = (I^{-1})_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A.$$

(iii) Si I est un A -module cyclique, I est un idéal fractionnaire inversible.

Démonstration. (i) : Soit $\phi : I \rightarrow A$ une application A -linéaire; on doit exhiber $x \in I^{-1}$ tel que $\phi(a) = ax$ pour tout $a \in I$. Or, pour tout $a \in I \setminus \{0\}$ posons $x_a := \phi(a) \cdot a^{-1} \in K$; noter que $x_{ab} = x_a$ pour tout $b \in A \setminus \{0\}$. Soient $a_1, a_2 \in I \setminus \{0\}$, et pour $i = 1, 2$ choisissons $b_i, c_i \in A \setminus \{0\}$ tels que $a_i = c_i b_i^{-1}$; il vient $x_{a_1} = x_{c_1} = x_{c_1 c_2} = x_{c_2} = x_{a_2}$, *i.e.* x_a est indépendant de a , d'où l'assertion.

(ii) : L'inclusion $(I^{-1})_{\mathfrak{p}} \subset (I_{\mathfrak{p}})^{-1}$ est immédiate, et elle est vérifiée pour tout A -sous-module I de K . Pour l'inclusion réciproque, disons que $I = Aa_1 + \cdots + Aa_n$ pour un système fini $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de K , et soit $x \in K$ tel que $a_i x \in A_{\mathfrak{p}}$ pour $i = 1, \dots, n$; donc il existe $b_i \in A, c_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ avec $a_i x = c_i^{-1} b_i$, et si l'on pose $c := c_1 \cdots c_n$ il vient $cx \in I^{-1}$, d'où $x \in (I^{-1})_{\mathfrak{p}}$, comme souhaité.

(iii) : Evidemment, si $I = Aa$, on a $I^{-1} = Aa^{-1}$, d'où l'assertion. $\square$

Proposition 4.117. Soient A un anneau intègre et I un idéal fractionnaire de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) I est un idéal fractionnaire inversible.
- (b) I est un A -module projectif.
- (c) I est un A -module de type fini, et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'idéal fractionnaire $I_{\mathfrak{p}} = IA_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre de rang 1.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Si I est inversible, il existe $a_1, \dots, a_n \in I$ et $b_1, \dots, b_n \in I^{-1}$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$. Par suite, $a_\bullet$ engendre le A -module I , car pour tout $x \in I$ on a $b_i x \in A$ pour $i = 1, \dots, n$ et $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (b_i x)$. On considère les applications A -linéaires $\phi : A^n \rightarrow I$ et $\psi : I \rightarrow A^n$ telles que

$$\phi(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^n a_i y_i \quad \psi(x) := (b_1 x, \dots, b_n x) \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in A^n, \forall x \in I.$$

Evidemment $\phi \circ \psi = Id_I$, donc I est un facteur direct de A^n , d'où (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Si I est un A -module projectif, il existe un A -module libre L et des applications A -linéaires $\phi : L \rightarrow I$, $\psi : I \rightarrow L$ telles que $\phi \circ \psi = Id_I$. Soit $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une base de L ; par le lemme 4.116(i), pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on a $x_\lambda \in I^{-1}$ tel que $\psi(a) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a x_\lambda e_\lambda$ pour tout $a \in I$. Donc il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $x_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$, et on pose $b_\lambda := \phi(e_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda'$; il vient $a = \sum_{\lambda \in \Lambda'} a x_\lambda b_\lambda$ pour tout $a \in I$, d'où $1 = \sum_{\lambda \in \Lambda'} x_\lambda b_\lambda$, i.e. $I^{-1}I = A$.

(a) $\Rightarrow$ (c) : On vient de voir que I est projectif de type fini si (a) est vérifiée, donc $I_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre de rang fini (exercice 4.102(i) et théorème 3.82). Supposons par l'absurde que $\text{rk}_{A_{\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} > 1$, et soient e_1, e_2 deux éléments distincts d'une base de $I_{\mathfrak{p}}$; pour $i = 1, 2$ on a $a_i, b_i \in A \setminus \{0\}$ tels que $e_i = a_i b_i^{-1}$, d'où $(b_1 a_2) \cdot e_1 = (b_2 a_1) \cdot e_2$. Une telle relation linéaire entre éléments d'une base implique que $b_1 a_2 = b_2 a_1 = 0$; mais A est intègre, contradiction.

(c) $\Rightarrow$ (a) : D'après le lemme 4.116(ii,iii) on a $(I^{-1}I)_{\mathfrak{p}} = (I^{-1})_{\mathfrak{p}} I_{\mathfrak{p}} = (I_{\mathfrak{p}})^{-1} I_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Par la proposition 3.55, l'inclusion $I^{-1}I \rightarrow A$ est alors surjective, d'où (a). $\square$

Pour tout anneau intègre A , on notera $F(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de A ; évidemment la multiplication d'idéaux fractionnaires est commutative et associative, et admet l'élément neutre A . Ainsi, $(F(A), \cdot, A)$ est un groupe abélien; de plus, par le lemme 4.116(iii), l'application

$$(*) \quad K^\times \rightarrow F(A) \quad x \mapsto Ax$$

est un homomorphisme de groupes, dont le noyau est le sous-groupe $A^\times$. D'autre part, en vertu de la proposition 4.117 on a aussi une application $[-] : F(A) \rightarrow \text{Pic } A$ bien définie qui associe à tout idéal fractionnaire inversible I la classe $[I]$. Noter que la loi de multiplication de K induit une surjection A -linéaire $\mu : I \otimes_A J \rightarrow IJ$, pour tous $I, J \in F(A)$; il s'ensuit aisément que $\text{Ker } \mu$ est un A -module projectif de rang constant 0, i.e. $\text{Ker } \mu = 0$ et μ est un isomorphisme, donc $[-]$ est un homomorphisme de groupes, et évidemment son noyau est l'image de l'homomorphisme $(*)$. Pour voir que $[-]$ est surjectif, soit P un A -module inversible; alors $P_K := K \otimes_A P$ est un K -espace vectoriel de dimension un, et le choix d'un élément non nul $t \in P_K$ induit un isomorphisme $\omega_t : K \xrightarrow{\sim} P_K : x \mapsto xt$ de K -espaces vectoriels. Comme P est plat, la localisation $P \rightarrow P_K$ est injective, et $\omega_t^{-1}(P) \subset K$ est un idéal fractionnaire inversible avec $[\omega_t^{-1}(P)] = [P]$, par la proposition 4.117. On a ainsi obtenu une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow A^\times \rightarrow K^\times \rightarrow F(A) \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow 0.$$

4.4.4. Groupe de Picard d'un anneau factoriel. On a déjà remarqué que le groupe de Picard d'un anneau local est trivial; on peut maintenant ajouter que le groupe de Picard d'un anneau intègre A est trivial $\Leftrightarrow$ tout idéal inversible de A est cyclique. Dans ce paragraphe on établira cette condition pour l'importante classe des anneaux factoriels (définition 1.9(iii)); réciproquement, on verra plus tard que parfois l'annulation du groupe de Picard entraîne la factorialité de A (proposition 11.112).

Lemme 4.118. Soient A un anneau factoriel, $\mathfrak{p} \neq 0$ un idéal premier de A . On a :

- (i) $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1 si et seulement s'il est un idéal principal.
- (ii) Pour toute partie $S \subset A \setminus \{0\}$, la localisation $S^{-1}A$ est un anneau factoriel.
- (iii) Si A est local et si $\dim A = 1$, tout idéal $I \neq 0$ de A est une puissance de $\mathfrak{p}$.

Démonstration. (i) : Soit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ un autre idéal premier non nul, $a \in \mathfrak{q}$ un élément non nul, et $a = p_1 \cdots p_t$ une factorisation de a comme produit d'éléments premiers. On a $p_i \in \mathfrak{q}$ pour quelque $i \leq t$, d'où $0 \neq Ap_i \subset \mathfrak{q}$, et si $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1, il vient $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = Ap_i$. De l'autre côté, si $\mathfrak{p} = qA$, la remarque 1.10(ii) implique aisément que $q^{-1}p_i \in A^\times$, d'où à nouveau $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = Ap_i$, donc $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1.

(ii) : Soit $x \in S^{-1}A \setminus \{0\}$, et écrivons $x = s^{-1}a$ avec $s \in S$ et $a \in A \setminus \{0\}$; si $a \in A^\times$, alors $x \in (S^{-1}A)^\times$. Si $a \notin A^\times$, soit $a = p_1 \cdots p_t$ une factorisation comme produit d'éléments premiers. Pour tout $i = 1, \dots, t$, si l'élément p_i n'est pas inversible dans $S^{-1}A$, il engendre l'idéal premier $S^{-1}(p_iA)$ de $S^{-1}A$, et alors il est un élément premier de $S^{-1}A$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

(iii) : Par (i), on a $\mathfrak{p} = pA$ pour un élément premier p de A , et comme $\mathfrak{p}$ est l'unique idéal premier non nul de A , tout $a \in A \setminus \{0\}$ s'écrit sous la forme $a = p^n u$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $u \in A^\times$. Soit $k := \min(n \in \mathbb{N} | p^n \in I)$; il vient aussitôt $I = \mathfrak{p}^k$. $\square$

Remarque 4.119. On verra plus tard qu'un anneau vérifie les conditions du lemme 4.118(iii) si et seulement s'il est de *valuation discrète* : voir la définition 7.38.

Théorème 4.120. *Si A est un anneau factoriel, on a $\text{Pic } A = 0$.*

Démonstration. Soit $I \subset K$ un idéal inversible de A , et $x \in I^{-1}$ un élément non nul; il suffit de montrer que I est un A -module cyclique, et quitte à remplacer I par xI , on peut supposer que $I \subset A$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1, il existe $\nu_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}$ tel que $I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}$ (lemme 4.118(ii,iii)), et noter que la partie $\mathcal{F} \subset \text{Spec } A$ des idéaux premiers de hauteur 1 tels que $\nu_{\mathfrak{p}} > 0$ est finie : en effet, si $a \in I \setminus \{0\}$ admet la factorisation $a = p_1 \cdots p_t$ comme produit d'éléments premiers, on a $\mathcal{F} \subset \{p_1 A, \dots, p_t A\}$. Au vu du lemme 4.118(i), on est ramené à montrer :

Affirmation 4.121. $I = J := \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{F}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}}$.

Preuve : On doit vérifier que les inclusions $I \rightarrow I + J \leftarrow J$ sont surjectives, et par la proposition 3.55, il suffit de montrer que les idéaux $I_{\mathfrak{m}}$ et $J_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ coïncident pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Mais évidemment $J_{\mathfrak{m}} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{F} \cap \text{Spec } A_{\mathfrak{m}}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{m}}$; compte tenu du lemme 4.118(ii), on peut alors supposer du début que A soit local, quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{m}}$. Dans ce cas, I est principal (proposition 4.117), et il admet alors une factorisation $I = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{F}} \mathfrak{p}^{\mu_{\mathfrak{p}}}$ pour un système d'entiers $(\mu_{\mathfrak{p}} | \mathfrak{p} \in \mathcal{F})$. On est alors ramené à vérifier que $\mu_{\mathfrak{p}} = \nu_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$. Mais si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ sont distincts, on a $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ car ces idéaux premiers ont la même hauteur; d'où $\mathfrak{q}^{\mu_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$, et finalement $I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\mu_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$, d'où l'assertion. $\square$

Exercice 4.122. Soit A un anneau intègre. Montrer que A est factoriel si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (a) Toute chaîne $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ d'idéaux principaux de A est stationnaire.
- (b) Tout couple d'éléments de $A \setminus \{0\}$ admet un ppcm (voir la remarque 1.10(iii)).

Exercice 4.123. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme plat et local d'anneaux locaux. Montrer que si B est factoriel, il en est de même pour A .

4.5. Fibrés vectoriels et théorème de Swan. On veut maintenant reprendre un sujet déjà évoqué dans nos discussions des fibres des modules et surtout des propriétés des modules projectifs; il rejoint en même temps le thème des fonctions continues sur les espaces topologiques, qui était le point de départ de notre cours. On va en effet s'intéresser à la classe d'espaces introduits par la définition suivante :

Définition 4.124. (i) Soit T un espace topologique. Un *fibré vectoriel* (à fibres réelles) sur T est la donnée de :

- un espace topologique E et une application continue $f : E \rightarrow T$
- pour tout $t \in T$, une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur la fibre $E_t := f^{-1}(t)$

vérifiant la condition suivante. Pour tout $t \in T$ il existe un entier $r \in \mathbb{N}$, un voisinage ouvert U de t dans T et une *trivialisation locale*, i.e. un homéomorphisme $\phi_U : f^{-1}U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^r \times U$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}U & \xrightarrow{\phi_U} & \mathbb{R}^r \times U \\ & \searrow f \quad \swarrow p & \\ & U & \end{array}$$

où p est la projection, et $\mathbb{R}^r \times U$ est muni de la topologie du produit (voir l'exemple 2.20(iii)), et la restriction $E_u \xrightarrow{\sim} p^{-1}(u) = \mathbb{R}^r \times \{u\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^r$ de ϕ_U est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels pour tout $u \in U$.

(ii) Soient (E, f) et (E', f') deux fibrés vectoriels sur T . Un *morphisme de fibrés vectoriels* $g : (E, f) \rightarrow (E', f')$ est une application continue $g : E \rightarrow E'$ telle que $f' \circ g = f$ et dont la restriction $g_t : E_t \rightarrow E'_t$ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire pour tout $t \in T$. En particulier, un *sous-fibré vectoriel* de (E, f) est un sous-espace $F \subset E$ tel que la restriction $(F, f|_F : F \rightarrow T)$ est un fibré vectoriel (pour la topologie de F induite par E) et l'inclusion $F \rightarrow E$ est un morphisme de fibrés vectoriels.

Remarque 4.125. (i) Pour tout fibré vectoriel E sur T , le *rang* de E est l'application

$$\mathrm{rk}_E : T \rightarrow \mathbb{N} \quad t \mapsto \dim_{\mathbb{R}} E_t.$$

Il est clair que rk_E est localement constant ; donc il sera même constant, si T est connexe. Aussi, pour tout morphisme $g : E \rightarrow E'$ de fibrés vectoriels sur T , le *rang* de g est l'application :

$$\mathrm{rk}_g : T \rightarrow \mathbb{N} \quad t \mapsto \dim_{\mathbb{R}} g(E_t).$$

Le rang de g n'est pas forcément localement constant : par exemple, prenons $T := \mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R} \times T$ le morphisme de fibrés vectoriels tel que $g(x, t) := (tx, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times T$; on a $\mathrm{rk}_g(0) = 0$ et $\mathrm{rk}_g(t) = 1$ pour tout $t \neq 0$.

(ii) Evidemment une composition de morphismes de fibrés vectoriels est encore un morphisme de fibrés vectoriels. Pour tout espace topologique T , les fibrés vectoriels sur T et leurs morphismes forment ainsi une catégorie

$$T - \mathrm{FibVec}.$$

Pour toute partie ouverte $U \subset T$ et tout fibré vectoriel (E, f) , la partie ouverte $E_U := f^{-1}U$ avec la restriction $f_U := f|_{E_U} : E_U \rightarrow U$ de f est évidemment un fibré vectoriel sur U , et tout morphisme $g : E \rightarrow E'$ de fibrés vectoriels induit par restriction un morphisme $g_U : E_U \rightarrow E'_U$ de fibrés vectoriels sur U , i.e. l'opération de restriction définit un foncteur

$$T - \mathrm{FibVec} \rightarrow U - \mathrm{FibVec} \quad (E, f) \mapsto (E_U, f_U).$$

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ le produit d'espaces topologiques $\mathbb{R}^r \times T$ avec sa projection $p : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow T$ est un fibré vectoriel sur T , qu'on appelle le *fibré vectoriel trivial de rang* r . Noter que la donnée d'un morphisme $g : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow \mathbb{R}^s \times T$ de fibrés vectoriels triviaux équivaut à celle d'une application continue $\bar{g} : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow \mathbb{R}^s$ induisant par restriction des applications $\mathbb{R}$ -linéaires

$$\bar{g}(-, t) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s \quad v \mapsto \bar{g}(v, t) \quad \forall t \in T.$$

Donc, $\bar{g}(-, t)$ est donnée par une matrice de taille $s \times r$

$$A_t := (a_{ij}(t) \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$$

et on voit aisément que la continuité de $\bar{g}$ équivaut à la continuité de chaque fonction $a_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}$. Autrement dit, si l'on munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ de la topologie induite par $\mathbb{R}^{rs}$ via l'identification naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{rs}$, alors g correspond aussi à la donnée d'une application continue

$$\tilde{g} : T \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s) \quad t \mapsto A_t.$$

Si $h : T \times \mathbb{R}^s \rightarrow T \times \mathbb{R}^u$ est un autre morphisme de fibrés triviaux, et $\tilde{h} : T \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^u)$ l'application continue correspondante, évidemment la composition $k := h \circ g : T \times \mathbb{R}^r \rightarrow T \times \mathbb{R}^u$ correspond à l'application $\tilde{k} : T \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^u)$ telle que $\tilde{k}(t) = \tilde{h}(t) \circ \tilde{g}(t)$ pour tout $t \in T$.

(iv) Noter aussi que pour tout couple de morphismes $g, h : E \rightarrow E'$ de fibrés vectoriels et tous $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(T)$, la combinaison linéaire $\lambda g + \mu h : E \rightarrow E'$ est un morphisme de fibrés vectoriels bien défini : il s'agit de l'application dont la restriction $E_t \rightarrow E'_t$ est $\lambda(t) \cdot g_t + \mu(t) \cdot h_t$ pour tout $t \in T$. Pour vérifier la continuité de $\lambda g + \mu h$, fixons $t \in T$ et un voisinage U de t dans T tel que E et E' admettent des trivialisations $\phi : E_U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^r \times U$ et $\phi' : E'_U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^s \times U$; on a

$$\phi' \circ (\lambda g + \mu h)_U \circ \phi^{-1} = \lambda(\phi' \circ g_U \circ \phi^{-1}) + \mu(\phi' \circ h_U \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^r \times U \rightarrow \mathbb{R}^s \times U$$

et il suffit de montrer que la restriction $(\lambda g + \mu h)_U$ est continue (exercice 1.21(ii)). On est donc ramené au cas où E et E' sont des fibrés triviaux ; g et h correspondent alors, suivant (iii), à des applications continues $\tilde{g}, \tilde{h} : T \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ et $\lambda g + \mu h$ correspond à l'application continue telle que $t \mapsto \lambda(t) \cdot \tilde{g}(t) + \mu(t) \cdot \tilde{h}(t)$.

(v) Supposons que $g : E \rightarrow E'$ comme dans (iv) soit aussi une application bijective ; en particulier $g_t : E_t \xrightarrow{\sim} E'_t$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels pour tout $t \in T$. Fixons $t \in T$, et soit U un voisinage ouvert de t dans T avec des trivialisations ϕ et ϕ' pour E_U et E'_U comme dans (iv). Donc E_U et E'_U ont le même rang constant r et $\gamma := \phi' \circ g_U \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^r \times U \rightarrow \mathbb{R}^r \times U$ est un morphisme de fibrés triviaux tel que l'image de l'application correspondante $\tilde{\gamma} : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ est contenue dans la partie ouverte $\text{GL}_r(\mathbb{R})$ des automorphismes $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{R}^r$. Noter que l'application

$$\tau : \text{GL}_r(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{R}) \quad A \mapsto A^{-1}$$

est continue pour la topologie de $\text{GL}_r(\mathbb{R})$ induite par l'inclusion dans $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$, donc $\tau \circ \tilde{\gamma} : U \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{R})$ est encore une application continue, correspondante à un morphisme $\gamma' : \mathbb{R}^r \times U \rightarrow \mathbb{R}^r \times U$ de fibrés vectoriels triviaux. Evidemment $\gamma \circ \gamma' = \gamma' \circ \gamma = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^r \times U}$, i.e. γ est un isomorphisme et γ' est son inverse. Par l'exercice 1.21(ii) il s'ensuit aisément que $g^{-1} : E' \rightarrow E$ est continue, donc g est un isomorphisme : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

4.5.1. Sections et germes de sections d'un fibré. Soit maintenant (E, f) un fibré vectoriel sur l'espace topologique T ; une *section* de E est un morphisme $s : \mathbb{R} \times T \rightarrow E$ de fibrés vectoriels. Evidemment s est déterminée par sa restriction à $\{1\} \times T$, et donc la donnée d'une section équivaut à celle d'une application continue $\sigma : T \rightarrow E$ telle que $f \circ \sigma = \mathbf{1}_T$. La remarque 4.125(iv) munit l'ensemble $\Gamma(E)$ des sections de E d'une structure naturelle de $\mathcal{C}(T)$ -module ; de plus, si $g : E \rightarrow E'$ est un morphisme de fibrés vectoriels sur T , on déduit une application

$$\Gamma(g) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E') \quad s \mapsto g \circ s$$

qui est évidemment $\mathcal{C}(T)$ -linéaire. On obtient ainsi un foncteur bien défini :

$$\Gamma : T\text{-FibVec} \rightarrow \mathcal{C}(T)\text{-Mod.}$$

Pour toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes de T , la restriction des sections induit un homomorphisme de $\mathcal{C}(U)$ -modules

$$(*) \quad \Gamma(E_U) \rightarrow \Gamma(E_{U'}) \quad s \mapsto s_{U'}$$

pour la structure de $\mathcal{C}(U)$ -module sur $\Gamma(E_{U'})$ obtenue par restriction des scalaires suivant l'homomorphisme de restriction $\rho_{UU'} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U')$. Il est clair que l'association : $U \mapsto \Gamma(E_U)$ définit ainsi un faisceau $\Gamma(E_{\bullet})$ de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels sur T , dont les restrictions sont données par les applications $(*)$. Pour tout $t \in T$, soit $\mathcal{U}_t$ l'ensemble des voisinages

ouverts de t dans T , filtrant pour l'ordre partiel renversant l'inclusion ; la fibre en t du faisceau $\Gamma(E_\bullet)$ est alors le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$\Gamma(t, E) := \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_t} \Gamma(E_U).$$

Suivant §4.3.3, cette colimite est représentée par l'ensemble des *germes de sections*, i.e. les classes d'équivalence $[U, s]$ des couples (U, s) avec $U \in \mathcal{U}_t$ et $s \in \Gamma(E_U)$, et $\Gamma(t, E)$ a une structure naturelle de $\mathcal{C}_{T,t}$ -module : si $[U, f]$ est un germe de fonction continue sur T et si $[U, s] \in \Gamma(t, E)$, on pose $[U, f] \cdot [U, s] := [U, f \cdot s]$ et on voit aisément que l'on obtient ainsi une multiplication scalaire bien définie $\mathcal{C}_{T,t} \times \Gamma(t, E) \rightarrow \Gamma(t, E)$. On a aussi une application $\mathcal{C}(T)$ -linéaire naturelle

$$\omega_{E,t} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(t, E) \quad s \mapsto [T, s]$$

pour la structure de $\mathcal{C}(T)$ -module sur $\Gamma(t, E)$ obtenue par restriction des scalaires suivant l'homomorphisme d'anneaux analogue $\mathcal{C}(T) \rightarrow \mathcal{C}_{T,t}$ de l'exercice 4.95.

Exercice 4.126. (i) Avec la notation ci-dessus, supposons de plus que T soit complètement régulier, et soit $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(T)$ l'idéal maximal des fonctions continues $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$. Par l'exercice 4.95, on a un isomorphisme unique $\mathcal{C}(T)_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{T,t}$ de $\mathcal{C}(T)$ -algèbres, d'où une structure naturelle de $\mathcal{C}_{T,t}$ -module sur la localisation $\Gamma(E)_\mathfrak{m}$. Montrer que $\omega_{E,t}$ se prolonge en un isomorphisme unique $\tilde{\omega}_{E,t} : \Gamma(E)_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \Gamma(t, E)$ de $\mathcal{C}_{T,t}$ -modules.

(ii) Dédurre de (i) que $\Gamma(E)_\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{C}(T)_\mathfrak{m}$ -module libre de rang $\operatorname{rk}_E(t)$.

(iii) Dans la situation de (i), on définit comme suit les foncteurs

$$(-)_t, \Gamma/\mathfrak{m}\Gamma : T\text{-FibVec} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}.$$

Le foncteur $(-)_t$ (resp. $\Gamma/\mathfrak{m}\Gamma$) associe à tout fibré vectoriel E sa fibre E_t (resp. le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\Gamma(E)/\mathfrak{m}\Gamma(E)$) et à tout morphisme $g : E \rightarrow E'$ l'application $g_t : E_t \rightarrow E'_t$ (resp. $k(\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(g)$). Montrer que ces deux foncteurs sont isomorphes.

Lemme 4.127. Soient T un espace topologique, $t \in T$ un point, et $\alpha : E \rightarrow E'$ un morphisme de fibrés vectoriels sur T . Alors :

(i) Si $\alpha_t : E_t \rightarrow E'_t$ est une bijection, il existe un voisinage ouvert U de t dans T tel que $\alpha_U : E_U \rightarrow E'_U$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels sur U .

(ii) Si $\operatorname{rk}_\alpha : T \rightarrow \mathbb{N}$ est localement constant, $\operatorname{Ker}(\alpha) := \bigcup_{u \in T} \operatorname{Ker}(\alpha_u)$ est un sous-fibré vectoriel de E .

Démonstration. (i) : Quitte à remplacer T par un voisinage de t , on peut supposer que E et E' soient des fibrés triviaux, forcément du même rang r . Dans ce cas, α équivaut à la donnée d'une application continue $\tilde{\alpha} : T \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$, et par hypothèse $\tilde{\alpha}(t)$ appartient à la partie ouverte $\operatorname{GL}_r(\mathbb{R})$. Donc, $U := \tilde{\alpha}^{-1} \operatorname{GL}_r(\mathbb{R})$ est un voisinage ouvert de t dans T tel que $\alpha_u : E_u \rightarrow E'_u$ est un isomorphisme pour tout $u \in U$. L'assertion suit maintenant de la remarque 4.125(v).

(ii) : On se ramène aisément au cas où $E = \mathbb{R}^r \times T$ et $E' = \mathbb{R}^{r'} \times T$ sont des fibrés triviaux et le rang de α est constant, i.e. $\alpha_u : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r'}$ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire de rang $s \leq \min(r, r')$ pour tout $u \in T$. Soient $t \in T$ et $e_1, \dots, e_r$ une base de $\mathbb{R}^r$ telle que $\alpha_t(e_1), \dots, \alpha_t(e_s)$ est une base de $\operatorname{Im}(\alpha_t)$, notons par $F \subset \mathbb{R}^r$ le $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de dimension s engendré par $e_1, \dots, e_s$, et choisissons un supplémentaire $F' \subset \mathbb{R}^{r'}$ de $\operatorname{Im}(\alpha_t)$; on considère le morphisme de fibrés vectoriels

$$\gamma : (F \oplus F') \times T \rightarrow \mathbb{R}^{r'} \times T \quad (v, v', u) \mapsto (\alpha_u(v) + v', u).$$

Par construction, $\gamma_t : F \oplus F' \rightarrow \mathbb{R}^{r'}$ est un isomorphisme ; par (i), il existe alors un voisinage U de t dans T tel que la restriction $(F \oplus F') \times U \rightarrow \mathbb{R}^{r'} \times U$ de γ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels sur U . Quitte à remplacer T par U , on peut donc supposer que γ est un isomorphisme ; soit aussi $\pi : (F \oplus F') \times T \rightarrow F \times T$ la projection

telle que $(v, v', u) \mapsto (v, u)$, et on pose $\alpha' := \pi \circ \gamma^{-1} \circ \alpha : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow F \times T$. Noter que $\text{Ker}(\alpha_u) \subset \text{Ker}(\alpha'_u)$ pour tout $u \in T$, et d'autre part $\alpha'_u(e_i) = e_i$ pour $i = 1, \dots, s$, donc α_u et α'_u ont le même rang, et ainsi $\text{Ker}(\alpha_u) = \text{Ker}(\alpha'_u)$ pour tout $u \in T$. Quitte à remplacer α par α' , et r' par s , on peut donc supposer que α_u soit une surjection pour tout $u \in T$ et α se restreint en un isomorphisme de fibrés vectoriels $F \times T \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{r'} \times T$. Pour tout $i = r' + 1, \dots, r$ on trouve alors $a_{i1}, \dots, a_{ir'} \in \mathcal{C}(T)$ tels que $\alpha_u(e_i) = \sum_{j=1}^{r'} a_{ij}(u) \cdot \alpha_u(e_j)$ pour tout $u \in T$. Posons $f_i(u) := e_{i+r'} - \sum_{j=1}^{r'} a_{ij}(u) \cdot e_j$ pour tout $u \in T$ et tout $i = 1, \dots, r - r'$. Il vient $f_i(u) \in \text{Ker}(\alpha_u)$ et évidemment $f_\bullet(u) := (f_1(u), \dots, f_{r-r'}(u))$ est une famille libre de vecteurs du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^r$ pour tout $u \in T$; donc $f_\bullet(u)$ est une base de $\text{Ker}(\alpha_u)$ pour tout $u \in T$. Soit $\beta : \mathbb{R}^{r-r'} \times T \rightarrow \mathbb{R}^r \times T$ l'application continue telle que $\beta(b_1, \dots, b_{r-r'}, u) := (\sum_{j=1}^{r-r'} b_j \cdot f_j(u), u)$ pour tout $u \in T$ et tout $(b_1, \dots, b_{r-r'}) \in \mathbb{R}^{r-r'}$; évidemment β est un morphisme de fibrés vectoriels dont l'image est $\text{Ker}(\alpha)$. Pour conclure, il ne reste qu'à vérifier que la topologie de $\text{Ker}(\alpha)$ induite par l'inclusion dans $\mathbb{R}^r \times T$ coïncide avec celle induite par $\mathbb{R}^{r-r'} \times T$ via β . Pour cela, soit $\iota : \mathbb{R}^{r-r'} \times T \rightarrow \mathbb{R}^r \times T$ le morphisme de fibrés vectoriels tel que $(b_1, \dots, b_{r-r'}, u) \mapsto (b_1, \dots, b_{r-r'}, 0, \dots, 0, u)$, et $\beta' : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow \mathbb{R}^r \times T$ le morphisme de fibrés vectoriels tel que $(c_1, \dots, c_r, u) \mapsto (\sum_{j=1}^{r-r'} c_j \cdot f_j(u) + \sum_{j=1}^{r'} c_{j+r'} e_j, u)$; évidemment $\beta = \beta' \circ \iota$ et β' est une application bijective, donc un isomorphisme (remarque 4.125(v)). D'autre part, on voit aussitôt que la topologie de $\mathbb{R}^{r-r'} \times T$ (produit des topologies de $\mathbb{R}^{r-r'}$ et T) coïncide avec celle induite par $\mathbb{R}^r \times T$ via l'inclusion ι , d'où l'assertion. $\square$

Le théorème suivant est le résultat principal de [67].

Théorème 4.128. (Swan) *Soit T un espace topologique. Alors :*

- (i) *Si T est complètement régulier, le foncteur Γ est plein et fidèle.*
- (ii) *Si T est compact et séparé, Γ induit une équivalence de catégories :*

$$T - \text{FibVec} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T) - \text{Modptf} \quad E \mapsto \Gamma(E).$$

Démonstration. (i) : La fidélité de Γ suit aussitôt de l'exercice 4.126(iii). Ensuite, soient $(E, f : E \rightarrow T), (E', f' : E' \rightarrow T)$ deux fibrés vectoriels et $g : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ une application $\mathcal{C}(T)$ -linéaire; pour tout $t \in T$ soit $\mathfrak{m}_t \subset \mathcal{C}(T)$ l'idéal maximal des fonctions s'annulant en t ; encore en vertu de l'exercice 4.126(iii) on déduit une application $\mathbb{R}$ -linéaire $g_t := k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} g : E_t \rightarrow E'_t$, d'où une application $g_\bullet : E \rightarrow E'$ telle que $f' \circ g_\bullet = f$, et on doit vérifier que $g_\bullet$ est continue. Pour cela fixons $t \in T$, posons $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_t$, et soit aussi $g_\mathfrak{m} := \mathcal{C}(T)_\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{C}(T)} g : \Gamma(E)_\mathfrak{m} \rightarrow \Gamma(E')_\mathfrak{m}$ la localisation de g ; noter que $\Gamma(E)_\mathfrak{m}$ et $\Gamma(E')_\mathfrak{m}$ sont des $\mathcal{C}(T)_\mathfrak{m}$ -modules libres de rang $r := \text{rk}_E(t)$ et respectivement $r' := \text{rk}_{E'}(t)$, par l'exercice 4.126(ii). On peut alors trouver des sections $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de E (resp. $\tau_1, \dots, \tau_{r'}$ de E') dont les images $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_r$ dans $\Gamma(E)_\mathfrak{m}$ (resp. $\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{r'}$ dans $\Gamma(E')_\mathfrak{m}$) sont des bases, et une matrice $(s^{-1}a_{ij} \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r')$ avec $s \in \mathcal{C}(T) \setminus \mathfrak{m}$ et $a_{ij} \in \mathcal{C}(T)$ pour chaque i et j , telle que

$$g_{(t)}(\bar{\sigma}_i) = \sum_{j=1}^{r'} \frac{a_{ij}}{s} \cdot \bar{\tau}_j \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Quitte à remplacer $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ par $s \cdot \sigma_1, \dots, s \cdot \sigma_r$, on peut même supposer que $s = 1$, et on peut ensuite trouver $s' \in \mathcal{C}(T) \setminus \mathfrak{m}$ tel que

$$s' \cdot g(\sigma_i) = s' \cdot (a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ir'}\tau_{r'}) \quad \forall i = 1, \dots, r$$

d'où $g_u(\sigma_i(u)) = g(\sigma_i)(u) = \sum_{j=1}^{r'} a_{ij}(u) \cdot \tau_j(u)$ pour tout $u \in U := s'^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (rapelons que l'identification $\Gamma(E)/\mathfrak{m}_u\Gamma(E) \xrightarrow{\sim} E_u$ est induite par l'application d'évaluation $\varepsilon_{E,u} : \text{voir la solution de l'exercice 4.126(iii)}$). On définit des morphismes de fibrés vectoriels $\phi : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow E$ et $\phi' : \mathbb{R}^{r'} \times T \rightarrow E'$ par :

$$(*) \quad \phi(b_\bullet, u) := \sum_{i=1}^r b_i \cdot \sigma_i(u) \quad \phi'(c_\bullet, u) := \sum_{j=1}^{r'} c_j \cdot \tau_j(u)$$

pour tout $(b_\bullet, u) \in \mathbb{R}^r \times T$ et tout $(c_\bullet, u) \in \mathbb{R}^{r'} \times T$. Par construction, ϕ_t et ϕ'_t sont des isomorphismes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, donc on peut trouver un voisinage ouvert $V \subset U$ de t dans T tel que les restrictions $\phi_V : \mathbb{R}^r \times V \rightarrow E_V$ et $\phi'_V : \mathbb{R}^{r'} \times V \rightarrow E'_V$ de ϕ et ϕ' soient des isomorphismes de fibrés vectoriels (lemme 4.127(i)), et on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^r \times V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^{r'} \times V \\ \phi_V \downarrow & & \downarrow \phi'_V \\ E_V & \xrightarrow{g_{\bullet, V}} & E'_V \end{array}$$

où $g_{\bullet, V}$ est la restriction de $g_\bullet$ et $\psi(b_\bullet, v) := (\sum_{i=1}^r b_i \cdot a_{i1}(v), \dots, \sum_{i=1}^r b_i \cdot a_{ir'}(v), v)$ pour tout $(b_\bullet, v) \in \mathbb{R}^r \times V$. Evidemment ψ est continue, et comme t est arbitraire, cela achève de montrer que $g_\bullet$ est continue (exercice 1.21(ii)). Par construction on a $\Gamma(g_\bullet)_t = g_t$ pour tout $t \in T$; il s'ensuit aussitôt que $\Gamma(g_\bullet) = g$, et cela à son tour entraîne que Γ est un foncteur plein, comme souhaité.

(ii) : Soit E un fibré vectoriel sur T compact et séparé; montrons d'abord :

Affirmation 4.129. Le $\mathcal{C}(T)$ -module $\Gamma(E)$ est projectif de type fini.

Preuve : La localisation $\Gamma(E)_{\mathfrak{m}_t}$ est plate pour tout $t \in T$ (exercice 4.126(ii)); au vu du lemme de Stone (théorème 1.28) et de la proposition 3.77, il s'ensuit que $\Gamma(E)$ est un $\mathcal{C}(T)$ -module plat, et par le corollaire 4.100 il suffit de montrer que $\Gamma(E)$ est de présentation finie. Or, comme tout espace compact et séparé est complètement régulier, on vient de voir que pour tout $t \in T$ il existe un morphisme de fibrés vectoriels $\phi^{(t)} : \mathbb{R}^{r(t)} \times T \rightarrow E$ avec $r(t) := \text{rk}_E(t)$, et un voisinage ouvert U_t de t tel que la restriction $\phi_{U_t}^{(t)} : \mathbb{R}^{r(t)} \times U_t \rightarrow E_{U_t}$ est un isomorphisme. Par compacité de T , on trouve alors une partie finie $S := \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ avec $T = \bigcup_{t \in S} U_t$; on pose $r := \sum_{t \in S} r(t)$ et on considère le morphisme de fibrés vectoriels

$$\phi : \mathbb{R}^r \times T = \mathbb{R}^{r(t_1)} \times \dots \times \mathbb{R}^{r(t_n)} \times T \rightarrow E \quad (v_1, \dots, v_n, u) \mapsto \sum_{i=1}^n \phi^{(t_i)}(v_i, u).$$

Evidemment ϕ est une application surjective, donc $F := \text{Ker } \phi$ est un sous-fibré vectoriel (lemme 4.127(ii)). Soit $g := \Gamma(\phi) : \mathcal{C}(T)^r \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{R}^r \times T) \rightarrow \Gamma(E)$; par l'exercice 4.126(ii,iii), la localisation $g_{(t)} := \mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}_t} \otimes_{\mathcal{C}(T)} g : \mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}_t}^r \rightarrow \Gamma(E)_{\mathfrak{m}_t}$ est une application $\mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}_t}$ -linéaire de $\mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}_t}$ -modules libres de rang fini, pour tout $t \in T$, et l'application induite $k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} g_{(t)} : k(\mathfrak{m}_t)^r \rightarrow \Gamma(E)_{\mathfrak{m}_t} / \mathfrak{m}_t \Gamma(E)_{\mathfrak{m}_t}$ s'identifie naturellement à la restriction $\phi_t : \mathbb{R}^r \rightarrow E_t$. Comme ϕ_t est surjective, $g_{(t)}$ est surjective pour tout $t \in T$ (problème 3.53(iii)), et compte tenu du lemme de Stone et de la proposition 3.55, on conclut que g est surjective. Cela montre que $\Gamma(E)$ est un $\mathcal{C}(T)$ -module de type fini. En particulier, $\Gamma(F) = \text{Ker}(g)$ est un $\mathcal{C}(T)$ -sous-module de type fini de $\mathcal{C}(T)^r$, d'où l'assertion. $\diamond$

En dernier lieu, soit P un $\mathcal{C}(T)$ -module projectif de type fini; au vu de (i) et de l'observation 4.129, il suffit d'exhiber un fibré vectoriel E avec un isomorphisme $\Gamma(E) \xrightarrow{\sim} P$ de $\mathcal{C}(T)$ -modules. Or, par le lemme 4.99(ii) il existe un $\mathcal{C}(T)$ -module projectif de type fini Q tel que $L := P \oplus Q$ est un $\mathcal{C}(T)$ -module libre de rang $r \in \mathbb{N}$; soit $g : L \rightarrow L$ la composition de la projection $L \rightarrow Q$ et de l'inclusion $Q \rightarrow L$, et choisissons un isomorphisme $\omega : \Gamma(\mathbb{R}^r \times T) \xrightarrow{\sim} L$ de $\mathcal{C}(T)$ -modules. Par (i), il existe un unique endomorphisme $\phi : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow \mathbb{R}^r \times T$ tel que $\omega \circ \Gamma(\phi) \circ \omega^{-1} = g$, et par l'exercice 4.126(iii) l'application $\mathbb{R}$ -linéaire $k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(\phi)$ s'identifie naturellement à $\phi_t : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ pour tout $t \in T$. D'un côté, le rang de l'application $k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} g$ est égal à $\text{rk}_Q(\mathfrak{m}_t)$, et l'application rk_Q est localement constante sur $\text{Spec } \mathcal{C}(T)$ (remarque 4.106(iv)); de l'autre côté, rappelons que l'identification $T \xrightarrow{\sim} \text{Max } \mathcal{C}(T)$ est un homéomorphisme. Par suite $\text{rk}_\phi : T \rightarrow \mathbb{N}$ est une application localement constante, et donc $E := \text{Ker } \phi$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathbb{R}^r \times T$ (lemme 4.127(ii)). Il est clair que $\Gamma(E) = \text{Ker } \Gamma(\phi)$;

mais l'isomorphisme ω identifie $P = \text{Ker}(g)$ avec $\text{Ker} \Gamma(\phi)$, et cela achève la preuve du théorème. $\square$

L'article [67] propose plusieurs applications algébriques remarquables du théorème 4.128 (voir aussi [68], où le même thème est développé davantage, par des méthodes plus sophistiquées). La stratégie générale est assez simple : on choisit un espace topologique T compact et séparé tel que $\mathcal{C}(T)$ contient des sous-anneaux intéressants ; puis, si $A \subset \mathcal{C}(T)$ est un tel sous-anneau, tout A -module projectif de type fini P induit un $\mathcal{C}(T)$ -module projectif de type fini $\mathcal{C}(T) \otimes_A P$, correspondant -- via le théorème de Swan -- à un fibré vectoriel E sur T qui peut être étudié par les méthodes de la topologie différentielle ou algébrique. Les renseignements ainsi obtenus se traduisent ensuite par des propriétés du A -module P . Voici un exemple :

Exercice 4.130. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$, la sphère de rayon 1 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de sa norme euclidienne standard :

$$\|(x_1, \dots, x_{n+1})\| := (x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)^{1/2}.$$

Les projections $\pi_1, \dots, \pi_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sur les axes de coordonnées sont autant de fonctions continues, dont les restrictions à S^n vérifient la relation $\pi_1^2 + \dots + \pi_{n+1}^2 = 1$; donc, pour tout sous-anneau $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ on a un homomorphisme de $\mathcal{R}$ -algèbres

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{R}[X_1, \dots, X_{n+1}] / (X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 - 1) \rightarrow \mathcal{C}(S^n) \quad X_i \mapsto \pi_i \quad \forall i \leq n+1.$$

Evidemment S^n est compact et séparé pour la topologie induite par l'inclusion dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit maintenant $e_1, \dots, e_{n+1}$ la base canonique du $\mathcal{A}_n$ -module libre $\mathcal{A}_n^{n+1}$, et $Q_n \subset \mathcal{A}_n^{n+1}$ le $\mathcal{A}_n$ -sous-module engendré par $X_1 e_1 + \dots + X_{n+1} e_{n+1}$; on pose :

$$P_n := \mathcal{A}_n^{n+1} / Q_n.$$

Montrer que P_n est un $\mathcal{A}_n$ -module projectif de rang constant n .

On montre dans [67, §4] que le fibré vectoriel associé au $\mathcal{C}(S^n)$ -module projectif $\mathcal{C}(S^n) \otimes_{\mathcal{A}_n} P_n$ est isomorphe au fibré tangent $T(S^n)$ de S^n . On voit aisément que $T(S^n)$ est facteur direct d'un fibré vectoriel trivial de rang $n+1$; d'autre part, par un résultat profond de topologie différentielle, on sait que $T(S^n)$ est un fibré vectoriel trivial si et seulement si $n \in \{1, 3, 7\}$, et $T(S^n)$ est même indécomposable (dans la catégorie $S^n - \text{FibVec}$) si n est pair. Il s'ensuit aussitôt que P_n n'est pas un $\mathcal{A}_n$ -module libre si $n \notin \{1, 3, 7\}$, et il est même indécomposable si n est pair. Par une vérification directe élémentaire, on montre aussi que P_n est libre pour $n \in \{1, 3, 7\}$, et $P_n \oplus \mathcal{A}_n$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$: voir [67] pour plus de détails. Les exceptions ont une explication de nature algébrique : en effet, la sphère S^1 (resp. S^3 , resp. S^7) est difféomorphe à la variété des nombres complexes (resp. des quaternions de Hamilton, resp. des octonions de Cayley) de norme 1, et ces structures additionnelles sont responsables de la trivialité du fibré tangent dans chacun de ces cas. Voici une autre application dans le même esprit :

Exercice 4.131. (i) Montrer que l'anneau $\mathcal{A}_n$ de l'exercice 4.130 est intègre pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (pour n'importe quel choix du sous-anneau $\mathcal{R}$).

(ii) Utiliser l'exemple 4.105 pour montrer que $\mathcal{A}_1$ n'est pas factoriel (pour aucun choix du sous-anneau $\mathcal{R}$).

Remarque 4.132. Par contre, on montrera plus tard que si $\mathcal{A}_0$ est factoriel, l'anneau $\mathcal{A}_n$ est factoriel pour tout $n \geq 2$: voir l'exemple 11.114(i).

4.5.2. Un lemme de Stone pour les fibrés. Soient T un espace topologique compact et séparé, et $(E, f : E \rightarrow T)$ un fibré vectoriel sur T . Le lemme de Stone nous permet de reconstruire T à partir de l'anneau $\mathcal{C}(T)$; au vu du théorème de Swan, on peut s'attendre à ce qu'il existe un procédé analogue pour reconstruire E , avec sa topologie et l'application continue f associée, à partir du $\mathcal{C}(T)$ -module $\Gamma(E)$. Pour cela, on pourrait

essayer d'associer d'abord à $\Gamma(E)$ une $\mathcal{C}(T)$ -algèbre A_E dont le spectre maximal devrait être homéomorphe à E , et f correspondrait alors à l'application $\text{Max } A_E \rightarrow \text{Max } \mathcal{C}(T)$ induite par l'homomorphisme structurel $\mathcal{C}(T) \rightarrow A_E$. De l'autre côté, les sections de E devraient correspondre aux homomorphismes de $\mathcal{C}(T)$ -algèbres $A_E \rightarrow \mathcal{C}(T)$. Cette dernière condition suggère un candidat naturel pour A_E : en effet, soit $\Gamma(E)^\vee$ le $\mathcal{C}(T)$ -module dual de $\Gamma(E)$, et prenons

$$A_E := \text{Sym}_{\mathcal{C}(T)}^\bullet \Gamma(E)^\vee.$$

Le problème 3.89(i) et l'exercice 4.110(iii) fournissent des identifications naturelles :

$$\mathcal{C}(T) - \text{Alg}(A_E, \mathcal{C}(T)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(\Gamma(E)^\vee, \mathcal{C}(T)) = \Gamma(E)^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} \Gamma(E).$$

Toutefois, de simples exemples montrent que le spectre maximal de A_E n'est presque jamais homéomorphe à E : prenons *e.g.* le cas où T ne contient qu'un seul point ; dans ce cas, un fibré vectoriel sur T est la donnée d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et la $\mathbb{R}$ -algèbre A_E est alors isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$. Pour $d = 1$, on a déjà vu que $\text{Max } \mathbb{R}[X]$ s'identifie naturellement au demi-plan supérieur complexe (exercice 1.46(iii)), et pour d arbitraire on obtient une description analogue grâce au Nullstellensatz. En effet, l'espace vectoriel E s'identifie à une *partie* du spectre maximal de A_E , que l'on peut extraire aisément : plus généralement, si A est une $\mathbb{R}$ -algèbre et $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, le corps quotient $k(\mathfrak{m})$ hérite de A une structure naturelle de $\mathbb{R}$ -algèbre, et on notera

$$\mathbb{R}.\text{Max } A$$

l'ensemble des $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ tels que l'homomorphisme structurel $\mathbb{R} \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est un isomorphisme. Avec cette notation, on a une identification naturelle :

$$(*) \quad \mathbb{R}.\text{Max } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d.$$

A savoir, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal et si $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$, les classes de $X_1, \dots, X_d$ dans $k(\mathfrak{m})$ sont des nombres réels $a_1, \dots, a_d$, et évidemment $X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \in \mathfrak{m}$; mais alors $\mathfrak{m}$ est précisément l'idéal engendré par $X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d$, et la bijection $(*)$ associe à $\mathfrak{m}$ la suite $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$. Il reste à comparer la topologie de $\mathbb{R}^d$ avec celle de $\mathbb{R}.\text{Max } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$: on peut munir ce dernier de la topologie induite par la topologie de Zariski de $\text{Max } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$, mais on voit aisément que pour $d > 0$ cette topologie est strictement moins fine que celle induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$ via la bijection $(*)$. Heureusement, pour toute $\mathbb{R}$ -algèbre A , on peut aussi munir $\mathbb{R}.\text{Max } A$ naturellement d'une autre topologie : à savoir, pour tout $f \in A$ et tout $\mathfrak{m} \in \mathbb{R}.\text{Max } A$ notons par $f(\mathfrak{m}) \in k(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$ la classe de f ; on pose

$$D_+(f) := \{\mathfrak{m} \in \mathbb{R}.\text{Max } A \mid f(\mathfrak{m}) > 0\}$$

et la *topologie réelle* de $\mathbb{R}.\text{Max } A$ sera celle engendrée par $(D_+(f) \mid f \in \mathbb{R})$. Noter que $D(f) \cap \mathbb{R}.\text{Max } A = D_+(f) \cup D_+(-f)$ pour tout $f \in A$, donc la topologie réelle est plus fine que la topologie de Zariski. De plus, tout homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres $\phi : A \rightarrow B$ induit une application continue

$$\mathbb{R}.\text{Max } \phi : \mathbb{R}.\text{Max } B \rightarrow \mathbb{R}.\text{Max } A \quad \mathfrak{m} \mapsto \phi^{-1}\mathfrak{m}$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). On a alors :

Problème 4.133. Soient T un espace topologique compact et séparé, et $(E, f : E \rightarrow T)$ un fibré vectoriel sur T . Noter que $\mathbb{R}.\text{Max } \mathcal{C}(T) = \text{Max } \mathcal{C}(T)$ par le lemme de Stone ; on définit la $\mathcal{C}(T)$ -algèbre A_E comme ci-dessus, et on munit $\mathbb{R}.\text{Max } A_E$ de sa topologie réelle. Montrer que :

- (i) La topologie de Zariski de $\text{Max } \mathcal{C}(T)$ coïncide avec la topologie réelle.

(ii) Il existe un homéomorphisme naturel $\phi_E : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.\text{Max } A_E$ qui fait commuter le diagramme d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_E} & \mathbb{R}.\text{Max } A_E \\ f \downarrow & & \downarrow \mathbb{R}.\text{Max } h \\ T & \xrightarrow{\phi_T} & \text{Max } \mathcal{C}(T) \end{array}$$

où ϕ_T est l'homéomorphisme fourni par le lemme de Stone et $h : \mathcal{C}(T) \rightarrow A_E$ est l'homomorphisme structurel de A_E .

Exercice 4.134. Soient $T' \xrightarrow{f} T$ une application continue d'espaces topologiques, et $E \xrightarrow{p} T$ un fibré vectoriel. L'image inverse de E suivant f est le produit fibré

$$f^*E := E \times_T T' = \{(e, t') \in E \times T' \mid p(e) = f(t')\}$$

dans la catégorie des espaces topologiques : *i.e.* muni de la topologie induite par l'inclusion dans $E \times T'$ (ce dernier étant muni de la topologie du produit : voir l'exemple 2.23(ii) et le problème 2.25(iii.a)). Les projections $p' : f^*E \rightarrow T'$ et $g : f^*E \rightarrow E$ sont alors des applications continues.

(i) Montrer que (f^*E, p') est un fibré vectoriel sur T' .

(ii) Soient de plus T et T' compacts et séparés, et notons

$$\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathcal{C}(T')$$

l'homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres induit par f (cf. l'exercice 1.29). Par restriction des scalaires suivant $\mathcal{C}(f)$, le $\mathcal{C}(T')$ -module $\Gamma(f^*E)$ est naturellement un $\mathcal{C}(T)$ -module. Pour toute section $s : T \rightarrow E$ du fibré E , le couple d'applications continues $(s \circ f, Id_{T'})$ correspond -- par la propriété universelle du produit fibré -- à une section unique $s' : T' \rightarrow f^*E$ du fibré f^*E , telle que $g \circ s' = s \circ f$. On voit aisément que l'application $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(f^*E)$ ainsi obtenue est $\mathcal{C}(T)$ -linéaire ; montrer que l'application $\mathcal{C}(T')$ -linéaire induite est un isomorphisme :

$$\omega : \mathcal{C}(T') \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(f^*E).$$

Problème 4.135. Un espace topologique T est *contractile*, s'il existe $t_0 \in T$ et une application continue $h : T \times [0, 1] \rightarrow T$ telle que $h(t, 0) = t$ et $h(t, 1) = t_0$ pour tout $t \in T$. Montrer que si T est contractile, compact et séparé, tout $\mathcal{C}(T)$ -module projectif de type fini est libre.

4.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 4.3, partie (i) : Par définition, X est générateur $\Leftrightarrow$ tout $Z, Z' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ induit une injection :

$$\mathcal{A}(Z, Z') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(X, Z), \mathcal{A}(X, Z')) \quad f \mapsto ((X \xrightarrow{g} Z) \mapsto (X \xrightarrow{f \circ g} Z')).$$

Noter que cette application est un homomorphisme de groupes, donc elle est injective si et seulement si son noyau est $\{0_{ZZ'}\}$. Donc, X est générateur $\Leftrightarrow$ pour tout morphisme non nul $f : Z \rightarrow Z'$ de $\mathcal{A}$ il existe un morphisme $g : X \rightarrow Z$ tel que $f \circ g \neq 0_{XZ'}$. En particulier, soient $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et $Y' \subsetneq Y$ un sous-objet propre ; alors l'épimorphisme universel $\pi : Y \rightarrow Y/Y'$ est non nul (lemme 2.75(ii)), donc si X est un générateur de $\mathcal{A}$ il existe $g \in \mathcal{A}(X, Y)$ avec $\pi \circ g \neq 0_{X, Y/Y'}$, et cela revient à dire que $\text{Im}(g) \not\subset \text{Ker}(\pi) = Y'$ (remarque 2.93(ii)). Réciproquement, soit $f : Z \rightarrow Z'$ un morphisme non nul de $\mathcal{A}$, de sorte que $\text{Ker}(f)$ est un sous-objet propre de Z (lemme 2.75(iii)), et supposons qu'il existe un morphisme $g : X \rightarrow Z$ avec $\text{Im}(g) \not\subset \text{Ker}(f)$; cela revient à dire que $f \circ g \neq 0_{XZ'}$, et la preuve est achevée.

Partie (ii) : Si X est un générateur de $\mathcal{A}$, soit $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ un objet non zéro ; alors $1_Y \neq 0_{YY}$, donc d'après (i) il existe $f : X \rightarrow Y$ avec $f = f \circ 1_{XY} \neq 0_{XY}$. Réciproquement, soit X un objet projectif de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}(X, Y) \neq \{0_{XY}\}$ pour tout objet non-zéro Y

de $\mathcal{A}$; soient en outre $Y' \subsetneq Y$ un sous-objet propre, et $\pi : Y \rightarrow Y/Y'$ l'épimorphisme universel. Alors Y/Y' n'est pas un objet zéro, donc par hypothèse il existe un morphisme non nul $f : X \rightarrow Y/Y'$, et d'après la remarque 4.2(ii) il existe un morphisme $g : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{A}$ avec $\pi \circ g = f$, d'où $\text{Im}(g) \not\subset \text{Ker}(\pi) = Y'$, et par suite X est un générateur de $\mathcal{A}$, d'après (i).

Partie (iii) : pour tous $Z, Z' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(Z, Z') & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(X, Z), \mathcal{A}(X, Z')) \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(X', Z), \mathcal{A}(X', Z')) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(X', Z), \mathcal{A}(X, Z')) \end{array}$$

avec α et β comme dans la preuve de (i), et $\gamma(\phi) := \phi \circ h_Z^\dagger(p)$ pour tout homomorphisme de groupes $\phi : \mathcal{A}(X, Z) \rightarrow \mathcal{A}(X, Z')$; de même, $\delta(\psi) := h_{Z'}^\dagger(p) \circ \psi$ pour tout homomorphisme de groupes $\psi : \mathcal{A}(X', Z) \rightarrow \mathcal{A}(X', Z')$. Or, puisque $p : X' \rightarrow X$ est un épimorphisme, $h_Z^\dagger(p) : \mathcal{A}(X, Z) \rightarrow \mathcal{A}(X', Z)$ est injective, donc de même pour γ ; d'autre part, si X est un générateur de $\mathcal{A}$, alors α est injective, donc de même pour $\gamma \circ \alpha$. Ainsi, β est injective pour tous tels Z et Z' , d'où l'assertion.

(iv) Si Σ est une suite exacte courte, il en est de même pour $\mathcal{A}(P, \Sigma)$, car P est projectif. Réciproquement, considérons plus généralement une suite

$$X_\bullet := (\cdots \xrightarrow{d_{i+1}} X_i \xrightarrow{d_i} X_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots)$$

de morphismes de $\mathcal{A}$, et supposons que l'homomorphisme de groupe induit

$$(d_i \circ d_{i+1})_* : \mathcal{A}(P, X_{i+1}) \rightarrow \mathcal{A}(P, X_{i-1}) \quad f \mapsto d_i \circ d_{i+1} \circ f$$

soit nul, pour tout $i \in \mathbb{Z}$; montrons qu'alors $d_i \circ d_{i+1}$ est le morphisme nul, pour tout tel i . Car sinon, d'après (ii) il existe un morphisme $f : P \rightarrow Y := \text{Im}(d_i \circ d_{i+1})$ non nul, et puisque P est projectif, f est la composition d'un morphisme $g : P \rightarrow X_{i+1}$ avec la projection $X_{i+1} \rightarrow Y$; ainsi $d_i \circ d_{i+1} \circ g$ est la composition de f avec le monomorphisme naturel $Y \rightarrow X_{i-1}$, et en particulier il est non nul, contradiction. Cela montre que si $\mathcal{A}(P, X_\bullet)$ est un complexe, il est en de même pour $X_\bullet$. Soit alors $X_\bullet$ comme ci-dessus un complexe de $\mathcal{A}$, et supposons que $H_i(X_\bullet) \neq 0$ pour quelque $i \in \mathbb{Z}$; posons $Z_i := \text{Ker}(d_i)$ et $B_i := \text{Im}(d_{i+1})$, et notons par $j_i : Z_i \rightarrow X_i$ le monomorphisme naturel. D'après (i), il existe alors un morphisme $h : P \rightarrow Z_i$ tel que $\text{Im}(h) \not\subset B_i$; par suite, $j_i \circ h \in \text{Ker}(d_{i*} : \mathcal{A}(P, X_i) \rightarrow \mathcal{A}(P, X_{i-1}))$, et $j_i \circ h \notin \text{Im}(d_{i+1*})$, d'où $H_i(\mathcal{A}(P, X_\bullet)) \neq 0$. En résumant, si $\mathcal{A}(P, X_\bullet)$ est un complexe acyclique, il en est de même pour $X_\bullet$, comme souhaité.

Exercice 4.6, partie (i) : Soit $f : A \rightarrow A'$ un monomorphisme de $\mathcal{A}$; on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(FA', I) & \xrightarrow{h_I^\dagger(Ff)} & \mathcal{B}(FA, I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(A', GI) & \xrightarrow{h_{GI}^\dagger(f)} & \mathcal{A}(A, GI) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les bijections naturelles d'une adjonction pour le couple (F, G) . D'après l'exercice 2.66(ii), Ff est un monomorphisme, donc $h_I^\dagger(Ff)$ est une surjection (remarque 4.2(i)), donc de même pour $h_{GI}^\dagger(f)$, d'où l'assertion, encore par la remarque 4.2(i). Comme d'habitude, l'assertion duale (ii) suit aussitôt.

Exercice 4.17 : On sait déjà que $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est abélienne et cocomplète (remarques 2.58(ii) et 2.81(iii)); en outre, un morphisme $f : G \rightarrow F$ de $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est un monomorphisme $\Leftrightarrow f_A : GA \rightarrow FA$ est un monomorphisme pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ (exercice

2.66(v)). Puisque $\text{Ob}(\mathcal{A})$ est un ensemble, la classe $\text{Sub}(F)$ s'identifie alors naturellement avec une partie de l'ensemble $\prod_{A \in \text{Ob}(\mathcal{A})} \text{Sub}(FA)$, et pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on obtient une application

$$\text{Sub}(F) \rightarrow \text{Sub}(FA) \quad S \mapsto SA$$

associant à la classe de tout monomorphisme $G \rightarrow F$ le sous-objet de FA représenté par GA . Ensuite, soit $(S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille filtrante de sous-objets de F , et $T \subset F$ un autre sous-objet ; donc, chaque S_λ est la classe d'un monomorphisme $f_\lambda : G_\lambda \rightarrow F$, et pour tout $\mu \geq \lambda$ il existe un unique morphisme $f_{\lambda\mu} : G_\lambda \rightarrow G_\mu$ tel que $f_\lambda = f_\mu \circ f_{\lambda\mu}$. La preuve de la proposition 2.94 montre que $S := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ est la classe de l'image du morphisme naturel $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow F$; comme les coproduits et les images sont formées terme à terme, il s'ensuit qu'il en est de même pour les réunions de sous-objets dans $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. De même, d'après le lemme 2.47(ii), l'intersection $S \cap T$ est la classe du produit fibré $G \times_F H$, où $G \rightarrow F$ (resp. $H \rightarrow F$) est un monomorphisme représentant S (resp. T) ; puisque les produits fibrés de $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ se calculent terme à terme, il en est de même alors pour les intersections de sous-objets. Par suite, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ il vient :

$$(S \cap T)A = SA \cap TA = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda A) \cap TA = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (S_\lambda A \cap TA) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (S_\lambda \cap T)A.$$

Cela achève de vérifier que $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est une catégorie de Grothendieck.

De même, $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est abélienne et cocomplète (lemme 2.82(ii,iii)), et ses images, coproduits et produits fibrés se calculent terme à terme (voir la preuve du lemme 2.82(ii)), donc le même raisonnement s'applique à $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Compte tenu de l'exemple 4.16 et de la remarque 2.81(ii), on déduit que $\mathcal{A}^\dagger$ est une catégorie de Grothendieck, pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Problème 4.20 : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que la condition soit vérifiée pour tout sous-objet de G , et soit $i : E \rightarrow M$ un monomorphisme de $\mathcal{A}$; si i n'est pas un isomorphisme, il existe un morphisme $f : G \rightarrow M$ avec $\text{Im}(f) \not\subset \text{Im}(i)$. Posons $I := G \times_{(f,i)} E$, et soient $G \xleftarrow{i'} I \xrightarrow{f'} E$ les projections canoniques ; puisque i' est un monomorphisme, f' admet alors par hypothèse un prolongement $h : G \rightarrow E$; soit $N := \text{Im}(f - i \circ h) \subset M$. Montrons que $N \cap \text{Im}(i) = 0_{\mathcal{A}}$. Pour cela considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} J := G \times_{(f-i \circ h, i)} E & \xrightarrow{q} & E \cap N & \xrightarrow{j} & E \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \\ G & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \end{array}$$

dont les deux carrés sont cartésiens, et dont la ligne horizontale en bas est la factorisation épi-mono de $f - i \circ h$. D'après l'exercice 2.95(i) et l'exemple 2.23(iii), q est alors un épimorphisme, et j est un monomorphisme ; donc, si $E \cap N \neq 0_{\mathcal{A}}$ il existe un morphisme $b : G \rightarrow J$ avec $\text{Im}(b) \not\subset \text{Ker}(q)$ (exercice 4.3(i)), de sorte que $z := j \circ q \circ b \neq 0_{GE}$. Posons $a := p \circ b : G \rightarrow G$; il vient $(f - i \circ h) \circ a = i \circ z$, d'où $f \circ a = i \circ (h \circ a + z)$, et alors il existe un unique morphisme $c : G \rightarrow I$ avec $i' \circ c = a$ et $f' \circ c = (h \circ a + z)$. Il vient

$$f \circ a = i \circ f' \circ c = i \circ h \circ i' \circ c = i \circ h \circ a$$

d'où $i \circ z = 0_{GM}$, et alors $z = 0_{GE}$, contradiction. D'autre part, $f - i \circ h \neq 0_{GM}$, car $\text{Im}(f) \not\subset \text{Im}(i)$, donc $N \neq 0_{\mathcal{A}}$. Cela montre que i n'est pas une extension essentielle, et on conclut avec la proposition 4.18.

Exercice 4.22, partie (i) : Soit $M' \subset M$ un $\mathbb{Z}$ -sous-module cyclique non nul ; on trouve aisément une application $\mathbb{Z}$ -linéaire non nulle $M' \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui se prolonge en une application $\mathbb{Z}$ -linéaire $M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif. Cela montre que si $M \neq 0$ on a $M^* \neq 0$, et l'assertion réciproque est triviale. Or, comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$ -module injectif, le

foncteur $(-)^*$ transforme suites exactes courtes de A -modules en suites exactes courtes, donc il est exact, par la proposition 2.102(ii). Pour montrer qu'il est fidèle, considérons $\phi \in \text{Hom}_A(M, M')$ telle que $\phi^* = 0$; il suffit de montrer que $\phi = 0$. Pour cela, on factorise ϕ comme la composition d'un épimorphisme $\pi : M \rightarrow \phi(M)$ et d'un monomorphisme $j : \phi(M) \rightarrow M'$; il vient $\phi^* = \pi^* \circ j^*$ et par ce qui précède π^* est injective et j^* est surjective. Donc $j^* = 0$, et cela montre que $\phi(M)^* = 0$, d'où $\phi(M) = 0$, CQFD.

Partie (ii) : Soit $i : \mathbb{Z} \rightarrow A^{\text{op}}$ l'unique homomorphisme d'anneaux. Avec la notation du §3.2.2, noter que $A^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}((A^{\text{op}})_{[i]}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ n'est que la coextension, suivant i , du $\mathbb{Z}$ -module injectif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; donc A^* est un A^{op} -module injectif (exemple 4.7). Or, si $M = A^{(\Lambda)}$ pour un ensemble Λ , on a $M^* = (A^*)^{\Lambda}$, et l'assertion découle de la remarque 4.2(iv).

Problème 4.23, partie (i) : Le foncteur $- \otimes_A P$ est exact à droite, car il admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii) et remarque 3.7); compte tenu de la proposition 2.102(ii), il s'ensuit que ce foncteur est exact si et seulement s'il transforme injections A^{op} -linéaire $\phi : M \rightarrow N$ en injections $\mathbb{Z}$ -linéaires $\phi \otimes_A P$. Or, pour toute ϕ , on obtient un diagramme commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(N, P^*) & \xrightarrow{\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(\phi, P^*)} & \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M, P^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (N \otimes_A P)^* & \xrightarrow{(\phi \otimes_A P)^*} & (M \otimes_A P)^* \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les bijections de la remarque 3.4(i), et $(N \otimes_A P)^*$ désigne le dual de Pontryagin du $\mathbb{Z}$ -module $N \otimes_A P$ (et de même pour le $\mathbb{Z}$ -module $(M \otimes_A P)^*$). Or, $\phi \otimes_A P$ est injective $\Leftrightarrow (\phi \otimes_A P)^*$ est surjective (exercice 4.22(i)). La commutativité de $(*)$ nous dit que cette dernière condition est à son tour vérifiée si et seulement si $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(\phi, P^*)$ est surjective. Finalement, cela équivaut à dire que P^* est un A^{op} -module injectif.

Partie (ii) : On voit aisément que l'application

$$P^* \times M \rightarrow \text{Hom}_A(M, P)^* \quad (f, m) \mapsto (h \mapsto f \circ h(m))$$

est $(\mathbb{Z}, A, \mathbb{Z})$ -bilinéaire, donc se factorise comme d'habitude à travers une unique application $\mathbb{Z}$ -linéaire $\sigma_{P, M}$ comme souhaitée. Soit $\phi : M \rightarrow M'$ un homomorphisme de A -modules; la naturalité de σ_P revient à la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P^* \otimes_A M & \xrightarrow{\sigma_{P, M}} & \text{Hom}_A(M, P)^* \\ P^* \otimes_A \phi \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(\phi, P)^* \\ P^* \otimes_A M' & \xrightarrow{\sigma_{P, M'}} & \text{Hom}_A(M', P)^* \end{array}$$

où $\text{Hom}_A(\phi, P)^*$ associe à toute application $\mathbb{Z}$ -linéaire $h : \text{Hom}_A(M, P) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'application $h' : \text{Hom}_A(M', P) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que $h'(f) := h(f \circ \phi)$ pour tout $f : M' \rightarrow P$. Cela suit aussitôt d'une inspection directe.

Partie (iii) : Soient M de présentation finie et $L' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte avec L' et L libres de rang fini; on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} P^* \otimes_A L' & \longrightarrow & P^* \otimes_A L & \longrightarrow & P^* \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \sigma_{P, L'} \downarrow & & \downarrow \sigma_{P, L} & & \downarrow \sigma_{P, M} & & \\ \text{Hom}_A(L', P)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L, P)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, P)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en haut est exacte, d'après la proposition 3.11 et la remarque 3.4(iii), et de même pour celle en bas, par la proposition 2.103 et l'injectivité du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (exemple 4.21(ii)). Par le lemme des cinq (exercice 2.104), il suffit donc de montrer que $\sigma_{P, L}$ et $\sigma_{P, L'}$ sont des isomorphismes, *i.e.* on peut supposer que M soit libre de rang fini. De plus, les foncteurs $P^* \otimes_A -$ et $\text{Hom}_A(-, P)^*$ sont additifs, donc ils commutent

avec les sommes directes finies (problème 2.76(i)), et d'autre part on vient de voir que σ_P est une transformation naturelle ; on est alors ramené aisément au cas où M est libre de rang un, *i.e.* on doit vérifier que $\sigma_{P,A}$ est un isomorphisme. Pour cela il suffit d'observer que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P^* \otimes_A A & \xrightarrow{\sigma_{P,A}} & \text{Hom}_A(A, P)^* \\ & \searrow \omega' \quad \swarrow \mu^* & \\ & P^* & \end{array}$$

où ω' est l'isomorphisme canonique de l'exercice 3.6(ii) et μ^* est le dual de Pontryagin de l'isomorphisme naturel $\mu : P \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(A, P) = P^{[Id_A]}$ (voir le §3.2.1).

Problème 4.24, partie (i) : Evidemment (a) $\Rightarrow$ (b). Pour vérifier que (b) $\Rightarrow$ (c), noter que la remarque 3.4(i) fournit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules

$$\omega_{M,N} : (M^* \otimes_A N)^* \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M^*, N^*) \quad \forall M, N \in \text{Ob}(A - \text{Mod})$$

et on voit aisément que l'association $(M, N) \mapsto \omega_{M,N}$ définit une transformation naturelle de foncteurs $(A - \text{Mod}) \times (A - \text{Mod})^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ (les détails sont laissés au lecteur). On déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (M_1^* \otimes_A M_2)^* & \xrightarrow{(M_1^* \otimes_A \phi)^*} & (M_1^* \otimes_A M_1)^* \\ \omega_{M_1, M_2} \downarrow & & \downarrow \omega_{M_1, M_1} \\ \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M_1^*, M_2^*) & \xrightarrow{\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M_1^*, \phi^*)} & \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(M_1^*, M_1^*). \end{array}$$

Or, si $M_1^* \otimes_A \phi$ est injectif, son dual $(M_1^* \otimes_A \phi)^*$ est surjectif, d'après le problème 4.23(i), donc de même pour $\text{Hom}_A(M_1^*, \phi^*)$; en particulier il existe une application A -linéaire $\tau : M_1^* \rightarrow M_2^*$ telle que $\phi^* \circ \tau = \text{Id}_{M_1^*}$, d'où l'assertion.

Ensuite, la donnée d'un inverse à droite pour ϕ^* induit un isomorphisme $M_2^* \xrightarrow{\sim} M_3^* \oplus M_1^*$ qui identifie ψ^* et ϕ^* respectivement avec l'inclusion et la projection naturelles ; d'autre part, pour tout A -module N , le foncteur $N \otimes_{A^{\text{op}}} -$ commute avec les biproduits, d'où (c) $\Rightarrow$ (d).

(d) $\Rightarrow$ (e) : Soit N un A -module de présentation finie ; l'application $\psi^* \otimes_A N$ est injective, par (d). D'autre part, pour tout A -module P soit $\sigma_{P,N}$ l'isomorphisme du problème 4.23(ii,iii) ; on vérifie aisément que l'association $P \mapsto \sigma_{P,N}$ définit un isomorphisme de foncteurs $(-)^* \otimes_A N \rightarrow \text{Hom}_A(N, -)^*$. Par suite l'application $\text{Hom}_A(N, \psi)^*$ est injective, donc $\text{Hom}_A(N, \psi)$ est surjective, par le problème 4.23(i).

(e) $\Rightarrow$ (f) : Suivant la preuve du théorème 3.86, on trouve un co-cône universel de A -modules $(j_\lambda : N_\lambda \rightarrow M_3 \mid \lambda \in \Lambda)$, indexé par un ensemble partiellement ordonné filtrant Λ , tel que N_λ soit de présentation finie pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $\Sigma_\lambda := j_\lambda^* \Sigma = (0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_{2,\lambda} \rightarrow N_\lambda \rightarrow 0)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (voir l'exercice 2.105). La condition (e) implique qu'il existe une application A -linéaire $s_\lambda : N_\lambda \rightarrow M_2$ telle que $\psi \circ s_\lambda = j_\lambda$; on en déduit une application A -linéaire $t_\lambda : N_\lambda \rightarrow M_{2,\lambda} \subset M_2 \oplus N_\lambda$ telle que $x \mapsto (s_\lambda(x), x)$ pour tout $x \in N_\lambda$. Cela montre que Σ_λ est scindée pour tout $\lambda \in \Lambda$; évidemment, on obtient ainsi un système direct filtrant $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de suites exactes courtes, et soit $\Sigma' := (0 \rightarrow M'_1 \rightarrow M'_2 \rightarrow M'_3 \rightarrow 0)$ sa limite directe dans la catégorie $\mathbf{C}(A - \text{Mod})$. Le système de morphismes naturels $(\Sigma_\lambda \rightarrow \Sigma \mid \lambda \in \Lambda)$ est un co-cône dans $\mathbf{C}(A - \text{Mod})$, induisant un morphisme de complexes $\beta_\bullet : \Sigma' \rightarrow \Sigma$, et il reste à vérifier que $\beta_\bullet$ est un isomorphisme. Rappelons que les colimites dans la catégorie $\mathbf{C}(A - \text{Mod})$ se calculent terme à terme (exercice 2.98(ii)) ; par suite $\beta_1 : M'_1 \rightarrow M_1$ et $\beta_3 : M'_3 \rightarrow M_3$ sont des isomorphismes. Compte tenu de l'exercice 2.104, on est alors ramené à montrer que Σ' est une suite exacte. Mais chaque Σ_λ est exacte par construction, et on sait que pour tout

$i \in \mathbb{Z}$ le foncteur d'homologie H_i commute avec les colimites filtrantes (exercice 2.100), d'où l'assertion.

(f) $\Rightarrow$ (a) : Soit N un A^{op} -module, et supposons que Σ soit isomorphe à la limite directe du système filtrant $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de suites exactes courtes scindées. Comme les colimites de $\mathbf{C}(A\text{-Mod})$ se calculent terme à terme, et comme le foncteur $N \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ commute aux colimites, il s'ensuit que $N \otimes_A \Sigma$ est isomorphe à la limite directe du système induit de complexes $(N \otimes_A \Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Comme le foncteur d'homologie H_i commute avec les colimites filtrantes en tout degré $i \in \mathbb{Z}$, on est alors ramené à vérifier que $N \otimes_A \Sigma_\lambda$ est une suite exacte pour tout $\lambda \in \Lambda$; mais évidemment cette dernière est même scindée, d'où l'assertion.

Partie (ii.a) : Si M_3 est plat, M_3^* est injectif (problème 4.23(i)), donc Σ^* est scindée (lemme 4.5) ; il suffit alors d'appliquer l'implication (c) $\Rightarrow$ (a) de (i).

Partie (ii.b) : Si M_2 est plat, M_2^* est injectif (problème 4.23(i)), et si en outre Σ est universellement exacte, Σ^* est scindée, d'après (i), de sorte que $M_2^* = M_1^* \oplus M_3^*$. Mais alors M_1^* et M_3^* sont injectifs (remarque 4.2(iv)), donc M_1 et M_3 sont plats, toujours par le problème 4.23(i).

Exercice 4.25, partie (i) : D'abord, $j \circ i$ est un monomorphisme, car il en est de même pour i et j . Soit ensuite S un sous-objet non-zéro de Z , disons représenté par un monomorphisme $A \rightarrow Z$; l'application naturelle $\text{Sub}(j) : \text{Sub}(Z) \rightarrow \text{Sub}(Y)$ envoie S sur la classe $S \cap Y \in \text{Sub}(Y)$ de $B := A \times_Z Y$ (voir la remarque 2.48(iii)), et par hypothèse B n'est pas l'objet zéro de $\mathcal{A}$. De même, l'application naturelle $\text{Sub}(i) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$ envoie $S \cap Y$ sur la classe $(S \cap Y) \cap X$ de $B \times_Y X$, et $B \times_Y X$ est encore non-zéro ; mais l'identification naturelle $B \times_Y X \xrightarrow{\sim} A \times_Z X$ (remarque 2.24(i)) montre que $\text{Sub}(j \circ i) = \text{Sub}(j) \circ \text{Sub}(i)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Si $f = 0_{Y'Y}$, on a $g = 0_{X'X}$, car i est un monomorphisme. Soit alors $f \neq 0_{Y'Y}$; on peut décomposer le diagramme cartésien $(*)$ en un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{g'} & X'' & \xrightarrow{g''} & X \\ i' \downarrow & & \downarrow i'' & & \downarrow i \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Y'' & \xrightarrow{f''} & Y \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est la factorisation épi-mono de f , et tel que le carré de droite soit cartésien. Alors g' est l'unique morphisme tel que $g'' \circ g' = g$ et $i'' \circ g' = f' \circ i'$, et le carré de gauche est aussi cartésien (remarque 2.24(i)). Comme $f \neq 0_{Y'Y}$, il vient $f'' \neq 0_{Y''Y}$, et puisque f'' est un monomorphisme, on a $g'' \neq 0_{X''X}$, car i est une extension essentielle (lemme 2.47(ii)). D'autre part, g' est un épimorphisme, car il en est de même pour f' (exercice 2.95(i)), donc $g \neq 0_{X'X}$.

Partie (iii) : Par une simple récurrence sur n , on se ramène aisément au cas où $n = 2$. Soient alors $(X_i \xrightarrow{e_{X,i}} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_{X,j}} X_j \mid i, j = 1, 2)$ les injections et projections canoniques, et de même pour $(Y_i \xrightarrow{e_{Y,i}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{p_{Y,j}} Y_j \mid i, j = 1, 2)$. Noter d'abord que le noyau de $f : X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ s'identifie naturellement avec $\text{Ker}(f_1) \oplus \text{Ker}(f_2)$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc f est un monomorphisme si et seulement s'il en est de même pour chaque f_i . Ensuite, si f est une extension essentielle, soit $j : Z \rightarrow Y_1$ un monomorphisme non nul, et noter que l'on a un diagramme cartésien :

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times_{Y_1} Z & \xrightarrow{q} & Z \\ e_{X,1} \circ (X_1 \times_{Y_1} j) \downarrow & & \downarrow e_{Y,1} \circ j \\ X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{f} & Y_1 \oplus Y_2 \end{array}$$

où q dénote la projection canonique : les détails sont laissés aux soins du lecteur. D'après le lemme 2.47(ii), cela revient à dire que l'image du sous-objet $Z \cap X_1$ de Y_1 dans $\text{Sub}(Y_1 \oplus Y_2)$

s'identifie avec $(X_1 \oplus X_2) \cap (Z \oplus 0_{\mathcal{A}})$, et il est donc non-zéro, par hypothèse. Cela montre que f_1 est une extension essentielle, et de même on vérifie l'assertion pour f_2 . Réciproquement, si f_1 et f_2 sont des extensions essentielles, soit $k : Z \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ un monomorphisme, et montrons que $Z \cap (X_1 \oplus X_2) \neq 0_{\mathcal{A}}$; pour cela, posons $k_2 := p_{Y,2} \circ k : Z \rightarrow Y_2$. Si $k_2 = 0_{ZY_2}$, on a $\text{Im}(k) \subset \text{Ker}(p_{Y,2})$, et rappelons que le noyau de $p_{Y,2}$ s'identifie naturellement avec Y_1 , et sous cette identification, le monomorphisme naturel $\text{Ker}(p_{Y,2}) \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ correspond à $e_{Y,1}$. Ainsi, dans ce cas k est la composition de $e_{Y,1}$ avec un monomorphisme $j : Z \rightarrow Y_1$; par suite, avec le diagramme (**) on identifie $Z \cap (X_1 \oplus X_2)$ avec l'image de $Z \cap X_1$, où l'on regarde Z comme un sous-objet de Y_1 , via le monomorphisme j . Par hypothèse, $Z \cap X_1 \neq 0_{\mathcal{A}}$, d'où l'assertion dans ce cas. On peut donc supposer que $k_2 \neq 0_{ZY_2}$; posons alors $Z_2 := Z \times_{(k_2, f_2)} X_2$, et soient $Z \xleftarrow{f'_2} Z_2 \xrightarrow{k'_2} X_2$ les projections canoniques. D'après (ii), on a $Z_2 \neq 0_{\mathcal{A}}$; en outre, f'_2 est un monomorphisme, car il en est de même pour f_2 (exemple 2.23(iii)). Posons ensuite $k_1 := p_{Y,1} \circ k \circ f'_2 : Z_2 \rightarrow Y_1$; si $k_1 = 0_{Z_2 Y_1}$, en raisonnant comme ci-dessus, on voit que $k \circ f'_2 = e_{Y,2} \circ j'$ pour un monomorphisme $j' : Z_2 \rightarrow Y_2$, et alors $Z_2 \cap (X_1 \oplus X_2)$ s'identifie avec l'image de $Z_2 \cap X_2$. Or, $Z_2 \cap X_2 \neq 0_{\mathcal{A}}$, car f_2 est une extension essentielle, et évidemment $Z_2 \cap (X_1 \oplus X_2) \subset Z \cap (X_1 \oplus X_2)$, d'où l'assertion, dans ce cas. On peut ainsi supposer que $k_1 \neq 0_{Z_2 Y_1}$; posons alors $Z_1 := Z_2 \times_{(k_1, f_1)} X_1$, et soient $Z_2 \xleftarrow{f'_1} Z_1 \xrightarrow{k'_1} X_1$ les projections canoniques. Par (ii) on a $Z_1 \neq 0_{\mathcal{A}}$, et f'_1 est un monomorphisme. En dernier lieu, notons par $l : Z_1 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ l'unique morphisme tel que $p_{X,1} \circ l = k'_1$ et $p_{X,2} \circ l = k'_2 \circ f'_1$. Pour conclure, il suffit de vérifier que :

$$k \circ f'_2 \circ f'_1 = f \circ l$$

car alors on aura $Z_1 \subset Z \cap (X_1 \oplus X_2)$ dans $\text{Sub}(Y_1 \oplus Y_2)$. On calcule :

$$\begin{aligned} p_{Y,1} \circ k \circ f'_2 \circ f'_1 &= k_1 \circ f'_1 = f_1 \circ k'_1 = f_1 \circ p_{X,1} \circ l = p_{Y,1} \circ f \circ l \\ p_{Y,2} \circ k \circ f'_2 \circ f'_1 &= k_2 \circ f'_2 \circ f'_1 = f_2 \circ k'_2 \circ f'_1 = f_2 \circ p_{X,2} \circ l = p_{Y,2} \circ f \circ l \end{aligned}$$

d'où l'assertion.

Partie (iv) : Chaque Z_λ est la classe d'un monomorphisme $j_\lambda : A_\lambda \rightarrow Y$, et les hypothèses reviennent à dire que i est la composition de j_λ et d'un unique monomorphisme $k_\lambda : X \rightarrow A_\lambda$, et que l'image de tout sous-objet non-zéro par l'application induite $\text{Sub}(k_\lambda) : \text{Sub}(A_\lambda) \rightarrow \text{Sub}(X)$ est un sous-objet non-zéro. Or, soit $B \subset Z$ un sous-objet non-zéro; évidemment $B = B \cap Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap Z_\lambda)$, par suite il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $B \cap Z_\lambda$ soit non-zéro, donc de même pour le sous-objet $(B \cap Z_\lambda) \cap X = B \cap X$ de X , d'où l'assertion.

(v.a) : Par l'injectivité de J , il existe un morphisme $f : E \rightarrow J$ tel que $f \circ i = j$. On a $\text{Ker}(f) \cap A = 0_{\mathcal{A}}$, d'où $\text{Ker } f = 0_{\mathcal{A}}$, car i est essentielle.

(v.b) : Par l'injectivité de E , il existe un morphisme $g : J \rightarrow E$ avec $g \circ f = 1_E$. On a $g \circ j = g \circ f \circ i = i$, d'où $\text{Ker}(g) \cap A = 0_{\mathcal{A}}$, et donc $\text{Ker}(g) = 0_{\mathcal{A}}$, car j est essentielle. Cela montre que g est un isomorphisme, donc de même pour f .

Problème 4.28, partie (i) : Si F est représentable, il commute avec les petites limites, d'après l'exemple 2.39(ii). Réciproquement, supposons que F commute avec les petites limites, et soit G un générateur de $\mathcal{A}$; d'après l'exercice 2.84, F est alors la composition d'un unique foncteur additif $F^\dagger : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ avec le foncteur d'oubli $\mathbb{Z} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$, et en outre $F^\dagger$ commute avec les petites limites, d'après l'exemple 2.22(iv). Posons $X_s := G$ pour tout $s \in FG$, et soit $A := \bigoplus_{s \in FG} X_s$; évidemment A représente le produit de la famille $(X_s \mid s \in FG)$ dans $\mathcal{A}^{\text{op}}$, donc $F^\dagger A$ représente $\prod_{s \in FG} F^\dagger X_s$. Fixons alors un co-cône universel $(i_s^A : G \rightarrow A \mid s \in FG)$, soit $\sigma \in F^\dagger A$ l'unique élément tel que $F^\dagger(i_s^A)(\sigma) = s$ pour tout $s \in FG$, et notons par $\mathcal{F}$ la famille des sous-objets $i : X \rightarrow A$ de A tels que $F^\dagger(i)(\sigma) = 0_X$ (l'élément neutre du groupe abélien $F^\dagger X$). Rappelons

que $\mathcal{F}$ est un ensemble, car $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck ; vérifions que $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant, pour l'ordre donné par inclusion de sous-objets (voir la remarque 2.9(i)) : en effet, soient $(i_j : X_j \rightarrow A \mid j = 1, 2)$ deux éléments de $\mathcal{F}$, et $i : X_1 \cup X_2 \rightarrow A$ la réunion de X_1 et X_2 ; considérons les diagrammes induits de $\mathcal{A}$ et de $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \cup X_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F^\dagger(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & F^\dagger X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^\dagger X_2 & \longrightarrow & F^\dagger(X_1 \cap X_2). \end{array}$$

D'après l'exercice 2.95(ii), le carré de gauche est cocartésien dans $\mathcal{A}$, donc celui de droite est cartésien dans $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$, car $F^\dagger$ est exact à gauche. Par hypothèse, on a $F^\dagger(i_j)(\sigma) = 0_{X_j}$ pour $j = 1, 2$; il vient aussitôt $F^\dagger(i)(\sigma) = 0_{X_1 \cup X_2}$, d'où l'assertion. D'après le corollaire 4.27, la colimite de $\mathcal{F}$ est alors un sous-objet $i_L : L \rightarrow A$ de A . Montrons que $L \in \mathcal{F}$: en effet, puisque $F^\dagger$ commute avec les petites limites, $F^\dagger L$ représente la limite de la famille cofiltrante $\{F^\dagger X \mid X \in \mathcal{F}\}$ de groupes abéliens ; par hypothèse, l'image de σ dans $F^\dagger X$ est l'élément neutre, pour tout $X \in \mathcal{F}$, donc $F^\dagger(i_L)(\sigma) = 0_L$, d'où l'assertion. Soit $p_A : A \rightarrow A/L$ la projection ; la suite induite

$$0 \rightarrow F^\dagger(A/L) \xrightarrow{F^\dagger(p_A)} F^\dagger A \xrightarrow{F^\dagger(i_L)} F^\dagger L$$

est exacte dans $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ (proposition 2.102(i)), donc σ est l'image d'un unique élément $\bar{\sigma} \in F^\dagger(A/L)$, et il existe une unique transformation naturelle

$$\omega : h_{A/L}^\dagger \rightarrow F^\dagger \quad \text{telle que} \quad \omega_{A/L}(\mathbf{1}_{A/L}) = \bar{\sigma}$$

(lemme 2.82(iv)). On montrera plus précisément que ω est un isomorphisme de foncteurs ; cela revient à vérifier que pour tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $t \in F^\dagger M$, il existe un unique morphisme $f : M \rightarrow A/L$ de $\mathcal{A}$ tel que $F^\dagger(f)(\bar{\sigma}) = t$. Or, posons $Y_u := G$ pour tout $u \in \mathcal{A}(G, M)$, et $A_M := \bigoplus_{u \in \mathcal{A}(G, M)} Y_u$; soient aussi $(i_u^M : G \rightarrow A_M \mid u \in \mathcal{A}(G, M))$ un co-cône universel, et $e_M : A_M \rightarrow M$ l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $e_M \circ i_u^M = u$ pour tout $u \in \mathcal{A}(G, M)$. D'après l'observation 4.10, e_M est un épimorphisme de $\mathcal{A}$. Soient $b : A_M \rightarrow A$ l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $b \circ i_u^M = i_{F(u)(t)}^A$ pour tout $u \in \mathcal{A}(G, M)$, et $\tau := F^\dagger(b)(\sigma)$; comme $F^\dagger A_M$ représente $\prod_{u \in \mathcal{A}(G, M)} F^\dagger Y_u$, il s'ensuit que τ est l'unique élément de $F^\dagger A_M$ tel que $F^\dagger(i_u^M)(\tau) = F(u)(t)$ pour tout $u \in \mathcal{A}(G, M)$, i.e. $\tau = F^\dagger(e_M)(t)$. Soient $K := \text{Ker}(e_M)$, et $j : K \rightarrow A_M$ le monomorphisme universel ; il vient

$$F^\dagger(b \circ j)(\sigma) = F^\dagger(j)(\tau) = F^\dagger(e_M \circ j)(t) = 0_K$$

car $e_M \circ j$ est le morphisme nul. D'autre part, $b \circ j$ est la composition du monomorphisme $i_K : \text{Im}(b \circ j) \rightarrow A$ avec la projection $p_K : K \rightarrow \text{Im}(b \circ j)$, et p_K induit un monomorphisme $F^\dagger(p_K) : F^\dagger \text{Im}(b \circ j) \rightarrow F^\dagger K$, car $F^\dagger$ est exact à gauche ; par suite $F^\dagger(i_K)(\sigma) = 0$, i.e. $\text{Im}(b \circ j)$ est un élément de $\mathcal{F}$, donc i_K se factorise à travers i_L et un morphisme $i_{K/L} : \text{Im}(b \circ j) \rightarrow L$. Il existe alors un unique morphisme $f : M \rightarrow A/L$ faisant commuter le diagramme de $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & A_M & \xrightarrow{e_M} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_{K/L} \circ p_K & & \downarrow b & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & A & \xrightarrow{p_A} & A/L \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par suite, $F^\dagger(e_M) \circ F^\dagger(f)(\bar{\sigma}) = F^\dagger(b)(\sigma) = F^\dagger(e_M)(t)$, d'où $F^\dagger(f)(\bar{\sigma}) = t$, car e_M est un épimorphisme de $\mathcal{A}$ et $F^\dagger$ est exact à gauche. Il reste à vérifier que si $g : M \rightarrow A/L$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ avec $F^\dagger(g)(\bar{\sigma}) = t$, alors $f = g$; pour cela, quitte à remplacer f par $f - g$, on peut supposer que $F^\dagger(f)(\bar{\sigma}) = 0_M$, et il faut montrer que f est le morphisme nul dans ce cas. Or, soit $\bar{f} : \text{Im}(f) \rightarrow A/L$ l'unique morphisme dont la composition avec

la projection $p_M : M \rightarrow \text{Im}(f)$ coïncide avec f ; puisque $F^\dagger(p_M)$ est un monomorphisme, on peut remplacer f par $\bar{f}$, et supposer que f soit un monomorphisme. Considérons le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{q} & M \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p_A} & A/L. \end{array}$$

Le morphisme f' est un monomorphisme (exemple 2.23(iii)), et on a :

$$F^\dagger(f')(\sigma) = F^\dagger(p_A \circ f')(\bar{\sigma}) = F^\dagger(q) \circ F^\dagger(f)(\bar{\sigma}) = 0_M$$

d'où $H \in \mathcal{F}$, donc f' se factorise à travers $i_L : L \rightarrow A$, i.e. $p_A \circ f'$ est le morphisme nul; mais q est un épimorphisme (exercice 2.95(i)), d'où l'assertion.

Partie (ii) : $\mathcal{A}$ est finiment complète, d'après le théorème 2.89(ii), donc il suffit de montrer que le produit de toute petite famille $A_\bullet := (A_i \mid i \in I)$ d'objets de $\mathcal{A}$ est représentable dans $\mathcal{A}$ (proposition 2.40). Mais chaque foncteur $\mathbf{h}_{A_i^{\text{op}}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute avec les petites limites, par (i), donc de même pour $F := \prod_{i \in I} \mathbf{h}_{A_i^{\text{op}}}$ (exercice 2.61), et alors F est représentable, toujours d'après (i); mais on voit aussitôt que représenter F équivaut à représenter dans $\mathcal{A}$ le produit de la famille $A_\bullet$.

Exercice 4.40 : Pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, soit $\mathcal{F}_B := \text{Quot}(B) \cap \text{Ob}(\mathcal{E})$, et pour tout $Q \in \mathcal{F}_B$, soit $p_Q : B \rightarrow Q$ la projection; noter que $\text{Quot}(B)$ est un ensemble, car par hypothèse il en est de même pour $\text{Sub}(B)$ (remarque 2.93(ii)). Par suite, $\mathcal{F}_B$ est un ensemble, pour tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, et le produit

$$P(B) := \prod_{Q \in \mathcal{F}_B} Q$$

est alors représentable dans $\mathcal{B}$ par un objet de $\mathcal{E}$. En outre le cône $(p_Q \mid Q \in \mathcal{F}_B)$ détermine un unique morphisme $q_B : B \rightarrow P(B)$ de $\mathcal{B}$ dont la composition avec la projection $\pi_Q : P(B) \rightarrow Q$ coïncide avec p_Q , pour tout $Q \in \mathcal{F}_B$. Posons $E(B) := \text{Im}(q_B)$, et soient $\bar{q}_B : B \rightarrow E(B)$ le morphisme induit par q_B , et $\bar{\pi}_Q : E(B) \rightarrow Q$ la restriction de π_Q , pour tout $Q \in \mathcal{F}_B$; puisque $E(B)$ est un sous-objet de $P(B)$, on a $E(B) \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Soit ensuite $f : B \rightarrow C$ un morphisme de $\mathcal{B}$; si $S \subset C$ est un sous-objet tel que $Q := C/S \in \mathcal{F}_C$, noter que f induit un monomorphisme $f_Q : B/f^{-1}S \rightarrow Q$ (avec $f^{-1}S := S \times_C B \subset B$), et par suite $B/f^{-1}S \in \mathcal{F}_B$. Ainsi, f induit une application $f^* : \mathcal{F}_C \rightarrow \mathcal{F}_B : C/S \mapsto B/f^{-1}S$; soit alors $P(f) : P(B) \rightarrow P(C)$ l'unique morphisme de $\mathcal{B}$ tel que $\pi_Q \circ P(f) = f_Q \circ \pi_{f^*Q}$ pour tout $Q \in \mathcal{F}_C$. On déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ q_B \downarrow & & \downarrow q_C \\ P(B) & \xrightarrow{P(f)} & P(C) \end{array}$$

et donc $P(f)$ induit par restriction un morphisme $E(f) : E(B) \rightarrow E(C)$; pour un deuxième morphisme $g : C \rightarrow D$, on a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \mathcal{F}_D \rightarrow \mathcal{F}_B$, d'où $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$, et finalement $E(g \circ f) = E(g) \circ E(f)$. On a donc un foncteur bien défini $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, et une transformation naturelle $\bar{q}_\bullet : \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \rightarrow E$. En dernier lieu, soit $h : B \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{B}$ avec $F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$; alors $S := \text{Im}(h)$ est un sous-objet de F , donc $S \in \mathcal{F}_B$, et h est la composition de p_S avec un unique morphisme $\bar{h} : S \rightarrow F$. Puisque $\bar{q}_B$ est un épimorphisme, il s'ensuit que $\vartheta_{B,F}(h) := \bar{h} \circ \bar{\pi}_S$ est l'unique morphisme de $\mathcal{E}$ dont la composition avec $\bar{q}_B$ coïncide avec h ; évidemment

$$\vartheta_{B',F'}(k \circ h \circ l) = k \circ \vartheta_{B,F}(h) \circ k \circ E(l)$$

pour tout morphisme $l : B' \rightarrow B$ de $\mathcal{B}$ et tout morphisme $k : F \rightarrow F'$ de $\mathcal{E}$. Soit $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ l'inclusion; cela achève de vérifier que $\vartheta_{\bullet\bullet}$ est une adjonction pour le couple

de foncteurs (i, E) , et $\bar{q}_\bullet$ est l'unité de cette adjonction.

Exercice 4.52 : D'après la remarque 4.51(iv), la condition (a) entraîne que chaque U_i soit de type T_0 ; il s'ensuit aisément qu'il en est de même pour T . Ensuite, pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $\mathcal{U}_i$ l'ensemble des parties ouvertes compactes de U_i ; pour tout $i, j = 1, \dots, n$ et tout $V \in \mathcal{U}_i, V' \in \mathcal{U}_j$ la partie $V \cap U_{ij}$ est compacte dans U_i (remarque 4.51(i)), donc aussi dans U_j , et $V \cap V' = (V \cap U_{ij}) \cap V'$ est alors compacte dans T . Cela montre que $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ est une base de T stable par intersections finies, et formée de parties ouvertes compactes. En dernier lieu, soit $Z \subset T$ une partie fermée irréductible, et $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $Z_i := Z \cap U_i \neq \emptyset$; si $\bar{Z}_i$ dénote l'adhérence de Z_i dans T , on a $Z = \bar{Z}_i \cup (Z \setminus U_i)$, donc $Z = \bar{Z}_i$, car Z est irréductible. D'autre part, Z_i est une partie fermée irréductible de U_i : en effet, si $Z_i = Z' \cup Z''$ pour deux parties fermées $Z', Z'' \subset U_i$, par ce qui précède Z est la réunion des adhérences $\bar{Z}'$ et $\bar{Z}''$ de Z' et Z'' dans T ; mais alors, quitte à échanger Z' et Z'' on peut supposer que $\bar{Z}' \subset \bar{Z}''$, ainsi $Z' = \bar{Z}' \cap U_i \subset \bar{Z}'' \cap U_i = Z''$, d'où l'assertion. Soit z le point générique de Z_i ; par suite Z est l'adhérence $\overline{\{z\}}$ dans T de $\{z\}$; l'unicité d'un point $z \in T$ tel que $\overline{\{z\}} = Z$ vient de la propriété T_0 : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Exercice 4.63 : Si $g \circ f$ est généralisante, soient $z, z' \in Z$ tels que $z' \geq z$, et $y \in g^{-1}(z)$; par hypothèse il existe $x, x' \in X$ tels que $f(x) = y, x' \geq x$ dans X , et $g \circ f(x') = z'$. Par suite $y' := f(x') \geq y$ et $g(y') = z'$, d'où l'assertion. Le même raisonnement montre que si $g \circ f$ est spécialisante, il en est de même pour g .

Exercice 4.66 : Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, l'idéal $\mathfrak{p}A[T]$ est le noyau de la projection $A[T] \rightarrow k(\mathfrak{p})[T]$, et il est donc premier. Si maintenant $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d$ est une chaîne d'idéaux premiers de A , on déduit la chaîne

$$\mathfrak{p}_0 A[T] \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d A[T] \subset \mathfrak{p}_d A[T] + T A[T]$$

qui montre l'inégalité $1 + \dim A \leq \dim A[T]$. De l'autre côté, soit $\mathfrak{q}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_d$ une chaîne d'idéaux premiers de $A[T]$, et notons $\phi : \text{Spec } A[T] \rightarrow \text{Spec } A$ l'application continue induite par l'inclusion naturelle $A \rightarrow A[T]$. On pose $\Sigma := \{\mathfrak{q}_0, \dots, \mathfrak{q}_d\}$ et $\Sigma' := \phi(\Sigma)$. L'ensemble Σ' est une partie totalement ordonnée de l'ensemble $\text{Spec } A$, ce dernier étant partiellement ordonné par spécialisation; par suite la cardinalité de Σ' est $\leq 1 + \dim A$. D'autre part, la preimage dans Σ de tout $\mathfrak{p} \in \Sigma'$ est une partie totalement ordonnée de $\text{Spec } k(\mathfrak{p})[T]$ (voir le §3.4.2), et on sait que $\dim k(\mathfrak{p})[T] = 1$; cela veut dire que $\Sigma \cap \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ contient au plus deux éléments, pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma'$, donc la cardinalité de Σ est $\leq 2 \cdot (1 + \dim A)$, d'où $\dim A[T] \leq 1 + 2 \cdot \dim A$.

Exercice 4.70, partie (i) : Pour tout $k \leq \dim f_x^{-1}(y)$ et tout $d \leq \text{ht}(y)$ soient

$$x_k > x_{k-1} > \dots > x_0 := x$$

une chaîne de spécialisations de points de $f_x^{-1}(y)$, et

$$y_d > y_{d-1} > \dots > y_0 := y$$

une chaîne de spécialisations de points de Y . Puisque f est générissante, il existe une chaîne $x_{k+d} > x_{k+d-1} > \dots > x_k$ de spécialisations dans X , avec $f(x_{k+i}) = y_i$ pour $i = 0, \dots, d$, d'où $\text{ht}(x) \geq k + d$. L'assertion en découle aussitôt. La partie (ii) est analogue, et sera laissée aux soins du lecteur.

Exercice 4.71, partie (i) : Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées constructibles de T , et $\mathcal{T}^*$ la topologie sur T engendrée par $\mathcal{F}$. Evidemment $\mathcal{F}$ est un ensemble de parties ouvertes et fermées de T^c ; noter aussi que la topologie $\mathcal{T}$ est engendrée par la famille $\{T \setminus X \mid X \in \mathcal{F}\}$, et comme T est un espace de type T_0 , il s'ensuit aisément que

$T^* := (T, \mathcal{T}^*)$ est aussi de type T_0 : détails laissés aux soins du lecteur. Grâce à la proposition 4.57 et au théorème 4.54(ii), on conclut que T^* est un espace spectral et $(T^*)^c = T^c$. Ensuite, soient $x, y \in T$; évidemment, x est une spécialisation de y (par rapport à la topologie $\mathcal{T}$) si et seulement si tout voisinage ouvert compact de x contient y . Cela revient à dire que si $X \in \mathcal{T}$ et $y \in X$, alors $x \in X$, i.e. y est une spécialisation de x par rapport à la topologie $\mathcal{T}^*$. La partie (ii) de l'exercice est maintenant claire, par inspection de la construction de T^* .

Partie (iii.a) : Soit $X \subset S$ une partie constructible fermée ; on voit aisément que $f^{-1}S$ est constructible et fermée dans T , d'où l'assertion.

Partie (iii.b) : Avec (iii.a), on voit que $f^* : (T^*, \leq) \rightarrow (S^*, \leq)$ est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés $(T, \leq)^{\text{op}} \rightarrow (S, \leq)^{\text{op}}$, et ce morphisme coïncide évidemment avec f^{op} (notation de la remarque 1.31(ii)) ; l'assertion découle alors d'une simple inspection des définitions.

Exercice 4.74, partie (i) : Cela revient à dire que l'adhérence $\overline{S}$ de S dans T est irréductible, car alors le point générique de $\overline{S}$ sera le supremum de S . Or, soient $Z, Z' \subset T$ deux parties fermées avec $\overline{S} \subset Z \cup Z'$ et $S \not\subset Z'$, et soient $z \in (Z \cap S) \setminus Z'$ et $s \in S$; par hypothèse, on a $x \in S$ avec $x \geq z, s$, i.e. l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de $\{x\}$ dans T contient z et s . Mais alors $x \notin Z'$, car sinon on aurait $\{x\} \subset Z'$; par suite, $x \in Z$, et alors $\overline{\{x\}} \subset Z$, donc $s \in Z$. Ainsi $S \subset Z$, donc aussi $\overline{S} \subset Z$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Il suffit d'appliquer (i) à la partie S de l'espace spectral T^* associé à T comme dans l'exercice 4.71(i).

Exercice 4.76, partie (i) : Si T est caténaire, posons $n := \dim Y(x)$ et $m := \dim Z(y)$, et soient $t_0 < \dots < t_n$ et $t_n < \dots < t_{n+m}$ deux chaînes saturées de générations de points de T avec $t_0 := x, t_n := y$ et où $z := t_{n+m}$ est le point générique de Z ; alors $t_0 < \dots < t_{n+m}$ est une chaîne saturée de générations de x dans Z , et par hypothèse, toute chaîne saturée d'extrémité x et z a alors longueur $n + m$, i.e. $\dim Z(x) = n + m$. Réciproquement, soit la condition de l'exercice vérifiée pour toute chaîne $X \subset Y \subset Z$ de partie irréductibles de T , et considérons deux chaînes saturées de générations dans T :

$$t_0 < \dots < t_r \quad \text{et} \quad t'_0 < \dots < t'_s \quad \text{avec} \quad t_0 = t'_0 \text{ et } t_r = t'_s.$$

On peut supposer que $s \geq r$, et on va montrer, par récurrence sur r , que $r = s$. Si $r = 0$, l'assertion est triviale ; pour $r = 1$, le point t_1 est une génération immédiate de t_0 , et l'assertion est encore évidente. Si $r > 1$, soient X, Y et Z les adhérences dans T de $\{t_0\}, \{t_1\}$ et $\{t_r\}$; il vient $\dim Y(t_0) = 1$, et par hypothèse de récurrence, toute chaîne saturée d'extrémité t_1 et t_r a longueur $r - 1$, donc $\dim Z(t_1) = r - 1$, ainsi $r = \dim Z(t_1) + \dim Y(t_0) = \dim Z(t_0) \geq s$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Evidemment, (a) entraîne que $\dim Z(z) < +\infty$ pour toute partie irréductible $Z \subset X$, et tout $z \in Z$. On peut alors appliquer le critère de (i) : soient $X, Y, Z \subset T$ trois parties irréductibles avec $X \subset Y \subset Z$, et x (resp. y , resp. z) le point générique de X (resp. de Y , resp. de Z) ; par hypothèse, on a :

$$\dim Z(x) = \text{ht}(x) - \text{ht}(z) \quad \dim Z(y) = \text{ht}(y) - \text{ht}(z) \quad \dim Y(x) = \text{ht}(x) - \text{ht}(y)$$

d'où $\dim Z(x) = \dim Z(y) + \dim Y(x)$, comme souhaité.

Problème 4.77, Partie (i) : Si $(T, \mathcal{T})$ est compact et totalement disconnexe, l'ensemble des parties ouvertes et fermées de T forme une base de $\mathcal{T}$ stable par intersections finies ; de plus, si T est séparé, les seules parties fermées irréductibles de T sont de la forme $\{t\}$, pour $t \in T$ arbitraire, donc (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Réciproquement, si $T \neq \emptyset$ est spectral de dimension 0, soit $t \in T$, et U un voisinage ouvert et compact de t dans T ; par le corollaire 4.67(i), l'adhérence $\overline{U}$ de U dans T est alors l'ensemble des spécialisations des points de T . Mais comme $\dim T = 0$, cela revient à dire que $\overline{U} = U$, donc T est totalement

disconnexe, et on déduit aussitôt que toute partie constructible de T est ouverte, d'où $T = T^c$. Ensuite, la remarque 4.53(iii) nous dit que $\alpha(X)$ est spectral pour tout espace topologique X , et évidemment $\dim \alpha(X) \in \{0, -\infty\}$, donc la deuxième assertion découle de la première.

Partie (ii.a) : Soient Z l'image de ϕ_T , et $f : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ une fonction continue telle que $Z \subset V(f) = \{\mathfrak{m} \in \alpha(T) \mid f \in \mathfrak{m}\}$. Cela veut dire que $f(t) = 0$ pour tout $t \in T$, donc $f = 0$ et $V(f) = \alpha(T)$, d'où l'assertion.

Partie (ii.b) : Soient $t \in T$, et $U \subset T$ un voisinage ouvert et fermé de t dans T ; l'unique application $f : T \rightarrow \mathbb{F}_2$ avec $f^{-1}(1) = U$ est continue, et évidemment $\phi_T^{-1}(D(f)) = U$. Mais par hypothèse, tout voisinage ouvert de t dans T contient un voisinage ouvert et fermé de t , d'où l'assertion.

Partie (ii.c) : En effet, à toute application continue $f : T \rightarrow S$ on peut associer d'abord un homomorphisme de $\mathbb{F}_2$ -algèbres

$$f^* : \mathcal{C}(S, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2) \quad g \mapsto g \circ f$$

et ensuite, au vu de la remarque 4.53(iii), une application continue

$$\alpha(f) := \text{Max } f^* = \text{Spec } f^* : \alpha(T) \rightarrow \alpha(S) \quad \mathfrak{m} \mapsto (f^*)^{-1}(\mathfrak{m}).$$

Compte tenu de (i) on conclut que les associations $T \mapsto \alpha(T)$ et $f \mapsto \alpha(f)$ définissent un foncteur $\alpha : \mathbf{TDisc} \rightarrow \mathbf{cTDisc}$, et on vérifie comme dans la solution de l'exercice 1.29(ii) que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\phi_T} & \alpha(T) \\ f \downarrow & & \downarrow \alpha(f) \\ S & \xrightarrow{\phi_S} & \alpha(S) \end{array}$$

i.e. l'association $T \mapsto \phi_T$ est une transformation naturelle.

Partie (ii.d) : On va montrer plus précisément que ϕ_T est l'unité d'une adjonction pour le couple de foncteurs (α, i) . Grâce à (i) et au théorème 4.54(i), on sait que l'application $\phi_T : T \rightarrow \alpha(T)$ est un homéomorphisme pour tout T compact et totalement disconnexe ; posons $\psi_T := \phi_T^{-1}$. Compte tenu de (ii.c), l'association $T \mapsto \psi_T$ est alors un isomorphisme de foncteurs $\psi : \alpha \circ i \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathbf{cTDisc}}$. On est donc ramené à vérifier que le couple de transformations naturelles (ϕ, ψ) satisfait les identités triangulaires du problème 2.13(iii) ; or, la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\phi * i} & i \circ \alpha \circ i \\ & \searrow \mathbf{1}_i & \downarrow i * \psi \\ & & i \end{array}$$

vient directement des constructions. Pour la deuxième identité triangulaire on adopte une méthode indirecte, qui nous évitera des calculs un peu laborieux : pour tout $t \in T$ la partie $\{t\}$ est trivialement un espace totalement disconnexe et compact, et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \alpha(\{t\}) & \xrightarrow{\alpha(\phi_{\{t\}})} & \alpha \circ i \circ \alpha(\{t\}) & \xrightarrow{\psi_{\alpha(\{t\})}} & \alpha(\{t\}) \\ \alpha(j) \downarrow & & \alpha \circ i \circ \alpha(j) \downarrow & & \downarrow \alpha(j) \\ \alpha(T) & \xrightarrow{\alpha(\phi_T)} & \alpha \circ i \circ \alpha(T) & \xrightarrow{\psi_{\alpha(T)}} & \alpha(T) \end{array}$$

où $j : \{t\} \rightarrow T$ est l'inclusion. On remarque que $\alpha(\{t\})$ contient un seul point, donc la composition des deux flèches horizontales en haut est trivialement l'identité ; de plus, l'image de $\alpha(j)$ est évidemment le point $\phi_T(t)$ de $\alpha(T)$. On conclut que $\psi_{\alpha(T)} \circ \alpha(\phi_T)$ se restreint à l'identité sur le sous-espace $\phi_T(T) \subset \alpha(T)$. Compte tenu de (i) et (ii.a), il suffit alors d'invoquer l'exercice 1.26(iv).

Partie (iii.a) : D'après (i), on a $\text{Ob}(\text{cTDisc}) \subset \text{Ob}(\text{TopSp})$, et d'après l'exercice 1.26(iii), toute application continue entre espaces spectraux séparés est compacte, d'où l'assertion.

Partie (iii.b) : Soient T un espace spectral séparé, S un espace spectral, $f : T \rightarrow S$ une application continue et compacte. D'après la remarque 4.59(ii), l'application $f^c : T^c \rightarrow S^c$ est continue, et $T^c = T$ par (i). Réciproquement, si $g : T \rightarrow S^c$ est une application continue, noter que l'application $\text{Id}_S : S^c \rightarrow S$ est continue et compacte, et de même pour g , d'après (iii.a) ; donc $\text{Id}_S \circ g : T \rightarrow S$ est aussi continue et compacte. On obtient ainsi une bijection naturelle :

$$\text{TopSp}(i'T, S) \xrightarrow{\sim} \text{cTDisc}(T, S^c) \quad (g : i'T \rightarrow S) \mapsto (g^c : T \rightarrow S^c)$$

et on voit aussitôt que cette bijection est naturelle pour morphismes $T' \rightarrow T$ de TopSp et $S \rightarrow S'$ de cTDisc , i.e. elle fournit une adjonction pour le couple $(i', (-)^c)$.

Problème 4.78, partie (i) : Avec la notation du problème 4.77(iii), chaque espace T_i^c est compact et séparé, par suite la limite L' du foncteur $T_\bullet^c : I \rightarrow \text{Top} : i \mapsto T_i^c$ est compacte et séparée (problème 2.25(iii.b)) ; de plus l'ensemble sous-jacent à L' coïncide avec l'ensemble sous-jacent à L , et $v_\bullet$ est aussi un cône universel pour L' . Une inspection directe montre que la topologie de L est engendrée par la prébase $\mathcal{B}$ formée des parties $v_i^{-1}(U)$, pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et toute partie ouverte compacte $U \subset T_i$; noter que tout élément de $\mathcal{B}$ est une partie ouverte et fermée de L' ; en outre, L est un espace de type T_0 (problème 2.25(iii.b) et remarque 4.51(iv)). D'après la proposition 4.57, il s'ensuit que L est un espace spectral, et $L' = L^c$. En dernier lieu, chaque $v_i : L' \rightarrow T_i^c$ est compacte, d'après l'exercice 1.26(iii) ; comme la topologie de L' est plus fine que celle de L , et que T_i et T_i^c ont les mêmes parties ouvertes compactes, il s'ensuit que $v_i : L \rightarrow T_i$ est compacte pour tout $i \in I$.

Partie (ii) : La preuve de (i) montre que $v_\bullet$ est un cône dans la catégorie TopSp . Or, soit $(g_i : Z \rightarrow T_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ un autre cône dans TopSp de base $T_\bullet$; alors il existe une unique application continue $g : Z \rightarrow L$ telle que $v_i \circ g = g_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et afin de montrer l'universalité de $v_\bullet$ dans la catégorie TopSp , on doit vérifier que g est compacte. Mais on vient de voir que tout élément de la prébase $\mathcal{B}$ de L est une partie ouverte compacte de L , donc il suffit de vérifier que si $(V_j := v_{i_j}^{-1}(U_j) \mid j = 1, \dots, n)$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $g^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_n)$ est une partie compacte de Z . Pour cela, la remarque 4.51(i) nous ramène à montrer que la partie $g^{-1}(V_j) = g_{i_j}^{-1}(U_j)$ est compacte pour tout $j = 1, \dots, n$, ce qui est clair, car g_{i_j} est compacte. Ensuite, l'universalité de $v_\bullet^c$ dans la catégorie Top a déjà été remarquée lors de la preuve de (i) ; l'universalité de $v_\bullet^c$ dans cTDisc est alors une conséquence immédiate, mais elle se déduit aussi par voie catégorique, avec la proposition 2.49(i) et le problème 4.77(iii.b).

Problème 4.79, partie (i) : Soit $t \in T$, et soient par l'absurde $s, s' \in S$ deux spécialisations $\mathcal{S}$ -admissibles distinctes de t . Quitte à échanger les rôles de s et s' , on peut supposer qu'il existe un voisinage U de s dans T avec $s' \notin U$. D'après (S1), on trouve alors une partie $U' \subset U$ ouverte dans T et $\mathcal{S}$ -fermée avec $s \in U'$; évidemment $t \in U'$, mais comme U' est $\mathcal{S}$ -fermée, il vient $s' \in U'$, contradiction.

Partie (ii) : Notons par $\mathcal{C}$ (resp. par $\mathcal{U}$) l'ensemble des parties $U \subset S$ telles que $r^{-1}U$ soit constructible (resp. constructible et ouverte) dans T . On remarque d'abord que $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de S : en effet, pour toute partie U de S on a $U = S \cap r^{-1}U$ (détails laissés aux soins du lecteur), en particulier tout $U \in \mathcal{U}$ est une partie ouverte de S ; et d'autre part, (S1) implique que pour tout $s \in S$ et tout voisinage $V \subset S$ de s il existe $U \in \mathcal{U}$ avec $s \in U$ et $U \subset V$, d'où l'assertion. Ensuite, soit $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ la topologie sur S engendrée par $\mathcal{C}$: on voit aisément que $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ est séparée, et tout élément de $\mathcal{U}$ est une partie ouverte et fermée dans la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{C}$. De plus, $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ est compacte : en

effet, si $S = \bigcup_{i \in I} U_i$ pour une famille $(U_i | i \in I)$ de parties ouvertes pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{C}$, on a $T = \bigcup_{i \in I} r^{-1}U_i$, et par construction, chaque partie $r^{-1}U_i$ est ind-constructible dans T ; par le théorème 4.54(ii), il s'ensuit qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $T = \bigcup_{i \in J} r^{-1}U_i$, donc $S = \bigcup_{i \in J} U_i$, d'où l'assertion. On voit ainsi que toutes les conditions sont remplies pour pouvoir appliquer la proposition 4.57, et on obtient que S est spectral et $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ est sa topologie constructible.

En dernier lieu, par ce qui précède il est clair que r est continue. De plus, tout $U \in \mathcal{U}$ est fermé pour la topologie compacte $\mathcal{T}_\mathcal{C}$, en particulier U est compact dans $\mathcal{T}_\mathcal{C}$, et *a fortiori*, aussi dans la topologie de S ; de l'autre côté, $r^{-1}U$ est compact dans T . Cela montre que r est une application compacte.

Partie (iii) : Avec (ii) et la remarque 4.59(ii) on sait que si Z est constructible dans S , alors $r^{-1}Z$ est constructible dans T . Réciproquement, soit $r^{-1}Z$ constructible dans T ; alors il en est de même pour $r^{-1}(S \setminus Z)$, donc $Z, S \setminus Z \in \mathcal{C}$, et par (ii) il s'ensuit que Z et $S \setminus Z$ sont des parties ouvertes de S^c ; *i.e.* Z est ouvert et fermé dans l'espace compact S^c , et on déduit aisément que Z est constructible dans S .

Exercice 4.86 : Soient Λ une petite catégorie, $U \subset T$ une partie ouverte, $\mathcal{U}$ un recouvrement de U , et considérons un foncteur

$$\mathcal{F}_\bullet : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{T}} \quad \lambda \mapsto \mathcal{F}_\lambda \quad (f : \lambda \rightarrow \mu) \mapsto (\mathcal{F}_f : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu).$$

Notons par $\mathcal{L}$ la limite du foncteur $i \circ \mathcal{F}_\bullet : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{T}}$. Par hypothèse, pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ le cône $(\rho_{\lambda, U, V} : \mathcal{F}_\lambda(U) \rightarrow \mathcal{F}_\lambda(V) | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ induit par les restrictions est universel, et compte tenu du lemme 2.52(i), on doit vérifier qu'il en est de même pour le cône correspondant $(\rho_V : \mathcal{L}(U) \rightarrow \mathcal{L}(V) | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$. Pour cela, considérons les foncteurs

$$F, c_{\mathcal{F}} : (\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}} \times \Lambda \rightarrow \mathcal{A}$$

définis par $c_{\mathcal{F}}(V, \lambda) := \mathcal{F}_\lambda(U)$ et $F(V, \lambda) := \mathcal{F}_\lambda(V)$ pour tout $V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ et tout $\lambda \in \Lambda \text{Ob}(\Lambda)$, et tels que pour tout morphisme $f : \lambda \rightarrow \mu$ de Λ et toute inclusion $j : V' \rightarrow V$ d'éléments de $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, on a $c_{\mathcal{F}}(j, f) := \mathcal{F}_f(U) : \mathcal{F}_\lambda(U) \rightarrow \mathcal{F}_\mu(U)$ et $F(j, \lambda) := \mathcal{F}_\mu(V') \circ \rho_{\lambda, V, V'} : \mathcal{F}_\lambda(V) \rightarrow \mathcal{F}_\lambda(V') \rightarrow \mathcal{F}_\mu(V')$ (où $\rho_{\lambda, V, V'}$ désigne la restriction à V' des V -sections de $\mathcal{F}_\lambda$). On a en outre une transformation naturelle

$$\rho_{\bullet, \bullet} : c_{\mathcal{F}} \rightarrow F \quad (V, \lambda) \mapsto \rho_{\lambda, U, V}.$$

Avec la notation du lemme 2.55(ii), noter que $\text{Lim}_\Lambda'' F : (\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ coïncide avec la restriction de $\mathcal{L} : \text{Ouv}(T)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ à la sous-catégorie pleine $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}}$; d'autre part, $\text{Lim}_\Lambda'' c_{\mathcal{F}}$ est le foncteur constant $c_{\mathcal{L}(U)} : (\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$, et $\text{Lim}_\Lambda'' \rho_{\bullet, \bullet}$ n'est rien d'autre que le cône $(\rho_V | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$. On est ainsi ramené à vérifier que $\text{Lim}_{(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}}}'' \text{Lim}_\Lambda'' \rho_{\bullet, \bullet}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$. Mais l'universalité de chaque cône $(\rho_{\lambda, U, V} | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ revient à dire que $\text{Lim}_{(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}}} \rho_{\bullet, \bullet}$ est un isomorphisme de $\text{Fun}(\Lambda, \mathcal{A})$, donc $\text{Lim}_\Lambda \text{Lim}_{(\mathcal{U} \wedge \mathcal{U})^{\text{op}}} \rho_{\bullet, \bullet}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$, et l'assertion découle de la proposition 2.57(i).

Problème 4.88, partie (i) : Soient $U \in \mathcal{T}$ et $[s^\bullet, \mathcal{U}], [t^\bullet, \mathcal{U}'] \in \mathcal{F}^+(U)$; noter que $[s^\bullet, \mathcal{U}] = [s_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'}^\bullet, \mathcal{U} \cap \mathcal{U}']$ et de même pour $[t^\bullet, \mathcal{U}']$, donc on peut supposer que $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement de U tel que $[s_{\mathcal{U}/V}^\bullet, \mathcal{U}/V] = [t_{\mathcal{U}/V}^\bullet, \mathcal{U}/V]$ pour tout $V \in \mathcal{V}$; il faut montrer que $[s^\bullet, \mathcal{U}] = [t^\bullet, \mathcal{U}]$. L'hypothèse veut dire qu'il existe pour tout $V \in \mathcal{V}$ un crible $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{U}/V$ couvrant V et tel que $s_{\mathcal{U}_V}^\bullet = t_{\mathcal{U}_V}^\bullet$. Ainsi, $\mathcal{V}' := \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_V$ est un crible couvrant U avec $s_{\mathcal{V}'}^\bullet = t_{\mathcal{V}'}^\bullet$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement d'une partie ouverte $U \subset T$, et

$$([s^{Q, \bullet}, \mathcal{U}_Q] | Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$$

une suite cohérente de sections de $\mathcal{F}^+$; donc $[s^{Q, \bullet}, \mathcal{U}_Q] \in \mathcal{F}^+(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ et si $Q' \subset Q$ sont deux éléments de $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, la restriction de $[s^{Q, \bullet}, \mathcal{U}_Q]$ à Q' coïncide avec $[s^{Q', \bullet}, \mathcal{U}_{Q'}]$. Cela veut dire que $\mathcal{U}_Q$ est un crible couvrant Q pour tout $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, et

$s^{Q,\bullet}$ est à son tour un élément de $\int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}_Q)$, i.e. une suite cohérente $(s^{Q,V} \mid V \in \mathcal{U}_Q)$ de sections de $\mathcal{F}$. Par hypothèse, pour $Q' \subset Q$ comme ci-dessus il existe alors un crible $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_{Q'}$ couvrant Q' tel que

$$(*) \quad s_{\mathcal{V}}^{Q,\bullet} = s_{\mathcal{V}}^{Q',\bullet}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est séparé par hypothèse, les restrictions induisent une injection

$$\mathcal{F}(V) \rightarrow \prod_{W \in \mathcal{V}/V} \mathcal{F}(W) \quad \forall V \in \mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_{Q'}.$$

D'autre part, d'après (*) on a $s^{Q,W} = s^{Q',W}$ pour tout $W \in \mathcal{V}/V$; par suite $s^{Q,V} = s^{Q',V}$ pour tout $V \in \mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_{Q'}$, et cela pour tout couple $Q' \subset Q$ d'éléments de $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$. Rappelons que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, et posons $\mathcal{U}' := \bigcup_{Q \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_Q$; évidemment $\mathcal{U}'$ est un crible couvrant U . Pour tout $V \in \mathcal{U}'$ choisissons $Q \in \mathcal{U}$ tel que $V \in \mathcal{U}_Q$, et posons $t^V := s^{Q,V}$; par ce qui précède, la définition de t^V ne dépend pas du choix de Q , et il est clair que le système $(t^V \mid V \in \mathcal{U}')$ est une suite cohérente, i.e. un élément $t^\bullet \in \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}')$, d'où la section $[t^\bullet, \mathcal{U}']$ de $\mathcal{F}^+(U)$. Evidemment la restriction de $[t^\bullet, \mathcal{U}']$ à chaque partie ouverte $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ coïncide avec $[s^{Q,\bullet}, \mathcal{U}_Q]$, et comme on sait déjà d'après (i) que $\mathcal{F}^+$ est séparé, il existe au plus une section de $\mathcal{F}^+(U)$ avec cette propriété. Cela achève de montrer que $\mathcal{F}^+$ est un faisceau.

Partie (iii) : Soient $\mathcal{F}$ un faisceau et $\mathcal{G}$ un préfaisceau sur T ; montrons d'abord que tout morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ est la composition de $j_{\mathcal{G}}^T : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$ et d'un unique morphisme de préfaisceaux $\phi^* : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{F}$. Pour vérifier l'unicité de ϕ^* , soient $U \in \mathcal{T}$ et $[s^\bullet, \mathcal{U}] \in \mathcal{G}^+(U)$; il vient $\phi_U^*([s^\bullet, \mathcal{U}])_Q = \phi_Q^*(j_{\mathcal{G},Q}^T(s^Q)) = \phi_Q(s^Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{U}$, et comme $\mathcal{F}$ est séparé, ces conditions déterminent $\phi_U^*([s^\bullet, \mathcal{U}])$, d'où l'assertion. Pour l'existence de ϕ^* , on est ramené à vérifier que $j_{\mathcal{F}}^T$ est un isomorphisme, car avec le diagramme commutatif de préfaisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F} \\ j_{\mathcal{G}}^T \downarrow & & \downarrow j_{\mathcal{F}}^T \\ \mathcal{G}^+ & \xrightarrow{\phi^+} & \mathcal{F}^+ \end{array}$$

on aura alors $\phi^* = j_{\mathcal{F}}^{T-1} \circ \phi^+$. Or, puisque $\mathcal{F}$ est un faisceau, toute partie ouverte $U \subset T$ et tout crible $\mathcal{U}$ couvrant U induisent une bijection :

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \quad s \mapsto (s_V \mid V \in \mathcal{U}).$$

Il s'ensuit aisément que toutes les applications de transition du système filtrant

$$(\int_{\lambda_T^{\text{op}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \text{Crib}(U)^{\text{op}})$$

sont bijectives, donc de même pour $j_{\mathcal{F},U}^T : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$, comme souhaité. Ensuite, (i) et (ii) impliquent que $\mathcal{G}^a$ est un faisceau, pour tout préfaisceau $\mathcal{G}$; par suite ϕ est aussi la composition de $u_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^a$ et d'un unique morphisme de faisceaux $\phi^{**} : \mathcal{G}^a \rightarrow \mathcal{F}$. Ainsi, on obtient une bijection :

$$(**) \quad \widehat{T}(\mathcal{G}, i_T(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \widehat{T}(\mathcal{G}^a, \mathcal{F}) \quad \phi \mapsto \phi^{**}$$

dont l'application réciproque est donnée par l'association $\psi \mapsto \psi \circ u_{\mathcal{G}}$. Il reste à vérifier que (**) est naturelle par rapport aux morphismes de préfaisceaux $\alpha : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ et aux morphismes de faisceaux $\beta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$; mais pour ϕ comme ci-dessus, l'unicité de $(\phi \circ \alpha)^{**}$ entraîne aussitôt que $(\phi \circ \alpha)^{**} = \phi^{**} \circ \alpha^a$ (les détails sont confiés au lecteur), et de même on voit aisément que $(\beta \circ \phi)^{**} = \beta \circ \phi^{**}$, d'où l'assertion. Cela achève de montrer que le système de bijections (**) est une adjonction pour le couple $((-)^a, i_T)$, et pour tout faisceau $\mathcal{F}$ la bijection réciproque associée à $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ le morphisme $u_{\mathcal{F}}^T$, i.e. l'association $\mathcal{F} \mapsto u_{\mathcal{F}}^T$ est bien l'unité de cette adjonction.

Partie (iv) : Par ce qui précède, il reste à montrer que le foncteur $(-)^a$ est exact, et on sait déjà qu'il est exact à droite, car il admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii)). Or, comme la catégorie $\mathbf{Ens}$ est complète et cocomplète, il en est de même pour la catégorie $\hat{T}$ (lemme 2.55(ii) et remarque 2.58(ii)) ; avec le lemme 2.52(ii,iii) on déduit que la catégorie $\tilde{T}$ est complète, et que le foncteur d'inclusion $i_{\tilde{T}} : \tilde{T} \rightarrow \hat{T}$ commute avec toute limite de $\tilde{T}$. Comme les limites se calculent terme à terme dans $\hat{T}$ (voir la remarque 2.56), il en est ainsi de même pour les limites de $\tilde{T}$. On est alors ramené à vérifier que le foncteur $(-)^+ : \hat{T} \rightarrow \hat{T}$ est exact à gauche. Mais $\int_{\lambda_T^{\text{op}}}$ est exact à gauche, car il est un adjoint à droite (proposition 2.49(i)), donc on n'a qu'à montrer l'exactitude à gauche de $\int^{\mu_T^{\text{op}}}$. Pour cela, d'après le problème 2.65(ii), il suffit de vérifier que $\mathbf{Crib}_T^{\text{op}}$ est finiment cocomplète, et que μ_T^{op} est exact à droite, i.e. que $\mathbf{Crib}_T$ est finiment complète et que μ_T est exact à gauche. Or, comme $\mathbf{Crib}_T(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ contient au plus un morphisme, pour tous $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$, les égaliseurs de $\mathbf{Crib}_T$ sont trivialement représentables, et si $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ sont deux cribles de T , on voit aisément que $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ représente le produit de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ dans $\mathbf{Crib}_T$; d'après la proposition 2.40, cela achève de montrer que $\mathbf{Crib}_T$ est finiment complète. De même, le égaliseurs de $\mathbf{Ouv}(T)$ sont trivialement représentables, et $U \cap U'$ représente le produit de U et U' dans $\mathbf{Ouv}(T)$, pour tout couple de parties ouverte $U, U' \subset T$; il est alors clair que μ_T commute avec tout égaliseur et tout produit fini, donc il est bien exact à gauche, par l'exercice 2.42.

Partie (v) : On a déjà remarqué que $\hat{T}$ et $\tilde{T}$ sont complètes, et $\hat{T}$ est cocomplète. En dernier lieu, soit $\mathcal{F}_\bullet : I \rightarrow \tilde{T}$ un foncteur ; on voit aisément que le faisceau $(\text{colim}_I i_T(\mathcal{F}_\bullet))^a$ représente la colimite de $\mathcal{F}_\bullet$, et en particulier $\hat{T}$ est cocomplète.

Exercice 4.90, partie (i) : On raisonne comme pour le problème 4.88(v). Tout d'abord, on a $\mathbb{Z}_{\hat{T}} - \mathbf{Alg} = \mathbf{Fun}(\mathbf{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathbb{Z} - \mathbf{Alg})$, et comme la catégorie $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ est complète et cocomplète (exemple 2.44(ii)), il en est de même pour $\mathbb{Z}_{\hat{T}} - \mathbf{Alg}$ (lemme 2.55(ii) et remarque 2.58(ii)) ; ensuite, comme l'inclusion $i_T : \mathbb{Z}_{\tilde{T}} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbb{Z}_{\hat{T}} - \mathbf{Alg}$ est un adjoint à droite (remarque 4.89(iv)), on déduit grâce au lemme 2.52(ii,iii) que $\mathbb{Z}_{\tilde{T}} - \mathbf{Alg}$ est complète, et que ses limites se calculent terme à terme. En dernier lieu, la colimite de tout foncteur $\mathcal{F}_\bullet : I \rightarrow \mathbb{Z}_{\tilde{T}} - \mathbf{Alg}$ est représentée par $(\text{colim}_I i_T(\mathcal{F}_\bullet))^a$. On raisonne de même pour $A_{\hat{T}} - \mathbf{Mod}$ et $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$.

Partie (ii) : Avec l'exemple 4.16 et l'exercice 4.17 on sait déjà que $A_{\hat{T}} - \mathbf{Mod}$ est une catégorie de Grothendieck. Par suite, $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$ est évidemment pré-additive, donc aussi additive, au vu de (i). Soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$; puisque l'adjoint à gauche $(-)^a$ de l'inclusion $i_T : A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod} \rightarrow A_{\hat{T}} - \mathbf{Mod}$ est exact (problème 4.88(iv)), on voit aisément que le morphisme induit $\beta_f : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ coïncide avec $(\beta_{i_T(f)})^a$, sous les identifications naturelles $(i_T \mathcal{F})^a \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ et $(i_T \mathcal{G})^a \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$. Mais $\beta_{i_T(f)}$ est un isomorphisme, donc de même pour β_f , et cela montre que $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$ est une catégorie abélienne. Ensuite, soit $(\mathcal{F}_i | i \in I)$ une famille de sous-objets d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ de A -modules ; rappelons que le sous-objet $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est représenté l'image du morphisme induit $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ (proposition 2.94), et de même pour la réunion d'une famille $\mathcal{G}_\bullet := (\mathcal{G}_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ de sous-objets d'un faisceau $\mathcal{G}$ de A -modules. Mais le foncteur $(-)^a$ est exact et commute avec toute colimite, car il est un adjoint à gauche (proposition 2.49(ii)), et $(i_T(\mathcal{G}_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ est une famille de sous-objets de $i_T(\mathcal{G})$ (exercice 2.66(ii)), donc $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_T(\mathcal{G}_\lambda))^a$. Or, si $\mathcal{G}_\bullet$ est une famille filtrante de sous-objets de $\mathcal{G}$, il s'ensuit également que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda) &= \mathcal{H} \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_T(\mathcal{G}_\lambda))^a = (i_T(\mathcal{H}) \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_T(\mathcal{G}_\lambda)))^a \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (i_T(\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_\lambda))^a = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_\lambda) \end{aligned}$$

pour tout sous-objet $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$. Cela achève de vérifier que $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$ est une catégorie de Grothendieck. Afin d'exhiber un générateur projectif pour $A_{\tilde{T}} - \mathbf{Mod}$, on raisonne

comme dans la preuve de la proposition 4.13 : pour toute partie ouverte $U \subset T$, soit $A_U : \text{Ouv}(T)^{\text{op}} \rightarrow A - \text{Mod}$ la composition du foncteur représentable $h_{U^{\text{op}}} : \text{Ouv}(T)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ avec le foncteur $A^{(-)} : \text{Ens} \rightarrow A - \text{Mod}$, adjoint à gauche du foncteur d'oubli $F : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$ (voir le problème 2.10(ii)) ; noter que $F_T := \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, F) : A_{\widehat{T}} - \text{Mod} \rightarrow \widehat{T}$ est le foncteur d'oubli évident, et $A_T^{(-)} := \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, A^{(-)}) : \widehat{T} \rightarrow A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$ est son adjoint à gauche (remarque 2.15(ii)). Comme $A_U = A_T^{(-)}(h_{U^{\text{op}}})$, le lemme de Yoneda fournit des bijections naturelles :

$$\text{Nat}(A_U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(h_{U^{\text{op}}}, F_T(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U) \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ob}(A_{\widehat{T}} - \text{Mod}).$$

Posons $\mathcal{P} := \bigoplus_{U \subset T} A_U$; on déduit une bijection naturelle :

$$\text{Nat}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \prod_{U \subset T} \mathcal{F}(U) \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ob}(A_{\widehat{T}} - \text{Mod})$$

et on voit aisément qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes abéliens, pour la loi d'addition du A -module $\prod_{U \subset T} \mathcal{F}(U)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Autrement dit, $\mathcal{P}$ représente le foncteur $\Phi : A_{\widehat{T}} - \text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ tel que $\mathcal{F} \mapsto \prod_{U \subset T} \mathcal{F}(U)$ pour tout préfaisceau de A -modules $\mathcal{F}$ sur T , et $f \mapsto \prod_{U \subset T} f_U$ pour tout morphisme $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$. On peut alors reprendre la preuve de la proposition 4.13, pour conclure que $\mathcal{P}$ est le générateur projectif souhaité.

En dernier lieu, il s'ensuit aisément que le faisceau associé de A -modules $\mathcal{P}^a$ est un générateur de $A_{\widehat{T}} - \text{Mod}$, et cela conclut la preuve.

Exercice 4.93, partie (i) : Compte tenu du problème 4.88(iv), il suffit de montrer que $\widehat{f}^{-1}$ est exact, et on sait déjà qu'il est exact à droite, car il admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii)). Pour cela, d'après le problème 2.65(ii), il suffit de vérifier que $\text{Ouv}(S)$ est finiment complète et que $\text{Ouv}(f)$ est exact à gauche. On raisonne comme dans la solution du problème 4.88(iv) : les égaliseurs de $\text{Ouv}(S)$ sont trivialement représentables car entre deux objets U, U' de $\text{Ouv}(S)$ il y a au plus un morphisme, et $U \cap U'$ représente le produit de tout tel couple d'objets ; donc $\text{Ouv}(S)$ est finiment complète (proposition 2.40). De même, $\text{Ouv}(f)$ commute trivialement avec les égaliseurs, et aussi avec les produit de U et U' , car $f^{-1}(U \cap U') = f^{-1}U \cap f^{-1}U'$, donc $\text{Ouv}(f)$ est exact à gauche (exercice 2.42).

Partie (ii) : Evidemment il suffit de montrer l'assertion pour $\widehat{f}_*$. Par inspection directe des définitions, on constate que $\widehat{f}_*$ est fidèle. Soient ensuite $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux préfaisceaux sur T , et $\phi : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur S , i.e. la donnée pour toute partie ouverte $U \subset S$, d'une application $\phi_U : \mathcal{F}(f^{-1}U) \rightarrow \mathcal{G}(f^{-1}U)$, compatible avec inclusions $U' \subset U$ de parties ouvertes ; si $f^{-1}U = f^{-1}U'$, on a alors $\phi_U = \phi_{U'}$, et d'autre part, par hypothèse toute partie ouverte de T est de la forme $V = f^{-1}U$, pour une partie ouverte $U \subset S$. Posons alors $\phi_V^* := \phi_U : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$, pour toute telle V ; on voit aussitôt que le système $(\phi_V^* \mid V \subset T)$ est un morphisme $\phi^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ avec $f_*(\phi^*) = \phi$, et cela achève de vérifier que $\widehat{f}_*$ est un foncteur plein.

Exercice 4.95 : Si $f \in \mathcal{C}(T) \setminus \mathfrak{m}$, la partie $U_f := f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est un voisinage ouvert de t dans T , et $1/f \in \mathcal{C}_T(U_f)$. Par suite, $[f, T]_t \cdot [1/f, U_f]_t = [1, T]_t$ dans $\mathcal{C}_{T,t}$. L'existence et unicité d'un homomorphisme d'anneaux $\omega : \mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{C}_{T,t}$ prolongeant l'homomorphisme $(*)$ est alors une conséquence immédiate de la propriété universelle des localisations (proposition 3.25). Pour montrer que ω est injective, soient $f/g, f'/g' \in \mathcal{C}(T)_{\mathfrak{m}}$ tels que $\omega(f/g) = \omega(f'/g')$; cela revient à dire qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset U_g \cap U_{g'}$ de t , tel que

$$f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in U.$$

Comme T est complètement régulier, on peut trouver une fonction continue $h : T \rightarrow [0, 1]$ telle que $h(t) = 1$ et $h(T \setminus U) = 0$; on voit aisément que $h \in \mathcal{C}(T) \setminus \mathfrak{m}$ et $hg'f = hgf'$ dans

$\mathcal{C}(T)$, d'où l'assertion. Pour la surjectivité, soit $[\phi, U]_t$ un germe de fonction continue autour de t ; on fabrique une fonction continue $h : T \rightarrow [0, 1]$ comme ci-dessus, avec $h(t) = 1$ et $h(T \setminus U) = 0$, et on pose

$$h'(x) := \min(1, \max(0, 3h(x) - 1)) \quad \forall x \in T.$$

Evidemment h' est une fonction continue telle que $h'^{-1}(1)$ est un voisinage de t et il existe une partie ouverte U' de T avec $T \setminus U \subset U' \subset h'^{-1}(0)$. Ensuite on pose

$$\phi'(x) := \begin{cases} h'(x) \cdot \phi(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in T \setminus U. \end{cases}$$

On voit aisément que ϕ' est continue sur T , et $[\phi', T]_t = [\phi, U]_t$, d'où l'assertion.

Exercice 4.96, partie (i) : Soient $U \subset T$ une partie ouverte et $s \in \mathcal{F}(U)$. Par hypothèse on a $\phi_t([s, U]_t) = \psi_t([s, U]_t)$ pour tout $t \in U$, où l'on dénote par $[s, U]_t$ la classe de s dans $\mathcal{F}_t$. D'après l'exercice 2.31(i), cela veut dire que tout $t \in U$ admet un voisinage ouvert $U_t \subset U$ tel que $\phi_{U_t}(s_{U_t}) = \psi_{U_t}(s_{U_t})$, i.e. $(\phi_U(s))_{U_t} = (\psi_U(s))_{U_t}$. Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont séparés, il vient $\phi_U(s) = \psi_U(s)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : On est ramené aussitôt à montrer que la transformation naturelle $j_{\mathcal{F}}^T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ (notation du §4.3.1) induit une bijection $j_{\mathcal{F},t}^T : \mathcal{F}_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_t^+$. Or, tout élément s_t^+ de $\mathcal{F}_t^+$ est la classe d'équivalence d'un couple $([s^\bullet, \mathcal{U}], U)$ avec U un voisinage ouvert de t dans T et $[s^\bullet, \mathcal{U}] \in \mathcal{F}^+(U)$ étant à son tour la classe d'équivalence du couple composé d'un crible $\mathcal{U}$ couvrant U et d'une suite cohérente $s^\bullet := (s^V \mid V \in \mathcal{U})$ de sections de $\mathcal{F}$. Choisissons $V \in \mathcal{U}$ avec $t \in V$, et soit $s_t := [s^V, V] \in \mathcal{F}_t$; il vient $j_{\mathcal{F},t}^T(s_t) = s_t^+$, d'où la surjectivité de $j_{\mathcal{F},t}^T$. Ensuite, soient $s_t, s'_t \in \mathcal{F}_t$ tels que $j_{\mathcal{F},t}^T(s_t) = j_{\mathcal{F},t}^T(s'_t)$; on trouve un voisinage ouvert U de t dans T et $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ avec $s_t = [s, U]$ et $s'_t = [s', U]$. Ainsi, $j_{\mathcal{F},t}^T(s_t)$ est la classe du couple $([s^\bullet, \lambda_T(U)], U)$, avec $s^\bullet := (s_V \mid V \subset U)$, et de même pour $j_{\mathcal{F},t}^T(s'_t)$. L'hypothèse revient à dire qu'il existe un voisinage $U' \subset U$ de t tel que les classes $[s^\bullet, \lambda_T(U)]$ et $[s'^\bullet, \lambda_T(U)]$ ont la même image dans $\mathcal{F}^+(U')$. Cela veut dire qu'il existe un crible $\mathcal{U}'$ de T couvrant U' tel que $s_V = s'_V$ pour tout $V \in \mathcal{U}'$, d'où finalement $s_t = s'_t$ et cela achève de montrer l'injectivité de $j_{\mathcal{F},t}^T$.

Exercice 4.98, partie (i) : Evidemment $f \circ j_t = j_{f(t)}$, avec la notation de §4.3.3; au vu de la remarque 4.94, on déduit un isomorphisme canonique de foncteurs $\widehat{j_t}^{-1} \circ \widehat{f}^{-1} \xrightarrow{\sim} \widehat{j_{f(t)}}^{-1}$, d'où l'isomorphisme souhaité :

$$(*) \quad (-)_t \circ \widehat{f}^{-1} = \Gamma \circ \widehat{j_t}^{-1} \circ \widehat{f}^{-1} \xrightarrow{\sim} \Gamma \circ \widehat{j_{f(t)}}^{-1} = (-)_{f(t)}.$$

La construction explicite de la remarque 4.94 fournit la description suivante de (*). Rappelons que tout élément de $(f^{-1}\mathcal{G})_t$ est la classe d'équivalence -- qu'on notera ici par $[\sigma, U]_t$ -- d'un couple (σ, U) tel que $U \subset T$ est un voisinage ouvert de t , et $\sigma \in f^{-1}\mathcal{G}(U)$; à son tour, $\sigma = [s, V]_U$ est la classe d'équivalence d'un couple (s, V) tel que $V \in \mathcal{U}(f, U)$ et $s \in \mathcal{G}(V)$. L'isomorphisme (*) est alors l'application :

$$[[s, V]_U, U]_t \mapsto [s, V]_{f(t)}$$

où $[s, V]_{f(t)}$ dénote de manière analogue la classe dans $\mathcal{G}_{f(t)}$ du couple (s, V) .

Partie (ii) : D'après la remarque 4.94, on a un isomorphisme naturel de préfaisceaux $\widehat{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g} : \widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} (\widehat{g \circ f})^{-1} \mathcal{H}$, d'où un isomorphisme de faisceaux

$$(\widehat{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})^a : (\widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})^a \xrightarrow{\sim} (\widehat{g \circ f})^{-1} \mathcal{H}.$$

De l'autre côté, l'unité d'adjonction $u_{\widehat{g}^{-1}\mathcal{H}}^S : \widehat{g}^{-1} \mathcal{H} \rightarrow \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H}$ du problème 4.88(iv) induit un morphisme naturel de faisceaux

$$\tau_{\mathcal{H}} : (\widehat{f}^{-1} \circ u_{\widehat{g}^{-1}\mathcal{H}}^S)^a : (\widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})^a \rightarrow \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H}.$$

Vérifions que $\tau_{\mathcal{H}}$ est un isomorphisme ; on considère le diagramme commutatif

$$\mathcal{D} : \begin{array}{ccc} \widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H} & \xrightarrow{\widehat{f}^{-1}(u_{\widehat{g}^{-1}\mathcal{H}}^S)} & \widehat{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H} \\ \downarrow u_{\widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H}}^T & & \downarrow u_{\widehat{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H}}^T \\ (\widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})^a & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{H}}} & \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H}. \end{array}$$

Pour tout $t \in T$, en prenant terme à terme la fibre au point t dans le diagramme $\mathcal{D}$, on obtient un diagramme commutatif d'ensembles $\mathcal{D}_t$ dont les flèches verticales sont des bijections (exercice 4.96(ii)) ; au vu du théorème 4.97(ii) on est alors ramené à montrer que $(\widehat{f}^{-1} \circ u_{\widehat{g}^{-1}\mathcal{H}}^S)_t : (\widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})_t \rightarrow (\widehat{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H})_t$ est une bijection. Mais (i) identifie cette application avec $(u_{\widehat{g}^{-1}\mathcal{H}}^S)_{f(t)} : (\widehat{g}^{-1} \mathcal{H})_{f(t)} \rightarrow (\widetilde{g}^{-1} \mathcal{H})_{f(t)}$, d'où l'assertion, par l'exercice 4.96(ii). On posera alors

$$\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g} := (\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})^a \circ \tau_{\mathcal{H}}^{-1} : \widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{g \circ f})^{-1} \mathcal{H}.$$

Il reste à vérifier la commutativité du diagramme (†). Pour cela, on considère le diagramme suivant, où l'on a dénoté indifféremment par u tous les morphismes fournis par l'unité d'adjonction du problème 4.88(iv) :

$$\begin{array}{ccccc} (\widetilde{f}^{-1} \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H})_t & \xrightarrow{(\tau_{\mathcal{H}})^{-1}_t} & (\widehat{f}^{-1} \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})_t^a & \xrightarrow{(\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})_t^a} & ((\widetilde{g \circ f})^{-1} \mathcal{H})_t \\ \downarrow u_t^{-1} & & \downarrow u_t^{-1} & & \downarrow u_t^{-1} \\ (\widehat{f}^{-1} \widetilde{g}^{-1} \mathcal{H})_t & \xrightarrow{(\widehat{f}^{-1} u)_t^{-1}} & (\widehat{f}^{-1} \widehat{g}^{-1} \mathcal{H})_t & \xrightarrow{(\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})_t} & ((\widehat{g \circ f})^{-1} \mathcal{H})_t \\ \downarrow \widetilde{\omega}_{f, \widehat{g}^{-1} \mathcal{H}}^t & & \downarrow \widetilde{\omega}_{f, \widehat{g}^{-1} \mathcal{H}}^t & & \downarrow \widetilde{\omega}_{g \circ f, \mathcal{H}}^t \\ (\widetilde{g}^{-1} \mathcal{H})_{f(t)} & \xrightarrow{u_{f(t)}^{-1}} & (\widehat{g}^{-1} \mathcal{H})_{f(t)} & \xrightarrow{\widehat{\omega}_{g, \mathcal{H}}^{f(t)}} & \mathcal{H}_{gf(t)}. \end{array}$$

Par construction, la composition des deux flèches horizontales en haut donne $(\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g})_t$, et celle des deux flèches verticales à droite donne $\widetilde{\omega}_{g \circ f, \mathcal{H}}^t$. De même, la composition des deux flèches verticales à gauche donne $\widetilde{\omega}_{f, \widehat{g}^{-1} \mathcal{H}}^t$, et celle des deux flèches horizontales en bas donne $\widehat{\omega}_{g, \mathcal{H}}^{f(t)}$. De plus, les deux sous-diagrammes carrés en haut commutent par construction, et de même pour le carré en bas à gauche. Il suffit donc de montrer la commutativité du sous-diagramme carré en bas à droite ; mais cela résulte aussitôt des descriptions explicites des bijections $\widehat{\omega}_{\bullet, \bullet}^{f,g}$ et $\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g}$ fournies par (i) et par la remarque 4.94 : les détails seront confiés aux soins du lecteur. En dernier lieu, compte tenu de l'exercice 4.96(i), il est clair que la commutativité de (†) pour tout $t \in T$ détermine l'isomorphisme $\widetilde{\gamma}_{\mathcal{H}}^{f,g}$.

Exercice 4.102, partie (ii) : Par le lemme 4.99(i), il existe un A -module Q tel que $P \oplus Q$ est un A -module libre ; par suite $(B \otimes_A P) \oplus (B \otimes_A Q) = B \otimes_A (P \oplus Q)$ est un B -module libre, d'où l'assertion, encore par le lemme 4.99(i).

Au vu de l'isomorphisme naturel $S^{-1}A \otimes_A P \xrightarrow{\sim} S^{-1}P$ de $S^{-1}A$ -modules, (i) suit aussitôt de (ii) ; puis (iii) découle du corollaire 4.100 et du problème 3.83(ii.b).

Exercice 4.107, partie (i) : On fixe une suite de nombres réels $(t_n \mid n \in \mathbb{N})$ strictement décroissante qui tend vers 0, et avec $t_0 < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue telle que

$$f_n(x) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{x - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} \right) \right).$$

Or, si $g \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[0, t_n] \subset f^{-1}(0)$, et on voit aisément que $g \cdot f_k = g$ pour tout $k \geq n$, donc la famille $(f_{n+1} \mid n \in \mathbb{N})$ est un système de générateurs de I .

Evidemment, on obtient une surjection A -linéaire $\phi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow I$ avec $\phi(e_n) := f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où $(e_n \mid n \in \mathbb{N})$ est la base canonique).

Partie (ii) : Soit aussi $f_{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction identiquement nulle. Il vient

$$(*) \quad f_{n+k} \cdot f_n = f_n \quad \text{pour tout } k \geq 1 \text{ et tout } n \geq -1.$$

On considère l'application A -linéaire

$$\psi : A \rightarrow A^{(\mathbb{N})} \quad : \quad g \mapsto (g_n := g \cdot (f_n - f_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}).$$

On pose $t_{-1} := 2$; noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(f_n - f_{n-1})(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{n+1} < x < t_{n-1}.$$

Or, si $g \in I$, on déduit qu'il existe $n_g \in \mathbb{N}$ tel que $g_i = 0$ pour tout $i > n_g$. Donc, ψ se restreint en une application $\psi' : I \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$. De plus, au vu de $(*)$ on calcule :

$$\phi \circ \psi'(g) = \sum_{i=0}^{n_g} g_i f_{i+1} = \sum_{i=0}^{n_g} g \cdot (f_i - f_{i-1}) \cdot f_{i+1} = \sum_{i=0}^{n_g} g_i = g \cdot f_{n_g} = g$$

donc ψ' est l'inverse à droite souhaitée. Evidemment ψ' est injective et $A^{(\mathbb{N})} = \text{Im}(\psi') \oplus \text{Ker}(\phi)$, donc I est bien projectif, par le lemme 4.99(i).

Partie (iii) : Plus généralement, un idéal J d'un anneau R est un R -module libre $\Leftrightarrow J$ est principal et engendré par un élément régulier. En effet, la condition est évidemment suffisante. D'autre part, soit $\omega : A^{(\Lambda)} \rightarrow J$ un isomorphisme de A -modules ; si J n'est pas principal, Λ contient deux éléments distincts λ, λ' , mais si $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dénote la base canonique de $A^{(\Lambda)}$, on a $\omega(e_{\lambda'}) \cdot e_\lambda - \omega(e_\lambda) \cdot e_{\lambda'} \in \text{Ker } h$, contradiction. Donc ω est un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} J$, et $\omega(1)$ doit être régulier.

Il reste donc juste à montrer que I n'est pas principal. Mais si $g \in I$, il existe $t \in (0, 1]$ tel que $[0, t] \subset g^{-1}(0)$, et la même condition est vérifiée pour tout multiple de g ; d'autre part, évidemment il existe $h \in I$ tel que $h(t) \neq 0$, d'où l'assertion.

Remarque 4.136. J'ai trouvé l'exercice précédent dans les notes d'un cours de Pete Clark (de la University of Georgia : voir <http://www.math.uga.edu/~pete/MATH8020.html>), où il est attribué à Kaplansky. Son intérêt, entre autres, est de montrer qu'un module projectif n'est pas forcément somme directe de modules projectifs de type fini : en effet, on montrera avec le théorème de Swan 4.128 que tout module projectif de type fini sur l'anneau $\mathcal{C}([0, 1])$ est libre : voir le problème 4.135 pour un énoncé plus général.

Exercice 4.108, partie (i) : Soit Q un A -module de type fini tel que $L := P \oplus Q$ est libre de rang fini (lemme 4.99(ii)). On a déjà vu que $\text{Sym}_A^r L$ est libre de rang fini (remarque 3.92(ii)) isomorphe à $\bigoplus_{i+j=r} \text{Sym}_A^i P \otimes_A \text{Sym}_A^j Q$ (problème 3.91(iv)) ; ce dernier contient le facteur direct $\text{Sym}_A^r P \otimes_A \text{Sym}_A^0 Q \simeq \text{Sym}_A^r P$, d'où l'assertion, par le lemme 4.99(ii). Le même argument s'applique à $\Lambda_A^r P$.

Partie (ii) : Il suffit de montrer que $(\Lambda_A^{r+1} P)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ (proposition 3.54). Mais par l'exercice 3.95 on a un isomorphisme naturel $(\Lambda_A^{r+1} P)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{A_{\mathfrak{p}}}^{r+1}(P_{\mathfrak{p}})$, donc on est ramené au cas où A est un anneau local et P est un A -module libre de rang $\leq r$. Il suffit alors d'invoquer la remarque 3.92(ii).

Problème 4.109, partie (i) : D'après le lemme 4.99(i), P est facteur direct d'un A -module libre L ; soient $e_{\bullet} := (e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une base pour L , et $\phi : L \rightarrow L$ la composition de la projection $L \rightarrow P$ avec l'inclusion $P \rightarrow L$. Soit $M := (a_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda)$ la matrice de p par rapport à la base $e_{\bullet}$; ainsi, chaque colonne $a_{\bullet\mu}$ de M est un élément de $A^{(\Lambda)}$, et puisque $\phi^2 = \phi$, on a :

$$(*) \quad M^2 = M$$

(noter que pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, l'expression $\sum_{\nu \in \Lambda} a_{\lambda\nu} a_{\nu\mu}$ est une somme finie, donc M^2 est bien défini). Supposons maintenant que $P = \mathcal{J}(A) \cdot P$; on voit aisément que cela équivaut à $P \subset \mathcal{J}(A) \cdot L$, et par suite $a_{\lambda\mu} \in \mathcal{J}(A)$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$. Pour tout tel μ ,

soit $I_\mu \subset A$ l'idéal de type fini engendré par $(a_{\lambda\mu} \mid \lambda \in \Lambda)$; avec $(*)$ il vient $I_\mu = \mathcal{J}(A) \cdot I_\mu$, d'où $I_\mu = 0$, en vertu du corollaire 3.49, et ainsi $P = 0$.

Partie (ii) : On a (a) $\Rightarrow$ (b),(c) d'après le théorème 4.103.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; il suffit d'exhiber $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que P_f soit un A_f -module libre de rang $r := \text{rk}_P(\mathfrak{p})$ (théorème 4.103). D'après le lemme 4.99(i), P est facteur direct d'un A -module libre $A^{(S)}$, donc $P(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A P$ est facteur direct du $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel $k(\mathfrak{p})^{(S)}$; par suite, il existe une partie $T \subset S$ de cardinalité r telle que la composition $\psi : P \rightarrow A^{(T)}$ de l'inclusion $P \rightarrow A^{(S)}$ avec la projection $A^{(S)} \rightarrow A^{(T)}$ induise un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$ -espaces vectoriels $P(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})^{(T)}$. Soit aussi $\phi : A^r \rightarrow P$ une application A -linéaire induisant un isomorphisme $k(\mathfrak{p}) \otimes_A \phi : k(\mathfrak{p})^r \xrightarrow{\sim} P(\mathfrak{p})$. Ainsi, $k(\mathfrak{p}) \otimes_A (\psi \circ \phi)$ est un isomorphisme, d'où $\mathfrak{p} \notin \text{Supp}_A(\text{Coker}(\psi \circ \phi))$, donc il existe $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $(\psi \circ \phi)_g : A_g^r \rightarrow A_g^{(T)}$ soit surjective (remarque 3.58(ii)). Puisque A_g^r et $A_g^{(T)}$ sont libres du même rang r , le problème 3.53(ii) montre alors que $(\psi \circ \phi)_g$ est un isomorphisme; avec $Q := \text{Ker}(\psi_g)$ il vient un isomorphisme A_g -linéaire $P_g \xrightarrow{\sim} A_g^r \oplus Q$, et en particulier $\text{rk}_P(\mathfrak{q}) = r + \text{rk}_Q(\mathfrak{q})$ pour tout $\mathfrak{q} \in D(g)$. D'autre part, par hypothèse il existe $h \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $\text{rk}_P(\mathfrak{q}) = r$ pour tout $\mathfrak{q} \in D(h)$; avec $f := gh$, il vient alors $\text{rk}_Q(\mathfrak{q}) = 0$ pour tout $\mathfrak{q} \in D(f)$. Noter que Q_f est un facteur direct du A_f -module projectif P_f (exercice 4.102(i)), donc est un A_f -module projectif (lemme 4.99(i)); quitte à remplacer A et P par A_f et Q_f , on est alors ramené à vérifier que si $\text{rk}_P(\mathfrak{q}) = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, alors $P = 0$. Mais l'hypothèse entraîne que $P_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}P_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, d'où $P_{\mathfrak{p}} = 0$, par (i), et finalement $P = 0$, avec la proposition 3.54.

Ensuite, montrons que (c) $\Rightarrow$ (a) si A est réduit; pour cela, soient $\mathfrak{p}, r$ et ϕ comme ci-dessus; on va encore exhiber $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que P_f soit un A_f -module libre de rang r . Or, comme $\mathfrak{p} \notin \text{Supp}_A(\text{Coker } \phi)$, il existe $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $A_t \otimes_A \text{Coker } \phi = 0$. D'autre part, par hypothèse il existe $t' \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $\text{rk}_P(\mathfrak{q}) = r$ pour tout $\mathfrak{q} \in D(t)$; posons $f := tt'$. Avec $Q := \text{Ker } \phi$ on a, pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A_f$ une suite exacte de $k(\mathfrak{q})$ -espaces vectoriels

$$Q(\mathfrak{q}) \xrightarrow{j_{\mathfrak{q}}} k(\mathfrak{q})^r \rightarrow P(\mathfrak{q}) \rightarrow 0.$$

Mais $\dim_{k(\mathfrak{q})} P(\mathfrak{q}) = r$, donc $j_{\mathfrak{q}} = 0$ pour tout tel $\mathfrak{q}$; cela revient à dire que $Q_{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}^r$, i.e. $Q_f \subset A_f^r \cap \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}^r = \mathfrak{q}A_f^r$ pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A_f$ (lemme 3.30(ii)). Par suite, $Q_f \subset \mathcal{N}(A_f) \cdot A_f^r$; mais A_f est réduit (exercice 3.38), et alors $Q_f = 0$ d'où l'assertion.

Exercice 4.110, partie (i), (a) : Si L est libre de rang fini, $e_1, \dots, e_r$ une base de L , et $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale de $L^\vee$ (voir l'exemple 1.125), $\rho_{A,N,L}$ est l'application

$$N \otimes_A L^\vee \rightarrow \text{Hom}_A(L, N) \quad n \otimes \phi \mapsto (l \mapsto n \cdot \phi(l)).$$

On vérifie aisément que $\rho_{A,N,L}$ est bijective, et son inverse est l'application

$$\text{Hom}_A(L, N) \rightarrow N \otimes_A L^\vee \quad f \mapsto f(e_1) \otimes e_1^* + \dots + f(e_r) \otimes e_r^*.$$

Ensuite, pour tout couple de A -modules P_1, P_2 et pour $j = 1, 2$ notons par $i_j : P_j \rightarrow P_1 \oplus P_2$ l'inclusion; on a un isomorphisme naturel de A -modules

$$\text{Hom}_A(P_1 \oplus P_2, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(P_1, N) \oplus \text{Hom}_A(P_2, N) \quad f \mapsto (f \circ i_1, f \circ i_2)$$

dont un cas particulier est l'isomorphisme $(P_1 \oplus P_2)^\vee \xrightarrow{\sim} P_1^\vee \oplus P_2^\vee$ de modules duaux. Par naturalité de ρ , il en découle un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A (P_1 \oplus P_2)^\vee & \xrightarrow{\rho_{A,N,P_1 \oplus P_2}} & \text{Hom}_A(P_1 \oplus P_2, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (N \otimes_A P_1^\vee) \oplus (N \otimes_A P_2^\vee) & \xrightarrow{\rho_{A,N,P_1} \oplus \rho_{A,N,P_2}} & \text{Hom}_A(P_1, N) \oplus \text{Hom}_A(P_2, N) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Or, si P est projectif de type fini, il existe un A -module Q tel que $L := P \oplus Q$ soit libre de rang fini (lemme 4.99(ii)), et on vient de voir que $\rho_{A,N,L}$ est bijective; donc de même pour $\rho_{A,N,P}$ et $\rho_{A,N,Q}$. En dernier

lieu, pour M et N arbitraires et P toujours projectif de type fini, on voit aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & N \otimes_A M \otimes_A P^\vee & \\ N \otimes_A \rho_{A,M,P} \swarrow & & \searrow \rho_{A,N \otimes_A M,P} \\ N \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\rho_{M,N,P}} & \text{Hom}_A(P, N \otimes_A M) \end{array}$$

Mais $\rho_{A,M,P}$ et $\rho_{A,N \otimes_A M,P}$ sont des isomorphismes, donc de même pour $\rho_{M,N,P}$.

(b) : Soient N_1, N_2, M des A -modules ; pour $j = 1, 2$ notons $p_j : N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_j$ la projection et $\pi_j := p_j \otimes_A M$; par naturalité de ρ , on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (N_1 \oplus N_2) \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\sim} & (N_1 \otimes_A \text{Hom}_A(P, M)) \oplus (N_2 \otimes_A \text{Hom}_A(P, M)) \\ \rho_{M,N_1 \oplus N_2,P} \downarrow & & \downarrow \rho_{M,N_1,P} \oplus \rho_{M,N_2,P} \\ \text{Hom}_A(P, (N_1 \oplus N_2) \otimes_A M) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_A(P, N_1 \otimes_A M) \oplus \text{Hom}_A(P, N_2 \otimes_A M) \end{array}$$

dont la flèche horizontale en haut est l'isomorphisme canonique de l'exercice 3.6(iii), et celle en bas est l'isomorphisme qui associe à tout homomorphisme $f : P \rightarrow (N_1 \oplus N_2) \otimes_A M$ le couple $(\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$. D'autre part, une inspection directe montre que $\rho_{M,A,P}$ est un isomorphisme pour tous A -module M et P ; en raisonnant par récurrence sur le rang, il s'ensuit que $\rho_{M,L,P}$ est un isomorphisme pour tout M , tout P et tout A -module L libre de rang fini. Puis, si N est projectif de type fini, on choisit un A -module Q tel que $N \oplus Q$ soit libre, donc $\rho_{M,N \oplus Q,P}$ est un isomorphisme, et grâce au diagramme ci-dessus on conclut de même pour $\rho_{M,N,P}$ et $\rho_{M,Q,P}$.

(c) : Par le théorème 3.86, N est la colimite d'un système filtrant $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules libres de rang fini ; soit $\rho'_{M,N,P}$ la colimite du système induit de morphismes $(\rho_{M,N_\lambda,P} \mid \lambda \in \Lambda)$. Par naturalité de ρ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{colim}_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\rho'_{M,N,P}} & \text{colim}_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_A(P, N_\lambda \otimes_A M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\rho_{M,N,P}} & \text{Hom}_A(P, N \otimes_A M) \end{array}$$

dont la flèche verticale à gauche est un isomorphisme de A -modules, car le foncteur $-\otimes_A \text{Hom}_A(P, M)$ admet un adjoint à droite (proposition 2.49(ii)) ; si de plus P est de présentation finie, aussi la flèche verticale à droite est un isomorphisme (exercice 3.17(i)). On est donc ramené à montrer que $\rho_{M,N_\lambda,P}$ est un isomorphisme pour tout $\lambda \in \Lambda$, ce qui est un cas particulier de (b).

(d) : Par hypothèse on peut trouver $n, m \in \mathbb{N}$ et un complexe exact $A^m \rightarrow A^n \rightarrow N \rightarrow 0$; on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} A^m \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \rightarrow & A^n \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \rightarrow & N \otimes_A \text{Hom}_A(P, M) & \rightarrow & 0 \\ \rho_{M,A^m,P} \downarrow & & \rho_{M,A^n,P} \downarrow & & \downarrow \rho_{M,N,P} & & \\ \text{Hom}_A(P, A^m \otimes_A M) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P, A^n \otimes_A M) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P, N \otimes_A M) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est exacte, car P est projectif et le foncteur $-\otimes_A M$ est exact à droite, et de même pour celle en haut, car le foncteur $-\otimes_A \text{Hom}_A(P, M)$ est exact à droite. En vertu de l'exercice 2.104, on est donc ramené à montrer que $\rho_{M,A^m,P}$ et $\rho_{M,A^n,P}$ sont des isomorphismes, ce qui est un cas particulier de (b).

(e) : Pour tout ensemble S , soit $\mathcal{F}(S)$ l'ensemble des parties finies de S , partiellement ordonné par inclusion ; évidemment $\mathcal{F}(S)$ est filtrant et on voit aisément que $A^{(S)}$ est la limite directe du système filtrant $(A^{(S')} \mid S' \in \mathcal{F}(S))$. De plus, on a des identifications naturelles $A^{(T)} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M^{(T)}$ pour toute partie $T \subset S$, et si P est un A -module de type

fini, le co-cône induit

$$(\mathrm{Hom}_A(P, M^{(S')}) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M^{(S)}) \mid S' \in \mathcal{F}(S))$$

est universel. En effet, si $x_1, \dots, x_n$ est un système fini de générateurs de P , pour toute application A -linéaire $f : P \rightarrow M^{(S)}$ on peut trouver $S' \in \mathcal{F}(S)$ tel que $f(x_1), \dots, f(x_n) \in A^{(S')} \otimes_A M$, et alors f est l'image dans $\mathrm{Hom}_A(P, M^{(S)})$ d'une classe $[f', S']$, pour un unique homomorphisme $f' : P \rightarrow M^{(S')}$ (avec la notation de l'exercice 2.31); d'autre part, deux classes $[f', S']$ et $[f'', S'']$ ont la même image dans $\mathrm{Hom}_A(P, M^{(S)})$ si et seulement s'ils sont égales : détails laissés aux soins du lecteur. On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{colim}_{S' \in \mathcal{F}(S)} A^{(S')} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\rho'} & \mathrm{colim}_{S' \in \mathcal{F}(S)} \mathrm{Hom}_A(P, M^{(S')}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^{(S)} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(P, M) & \xrightarrow{\rho_{M, A^{(S)}, P}} & \mathrm{Hom}_A(P, M^{(S)}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes, et où ρ' est la limite directe du système $(\rho_{M, A^{(S')}, P} \mid S' \in \mathcal{F}(S))$. D'après (b) on sait que $\rho_{M, A^{(S')}, P}$ est un isomorphisme pour tout $S' \in \mathcal{F}(S)$; par suite $\rho_{M, A^{(S)}, P}$ est un isomorphisme, pour tout ensemble S et tout P de type fini. Puis, en raisonnant comme dans (b), on déduit que $\rho_{M, N, P}$ est encore un isomorphisme pour N projectif et P de type fini.

Partie (ii) : L'application en question est la composition de $\rho_{M, B, P}$ et de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(P, B \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A P, B \otimes_A M)$ du §3.2.2; l'assertion suit donc aussitôt de (i).

Partie (iii) : Pour tout couple de A -modules M, N on a une identification naturelle $\omega_{M, N} : (M \oplus N)^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} M^{\vee\vee} \oplus N^{\vee\vee}$, car le foncteur $(-)^{\vee\vee} : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ est évidemment additif (voir le problème 2.76(i)), et la naturalité de l'application de bidualité $\beta : \mathbf{1}_{A\text{-Mod}} \rightarrow (-)^{\vee\vee}$ implique aisément que

$$(*) \quad \omega_{M, N} \circ \beta_{M \oplus N} = \beta_M \oplus \beta_N : M \oplus N \rightarrow M^{\vee\vee} \oplus N^{\vee\vee}.$$

Or, si P est projectif de type fini, il existe un A -module Q , aussi projectif de type fini, tel que $P \oplus Q$ soit libre de rang fini (lemme 4.99(ii)); par l'exemple 1.132 il s'ensuit que $\beta_{P \oplus Q}$ est un isomorphisme, donc de même pour β_P et β_Q , grâce à (*).

Problème 4.111, partie (i.a) : L'exercice 4.110(i) fournit aussi les isomorphismes

$$\rho_{A, Q, P} : Q \otimes_A P^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, Q) \quad \rho_{A, P, Q} : P \otimes_A Q^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(Q, P).$$

Par linéarité de l'application $\mathrm{tr}_{P/A}$, on peut alors supposer que $\phi = \rho_{A, Q, P}(x \otimes \alpha)$ et $\psi = \rho_{A, P, Q}(y \otimes \beta)$ pour certains $x \in Q, y \in P$ et $\alpha \in P^\vee, \beta \in Q^\vee$; ainsi, $\phi(t) = \alpha(t) \cdot x$ et $\psi(s) = \beta(s) \cdot y$ pour tous $t \in P, s \in Q$, et on voit aisément que :

$$\phi \circ \psi = \rho_{A, Q, Q}(\alpha(y)x \otimes \beta) \quad \psi \circ \phi = \rho_{A, P, P}(\beta(x) \cdot y \otimes \alpha).$$

Par suite, $\mathrm{tr}_{P/A}(\phi \circ \psi) = \alpha(y) \cdot \beta(x) = \mathrm{tr}_{P/A}(\psi \circ \phi)$.

Partie (i.b) : La composition de l'isomorphisme $\rho_{A, P^\vee, Q}$ de l'exercice 4.110(i) avec l'isomorphisme $\lambda_{P, Q, A}$ de la remarque 3.4(i), est une identification naturelle

$$\tau_{P, Q} : P^\vee \otimes_A Q^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(Q, P^\vee) \xrightarrow{\sim} (P \otimes_A Q)^\vee$$

avec $\tau_{P, Q}(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$ pour tous $x \in P, y \in Q, \alpha \in P^\vee$ et $\beta \in Q^\vee$. Or, afin de montrer l'identité souhaitée, on peut encore supposer que $\phi = \rho_{A, P, P}(x \otimes \alpha)$ et $\psi = \rho_{A, Q, Q}(y \otimes \beta)$; il vient aisément : $\mathrm{tr}_{P/A}(\phi) = \alpha(x)$, $\mathrm{tr}_{Q/A}(\psi) = \beta(y)$, et

$$\phi \otimes \psi = \rho_{A, P \otimes_A Q, P \otimes_A Q}((x \otimes y) \otimes \tau_{P, Q}(\alpha \otimes \beta))$$

d'où $\mathrm{tr}_{P \otimes_A Q}(\phi \otimes \psi) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$, comme souhaité.

Partie (ii) : Posons $P_B := B \otimes_A P$; l'exercice 4.110(ii) fournit aussi un isomorphisme B -linéaire

$$\tau_{B,P} : B \otimes_A P^\vee \xrightarrow{\sim} (P_B)^\vee$$

tel que $\tau_{B,P}(b \otimes \beta)(1 \otimes x) = \beta(x) \cdot b$ pour tous $b \in B, \beta \in P^\vee$ et $x \in P$. Avec cette notation, la flèche horizontale du diagramme de (ii) est l'application telle que :

$$1 \otimes \rho_{A,P,P}(x \otimes \alpha) \mapsto \rho_{B,P_B,P_B}((1 \otimes x) \otimes \tau_{B,P}(1 \otimes \alpha)) \quad \forall x \in P, \forall \alpha \in P^\vee.$$

L'assertion découle alors d'un calcul direct que l'on laissera aux soins du lecteur.

Partie (iii) : On raisonne par récurrence sur la longueur n du complexe $P_\bullet$. Si $n \leq 1$, il n'y a rien à montrer. Si $n = 2$, on a $P_\bullet = (0 \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \rightarrow 0)$ et d_2 est un isomorphisme ; dans ce cas, on doit vérifier que $\text{tr}_{P_1/A}(f_1) = \text{tr}_{P_2/A}(f_2)$. Mais $f_2 = d_2^{-1} \circ f_1 \circ d_2$, donc il suffit d'invoquer (i.a) avec $P := P_2, Q := P_1, \phi := f_1 \circ d_2$ et $\psi := d_2^{-1}$. Si $n = 3$, on a une suite exacte courte $0 \rightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \rightarrow 0$, et d_2 admet un inverse à gauche $P_1 \rightarrow P_2$, car P_1 est projectif ; il vient un isomorphisme A -linéaire $P_2 \xrightarrow{\sim} P_3 \oplus P_1$ identifiant d_2 et d_3 respectivement avec la projection et l'injection canonique $P_3 \xrightarrow{e_3} P_3 \oplus P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_1$, et f_2 est une matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} f_3 & g \\ 0 & f_1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad f_3 = \pi_3 \circ f_2 \circ e_3 \quad f_1 = \pi_1 \circ f_2 \circ e_1 \quad g = \pi_3 \circ f_2 \circ e_1$$

où $P_1 \xrightarrow{e_1} P_3 \oplus P_1 \xrightarrow{\pi_3} P_3$ sont les autres injections et projections naturelles. Ainsi, $f_2 = e_3 \circ f_3 \circ \pi_3 + e_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + e_3 \circ g \circ \pi_1$, et il suffit de remarquer, avec (i.a), que :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{P_2/A}(e_i \circ f_i \circ \pi_i) &= \text{tr}_{P_i/A}(f_i \circ \pi_i \circ e_i) = \text{tr}_{P_i/A}(f_i) \quad (i = 1, 3) \\ \text{tr}_{P_2/A}(e_3 \circ g \circ \pi_1) &= \text{tr}_{P_3/A}(g \circ \pi_1 \circ e_3) = 0 \quad (\text{car } \pi_1 \circ e_3 = 0). \end{aligned}$$

Soit alors $n \geq 4$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout complexe de longueur $< n$. La surjection A -linéaire $d_2 : P_2 \rightarrow P_1$ admet un inverse à droite $P_1 \rightarrow P_2$, car P_1 est projectif. Posons $Q := \text{Im}(d_3) = \text{Ker}(d_2)$; on déduit un isomorphisme A -linéaire $P_2 \xrightarrow{\sim} Q \oplus P_1$ identifiant d_2 avec la projection naturelle $Q \oplus P_1 \rightarrow P_1$. Par suite, Q est un A -module projectif de type fini (lemme 4.99(i)) et on voit aussitôt que f_2 se restreint en une application $g : Q \rightarrow Q$; on obtient alors deux complexes $P'_\bullet, P''_\bullet$ de A -modules de type fini :

$$P'_\bullet := (0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_3 \rightarrow Q \rightarrow 0) \quad P''_\bullet := (0 \rightarrow Q \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow 0)$$

de longueurs $n - 1$ et respectivement 3. Les différentielles de $P'_\bullet$ et $P''_\bullet$ sont induits par ceux de $P_\bullet$, de la façon évidente ; en outre, $f_\bullet$ induit des endomorphismes $f'_\bullet$ et $f''_\bullet$ de $P'_\bullet$ et respectivement $P''_\bullet$: à savoir, $f'_1 = f''_3 : Q \rightarrow Q$ est la restriction de f_2 ; puis, $f'_i := f_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, et $f''_i = f_i$ pour $i = 1, 2$. Par hypothèse, l'identité souhaitée est déjà connue pour les endomorphismes $f'_\bullet$ et $f''_\bullet$; ainsi :

$$\sum_{i=3}^n (-1)^{i+1} \cdot \text{tr}_{P_i/A}(f_i) = \text{tr}_{Q/A}(f'_1) = \text{tr}_{Q/A}(f''_3) = \text{tr}_{P_2/A}(f_2) - \text{tr}_{P_1/A}(f_1)$$

et l'identité pour l'endomorphisme $f_\bullet$ de $P_\bullet$ s'ensuit aussitôt.

Exercice 4.122 : La condition (b) est nécessaire, d'après la remarque 1.10(v). Ensuite, si $0 \neq I_0 \subset I_1 \subset \cdots$ est une chaîne croissante d'idéaux principaux de l'anneau factoriel A , et si $I_0 = Aa$ avec $a \in A$ non inversible, écrivons $a = p_1 \cdots p_k$ pour des éléments premiers $p_1, \dots, p_k$ de A ; on voit aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une partie $\Sigma_n \subset \{1, \dots, k\}$ telle que I_n soit engendré par $\prod_{i \in \Sigma_n} p_i$, et $\Sigma_{n+1} \subset \Sigma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où la condition (a). Pour la réciproque, on remarque :

Lemme 4.137. *Si A vérifie la condition (a) de l'exercice 4.122, tout élément non inversible et non nul de A est un produit d'éléments irréductibles de A .*

Démonstration. Soit $S \subset A$ l'ensemble des éléments non inversibles qui ne sont pas produits d'éléments irréductibles, et supposons par l'absurde que $S \neq \emptyset$; en vertu de la condition (a), on trouve alors $x \in S$ tel que Ax soit maximal dans la famille $\{Ay \mid y \in S\}$. Evidemment x n'est pas irréductible, donc il existe $y, z \in A \setminus A^\times$ avec $x = yz$; il vient $Ax \subsetneq Ay, Az$, d'où $y, z \notin S$, par maximalité de Ax . Donc y et z sont des produits d'éléments irréductibles, et de même pour x , contradiction. $\square$

Il reste à vérifier que tout élément irréductible $a \in A$ est premier. Soit alors $xy \in Aa$ avec $x, y \in A$ et $x \notin Aa$; ainsi, $\text{pgcd}(a, x) = 1$, et d'après (b), le ppcm de a et x est un élément $z \in A$, de sorte que $xy \in Az = Aax$ (remarque 1.10(iv)), d'où $y \in Aa$, car A est intègre, et la preuve est achevée.

Exercice 4.123 : D'abord, A est intègre, car f est injectif et B est intègre (problème 3.83(i.c)); soit $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ une chaîne croissante d'idéaux principaux de A ; alors $B \otimes_A I_0 \subset B \otimes_A I_1 \subset \dots$ est une chaîne croissante d'idéaux principaux de B , et elle est donc stationnaire, car B est factoriel (exercice 4.122). Soit alors $k \in \mathbb{N}$ avec $B \otimes_A I_k = B \otimes_A I_n$ pour tout $n \geq k$; il vient $B \otimes_A (I_n/I_k) = 0$, d'où $I_n/I_k = 0$ pour tout $n \geq k$ (problème 3.83(i.b)), i.e. la chaîne $I_\bullet$ est stationnaire. Ensuite, soient $x, y \in A$, posons $I := Ax \cap Ay$, $x' := f(x)$, $y' := f(y)$, et soit $z' \in B$ un ppcm de x' et y' ; cela revient à dire que $Bz' = Bx' \cap By'$. Noter que I est le noyau de l'application A -linéaire $s : Ax \oplus Ay \rightarrow A : (a, a') \mapsto a - a'$; compte tenu des identifications naturelles : $B \otimes_A Ax \xrightarrow{\sim} Bx'$, $B \otimes_A Ay \xrightarrow{\sim} By'$, le noyau $B \otimes_A I$ de $B \otimes_A s : (B \otimes_A Ax) \oplus (B \otimes_A Ay) \rightarrow B$ s'identifie alors avec celui de l'application $Bx' \oplus By' \rightarrow B : (b, b') \mapsto b - b'$, i.e. avec Bz' . D'après l'exercice 4.102(iii), I est alors un A -module projectif de type fini, donc il est libre (remarque 4.104), et par suite il est évidemment de rang un; i.e. $I = Az$ pour un élément $z \in A$ qui est évidemment un ppcm de x et y ; on conclut alors avec l'exercice 4.122.

Exercice 4.126, partie (i) : On peut adapter sans peine la solution de l'exercice 4.95; les détails seront laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Au vu de (i) et de l'exercice 4.95, il suffit montrer que $\Gamma(t, E)$ est un $\mathcal{O}_{T,t}$ -module de rang $r := \text{rk}_E(t)$. Pour cela, choisissons un voisinage ouvert U de t dans T avec une trivialisatoin $\phi : \mathbb{R}^r \times U \xrightarrow{\sim} E_U$; on déduit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{T,t}$ -modules $\Gamma(t, \phi) : \Gamma(t, \mathbb{R}^r \times U) \xrightarrow{\sim} \Gamma(t, E_U) = \Gamma(t, E)$, donc on peut supposer que E soit trivial de rang r , et dans ce cas l'assertion est évidente.

Partie (iii) : L'application $\mathcal{C}(T)/\mathfrak{m}_{\mathcal{C}(T)} \widetilde{\omega}_{E,t}$ induit un isomorphisme :

$$\overline{\omega}_{E,t} : \Gamma(E)/\mathfrak{m}\Gamma(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(E)_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\Gamma(E)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \Gamma(t, E)/\mathfrak{m}\Gamma(t, E)$$

pour tout fibré vectoriel E (voir l'exemple 3.45(ii)), et au vu de (ii), on déduit que $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(E)/\mathfrak{m}\Gamma(E) = \text{rk}_E(t)$. L'application d'évaluation en t :

$$\varepsilon_{E,t} : \Gamma(E) \rightarrow E_t \quad s \mapsto s(t)$$

est évidemment $\mathbb{R}$ -linéaire, et son noyau contient $\mathfrak{m}\Gamma(E)$; donc $\varepsilon_{E,t}$ induit une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\overline{\varepsilon}_{E,t} : \Gamma(E)/\mathfrak{m}\Gamma(E) \rightarrow E_t$ qui définit une transformation naturelle de foncteurs $\Gamma/\mathfrak{m}\Gamma \rightarrow (-)_t$, et il suffit de montrer que $\overline{\varepsilon}_{E,t}$ est surjective pour tout fibré vectoriel E . Mais la composition $\overline{\varepsilon}_{E,t} \circ \overline{\omega}_{E,t}^{-1} : \Gamma(t, E)/\mathfrak{m}\Gamma(t, E) \rightarrow E_t$ est l'application d'évaluation $[U, s] \mapsto s(t)$; or, si E admet une trivialisatoin locale sur un voisinage U de t , il est évident que l'analogue application $\Gamma(E_U) \rightarrow E_{U,t} = E_t$ d'évaluation en t est surjective, donc de même pour $\overline{\varepsilon}_{E,t} \circ \overline{\omega}_{E,t}^{-1}$, d'où l'assertion.

Exercice 4.130 : Le $\mathcal{A}_n$ -module P_n est de présentation finie, donc il suffit de montrer que la localisation $P_{n,\mathfrak{p}}$ est un $\mathcal{A}_{n,\mathfrak{p}}$ -module libre de rang n pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{A}_n$ (corollaire 4.100(ii)). Or, on voit aisément qu'il existe $i \leq n+1$ tel que $X_i \notin \mathfrak{p}$, et donc $Q_{n,\mathfrak{p}}$ est le $\mathcal{A}_{n,\mathfrak{p}}$ -module engendré par $e'_i := e_i + X_i^{-1} \cdot \sum_{j \neq i} X_j e_j$. Evidemment

le système $e_1, \dots, e_{i-1}, e'_i, e_{i+1}, \dots, e'_{n+1}$ est une base du $\mathcal{A}_{n,p}$ -module libre $\mathcal{A}_{n,p}^{n+1}$, et $P_{n,p} = \mathcal{A}_{n,p}/\mathcal{A}_{n,p}e'_i$, d'où l'assertion.

Exercice 4.131, partie (i) : Prenons d'abord $\mathcal{R} := \mathbb{Z}$; comme l'anneau

$$A_n := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n+1}]$$

est factoriel (voir le problème 1.39(iii)), il suffit dans ce cas de montrer que le polynôme $P := X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 - 1$ est irréductible dans A_n . Supposons par l'absurde qu'il existe des polynômes $Q_1, Q_2 \in A_n$ de degré 1 avec $P = Q_1 Q_2$, et disons $Q_1 = a + \sum_{i=1}^{n+1} b_i X_i$, $Q_2 = a' + \sum_{i=1}^{n+1} b'_i X_i$; il vient

$$b_i b'_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n+1 \quad \text{et} \quad b_i b'_j + b'_i b_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

d'où $0 = b_i b_j \cdot (b_i b'_j + b'_i b_j) = b_i^2 + b_j^2$ i.e. $b_i = b_j = 0$ pour tout $i \neq j$, contradiction. Noter que le même raisonnement s'applique au cas où $\mathcal{R} = \mathbb{R}$. Noter aussi que l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow A_n/(P)$ est injectif; comme $A_n/(P)$ est intègre, il s'ensuit que $A_n/(P)$ est un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion, donc aussi un $\mathbb{Z}$ -module plat (exercice 3.81(ii)). Soit maintenant $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ un sous-anneau général; par ce qui précède l'homomorphisme induit $\mathcal{A}_n = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} A_n/(P) \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} A_n/(P)$ est injectif. Mais on vient de remarquer que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} A_n/(P)$ est intègre, donc $\mathcal{A}_n$ est intègre.

Partie (ii) : En vertu du lemme 4.118(ii) on peut supposer que $2 \in \mathcal{R}^\times$. On considère l'homomorphisme de $\mathcal{R}$ -algèbres

$$f : \mathcal{A}_1 \rightarrow A := \mathcal{C}(S^1) \quad X_1 \mapsto \cos x \quad X_2 \mapsto \sin x$$

(on identifie A avec l'anneau des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et périodiques de période 2π , comme dans l'exemple 4.105). L'exemple 4.105 nous a montré que le A -sous-module P de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par $v_1 := \cos(x/2)$ et $v_2 := \sin(x/2)$ est inversible, et plus précisément on a un isomorphisme $\omega : A^2 \xrightarrow{\sim} P \oplus P$ de A -modules tel que $(1, 0) \mapsto \phi := (v_1, v_2)$ et $(0, 1) \mapsto \psi := (-v_2, v_1)$ et ω^{-1} est l'application $\rho := (\rho_1, \rho_2) \mapsto (\langle \rho, \phi \rangle, \langle \rho, \psi \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle : (P \oplus P) \times (P \oplus P) \rightarrow A$ est induit par le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^2$. Soit $\pi : P \oplus P \rightarrow P$ la projection sur le premier facteur. La composition $p := \omega^{-1} \pi \circ \omega : A^2 \rightarrow A^2$ est un projecteur (i.e. $p \circ p = p$) dont le noyau est isomorphe à P . Explicitement, on a

$$\begin{aligned} p(1, 0) &= (\langle (v_1, 0), \phi \rangle, \langle (v_1, 0), \psi \rangle) = (\cos^2(x/2), -\cos(x/2) \cdot \sin(x/2)) \\ p(0, 1) &= (\langle (-v_2, 0), \phi \rangle, \langle (-v_2, 0), \psi \rangle) = (-\sin(x/2) \cdot \cos(x/2), \sin^2(x/2)). \end{aligned}$$

Compte tenu des identités trigonométriques élémentaires :

$$\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1 \quad \sin x = 2\sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$$

on peut écrire aussi : $p(1, 0) = (f(\frac{1+X_1}{2}), f(-\frac{X_2}{2}))$ et $p(0, 1) = (f(-\frac{X_2}{2}), f(\frac{1-X_1}{2}))$. Considérons alors l'application $\mathcal{A}_1$ -linéaire $\mathcal{A}_1^2 \rightarrow \mathcal{A}_1^2$ donnée par la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} (1+X_1)/2 & -X_2/2 \\ -X_2/2 & (1-X_1)/2 \end{pmatrix}.$$

(On utilise ici l'hypothèse $2 \in \mathcal{R}^\times$). On voit aisément que $M^2 = M$, donc $\mathcal{A}_1^2 = \text{Ker}(Id_2 - M) \oplus \text{Ker}(M)$, où Id_2 est la matrice identique de taille 2×2 . Soit $Q := \text{Ker } M$; donc Q est un $\mathcal{A}_1$ -module projectif, et son rang est une constante $r \leq 2$, car $\mathcal{A}_1$ est intègre par (i). Par construction, le A -module $A \otimes_{\mathcal{A}_1} Q$ est isomorphe à P . Comme P est inversible et non libre, il s'ensuit que Q ne peut pas être libre non plus, et $r = 1$; en particulier, $\text{Pic } \mathcal{A}_1 \neq 0$, et pour conclure, il suffit d'invoquer le théorème 4.120.

Problème 4.133, partie (i) : On a déjà vu que la topologie réelle de $\text{Max } \mathcal{C}(T)$ est plus fine que la topologie de Zariski; d'autre part, l'homéomorphisme $T \xrightarrow{\sim} \text{Max } \mathcal{C}(T)$ montre que la topologie de Zariski est plus fine que la topologie réelle, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Remarquons d'abord que l'on a une bijection :

$$\mathbb{R} - \text{Alg}(A_E, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.\text{Max } A_E \quad (g : A_E \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \text{Ker } g.$$

En effet, pour tout homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres $g : A_E \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\bar{g} : A_E / \text{Ker } g \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ l'isomorphisme induit par g ; l'homomorphisme structurel $\mathbb{R} \rightarrow A_E$ induit un isomorphisme $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A_E / \text{Ker } g$ dont la composition avec $\bar{g}$ est $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, d'où l'assertion. De plus, soit $h : \mathcal{C}(T) \rightarrow A_E$ l'homomorphisme structurel; par le lemme de Stone, il existe un unique $t \in T$ tel que $h^{-1}(\text{Ker } g) = \text{Ker } g \circ h$ soit l'idéal maximal $\mathfrak{m}_t$ des fonctions continues à valeurs réelles s'annulant en t . Alors $g : A_E \rightarrow k(\mathfrak{m}_t) = \mathbb{R}$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}(T)$ -algèbres, et l'adjonction

$$\mathcal{C}(T) - \text{Alg}(A_E, k(\mathfrak{m}_t)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(\Gamma(E)^\vee, k(\mathfrak{m}_t))$$

associé à g sa restriction $\Gamma(E)^\vee = \text{Sym}_{\mathcal{C}(T)}^1 \Gamma(E)^\vee \rightarrow k(\mathfrak{m}_t)$, qui correspond à son tour à la forme $\mathbb{R}$ -linéaire $k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E)^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $r \otimes \lambda \mapsto r \cdot g(\lambda)$. D'autre part, puisque $\Gamma(E)$ est un $\mathcal{C}(T)$ -module projectif de type fini (théorème 4.128(ii)), les exercices 4.110(ii) et 4.126(iii) nous fournissent des isomorphismes naturels de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$k(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E)^\vee \xrightarrow{\sim} (\kappa(\mathfrak{m}_t) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E))^\vee \xrightarrow{\sim} E_t^\vee.$$

Par bidualité, les formes $\mathbb{R}$ -linéaires $E_t^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ sont naturellement identifiées aux éléments de E_t ; on obtient ainsi une identification canonique :

$$\phi_t : E_t \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{m} \in \mathbb{R}.\text{Max } A_E \mid h^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_t\} \quad \forall t \in T.$$

La bijection $\phi : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.\text{Max } A_E$ souhaitée sera l'unique application dont la restriction à E_t coïncide avec ϕ_t pour tout $t \in T$. Par construction, la commutativité du diagramme de (ii) est évidente. Afin de vérifier la continuité de ϕ , on doit montrer que $\phi^{-1}(D_+(\beta))$ est une partie ouverte de E , pour tout $\beta \in A_E$. Pour cela, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ un système fini de générateurs du $\mathcal{C}(T)$ -module $\Gamma(E)^\vee$, de sorte que $\beta = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour un polynôme $P \in \mathcal{C}(T)[X_1, \dots, X_n]$; disons que $P = \sum_{\nu \in S} a_\nu X_\nu^\bullet$ pour une partie finie $S \subset \mathbb{N}^n$, avec $a_\nu \in \mathcal{C}(T)$ et $X_\nu^\bullet := X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$ pour tout $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n) \in S$. Posons aussi $\lambda(s) := (\lambda_1(s), \dots, \lambda_n(s))$ pour tout $s \in \Gamma(E)$; d'après le théorème 4.128(ii), il existe un unique morphisme de fibrés vectoriels $\tilde{\lambda} : E \rightarrow \mathbb{R}^n \times T$ tel que $\Gamma(\tilde{\lambda}) = \lambda$. En outre, l'application

$$\tilde{\beta} : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_\bullet, t) \mapsto \sum_{\nu \in S} a_\nu(t) \cdot x_\nu^\bullet$$

est évidemment continue; il suffit maintenant de remarquer que :

$$\phi^{-1}(D_+(\beta)) = (\tilde{\beta} \circ \tilde{\lambda})^{-1}(]0, +\infty[).$$

En dernier lieu, vérifions la continuité de ϕ^{-1} . Pour cela, soient $e \in E$, et $U \subset E$ un voisinage de e ; posons $t := f(e)$ et $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_t$. On doit exhiber $\beta \in A_E$ tel que $\phi(e) \in D_+(\beta)$ et $D_+(\beta) \subset \phi(U)$. D'après l'exercice 4.126(iii), on a une identification naturelle $\Gamma(E)/\mathfrak{m}\Gamma(E) \xrightarrow{\sim} E_t$; prenons alors $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma(E)$ dont les images $\sigma_{1,t}, \dots, \sigma_{r,t}$ dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E_t forment une base, et soit $\sigma_{1,t}^*, \dots, \sigma_{r,t}^*$ la base duale de $E_t^\vee$. Par l'exercice 4.110(ii), ce dernier $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est naturellement identifié avec $\Gamma(E)^\vee/\mathfrak{m}\Gamma(E)^\vee$; pour tout $i = 1, \dots, r$, soit alors $\sigma_i^* \in \Gamma(E)^\vee$ un représentant de la classe de $\sigma_{i,t}^*$. D'après le théorème 4.128(ii), pour chaque $i = 1, \dots, r$ il existe un unique morphisme $\tau_i : E \rightarrow \mathbb{R} \times T$ de fibrés vectoriels sur T , tel que $\Gamma(\tau_i) = \sigma_i^*$, et il vient

$$(*) \quad \tau_{i,t}(\sigma_{j,t}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, r.$$

Pour tout $i = 1, \dots, r$ soit aussi $\pi_i : \mathbb{R}^r \times T \rightarrow \mathbb{R} \times T$ la projection telle que

$$\pi_i(x_1, \dots, x_r, u) := (x_i, u) \quad \forall (x_1, \dots, x_r, u) \in \mathbb{R}^r \times T.$$

Notons par $\tau : E \rightarrow \mathbb{R}^r \times T$ l'unique morphisme de fibrés vectoriels sur T tel que $\pi_i \circ \tau = \tau_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Au vu de $(*)$, l'application $\mathbb{R}$ -linéaire $\tau_t : E_t \rightarrow \mathbb{R}^r$ est un isomorphisme, donc il existe un voisinage ouvert V de t dans T tel que la restriction $\tau_V : E_V \rightarrow \mathbb{R}^r \times V$ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels sur V (lemme 4.127(i)). Disons que $\tau(e) = (e_1, \dots, e_r, t)$; on peut alors supposer que $\tau(U) = \prod_{i=1}^r [e_i - \varepsilon, e_i + \varepsilon] \times V'$ pour un réel $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert $V' \subset V$ de t . Choisissons $\alpha \in \mathcal{C}(T)$ tel que $t \in \alpha^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset V'$, et soit

$$\beta := \alpha^2 \cdot (1 - \varepsilon^{-2} \cdot \sum_{i=1}^r (\sigma_i^* - e_i)^2) \in A_E.$$

Evidemment $\phi(e) \in D_+(\beta)$, et on voit aisément que $D_+(\beta) \subset \phi(U)$: les détails sont laissés au lecteur. Cela achève de vérifier la continuité de ϕ^{-1} , comme souhaité.

Exercice 4.134, partie (i) : Evidemment, g se restreint en une bijection $g_{t'} : p'^{-1}(t') \xrightarrow{\sim} E_{f(t')}$ pour tout $t' \in T'$, donc $p'^{-1}(t')$ hérite de $E_{f(t')}$ une structure naturelle de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $U \subset T$ une partie ouverte, $U' := f^{-1}U$, et $f_U : U' \rightarrow U$ la restriction de f . Cela posé, on voit aisément que

$$f_U^*(E_U) = (f^*E)_{U'}.$$

On est alors ramené au cas où E est trivial. Mais si $E = \mathbb{R}^n \times T$, on a $f^*E \subset \mathbb{R}^n \times T \times T'$, et on voit aisément que la projection $\mathbb{R}^n \times T \times T' \rightarrow \mathbb{R}^n \times T'$ se restreint en un homéomorphisme $h : f^*E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times T'$; de plus, pour tout $t' \in T'$ la restriction $h_{t'} : p'^{-1}(t') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times \{t'\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ coïncide avec $g_{t'} : p'^{-1}(t') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times \{f(t')\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, et elle est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, d'où l'assertion.

Partie (ii) : D'après (i) et le théorème de Swan (et par l'exercice 4.102(ii)), le $\mathcal{C}(T')$ -module $\mathcal{C}(T') \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E)$ est projectif de type fini, donc il existe un fibré vectoriel F sur T' avec un isomorphisme de $\mathcal{C}(T')$ -modules $\tau : \Gamma(F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T') \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E)$; de plus, la composition $\omega \circ \tau : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(f^*E)$ provient d'un unique morphisme de fibrés vectoriels $\phi : F \rightarrow f^*E$. Il suffit alors de montrer que $\phi_{t'} : F_{t'} \rightarrow (f^*E)_{t'}$ est un isomorphisme pour tout $t' \in T'$. Soit $\mathfrak{m}_{t'} \subset \mathcal{C}(T')$ l'idéal maximal des fonctions s'annulant en t' , et $\mathfrak{m}_t := \mathcal{C}(f)^{-1}(\mathfrak{m}_{t'})$, l'idéal maximal de $\mathcal{C}(T)$ des fonctions s'annulant en $t := f(t')$; compte tenu de l'exercice 4.126(iii), on est ramené à montrer que ω induit un isomorphisme $\omega_{t'} : k(\mathfrak{m}_{t'}) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(f^*E)/\mathfrak{m}_{t'} \Gamma(f^*E)$. Mais une inspection directe des définitions donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f^*E)/\mathfrak{m}_{t'} \Gamma(f^*E) & \xleftarrow{\omega_{t'}} & k(\mathfrak{m}_{t'}) \otimes_{\mathcal{C}(T)} \Gamma(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(E)/\mathfrak{m}_t \Gamma(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f^*E)_{t'} & \xrightarrow{g_{t'}} & E_t \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les identifications canoniques fournies par l'exercice 4.126(iii). Or, $g_{t'}$ est un isomorphisme, d'où l'assertion.

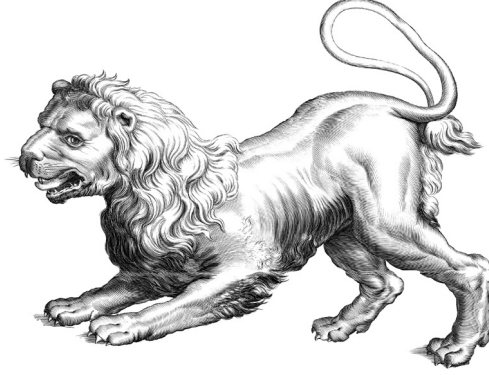
Problème 4.135 : Soient plus généralement T un espace compact et séparé, et E un fibré vectoriel sur $T \times [0, 1]$ (muni de la topologie du produit); pour tout $a \in [0, 1]$ soit aussi $j_a : T \rightarrow T \times [0, 1]$ l'application continue avec $t \mapsto (t, a)$ pour tout $t \in T$. On va montrer d'abord que $j_a^*E \simeq j_b^*E$ pour tous $a, b \in [0, 1]$ (notation de l'exercice 4.134). Pour cela, notons par $p : T \times [0, 1] \rightarrow T$ la projection canonique, fixons $a \in [0, 1]$, et posons $F := (j_a \circ p)^*E$; on a une identification naturelle $j_a^*E \xrightarrow{\sim} j_a^*F$, d'où -- par l'exercice 4.134(ii) -- un isomorphisme de $\mathcal{C}(T)$ -modules

$$\omega : \mathcal{C}(T) \otimes_{\mathcal{C}(T \times [0, 1])} \Gamma(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T) \otimes_{\mathcal{C}(T \times [0, 1])} \Gamma(F)$$

pour la structure de $\mathcal{C}(T \times [0, 1])$ -algèbre sur $\mathcal{C}(T)$ induite par l'homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres $\mathcal{C}(j_a) : \mathcal{C}(T \times [0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}(T)$. Noter que $\mathcal{C}(j_a)$ est surjectif, et $\Gamma(E)$ est un $\mathcal{C}(T \times [0, 1])$ -module projectif, par le théorème de Swan; par suite ω se relève en une

application $\mathcal{C}(T \times [0, 1])$ -linéaire $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$. Cette dernière correspond, toujours par le théorème de Swan, à un morphisme $\phi : E \rightarrow F$ de fibrés vectoriels, et par construction la restriction $\phi_{(t,a)} : E_{(t,a)} \rightarrow F_{(t,a)}$ de ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels pour tout $t \in T$. Par le lemme 4.127(i), pour tout $t \in T$ on trouve alors un voisinage U_t de t dans T et un voisinage V_t de a dans $[0, 1]$ tel que ϕ se restreint en un isomorphisme $E_{U_t \times V_t} \xrightarrow{\sim} F_{U_t \times V_t}$. Par compacité de T , on trouve ensuite une partie finie $S \subset T$ telle que $\bigcup_{t \in S} U_t = T$, et on pose $V := \bigcap_{t \in S} V_t$; la restriction $E_{T \times V} \rightarrow F_{T \times V}$ est ainsi un isomorphisme, et donc $j_b^* E \simeq j_b^* F \simeq j_a^* E$ pour tout $b \in V$. Or, soit $W := \{a \in [0, 1] \mid j_a^* E \simeq j_0^* E\}$ et $W' := \{a \in [0, 1] \mid j_a^* E \not\simeq j_0^* E\}$. Par ce qui précède, W et W' sont deux parties ouvertes de $[0, 1]$; mais évidemment $W \cup W' = [0, 1]$ et $W \cap W' = \emptyset$. Comme $[0, 1]$ est connexe, il vient $W = [0, 1]$, d'où l'assertion.

Soit maintenant T aussi contractile, et choisissons $t_0 \in T$ et $h : T \times [0, 1] \rightarrow T$ une application continue avec $h(t, 0) = t$ et $h(t, 1) = t_0$ pour tout $t \in T$. Soit E un fibré vectoriel sur T ; par ce qui précède on a $j_0^*(h^* E) \simeq j_1^*(h^* E)$. Mais $j_0^*(h^* E) \simeq (h \circ j_0)^* E \simeq E$, alors que $j_1^*(h^* E) \simeq (h \circ j_1)^* E$ est un fibré vectoriel trivial. Cela montre que tout fibré vectoriel sur T est trivial; pour conclure, il suffit maintenant d'invoquer le théorème de Swan une dernière fois.



EN ouverture de cette leçon, on retrouve le thème homologique initié par la section 2.5, que l'on enrichit maintenant avec deux nouveaux outils, les *résolutions* des objets d'une catégorie abélienne, et les *homotopies* entre complexes, d'importance primaire pour la construction des foncteurs dérivés que l'on verra plus tard, mais intervenant aussi dans la discussion d'autres questions : par exemple, pour l'étude du *complexe d'Amitsur* (problème 5.12), qui à son tour est à la base de la puissante technique de *descente fidèlement plate*, auquel on consacre un long paragraphe (§5.1.3). Une autre application importante est la construction du *complexe de Čech* d'un recouvrement, détaillée à partir du §5.1.8, et qui nous servira notamment pour énoncer et démontrer notre version du théorème d'acyclicité de Tate, dans la dernière leçon de ce cours.

Au bout de la section 5.1, notre discussion atteint un tournant, où tous les ingrédients sont désormais réunis pour pouvoir introduire les premiers éléments de la *théorie des schémas* : c'est le sujet de la deuxième jusqu'à la cinquième section, qui malgré leur extension ne proposent qu'un aperçu rapide de ce vaste territoire des mathématiques que nous ont légué les travaux fondateurs titanesques de Grothendieck aux années 60. Il n'est pas question ici d'aborder l'étude systématique de la géométrie algébrique, pour laquelle on renvoie plutôt aux ouvrages spécialisés (la source primaire étant le traité [16], mais voir aussi [36] et [51]) ; toutefois, on retiendra la construction de *l'éclatement d'un idéal quasi-cohérent* du faisceau structural d'un schéma arbitraire, avec sa propriété universelle, que l'on retrouvera et appliquera efficacement plus tard en relation avec les *spectres valuatifs* des anneaux.

5.1. Homotopies et résolutions. Pour motiver les définitions et constructions de cette section, on va les présenter d'abord dans une situation simplifiée.

5.1.1. On fixe un corps K , et on considère un complexe $(M_\bullet, d_\bullet)$ de K -espaces vectoriels. Comme d'habitude, Z_n et B_n sont respectivement les cycles et les bords de $M_\bullet$ en chaque degré $n \in \mathbb{Z}$, et on pose $H_n := Z_n/B_n$ (voir §2.5.2). Soit H'_n un supplémentaire pour B_n dans le K -espace vectoriel Z_n ; évidemment la projection $Z_n \rightarrow H_n$ se restreint en un isomorphisme $H'_n \xrightarrow{\sim} H_n$. Toute section K -linéaire $\sigma_n : B_{n-1} \rightarrow M_n$ pour la surjection $d_n : M_n \rightarrow B_{n-1}$ induit une identification $B_{n-1} \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\sigma_n)$ et il vient $M_n = Z_n \oplus \text{Im}(\sigma_n)$. On a ainsi des décompositions :

$$(*) \quad H_n \oplus B_n \xrightarrow{\sim} Z_n \quad Z_n \oplus B_{n-1} \xrightarrow{\sim} M_n$$

et la différentielle $d_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ devient l'application K -linéaire

$$H_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \rightarrow H_{n-1} \oplus B_{n-1} \oplus B_{n-2}$$

donnée par la matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_{B_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application K -linéaire

$$s_n : M_n = H_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \rightarrow M_{n+1} = H_{n+1} \oplus B_{n+1} \oplus B_n$$

dont la matrice en blocs est comme ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{B_n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Evidemment :

$$(**) \quad d_n \circ s_{n-1} \circ d_n = d_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et $d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n : M_n \rightarrow M_n$ est donnée par la matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{B_n} & 0 \\ 0 & 0 & Id_{B_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$M_\bullet \text{ est exact en degré } n \quad \Leftrightarrow \quad d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = Id_{M_n}.$$

Réciproquement, toute donnée $(s_n : M_n \rightarrow M_{n+1} \mid n \in \mathbb{N})$ d'applications K -linéaires satisfaisant les identités $(**)$ détermine des décompositions $(*)$ en tout degré $n \in \mathbb{Z}$. En effet, à partir de $(**)$ on voit aisément que s_{n-1} se restreint en une injection $B_{n-1} \rightarrow M_n$, et d_n se restreint en un isomorphisme $s_{n-1}(B_{n-1}) \xrightarrow{\sim} B_{n-1}$, d'où une décomposition $M_n = Z_n \oplus s_{n-1}(B_{n-1})$, car tout $x \in M_n$ s'écrit sous la forme : $x = s_{n-1}(b) + (x - s_{n-1}(b))$, avec $b := d_n(x)$ et $x - s_{n-1}(b) \in Z_n$; en outre, si l'on pose $t_n := d_{n+1} \circ s_n : M_n \rightarrow M_n$ et $H'_n := Z_n \cap \text{Ker } t_n$, on a

$$\text{Im}(t_n) = B_n \quad \text{et} \quad t_n = t_n \circ t_n$$

d'où $Z_n = H'_n \oplus B_n$, car pour tout $z \in Z_n$ on a $z - t_n(z) \in H'_n$.

5.1.2. Soit maintenant $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne arbitraire ; un complexe de $\mathcal{A}$ n'admet pas toujours un système de morphismes $(s_n \mid n \in \mathbb{Z})$ satisfaisant les identités $(**)$. On est donc amené à la définition suivante :

Définition 5.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $(M_\bullet, d_\bullet) \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$.

(i) On dit que $M_\bullet$ est *scindé*, s'il existe un système $(s_n : M_n \rightarrow M_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z})$ de morphismes de $\mathcal{A}$ satisfaisant les identités $(**)$ du §5.1.1.

(ii) Dans ce cas, on dit aussi que le système $(s_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est un *scindage* de $M_\bullet$.

Remarque 5.2. La donnée d'un scindage pour un complexe $M_\bullet$ de $\mathcal{A}$ détermine des décompositions $(*)$ dans la catégorie $\mathcal{A}$, comme dans la situation du §5.1.1. Afin d'exhiber ces décompositions, on peut raisonner comme suit. Avec le lemme 4.12, on trouve une sous-catégorie abélienne pleine petite exacte $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ telle que $M_\bullet \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$; il suffit évidemment d'exhiber les décompositions $(*)$ dans $\mathcal{B}$, donc on peut supposer que $\mathcal{A}$ soit petite, et d'après le théorème de Freyd-Mitchell (corollaire 4.48), on peut alors même supposer que $\mathcal{A}$ soit une sous-catégorie pleine et exacte de $R - \text{Mod}$, pour un anneau associatif unitaire R convenable. On obtient sans peine des décompositions $(*)$ dans la catégorie $R - \text{Mod}$, par des calculs directs avec les éléments des R -modules M_n , comme déjà esquissé au §5.1.1 ; mais dans cette situation, le foncteur d'inclusion $\mathcal{A} \rightarrow R - \text{Mod}$ commute avec noyaux, conoyaux, et images, donc ces décompositions sont déjà disponibles dans $\mathcal{A}$, comme souhaité.

Ce raisonnement fournit une méthode – que l’on appliquera souvent dans la suite de notre discussion – permettant de ramener l’étude de l’algèbre homologique des catégories abéliennes, au cas des catégories de R -modules.

Exercice 5.3. (i) Soit A un anneau. Montrer que si $L_\bullet \in \text{Ob}(\mathcal{C}(A - \text{Mod}))$ est exact, borné inférieurement, et consiste en des A -modules libres, alors il est scindé.

(ii) Par contre, si $L_\bullet$ n’est pas borné inférieurement, il n’est pas forcément scindé, même s’il est exact et consiste en des A -modules libres. *E.g.*, montrer qu’un contre-exemple est fourni par le complexe exact de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -modules libres :

$$\dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots$$

(iii) D’autre part, montrer que pour $A = \mathbb{Z}$, tout complexe exact de $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang fini est scindé (même s’il n’est pas borné inférieurement).

Soient ensuite $(M_\bullet, d_\bullet)$, $(M'_\bullet, d'_\bullet)$ deux complexes de $\mathcal{A}$, et $(s_n : M_n \rightarrow M'_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z})$ un système arbitraire de morphismes de $\mathcal{A}$. On pose

$$f_n := d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n : M_n \rightarrow M'_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et on remarque que :

$$d'_n \circ f_n = d'_n \circ (d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n) = d'_n s_{n-1} d_n = (d'_n s_{n-1} + s_{n-2} d_{n-1}) \circ d_n = f_{n-1} \circ d_n$$

i.e. le système $(f_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est un morphisme de complexes $M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$.

Définition 5.4. (i) On dit que deux morphismes de complexes de $\mathcal{A}$

$$f_\bullet, g_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, d'_\bullet)$$

sont *homotopiquement équivalents*, s’il existe un système de morphismes de $\mathcal{A}$

$$(s_n : M_n \rightarrow M'_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}) \quad \text{tel que} \quad f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, on dit que le système $(s_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est une *homotopie* de $f_\bullet$ vers $g_\bullet$.

(ii) Un morphisme $f_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, d'_\bullet)$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est *homotopiquement trivial* s’il est homotopiquement équivalent au morphisme nul $0_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, d'_\bullet)$.

Remarque 5.5. (i) Un complexe $M_\bullet$ est exact et scindé $\Leftrightarrow Id_{M_\bullet}$ est homotopiquement trivial : en effet, si $M_\bullet$ est scindé et exact, on a déjà vu que $Id_{M_\bullet}$ est homotopiquement trivial. Réciproquement, si $Id_{M_\bullet}$ est homotopiquement trivial, il existe un système $(s_n : M_n \rightarrow M_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z})$ de morphismes de $\mathcal{A}$ tel que $Id_{M_n} = d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d’où $d_n = d_n \circ s_{n-1} \circ d_n$, donc $M_\bullet$ est scindé ; l’exactitude de $M_\bullet$ découle de l’observation plus générale suivante :

(ii) Si le morphisme de complexes $f_\bullet : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$ est homotopiquement trivial, alors $H_n(f_\bullet) : H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(M'_\bullet)$ est le morphisme nul, car la restriction de f_n au sous-objet $Z_n(M_\bullet)$ coïncide avec la restriction de $d'_{n+1} \circ s_n$, dont l’image est contenue dans $B_n(M'_\bullet)$.

(iii) Donc, si les morphismes de complexes $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$ sont homotopiquement équivalents, on a $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) On a une relation d’équivalence $\sim$ sur les morphismes $M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$, avec :

$$f_\bullet \sim g_\bullet \quad \Leftrightarrow \quad f_\bullet \text{ est homotopiquement équivalent à } g_\bullet.$$

En effet, évidemment $f_\bullet \sim f_\bullet$ pour tout tel morphisme $f_\bullet$; ensuite, si $f_\bullet \sim g_\bullet$, il existe une homotopie $s_\bullet$ de $f_\bullet$ vers $g_\bullet$, et on voit que le système $(-s_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est une homotopie de $g_\bullet$ vers $f_\bullet$. En dernier lieu, si $f_\bullet \sim g_\bullet$ et $g_\bullet \sim h_\bullet$, soient $s_\bullet$ une homotopie de $f_\bullet$ vers $g_\bullet$, et $t_\bullet$ une homotopie de $g_\bullet$ vers $h_\bullet$; alors le système $(s_n + t_n \mid n \in \mathbb{Z})$ est une homotopie de $f_\bullet$ vers $h_\bullet$.

(v) Soient $\mathcal{B}$ une deuxième catégorie abélienne, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif. Si $s_\bullet$ est une homotopie du morphisme $f_\bullet$ vers le morphisme $g_\bullet$, le système $F(s_\bullet) := (F(s_i) \mid i \in \mathbb{Z})$ est une homotopie de $F(f_\bullet)$ vers $F(g_\bullet)$. En particulier, si $f_\bullet$ et $g_\bullet$ sont homotopiquement équivalents, il en est de même pour $F(f_\bullet)$ et $F(g_\bullet)$.

Définition 5.6. (i) Soit $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Une *résolution à gauche* $(P_\bullet, \varepsilon)$ de M est la donnée d'un complexe $(P_\bullet, d_\bullet)$ de $\mathcal{A}$ avec $P_i = 0$ pour tout $i < 0$, et d'un *morphisme d'augmentation* $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$ de $\mathcal{A}$, tels que la suite :

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

soit un complexe exact, appelé le *complexe augmenté* de $(P_\bullet, \varepsilon)$.

(ii) On dit que $(P_\bullet, \varepsilon)$ est une *résolution projective* si P_i est un objet projectif de $\mathcal{A}$ pour tout $i \geq 0$. Si $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ pour un anneau A , on dit que $(P_\bullet, \varepsilon)$ est une *résolution libre* (resp. *plate*) si chaque P_i est un A -module libre (resp. plat).

Remarque 5.7. On écrira parfois

$$(P_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$$

pour désigner un complexe $P_\bullet$ concentré aux degrés ≥ 0 , prolongé en degré -1 via l'augmentation $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$. Evidemment, une telle donnée est le complexe augmenté d'une résolution à gauche de $M \Leftrightarrow P_\bullet$ est exact aux degrés > 0 et ε induit un isomorphisme $\text{Coker } d_1 \xrightarrow{\sim} M$.

Exercice 5.8. (i) Montrer que tout A -module a une résolution libre à gauche.

(ii) Soit K un corps; pour $n = 1, 2, 3$ on pose $A_n := K[X_i \mid 1 \leq i \leq n]$ et $\mathfrak{m}_n := \sum_{i=1}^n X_i A_n$, l'idéal maximal de A_n qui correspond à l'origine de l'espace affine $\mathbb{A}_K^n$. Montrer que le corps résiduel $k(\mathfrak{m}_n)$ admet une résolution libre à gauche de longueur n (i.e. une résolution qui est nulle sauf en degrés $0, \dots, n$).

Théorème 5.9. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et

- $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de $\mathcal{A}$
- $(P_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ un complexe de $\mathcal{A}$ avec P_i projectif pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- $(Q_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon'} M'$ une résolution à gauche de M' .

Alors il existe un morphisme de complexes $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & P_{-1} := M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_{-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d'_2} & Q_1 & \xrightarrow{d'_1} & Q_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & Q_{-1} := M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $f_{-1} = f$. En outre, $f_\bullet$ est unique à équivalence homotopique près.

Démonstration. On construit les f_i inductivement, de la façon suivante. On pose $f_i := 0$ pour tout $i < -1$, et $f_{-1} := f$. Ensuite, soit $i \geq 0$, et supposons que les $f_j : P_j \rightarrow Q_j$ ont déjà été exhibés pour tout $j < i$, de telle façon que $f_{j-1} \circ d_j = d'_j \circ f_j$ pour tout $j < i$. On pose $g_i := f_{i-1} \circ d_i : P_i \rightarrow Q_{i-1}$, et on remarque que

$$d'_{i-1} \circ g_i = d'_{i-1} \circ f_{i-1} \circ d_i = f_{i-2} \circ d_{i-1} \circ d_i = 0$$

donc $\text{Im } g_i \subset Z_{i-1}(Q_\bullet) = B'_{i-1} := B_{i-1}(Q_\bullet)$, car $Q_\bullet \rightarrow M'$ est exact. Par suite g_i se relève en un morphisme $f_i : P_i \rightarrow Q_i$, car P_i est projectif et car d'_i se factorise à travers un épimorphisme $\delta'_i : Q_i \rightarrow B'_{i-1}$:

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} \\ \downarrow f_i & \searrow g_i & \downarrow f_{i-1} \\ Q_i & \xrightarrow{\delta'_i} B'_{i-1} \hookrightarrow & Q_{i-1}. \end{array}$$

Il reste à montrer l'unicité de $f_\bullet$ à équivalence homotopique près. Donc, soit $g_\bullet$ un autre morphisme de complexes, tel que $g_{-1} = f$, et posons $h_\bullet := f_\bullet - g_\bullet$; on a $h_{-1} = 0$, et on est ramené à montrer que $h_\bullet$ est homotopiquement trivial. Pour cela, on construit de proche en proche une homotopie $s_\bullet$ de $h_\bullet$ vers le morphisme zéro. On pose $s_i = 0$ pour tout $i \leq -1$. La condition $h_i = 0$ pour $i \leq -1$ entraîne déjà que $h_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$

pour $i \leq -1$. Or, soit $i \geq 0$, et on suppose que les morphismes $s_j : P_j \rightarrow Q_{j+1}$ ont déjà été exhibés pour tout $j < i$, de sorte que

$$h_j = d'_{j+1} \circ s_j + s_{j-1} \circ d_j \quad \forall j < i.$$

On pose $u_i := h_i - s_{i-1} \circ d_i : P_i \rightarrow Q_i$, et on remarque que

$$\begin{aligned} d'_i \circ u_i &= d'_i \circ (h_i - s_{i-1} \circ d_i) = h_{i-1} \circ d_i - d'_i \circ s_{i-1} \circ d_i \\ &= h_{i-1} \circ d_i - (h_{i-1} - s_{i-2} \circ d_{i-1}) \circ d_i \\ &= h_{i-1} \circ d_i - h_{i-1} \circ d_i = 0. \end{aligned}$$

Par suite $\text{Im } u_i \subset Z_i(Q_\bullet) = B'_i := B_i(Q_\bullet)$ et donc u_i se relève en un homomorphisme $s_i : P_i \rightarrow Q_{i+1}$, car P_i est projectif et $d'_{i+1} : Q_{i+1} \rightarrow B'_i$ est surjectif. D'où, $d'_{i+1} \circ s_i = u_i = h_i - s_{i-1} \circ d_i$, comme souhaité. $\square$

Remarque 5.10. (i) Les résolutions à droite $(I_\bullet, \varepsilon)$ d'un objet M de $\mathcal{A}$ interviennent aussi naturellement dans des nombreuses questions d'algèbre homologique et commutative : il s'agit des complexes $(I_\bullet, d_\bullet)$ nuls en degré > 0 , munis d'un morphisme $\varepsilon : M \rightarrow I_0$ de $\mathcal{A}$ avec $d_0 \circ \varepsilon = 0$, et tel que le *complexe augmenté*

$$0 \rightarrow M = I_1 \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \xrightarrow{d_0} I_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} I_{-2} \rightarrow \cdots$$

soit exact en tout degré.

(ii) Les résolutions à droite $(I_\bullet, \varepsilon)$ sont concentrées aux degrés négatifs. Quand on a à faire avec des résolutions à droite, il est donc souvent préférable d'utiliser *l'indexation cohomologique*, i.e. la convention qui consiste à placer le degré en exposant plutôt que en indice, et à lui changer le signe :

$$I^i := I_{-i} \quad d^i := d_{-i} : I^i \rightarrow I^{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Cette convention se prolonge aux morphismes de complexes, aux homotopies, aux cycles et bords, de la façon évidente. Par exemple, si $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et si $j \in \mathbb{Z}$, avec la notation de la remarque 2.97(ii) on obtient

$$M[j]^\bullet := M[-j]_\bullet$$

qui est donc l'unique complexe tel que $M[j]^i = 0$ pour $i \neq -j$ et $M[j]^{-j} = M$. De même, le *j-décalage cohomologique* d'un complexe $(M^\bullet, d^\bullet)$ est le complexe

$$M^\bullet[j] \quad \text{avec} \quad M^k[j] := M^{k+j} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

dont la différentielle en degré k est $d^{k+j} : M^{k+j} \rightarrow M^{k+j+1}$ en tout degré $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Au vu de l'exercice 2.101(ii), la donnée d'une résolution à droite de M revient à celle d'une résolution à gauche de M^{op} dans la catégorie opposée $\mathcal{A}^{\text{op}}$; par dualité, on a ainsi l'énoncé "à droite" correspondant au théorème 5.9 : pour cela, rappelons que les objets projectifs de $\mathcal{A}^{\text{op}}$ sont les objets injectifs de $\mathcal{A}$. Soient alors $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ une résolution à droite, $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de $\mathcal{A}$, et

$$M' \xrightarrow{\varepsilon'} (I^\bullet, d'^\bullet)$$

un complexe (i.e. M' est placé en degré -1 et avec différentielle $d'^{-1} = \varepsilon' : M' \rightarrow I^0$) avec I^j injectif pour tout $j \in \mathbb{N}$; on déduit un morphisme de complexes $f^\bullet : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$ unique à équivalence homotopique près, tel que $f^{-1} = f$, i.e. $f^0 \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f$.

Problème 5.11. Soient A un anneau, et M un A -module.

(i) Montrer que M admet une *résolution injective* à droite $M \rightarrow (I^\bullet, d^\bullet)$ (i.e. telle que I^n soit un A -module injectif pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(ii) Montrer plus précisément qu'il existe une résolution $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ injective à droite *minimale*, i.e. vérifiant la condition suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme $\text{Coker } d^{n-2} \rightarrow J^n$ induit par la différentielle d^{n-1} est une enveloppe injective de $\text{Coker } d^{n-2}$ (voir la définition 4.14(ii)).

(iii) Montrer que la résolution minimale $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ est unique à isomorphisme près, i.e. si $M \xrightarrow{\varepsilon'} (J'^\bullet, d'^\bullet)$ est une autre résolution injective à droite minimale, tout morphisme de complexes $f^\bullet : J^\bullet \rightarrow J'^\bullet$ avec $f^0 \circ \varepsilon = \varepsilon'$ est un isomorphisme.

(iv) Montrer que pour toute résolution injective à droite $M \xrightarrow{\varepsilon'} (I^\bullet, d^\bullet)$ il existe une résolution injective à droite minimale $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ et un complexe exact $(I'^\bullet, d'^\bullet)$ de A -modules injectifs avec $I'^n = 0$ pour tout degré $n < 0$, tels que

$$I^\bullet = J^\bullet \oplus I'^\bullet \quad \text{et} \quad \varepsilon'(x) = (\varepsilon(x), 0) \quad \forall x \in M.$$

Problème 5.12. (Complexes d'Amitsur) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux; on définit par récurrence $B^{\otimes 1} := B$, et $B^{\otimes r+1} := B^{\otimes r} \otimes_A B$, pour tout entier $r \geq 1$. On associe à f la suite d'applications A -linéaires

$$\mathcal{A}m(f)^\bullet : \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{d^0} B^{\otimes 2} \xrightarrow{d^1} B^{\otimes 3} \xrightarrow{d^2} \dots$$

telle que $d^r := \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \cdot \partial_i^r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, avec :

$$\partial_i^r(b_0 \otimes \dots \otimes b_r) := b_0 \otimes \dots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \otimes \dots \otimes b_r \quad \forall i = 0, \dots, r+1.$$

(i) Montrer que $\mathcal{A}m(f)^\bullet$ est un complexe de A -modules, qu'on appelle le *complexe d'Amitsur* associé à f .

(ii) Montrer que $\mathcal{A}m(f)^\bullet$ est homotopiquement trivial si f admet une *section*, i.e. un homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow A$ tel que $g \circ f = Id_A$.

(iii) Soit f fidèlement plat (voir la définition 3.73(ii)); déduire de (ii) que pour tout A -module M le complexe $\mathcal{A}m(f)^\bullet \otimes_A M$ est une résolution à droite de M .

Remarque 5.13. Gardons la notation du problème 5.12, et soit $g : B \rightarrow B'$ un deuxième homomorphisme d'anneaux; posons aussi $f' := g \circ f : A \rightarrow B'$. On a ainsi les complexes $(\mathcal{A}m(f)^\bullet, d^\bullet)$ et $(\mathcal{A}m(f')^\bullet, d'^\bullet)$, avec $d'^r := \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \cdot \partial_i'^r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, où les applications $\partial_i'^r$ sont définies comme les ∂_i^r ci-dessus. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, soit aussi $g^{\otimes r+1} : B^{\otimes r+1} \rightarrow B'^{\otimes r+1}$ l'homomorphisme tel que $g^{\otimes r+1}(b_0 \otimes \dots \otimes b_r) := g(b_0) \otimes \dots \otimes g(b_r)$ pour tous $b_0, \dots, b_r \in B$. Evidemment

$$\partial_i'^r \circ g^{\otimes r+1} = g^{\otimes r+2} \circ \partial_i^r \quad \forall r \in \mathbb{N}, \forall i = 0, \dots, r+1.$$

Ainsi le système $(g^{\otimes r+1} \mid r \in \mathbb{N})$ définit un morphisme de complexes de A -modules

$$\mathcal{A}m(g)^\bullet : \mathcal{A}m(f)^\bullet \rightarrow \mathcal{A}m(f')^\bullet$$

qui, en degré 0 est donné par l'application $\mathcal{A}m(g)^0 := Id_A$.

5.1.3. Descente fidèlement plate. Les propriétés du complexe d'Amitsur mises en évidence par le problème 5.12 sont des manifestations de certains aspects d'une *théorie de la descente* plus générale, un outil important pour maintes questions algèbro-géométriques. Ce paragraphe et les deux suivants proposent une revue des premiers éléments de cette théorie. Soit d'abord A un anneau quelconque, et notons par $A - \mathbf{AlgMod}$ la catégorie des couples (B, M) , où B est une A -algèbre et M est un B -module; les morphismes $(B, M) \rightarrow (C, N)$ de $A - \mathbf{AlgMod}$ sont les couples (g, h) formés d'un homomorphisme $g : B \rightarrow C$ de A -algèbres, et d'une application B -linéaire $h : M \rightarrow N_{[g]}$, avec la loi de composition évidente : cf. §3.2.6. On dénote par $\pi : A - \mathbf{AlgMod} \rightarrow A - \mathbf{Alg}$ le foncteur tel que $(B, M) \mapsto B$ et $(g, h) \mapsto g$, pour tout objet (B, M) et tout morphisme (g, h) de $A - \mathbf{AlgMod}$. En outre, à tout morphisme $g : B \rightarrow C$ de A -algèbres on associe le foncteur

$$g^* : B - \mathbf{Mod} \rightarrow C - \mathbf{Mod} \quad M \mapsto C_{[g]} \otimes_B M.$$

Or, soit $\mathcal{S}$ une petite catégorie; considérons un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} & & A - \mathbf{AlgMod} \\ & \nearrow \scriptstyle F & \downarrow \scriptstyle \pi \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\scriptstyle \phi} & A - \mathbf{Alg}. \end{array}$$

Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, on a ainsi $\underline{F}(X) = (\phi X, FX)$ avec $FX \in \text{Ob}(\phi X - \text{Mod})$, et pour tout $u \in \mathcal{S}(X, Y)$ on a $\underline{F}(u) = (\phi(u), Fu)$, où $Fu : FX \rightarrow FY_{[\phi(u)]}$ est ϕX -linéaire. Pour tout tel u , posons en outre

$$u^* := \phi(u)^* : \phi X - \text{Mod} \rightarrow \phi Y - \text{Mod}$$

et soit $F^*u : u^*(FX) \rightarrow FY$ l'application ϕY -linéaire adjointe de Fu (voir §3.2.2).

Définition 5.14. (i) Avec la notation ci-dessus, on dit que $\underline{F}$ est une section cartésienne de π sur ϕ si F^*u est un isomorphisme, pour tout morphisme u de $\mathcal{S}$.

(ii) On dénote par $\text{Cart}(\phi)$ la sous-catégorie de $\text{Fun}(\mathcal{S}, A - \text{AlgMod})$ dont les objets sont les sections cartésiennes de π sur ϕ , et dont les morphismes sont les transformations naturelles $\tau : \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$ avec $\pi * \underline{F} = \mathbf{1}_\phi$ (voir l'exercice 1.129).

Exemple 5.15. (i) Tout A -module M induit une section cartésienne de π sur ϕ

$$\underline{T}_M : \mathcal{S} \rightarrow A - \text{AlgMod} \quad X \mapsto (\phi X, \phi X \otimes_A M) \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{S}).$$

Evidemment $\underline{T}_M(u) := (\phi(u), \phi(u) \otimes_A M)$ pour tout $u \in \mathcal{S}(X, Y)$, et noter que l'adjointe de l'application ϕX -linéaire $\phi(u) \otimes_A M : \phi X \otimes_A M \rightarrow (\phi Y \otimes_A M)_{[\phi(u)]}$ est l'isomorphisme $T_M^*(u) : \phi Y \otimes_{\phi X} (\phi X \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \phi Y \otimes_A M$ de la remarque 3.15.

(ii) Toute application A -linéaire $f : M \rightarrow M'$ induit un morphisme $\underline{T}_f : \underline{T}_M \rightarrow \underline{T}_{M'}$ de $\text{Cart}(\phi)$ associant à tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ le morphisme $(\mathbf{1}_{\phi X}, \phi X \otimes_A f) : \underline{T}_M X \rightarrow \underline{T}_{M'} X$ de $A - \text{AlgMod}$. On a ainsi un foncteur bien défini :

$$\underline{T} : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Cart}(\phi) \quad M \mapsto \underline{T}_M.$$

5.1.4. Soit $X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, et posons $B := \phi X$; supposons que les coproduits

$$X' := X \sqcup X \quad \text{et} \quad X'' := X \sqcup X \sqcup X$$

soient représentables dans $\mathcal{S}$, et fixons un co-cône universel $(e_i^0 : X \rightarrow X' \mid i = 0, 1)$. Supposons en outre que ϕ commute avec ces coproduits, et soit $\underline{F} : \mathcal{S} \rightarrow A - \text{AlgMod}$ une section cartésienne de π sur ϕ . On déduit un isomorphisme $\phi X'$ -linéaire

$$\gamma_F := (F^*e_1^0)^{-1} \circ F^*e_0^0 : e_0^{0*}(FX) \xrightarrow{\sim} e_1^{0*}(FX).$$

Remarque 5.16. (i) Noter que les applications $\partial_i^r : B^{\otimes r} \rightarrow B^{\otimes r+1}$ -- dont la somme alternée définit la différentielle d^r du complexe $\mathcal{A}m(f)_\bullet$ -- sont en fait des homomorphismes de A -algèbres; en outre, $B^{\otimes r}$ représente le coproduit de r copies de B dans $A - \text{Alg}$, pour tout $r \geq 1$, et $(\partial_i^0 : B \rightarrow B^{\otimes 2} \mid i = 0, 1)$ est un co-cône universel. Il existe ainsi un isomorphisme unique de A -algèbres

$$\omega : \phi X' \xrightarrow{\sim} B^{\otimes 2} \quad \text{tel que} \quad \omega \circ \phi(e_i^0) = \partial_i^0 \quad (i = 0, 1).$$

Par suite, il existe aussi un isomorphisme $B^{\otimes 2}$ -linéaire $\beta_F : \partial_0^{0*}(FX) \xrightarrow{\sim} \partial_1^{0*}(FX)$ unique, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \omega^* e_0^{0*}(FX) & \xrightarrow{\omega^* \gamma_F} & \omega^* e_1^{0*}(FX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_0^{0*}(FX) & \xrightarrow{\beta_F} & \partial_1^{0*}(FX) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les identifications canoniques de la remarque 3.15.

(ii) Si N est un B -module arbitraire, les A -modules sous-jacents à $\partial_0^{0*}(N)$ et $\partial_1^{0*}(N)$ sont isomorphes à $B_{[f]} \otimes_A N_{[f]}$, mais leurs structures de $B^{\otimes 2}$ -module sont en général *distinctes*. Pour éclaircir cette différence, rappelons que, d'après la remarque 3.60(ii), les produits tensoriels $B \otimes_A N$ et $N \otimes_A B$ sont munis de structures naturelles de $B^{\otimes 2}$ -modules; on a alors des isomorphismes $B^{\otimes 2}$ -linéaires :

$$\begin{aligned} \partial_0^{0*} N &\xrightarrow{\sim} B \otimes_A N & (1 \otimes 1)_{[\partial_0^0]} \otimes n &\mapsto 1_{[f]} \otimes n \\ \partial_1^{0*} N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A B & (1 \otimes 1)_{[\partial_1^0]} \otimes n &\mapsto n \otimes 1_{[f]}. \end{aligned}$$

En effet, soit M un $B^{\otimes 2}$ -module ; à tout $f \in \text{Hom}_B(N, M_{[\partial_0^0]})$ on associe l'application A -bilinéaire $B \times N \rightarrow M$ telle que $(b, n) \mapsto (b \otimes 1) \cdot f(n)$, qui à son tour induit l'application A -linéaire $\hat{f} : B \otimes_A N \rightarrow M$ avec $b \otimes n \mapsto (b \otimes 1) \cdot f(n)$. On voit aussitôt que $\hat{f}$ est $B^{\otimes 2}$ -linéaire. Réciproquement, à partir de $\hat{f}$ on retrouve f , après composition avec l'application $\eta : N \rightarrow B \otimes_A N : n \mapsto 1_{[f]} \otimes n$. L'association $f \mapsto \hat{f}$ est évidemment naturelle par rapport aux applications $B^{\otimes 2}$ -linéaires $M \rightarrow M'$, i.e. $B \otimes_A N$ représente le foncteur $B^{\otimes 2} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens} : M \mapsto \text{Hom}_B(N, M_{[\partial_0^0]})$, et $(B \otimes_A N, \eta)$ est un couple universel pour ce foncteur. D'après le lemme 2.4(i), il existe alors un unique isomorphisme $B^{\otimes 2}$ -linéaire $\partial_0^{0*} N \xrightarrow{\sim} B \otimes_A N$ tel que $(1 \otimes 1)_{[\partial_0^0]} \otimes n \mapsto 1_{[f]} \otimes n$. On raisonne de même pour exhiber le deuxième isomorphisme.

Exemple 5.17. Prenons $B := A[X]$, avec sa structure naturelle de A -algèbre ; soit aussi $p(X) \in A[X]$ et on considère le $A[X]$ -module $N := A[X]/(p(X))$. On a l'isomorphisme $A[X] \otimes_A A[X] \xrightarrow{\sim} A[X, Y]$ tel que $X \otimes 1 \mapsto X$ et $1 \otimes X \mapsto Y$, d'où :

$$\partial_0^{0*}(N) \xrightarrow{\sim} A[X, Y]/(p(Y)) \quad \partial_1^{0*}(N) \xrightarrow{\sim} A[X, Y]/(p(X))$$

et on voit aisément que ces $A[X, Y]$ -modules ne sont isomorphes que si $p \in A$.

5.1.5. Considérons ensuite le co-cône universel $(\delta_i : B \rightarrow B^{\otimes 3} \mid i = 0, 1, 2)$ avec

$$\delta_0(b) = b \otimes 1 \otimes 1 \quad \delta_1(b) = 1 \otimes b \otimes 1 \quad \delta_2(b) := 1 \otimes 1 \otimes b \quad \forall b \in B.$$

En vertu de l'universalité du co-cône $(\partial_i^0 : B \rightarrow B^{\otimes 2} \mid i = 0, 1)$, les homomorphismes $(\partial_i^1 : B^{\otimes 2} \rightarrow B^{\otimes 3} \mid i = 0, 1, 2)$ sont caractérisés par les *identités simpliciales* :

$$\partial_1^1 \circ \partial_1^0 = \delta_0 = \partial_2^1 \circ \partial_1^0 \quad \partial_0^1 \circ \partial_1^0 = \delta_1 = \partial_2^1 \circ \partial_0^0 \quad \partial_0^1 \circ \partial_0^0 = \delta_2 = \partial_1^1 \circ \partial_0^0.$$

Pour $N := FX$, toute application $B^{\otimes 2}$ -linéaire $\beta : \partial_0^{0*} N \rightarrow \partial_1^{0*} N$, et tout $i = 0, 1, 2$, on a ainsi une application $B^{\otimes 3}$ -linéaire unique $\partial_i^{1\dagger}(\beta) : (\partial_i^1 \circ \partial_0^0)^* N \rightarrow (\partial_i^1 \circ \partial_1^0)^* N$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (\partial_i^1 \circ \partial_0^0)^* N & \xrightarrow{\partial_i^{1\dagger}(\beta)} & (\partial_i^1 \circ \partial_1^0)^* N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_i^{1*}(\partial_0^{0*} N) & \xrightarrow{\partial_i^{1*}(\beta)} & \partial_i^{1*}(\partial_1^{0*} N) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes naturels de la remarque 3.15. Avec les identités simpliciales, on déduit un diagramme d'applications $B^{\otimes 3}$ -linéaires :

$$\begin{array}{ccccc} & & (\partial_1^1 \circ \partial_1^0)^* N & \xlongequal{\quad} & (\partial_2^1 \circ \partial_1^0)^* N \\ & \nearrow \partial_1^{1\dagger}(\beta) & & & \nwarrow \partial_2^{1\dagger}(\beta) \\ (\dagger) \quad & (\partial_1^1 \circ \partial_0^0)^* N & & & (\partial_2^1 \circ \partial_0^0)^* N \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & (\partial_0^1 \circ \partial_0^0)^* N & \xrightarrow{\partial_0^{1\dagger}(\beta)} & (\partial_0^1 \circ \partial_1^0)^* N. \end{array}$$

Exercice 5.18. Montrer que $(\dagger)$ est un diagramme commutatif, pour $\beta = \beta_F$.

L'exercice 5.18 motive la définition suivante :

Définition 5.19. Soient A un anneau, et $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre.

(i) Une *donnée de descente pour B -modules* (resp. *pour B -algèbres*) est un couple (N, β) formé d'un B -module (resp. une B -algèbre) N et d'un isomorphisme $\beta : \partial_0^{0*} N \xrightarrow{\sim} \partial_1^{0*} N$ de $B^{\otimes 2}$ -modules (resp. de $B^{\otimes 2}$ -algèbres) tel que $(\dagger)$ commute.

(ii) Soient (N, β) et (N', β') deux données de descente comme dans (i). Un *morphisme de données de descente* $\nu : (N, \beta) \rightarrow (N', \beta')$ est un homomorphisme de B -modules (resp. de B -algèbres) $\nu : N \rightarrow N'$ tel que

$$\beta' \circ \partial_0^{0*}(\nu) = \partial_1^{0*}(\nu) \circ \beta.$$

Les données de descente pour B -modules et B -algèbres forment des catégories :

$$\text{Desc}(B, \text{Mod}) \quad \text{Desc}(B, \text{Alg})$$

avec les lois de composition évidentes pour les morphismes. De plus, la discussion ci-dessus montre que, dans la situation du §5.1.4, on a un foncteur naturel :

$$D_X : \text{Cart}(\phi) \rightarrow \text{Desc}(\phi X, \text{Mod}) \quad \underline{F} \mapsto (FX, \beta_F)$$

associant à tout morphisme $\tau : F \rightarrow G$ de $\text{Cart}(\phi)$ le morphisme $\tau_X : (FX, \beta_F) \rightarrow (GX, \beta_G)$ de $\text{Desc}(\phi X, \text{Mod})$.

Remarque 5.20. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ et (N, β) comme dans la définition 5.19(i). Sous les identifications naturelles de la remarque 5.16, l'application β correspond à un isomorphisme $B^{\otimes 2}$ -linéaire

$$\beta' : B \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A B.$$

(ii) De plus, en raisonnant comme dans la remarque 5.16, on trouve aisément des isomorphismes $B^{\otimes 3}$ -linéaires naturels :

$$\begin{aligned} \delta_2^* N &\xrightarrow{\sim} B \otimes_A B \otimes_A N & (1 \otimes 1 \otimes 1)_{[\delta_2]} \otimes n &\mapsto 1_{[f]} \otimes 1_{[f]} \otimes n \\ \delta_1^* N &\xrightarrow{\sim} B \otimes_A N \otimes_A B & (1 \otimes 1 \otimes 1)_{[\delta_1]} \otimes n &\mapsto 1_{[f]} \otimes n \otimes 1_{[f]} \\ \delta_0^* N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A B \otimes_A B & (1 \otimes 1 \otimes 1)_{[\delta_0]} \otimes n &\mapsto n \otimes 1_{[f]} \otimes 1_{[f]} \end{aligned}$$

qui identifient $\partial_0^{1\ddagger}(\beta)$, $\partial_1^{1\ddagger}(\beta)$ et $\partial_2^{1\ddagger}(\beta)$ respectivement aux isomorphismes :

$$\begin{aligned} \beta_0'' : B \otimes_A B \otimes_A N &\xrightarrow{\sim} B \otimes_A N \otimes_A B & 1_{[f]} \otimes b_{[f]} \otimes n &\mapsto \partial_0^1 \circ \beta'(b_{[f]} \otimes n) \\ \beta_1'' : B \otimes_A B \otimes_A N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A B \otimes_A B & b_{[f]} \otimes 1_{[f]} \otimes n &\mapsto \partial_1^1 \circ \beta'(b_{[f]} \otimes n) \\ \beta_2'' : B \otimes_A N \otimes_A B &\xrightarrow{\sim} N \otimes_A B \otimes_A B & b_{[f]} \otimes n \otimes 1_{[f]} &\mapsto \partial_2^1 \circ \beta'(b_{[f]} \otimes n). \end{aligned}$$

Par suite, $(\dagger)$ s'identifie au diagramme :

$$(\dagger\dagger) \quad \begin{array}{ccc} B \otimes_A B \otimes_A N & \xrightarrow{\beta_0''} & B \otimes_A N \otimes_A B \\ & \searrow \beta_1'' \quad \swarrow \beta_2'' & \\ & N \otimes_A B \otimes_A B. & \end{array}$$

(iii) Donc, $\text{Desc}(B, \text{Mod})$ est équivalente à la catégorie des couples (N, β') constitués d'un B -module N et un isomorphisme $B^{\otimes 2}$ -linéaire β' comme en (i), tel que le diagramme $(\dagger\dagger)$ commute (et de même pour $\text{Desc}(B, \text{Alg})$).

(iv) Soient A' une A -algèbre arbitraire, (N, β') une donnée de descente comme dans (iii), et $B' := A' \otimes_A B$. Il existe un unique isomorphisme $B'^{\otimes 2}$ -linéaire $\beta'_{A'}$, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes_A (B \otimes_A N) & \xrightarrow{A' \otimes_A \beta'} & A' \otimes_A (N \otimes_A B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \otimes_{A'} (A' \otimes_A N) & \xrightarrow{\beta'_{A'}} & (A' \otimes_A N) \otimes_{A'} B' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes naturels de la proposition 3.20, et on voit aisément que le couple $A' \otimes_A (N, \beta') := (A' \otimes_A N, \beta'_{A'})$ est une donnée de descente pour B' -modules. On obtient ainsi un foncteur bien défini :

$$\text{Desc}(B, \text{Mod}) \rightarrow \text{Desc}(B', \text{Mod}) \quad (N, \beta') \mapsto A' \otimes_A (N, \beta').$$

Exercice 5.21. Soient (N, β') comme dans la remarque 5.20(iii), et $x \in N$; disons que $\beta'(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i$ pour certains $x_1, \dots, x_n \in N$ et $b_1, \dots, b_n \in B$. Montrer que $\sum_{i=1}^n b_i x_i = x$ dans N .

Proposition 5.22. Dans la situation du §5.1.4, supposons en outre que $\mathcal{S}(X, Y) \neq \emptyset$ pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$. Alors D_X est une équivalence de catégories.

Démonstration. On va exhiber un quasi-inverse pour D_X . Soit donc (N, β) une donnée de descente pour B -modules ; notons par $\gamma : e_0^{0*}N \xrightarrow{\sim} e_1^{0*}N$ l'unique isomorphisme $\phi X'$ -linéaire qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \omega^* e_0^{0*} N & \xrightarrow{\sim} & \partial_0^{0*} N & \xrightarrow{\sim} & B \otimes_A N \\ \omega^* \gamma \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \beta' \\ \omega^* e_1^{0*} N & \xrightarrow{\sim} & \partial_1^{0*} N & \xrightarrow{\sim} & N \otimes_A B \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les identifications canoniques des remarques 3.15 et 5.16(ii). Explicitement, soit $x \in N$, et disons que

$$\beta'(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i \quad \text{et} \quad \beta'(1 \otimes x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \otimes b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Alors la composition de β' avec les flèches horizontales en haut est donnée par :

$$1_{[\omega]} \otimes 1_{[e_0^0]} \otimes x \mapsto 1_{[\partial_0^0]} \otimes x \mapsto 1 \otimes x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i.$$

Mais cette somme est l'image de $\sum_{i=1}^n (1 \otimes b_i)_{[\omega]} \otimes 1_{[e_1^0]} \otimes x_i = 1_{[\omega]} \otimes \sum_{i=1}^n \omega^{-1}(1 \otimes b_i) \otimes x_i \in \omega^* e_1^{0*} N$, sous la composition des flèches horizontales en bas ; ainsi :

$$\gamma(1_{[e_0^0]} \otimes x) = \sum_{i=1}^n \phi(e_0^0)(b_i) \otimes x_i$$

car $\omega^{-1} \circ \partial_0^0 = \phi(e_0^0)$. Ensuite, par hypothèse, pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ on trouve $t_Y \in \mathcal{S}(X, Y)$, et on pose $FY := t_Y^* N$. En particulier, on prendra $t_X := 1_X$ et $t_{X'} := e_1^0$. Pour tout $u \in \mathcal{S}(Y, Z)$ soit $\hat{u} : X' \rightarrow Z$ le morphisme de $\mathcal{S}$ avec

$$\hat{u} \circ e_0^0 = u \circ t_Y \quad \text{et} \quad \hat{u} \circ e_1^0 = t_Z.$$

Il existe une unique application ϕZ -linéaire $F^*u : u^*FY \rightarrow FZ$ faisant commuter :

$$\begin{array}{ccc} u^*FY & \xrightarrow{\sim} & (u \circ t_Y)^* N \xrightarrow{\sim} \hat{u}^* e_0^{0*} N \\ F^*u \downarrow & & \downarrow \hat{u}^* \gamma \\ FZ & \xrightarrow{\sim} & \hat{u}^* e_1^{0*} N \end{array}$$

où les flèches horizontales sont encore les isomorphismes de la remarque 3.15. Notons par $Fu : FY \rightarrow (FZ)_{[\phi(u)]}$ l'application ϕY -linéaire adjointe de F^*u . Explicitement, la composition de $\hat{u}^* \gamma$ avec les flèches horizontales en haut est donnée par :

$$1_{[u]} \otimes 1_{[t_Y]} \otimes x \mapsto 1_{[u \circ t_Y]} \otimes x \mapsto 1_{[\hat{u}]} \otimes 1_{[e_0^0]} \otimes x \mapsto 1_{[\hat{u}]} \otimes \gamma(1_{[e_0^0]} \otimes x)$$

et d'autre part $1_{[\hat{u}]} \otimes \gamma(1_{[e_0^0]} \otimes x) = \sum_{i=1}^n \phi(\hat{u}) \circ \phi(e_0^0)(b_i) \otimes 1_{[e_1^0]} \otimes x_i$; il vient alors :

$$Fu(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n \phi(u \circ t_Y)(b_i) \otimes x_i.$$

Notons aussi par $\mu : FX = B \otimes_B N \xrightarrow{\sim} N$ l'isomorphisme B -linéaire de l'exercice 3.6(ii). Or, soit $v : Z \rightarrow W$ un deuxième morphisme de $\mathcal{S}$; on doit vérifier que $F(v \circ u) = Fv \circ Fu$. Or, par ce qui précède, il vient :

$$\begin{aligned} F(v \circ u)(1 \otimes x) &= \sum_{i=1}^n \phi(v \circ u \circ t_Y)(b_i) \otimes x_i \\ Fv \circ Fu(1 \otimes x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \phi(v \circ u \circ t_Y)(b_{ij}) \cdot \phi(v \circ t_Z)(b_{ij}) \otimes x_{ij}. \end{aligned}$$

Mais le diagramme commutatif (††) de la remarque 5.20(ii) revient à l'identité :

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes 1 \otimes b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \otimes b_{ij} \otimes b_i \quad \text{dans } N \otimes_A B^{\otimes 2}.$$

Dans $\phi W_{[\phi(v \circ \hat{u}) \circ \omega^{-1}]} \otimes B^{\otimes 2} (N \otimes_A B^{\otimes 2})_{[\partial_1^0]} = \phi W \otimes_A N$, cela donne la relation :

$$\sum_{i=1}^n \phi(v \circ u \circ t_Y)(b_i) \otimes x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \phi(v \circ t_Z)(b_{ij}) \cdot \phi(v \circ u \circ t_Y)(b_{ij}) \otimes x_{ij}$$

d'où finalement $Fv \circ Fu(1 \otimes x) = F(v \circ u)(1 \otimes x)$ dans FW . Il reste à vérifier que $F(1_Y) = 1_{FY}$ pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$; mais on vient de voir que $F1_Y(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n \phi(t_Y)(b_i) \otimes x_i = \sum_{i=1}^n 1 \otimes b_i x_i = 1 \otimes x$ (exercice 5.21), d'où l'assertion. Cela achève la construction de la section cartésienne $\underline{F}$ de π ; montrons ensuite que μ est un isomorphisme $D_X(F) \xrightarrow{\sim} (N, \beta)$

de données de descente, *i.e.* que $\beta \circ \partial_0^{0*}(\mu) = \partial_1^{0*}(\mu) \circ \beta_F$. Pour cela, compte tenu des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \omega^* e_i^{0*} FX & \xrightarrow{\omega^* e_i^{0*}(\mu)} & \omega^* e_i^{0*} N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_i^{0*} FX & \xrightarrow{\partial_i^{0*}(\mu)} & \partial_i^{0*} N \end{array} \quad (i = 0, 1)$$

(dont les flèches verticales sont les identifications canoniques de la remarque 3.15) on est aisément ramené à vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} e_0^{0*} FX & \xrightarrow{F^* e_0^0} & FX' & \xrightarrow{(F^* e_1^0)^{-1}} & e_1^{0*} FX \\ e_0^{0*}(\mu) \downarrow & & & & \downarrow e_1^{0*}(\mu) \\ e_0^{0*} N & \xrightarrow{\gamma} & & & e_1^{0*} N. \end{array}$$

Mais noter que $FX' = e_1^{0*} N$ et $F^*(e_0^0) \circ (e_0^{0*} \mu)^{-1} = \gamma$; on est ainsi ramené à montrer que $e_1^{0*}(\mu) = F^* e_1^0$. Soit $\eta : FX \rightarrow e_1^{0*} FX$ l'application ϕX -linéaire telle que $1 \otimes x \mapsto 1_{[e_1^0]} \otimes 1 \otimes x$; il suffit de vérifier que $e_1^{0*}(\mu) \circ \eta = F^*(e_1^0) \circ \eta$, et noter que $F^*(e_1^0) \circ \eta = F e_1^0$. On a $e_1^{0*}(\mu) \circ \eta(1 \otimes x) = 1_{[e_1^0]} \otimes x$, et d'autre part

$$F(e_1^0)(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n \phi(e_1^0)(b_i) \otimes x_i = 1_{[e_1^0]} \otimes \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1_{[e_1^0]} \otimes x$$

par l'exercice 5.21, d'où l'identité souhaitée.

Soient ensuite $\lambda : (N_1, \beta_1) \rightarrow (N_2, \beta_2)$ un morphisme de données de descente, et $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ les sections cartésiennes de π associées comme ci-dessus à (N_1, β_1) et (N_2, β_2) ; pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ on pose $\tau_Y := t_Y^*(\lambda) : F_1 Y \rightarrow F_2 Y$. Pour $i = 1, 2$, soit $\gamma_i : e_0^{0*} N_i \xrightarrow{\sim} e_1^{0*} N_i$ l'isomorphisme $\phi X'$ -linéaire associé à β_i comme ci-dessus; l'identité $\partial_1^{0*}(\lambda) \circ \beta_1 = \beta_2 \circ \partial_0^{0*}(\lambda)$ entraîne aussitôt l'identité correspondante :

$$e_1^{0*}(\lambda) \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ e_0^{0*}(\lambda)$$

(les détails sont confiés aux soins du lecteur). Pour tout morphisme $u : Y \rightarrow Z$ de $\mathcal{S}$, il vient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F_1 Y & \xrightarrow{\eta_1} & u^* t_Y^* N_1 & \xrightarrow{F_1^* u} & F_1 Z \\ \downarrow \tau_Y & & \downarrow u^* t_Y^*(\lambda) & & \downarrow \tau_Z \\ & & \hat{u}^* e_0^{0*} N_1 & \xrightarrow{\hat{u}^* \gamma_1} & \hat{u}^* e_1^{0*} N_1 \\ & & \downarrow \hat{u}^* e_0^{0*}(\lambda) & & \downarrow \hat{u}^* e_1^{0*}(\lambda) \\ & & \hat{u}^* e_0^{0*} N_2 & \xrightarrow{\hat{u}^* \gamma_2} & \hat{u}^* e_1^{0*} N_2 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ F_2 Y & \xrightarrow{\eta_2} & u^* t_Y^* N_2 & \xrightarrow{F_2^* u} & F_2 Z \end{array}$$

dont les flèches diagonales sont les isomorphismes canoniques, et $\eta_i : F_i Y \rightarrow u^* F_i Y$ est l'application ϕY -linéaire naturelle, de sorte que $F_i^*(u) \circ \eta_i = F_i u$ pour $i = 1, 2$. Cela montre que l'association $Y \mapsto \tau_Y$ est un morphisme $\underline{F}_1 \rightarrow \underline{F}_2$ de sections cartésiennes. En résumant, on voit aussitôt que les associations $(N, \beta) \mapsto \underline{F}$ et $\lambda \mapsto \tau_\bullet$ définissent un foncteur $\mathbf{E} : \text{Desc}(B, \text{Mod}) \rightarrow \text{Cart}(\phi)$ avec un isomorphisme de foncteurs

$$\mathbf{D}_X \circ \mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\text{Desc}(B, \text{Mod})}.$$

Pour conclure, il suffit d'exhiber aussi un isomorphisme $\mathbf{E} \circ \mathbf{D}_X \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\text{Cart}(\phi)}$. Soit alors $\underline{G} : \mathcal{S} \rightarrow A - \text{AlgMod}$ une section cartésienne de π sur ϕ ; posons $\beta_G := (G \partial_1^0)^{-1} \circ G \partial_0^0 :$

$\partial_0^0 GX \xrightarrow{\sim} \partial_1^0 GX$, et soit $\underline{F} := E(GX, \beta_G) : \mathcal{S} \rightarrow A - \text{AlgMod}$, la section cartésienne associée comme ci-dessus à $D_X(\underline{G}) = (GX, \beta_G)$. On va montrer que l'association :

$$Y \mapsto (G^* t_Y : FY \xrightarrow{\sim} GY) \quad \forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$$

est un isomorphisme de foncteurs $\psi^G : \underline{F} \xrightarrow{\sim} \underline{G}$. Pour cela, soit $u : Y \rightarrow Z$ un morphisme de $\mathcal{S}$, et notons par $\eta : GX \rightarrow FY = t_Y^* GX$ l'application ϕX -linéaire naturelle usuelle ; on doit montrer que $Gu \circ G^*(t_Y) = G^*(t_Z) \circ Fu$ et il suffit de montrer que ces deux applications coïncident après composition avec η . Pour cela, considérons le diagramme de ϕX -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} GX & \xrightarrow{\eta'} & \widehat{u}^* e_0^0 GX & \xrightarrow{\widehat{u}^*(\gamma_G)} & \widehat{u}^* e_1^0 GX & \xrightarrow{\widehat{u}^*(G^* e_1^0)} & \widehat{u}^* GX' \\ \eta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow G^* \widehat{u} \\ FY & \xrightarrow{\eta''} & u^* FY & \xrightarrow{F^* u} & FZ & \xrightarrow{G^* t_Z} & GZ \end{array}$$

où η' (resp. η'') est l'application analogue ϕX -linéaire (resp. ϕY -linéaire) naturelle, et dont les deux flèches verticales centrales sont les identifications canoniques de la remarque 3.15, de sorte que le carré central commute par construction ; de même, on vérifie aussitôt la commutativité des deux autres carrés. Mais noter que $F^*(u) \circ \eta'' = Fu$, et $G^*(e_1^0) \circ \gamma_G = G^*(e_0^0)$; en outre, $G^*(\widehat{u}) \circ \widehat{u}^*(G^* e_0^0) \circ \eta' = G(\widehat{u} \circ e_0^0) = G(u \circ t_Y) = Gu \circ G^*(t_Y) \circ \eta$, d'où l'identité souhaitée. On voit aisément que l'association $G \mapsto \psi^G$ fournit l'isomorphisme souhaité $E \circ D_X \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\text{Cart}(\phi)}$, et cela achève la preuve. $\square$

5.1.6. Dans la situation du § 5.1.4, soit maintenant

$$\Delta_B := D_X \circ \underline{T} : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Desc}(B, \text{Mod})$$

où $\underline{T}$ est le foncteur de l'exemple 5.15(ii). Explicitement, pour tout A -module M on a $\Delta_B(M) := (B \otimes_A M, \beta'_M)$, où β'_M dénote l'isomorphisme $B^{\otimes 2}$ -linéaire :

$$B \otimes_A B \otimes_A M \xrightarrow{\sim} B \otimes_A M \otimes_A B \quad b \otimes b' \otimes x \mapsto b \otimes x \otimes b'.$$

Noter que Δ_B est indépendant du choix auxiliaire de $\mathcal{S}$. En outre, si $C \in \text{Ob}(A - \text{Alg})$, alors β'_C est un isomorphisme de $B^{\otimes 2}$ -algèbres ; ainsi, on a aussi un foncteur

$$\Delta'_B : A - \text{Alg} \rightarrow \text{Desc}(B, \text{Alg}) \quad C \mapsto \Delta_B(C).$$

Avec ces notations, on est prêt pour énoncer le problème suivant, qui contient le résultat fondamental de la théorie de la descente fidèlement plate :

Problème 5.23. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.

- (i) Montrer que les foncteurs Δ_B et Δ'_B admettent des adjoints à droite.
- (ii) Supposons en outre que f vérifie l'une des deux conditions suivantes :
 - (a) il existe un homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow A$ avec $g \circ f = \text{Id}_A$
 - (b) f est fidèlement plat.

Montrer qu'alors les foncteurs Δ_B et Δ'_B sont des équivalences.

Remarque 5.24. Le foncteur Δ_B ne sera pas, bien entendu, une équivalence pour un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ arbitraire (et de même pour Δ'_B) : e.g., pour que Δ_B et Δ'_B soient fidèles, il faut que $\text{Spec } f$ soit surjective : voir la solution du problème 3.83(i.c).

5.1.7. *Descente galoisienne.* Soient K un corps, $j : K \rightarrow E$ une extension galoisienne finie, et $G := \text{Gal}(E/K)$. Les objets de $\text{Desc}(E, \text{Mod})$ sont les couples (V, β) formés d'un E -espace vectoriel V et d'un isomorphisme $E \otimes_K E$ -linéaire

$$\beta : \partial_0^0 V \xrightarrow{\sim} \partial_1^0 V.$$

Pour tout $\sigma \in G$ soit $\pi_\sigma : E \otimes_K E \rightarrow E$ définie comme dans l'exemple 3.65 ; on a vu que l'application $E \otimes_K E \xrightarrow{\sim} E^{|G|} : x \mapsto (\pi_\sigma(x) \mid \sigma \in G)$ est un isomorphisme de E -algèbres, et par simple inspection on trouve :

$$\pi_\sigma \circ \partial_0^0 = \sigma \quad \pi_\sigma \circ \partial_1^0 = \text{Id}_E \quad \forall \sigma \in G.$$

Par suite les isomorphismes canoniques $\pi_\sigma^* \circ \partial_i^{0*}(V) \xrightarrow{\sim} (\pi_\sigma \circ \partial_i^0)^*(V)$ ($i = 0, 1$) induisent des décompositions :

$$\partial_0^{0*}(V) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma^* V_{[\pi_\sigma]} \quad \partial_1^{0*}(V) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in G} V_{[\pi_\sigma]}$$

qui identifient naturellement $\pi_\sigma^*(\beta)$ avec un isomorphisme E -linéaire $\beta_\sigma : \sigma^* V \xrightarrow{\sim} V$ pour tout $\sigma \in G$, et la donnée de β équivaut à celle du système $(\beta_\sigma \mid \sigma \in G)$. Noter que l'application $V \rightarrow \sigma^* V : v \mapsto 1_{[\sigma]} \otimes v$ est un isomorphisme E -linéaire

$$(*) \quad V_{[\sigma^{-1}]} \xrightarrow{\sim} \sigma^* V \quad \forall \sigma \in G$$

car on a $a \cdot (1_{[\sigma]} \otimes v) = a_{[\sigma]} \otimes v = 1_{[\sigma]} \otimes \sigma^{-1}(a) \cdot v$ pour tout $a \in E$ et tout $v \in V$. Soit aussi $\pi_{\sigma, \tau} := \pi_\tau \circ (E \otimes_K \pi_\sigma) : E \otimes_K E \otimes_K E \rightarrow E$ pour tous $\sigma, \tau \in G$; on déduit un isomorphisme de E -algèbres $E \otimes_K E \otimes_K E \xrightarrow{\sim} E^{|G \times G|} : x \mapsto (\pi_{\sigma, \tau}(x) \mid \sigma, \tau \in G)$, et par inspection directe on obtient :

$$\pi_{\sigma, \tau} \circ \partial_0^1 = \tau \circ \pi_\sigma \quad \pi_{\sigma, \tau} \circ \partial_1^1 = \pi_{\tau \circ \sigma} \quad \pi_{\sigma, \tau} \circ \partial_2^1 = \pi_\tau \quad \forall \sigma, \tau \in G$$

d'où des identifications naturelles :

$$\begin{aligned} \pi_{\sigma, \tau}^* \circ \partial_0^{1*}(\beta) &= \tau^* \beta_\sigma : (\tau \circ \sigma)^* V \xrightarrow{\sim} \tau^* V \\ \pi_{\sigma, \tau}^* \circ \partial_1^{1*}(\beta) &= \beta_{\tau \circ \sigma} : (\tau \circ \sigma)^* V \xrightarrow{\sim} V \\ \pi_{\sigma, \tau}^* \circ \partial_2^{1*}(\beta) &= \beta_\tau : \tau^* V \xrightarrow{\sim} V \end{aligned}$$

et la commutativité du diagramme (†) ci-dessus revient au système d'identités :

$$\boxed{\beta_\tau \circ \tau^*(\beta_\sigma) = \beta_{\tau \circ \sigma} \quad \forall \sigma, \tau \in G}$$

qu'on appelle la *condition de cocycle* pour β . En somme, une donnée de descente pour E -espaces vectoriels équivaut à la donnée d'un E -espace vectoriel V et d'un système d'isomorphismes de E -espaces vectoriels $(\beta_\sigma : \sigma^* V \xrightarrow{\sim} V \mid \sigma \in G)$ vérifiant la condition du cocycle. Compte tenu de (*), un tel système est à son tour équivalent à la donnée d'une G -action à gauche sur V , compatible avec l'action à gauche de G sur E : i.e., pour tous $v \in V$ et $\sigma \in G$ on définit $\sigma(v) := \beta_\sigma(1_{[\sigma]} \otimes v)$; la compatibilité avec la G -action sur E revient à l'identité :

$$\sigma(a \cdot v) = \sigma(a) \cdot \sigma(v) \quad \forall a \in E, \forall v \in V, \forall \sigma \in G.$$

Voici une description alternative de $\text{Desc}(E, \text{Mod})$. On notera par $E[G]$ la E -algèbre associative dont les éléments sont les sommes formelles $\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \cdot \sigma$, avec $a_\sigma \in E$ pour tout $\sigma \in G$, avec l'addition terme à terme évidente (de sorte que le E -espace vectoriel sous-jacent est $E^{|G|}$); la loi de multiplication est donnée par :

$$(**) \quad (a \cdot \sigma) \cdot (b \cdot \tau) := a\sigma(b) \cdot (\sigma \circ \tau) \quad \forall a, b \in E, \forall \sigma, \tau \in G.$$

L'associativité de cette loi se vérifie aisément, et l'unité de $E[G]$ est évidemment $1 \cdot 1_G$, où $1_G \in G$ dénote l'élément neutre. L'homomorphisme structurel de cette E -algèbre associative est donc l'application $i : E \rightarrow E[G]$ telle que $a \mapsto a \cdot 1_G$. Ainsi, tout $E[G]$ -module à gauche V est muni, par restriction des scalaires suivant i , d'une structure naturelle de E -espace vectoriel. Pour tout $\sigma \in G$, on voit aussitôt de (**) que l'application $\beta_\sigma : V_{[\sigma^{-1}]} \xrightarrow{\sim} V : v \mapsto (1 \cdot \sigma) \cdot v$ est E -linéaire, et la condition d'associativité

$$(1 \cdot \tau \circ \sigma) \cdot v = (1 \cdot \tau) \cdot ((1 \cdot \sigma) \cdot v) \quad \forall v \in V, \forall \sigma, \tau \in G$$

traduit la condition de cocycle pour le système $(\beta_\sigma \mid \sigma \in G)$. Réciproquement, toute donnée de descente $(V, (\beta_\sigma \mid \sigma \in G))$ comme dans (i) détermine un $E[G]$ -module à gauche unique dont la multiplication par chaque scalaire $1 \cdot \sigma$ est donnée par β_σ . On obtient ainsi une équivalence de catégories :

$$E[G] - \text{Mod} \xrightarrow{\sim} \text{Desc}(E, \text{Mod}).$$

Compte tenu du problème 5.23(ii), le foncteur Δ_E peut alors s'interpréter comme une équivalence de catégories

$$(***) \quad K\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} E[G]\text{-Mod}.$$

Pour expliciter ce foncteur, noter que E est naturellement un $E[G]$ -module : la multiplication par $1 \cdot \sigma$ étant évidemment donnée par l'action de σ sur E , pour tout $\sigma \in G$. Si W est un K -espace vectoriel arbitraire, $E \otimes_K W$ est par suite un $E[G]$ -module, et on voit aisément que $(***)$ n'est rien d'autre que l'association $W \mapsto E \otimes_K W$. En outre, l'adjoint à droite Γ_E de Δ_E exhibé dans la solution du problème 5.23(i) associe à tout $E[G]$ -module V le K -espace vectoriel des $v \in V$ tels que $(1 \cdot \sigma) \cdot v = v$ pour tout $\sigma \in G$, i.e. la partie V^G des *invariants* pour l'action (K -linéaire) de G sur V . En conclusion, on a ainsi obtenu un isomorphisme naturel de $E[G]$ -modules à gauche

$$\boxed{E \otimes_K V^G \xrightarrow{\sim} V}$$

pour tout $E[G]$ -module V . Il s'agit d'un *avatar* du célèbre *Théorème 90 de Hilbert*.

Exemple 5.25. (Résolution simpliciale) Voici une application du complexe d'Amitsur qui trouvera application au paragraphe suivant. Soit Λ un ensemble, et notons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de Λ , partiellement ordonné par l'inclusion de parties. Pour tout $S \in \mathcal{P}$, soit $\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet$ le complexe d'Amitsur de la $\mathbb{Z}$ -algèbre fidèlement plate $\mathbb{Z}^S$. D'après le problème 5.12(iii), $\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet$ est une résolution à droite de $\mathbb{Z}$. Explicitement, soit $(e_s \mid s \in S)$ la base canonique du $\mathbb{Z}$ -module libre $\mathbb{Z}^S$; pour tout entier $r > 0$, on a une identification naturelle :

$$\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^r := \mathbb{Z}^S \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^S \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{S^{r+1}} \quad e_{s_0} \otimes \cdots \otimes e_{s_r} \mapsto e_{(s_0, \dots, s_r)}.$$

De plus, pour tout $S' \subset S$, la projection évidente $\pi_{SS'} : \mathbb{Z}^S \rightarrow \mathbb{Z}^{S'}$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -algèbres, induisant, d'après la remarque 5.13, un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}$ -modules $\mathcal{A}m(\pi_{SS'})^\bullet : \mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet \rightarrow \mathcal{A}m(\mathbb{Z}^{S'})^\bullet$. D'après l'exercice 5.3(iii), le complexe $\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet$ est scindé, donc de même pour le complexe dual

$$\mathcal{R}(S)_\bullet := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet, \mathbb{Z}) \quad : \quad \cdots \rightarrow \mathbb{Z}^{S^2} \rightarrow \mathbb{Z}^S \rightarrow \mathbb{Z}$$

dont les différentielles sont les transposées des différentielles de $\mathcal{A}m(\mathbb{Z}^S)^\bullet$. On obtient ainsi un système filtrant $\mathcal{R}(-)_\bullet := (\mathcal{R}(S)_\bullet \mid S \in \mathcal{P})$ de résolutions libres du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$, dont les morphismes de transition $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}m(\pi_{SS'})^\bullet, \mathbb{Z}) : \mathcal{R}(S')_\bullet \rightarrow \mathcal{R}(S)_\bullet$ sont les transposés des morphismes $\mathcal{A}m(\pi_{SS'})^\bullet$. Noter que $1 = \sum_{s \in S} e_s$ dans l'anneau $\mathbb{Z}^S$; par suite, avec la notation du problème 5.12, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $i = 0, \dots, r+1$, la transposée de l'application $\partial_i^r : \mathbb{Z}^{S^{r+1}} \rightarrow \mathbb{Z}^{S^{r+2}}$ est

$$\partial_i^{r\vee} : (\mathbb{Z}^{S^{r+2}})^\vee \rightarrow (\mathbb{Z}^{S^{r+1}})^\vee \quad e_{\underline{s}}^* \mapsto e_{(s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_{r+1})}^*$$

pour tout $\underline{s} := (s_0, \dots, s_{r+1}) \in S^{r+2}$ (ici $(e_{\underline{s}}^* \mid \underline{s} \in S^{r+2})$ dénote la base duale de la base canonique $(e_{\underline{s}} \mid \underline{s} \in S^{r+2})$ de $\mathbb{Z}^{S^{r+2}}$: voir l'exemple 1.125). La différentielle en degré r de $\mathcal{R}(S)_\bullet$ est alors $\sum_{i=0}^{r+1} \partial_i^{r\vee}$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. D'après l'exercice 2.100, la limite directe de $\mathcal{R}(-)_\bullet$ est encore une résolution libre

$$\mathcal{R}(\Lambda)_\bullet \quad : \quad \cdots \rightarrow \mathbb{Z}^{(\Lambda^2)} \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}^{(\Lambda)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

que l'on appellera la *résolution simpliciale associée* à Λ . Soit $(e_{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^{r+1})$ la base canonique du $\mathbb{Z}$ -module libre $\mathbb{Z}^{(\Lambda^{r+1})}$; pour tout $r \in \mathbb{N}$, il vient

$$\varepsilon(e_{\underline{\lambda}}) := 1 \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda \quad \text{et} \quad d_r(e_{\underline{\lambda}}) := \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i e_{(\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{r+1})} \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{r+2}.$$

5.1.8. *Complexe de Čech d'un recouvrement.* Soient T un espace topologique, $U \subset T$ une partie ouverte, $\mathcal{U} := (U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de U , et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes abéliens sur T . Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}$, soit $U_{\underline{\lambda}} := U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_q}$ et posons

$$\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\underline{\lambda}}).$$

Posons en outre $\tau_j(\underline{\lambda}) := (\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_q)$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}$ et tout $j = 0, \dots, q$. Le *complexe de Čech de $\mathcal{F}$ relatif au recouvrement $\mathcal{U}$* est le complexe

$$(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d^\bullet)$$

dont la différentielle $d^q : \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est donnée par :

$$f_\bullet := (f_{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \cdot (f_{\tau_j(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} \mid \underline{\mu} \in \Lambda^{q+2} \right) \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Pour vérifier que $d^{q+1} \circ d^q = 0$, noter que pour tout $q \geq 1$ et tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}$ on a :

$$\tau_j \circ \tau_i(\underline{\lambda}) = \tau_i \circ \tau_{j+1}(\underline{\lambda}) \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ tels que } 0 \leq i \leq j \leq q.$$

Or, pour tout $f_\bullet \in \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, on a $d^{q+1} \circ d^q(f_\bullet) = (g_{\underline{\nu}} \mid \underline{\nu} \in \Lambda^{q+3})$, avec :

$$g_{\underline{\nu}} := \sum_{k=0}^{q+2} \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{j+k} \cdot (f_{\tau_j \circ \tau_k(\underline{\nu})})_{U_{\underline{\nu}}} \quad \forall \underline{\nu} \in \Lambda^{q+3}.$$

L'assertion découle alors d'un calcul direct, comme dans la solution du problème 5.12(i) : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, le groupe

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

est appelé la *cohomologie de Čech* de $\mathcal{F}$ en degré q , relative au recouvrement $\mathcal{U}$.

Remarque 5.26. (i) Le complexe de Čech admet une augmentation naturelle :

$$\varepsilon_{\mathcal{U}, \mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad f \mapsto (f_{U_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$$

et par inspection directe des définitions, on voit que $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $T \Leftrightarrow \varepsilon_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}$ induit un isomorphisme $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pour toute partie ouverte U de T et tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $U \Leftrightarrow$ le complexe augmenté $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ de $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \varepsilon_{\mathcal{U}, \mathcal{F}})$ est exact en degré 0 pour tous tels U et $\mathcal{U}$. Si $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est exact en tout degré, on dira que le recouvrement $\mathcal{U}$ est *$\mathcal{F}$ -acyclique*.

(ii) Il est utile de considérer aussi le sous-complexe de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ suivant. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{S}_{q+1}$ le groupe des permutations de $\{0, \dots, q\}$; pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_{q+1}$ et $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}$, notons par $\text{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ la signature de σ , et posons $\sigma(\underline{\lambda}) := (\lambda_{\sigma(0)}, \dots, \lambda_{\sigma(q)})$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{F}(U_{\underline{\lambda}})$, soit $f^\sigma := \text{sgn}(\sigma) \cdot f$, si $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tous $0 \leq i < j \leq q$, et $f^\sigma := 0$ sinon. Avec cette notation, soit

$$\check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \{f_\bullet \in \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid f_{\sigma(\underline{\lambda})} = f_{\underline{\lambda}}^\sigma \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_{q+1}, \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}\}.$$

Evidemment $\check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un sous-groupe de $\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, appelé le *sous-groupe des cochaînes alternées de degré q* . On remarque :

Lemme 5.27. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a : $d^q(\check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset \check{C}_{\text{alt}}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.*

Démonstration. Soit $\Sigma := \{a_0, \dots, a_q\}$ un ensemble de $q+1$ entiers distincts, avec $a_0 < \dots < a_q$; évidemment la donnée d'une permutation ω de Σ équivaut à celle de la suite $(\omega(a_0), \dots, \omega(a_q)) \in \mathbb{Z}^{q+1}$. Réciproquement, pour toute suite $\underline{x} := (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{Z}^{q+1}$ avec $x_i \neq x_j$ pour tous $0 \leq i < j \leq q$, il existe une unique permutation $\omega_{\underline{x}}$ de $\{x_0, \dots, x_q\}$ avec $\omega_{\underline{x}}^{-1}(x_0) < \dots < \omega_{\underline{x}}^{-1}(x_q)$. Rappelons aussi que

$$\text{sgn}(\omega) = \prod_{0 \leq i < j \leq q} (a_{\omega(i)} - a_{\omega(j)}) \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq q} (a_i - a_j)^{-1}.$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_{q+1}$ et tout $i \in \{0, \dots, q\}$, posons

$$\underline{a}^{(i)} := (\sigma(0), \dots, \sigma(\sigma^{-1}(i) - 1), \sigma(\sigma^{-1}(i) + 1), \dots, \sigma(q)) \in \mathbb{Z}^q.$$

Affirmation 5.28. $(-1)^i \cdot \text{sgn}(\omega_{\underline{a}(i)}) = (-1)^{\sigma^{-1}(i)} \cdot \text{sgn}(\sigma)$.

Preuve : On calcule :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\omega_{\underline{a}(i)}) &= \prod_{\substack{0 \leq x < y \leq q \\ x, y \neq \sigma^{-1}(i)}} (\sigma(x) - \sigma(y)) \cdot \prod_{\substack{0 \leq x < y \leq q \\ x, y \neq i}} (x - y)^{-1}. \\ \text{sgn}(\sigma) &= \prod_{0 \leq x < y \leq q} (\sigma(x) - \sigma(y)) \cdot \prod_{0 \leq x < y \leq q} (x - y)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\omega_{\underline{a}(i)})^{-1} &= \prod_{\sigma^{-1}(i) < y} (i - \sigma(y)) \cdot \prod_{i < y} (i - y)^{-1} \cdot \prod_{x < \sigma^{-1}(i)} (\sigma(x) - i) \cdot \prod_{x < i} (x - i)^{-1} \\ &= (-1)^{\sigma^{-1}(i)} \cdot (-1)^i \cdot \prod_{y \neq \sigma^{-1}(i)} (i - \sigma(y)) \cdot \prod_{y \neq i} (i - y)^{-1} \\ &= (-1)^{\sigma^{-1}(i)} \cdot (-1)^i \end{aligned}$$

d'où l'assertion. $\diamond$

Soient $f_\bullet \in \check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $\underline{\mu} \in \Lambda^{q+2}$ avec $\mu_i \neq \mu_j$ pour tous $i \neq j$; on calcule :

$$\begin{aligned} (d^q f_\bullet)_{\sigma(\underline{\mu})} &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \cdot (f_{\tau_j(\sigma(\underline{\mu}))})_{U_{\underline{\mu}}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \cdot (f_{\sigma(\tau_{\sigma^{-1}(j)}(\underline{\mu}))})_{U_{\underline{\mu}}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \cdot \text{sgn}(\omega_{\underline{a}(j)}) \cdot (f_{\tau_j(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{\sigma^{-1}(j)} \cdot (f_{\tau_j(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot (d^q f_\bullet)_{\underline{\mu}}. \end{aligned}$$

Si $\mu_i = \mu_j$ avec $i < j$, on a $(d^q f_\bullet)_{\underline{\mu}} = (-1)^i \cdot (f_{\tau_i(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} + (-1)^j \cdot (f_{\tau_j(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} = 0$, car $f_{\tau_j(\underline{\mu})} = (-1)^{i-j+1} \cdot f_{\tau_i(\underline{\mu})}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

5.1.9. D'après le lemme 5.27, on a un sous-complexe bien défini

$$(\check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d_{\text{alt}}^\bullet)$$

du complexe de Čech de $\mathcal{F}$, que l'on appelle *le complexe de Čech alterné de $\mathcal{F}$ relatif au recouvrement $\mathcal{U}$* . Soit $i^\bullet : \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'inclusion naturelle. L'application $\varepsilon_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}$ de la remarque 5.26(i) fournit aussi une augmentation naturelle pour le complexe de Čech alterné, et on notera parfois par $(\check{C}_{\text{au.alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d_{\text{au.alt}}^\bullet)$ le *complexe de Čech augmenté alterné* ainsi obtenu.

Théorème 5.29. (i) *Il existe un morphisme $p^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ de complexes de groupes abéliens, tel que $p^\bullet \circ i^\bullet$ soit l'identité de $\check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, et tel que $i^\bullet \circ p^\bullet$ soit homotopiquement équivalent à l'identité de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.*

(ii) *En particulier, $i^\bullet$ induit un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^q(\check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

(iii) *Si la cardinalité c de $\mathcal{U}$ est finie, on a $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq c$.*

Démonstration. (i) : Fixons un ordre total $\leq$ sur l'ensemble Λ ; pour tout $q \in \mathbb{N}$, soit $\Sigma_{q+1} := \{\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1} \mid \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour tout } 0 \leq i \neq j \leq q\}$. Evidemment, pour tout $\underline{\lambda} \in \Sigma_{q+1}$ il existe un unique $\omega_{\underline{\lambda}} \in \mathcal{S}_{q+1}$ avec $\lambda_{\omega_{\underline{\lambda}}(0)} < \dots < \lambda_{\omega_{\underline{\lambda}}(q)}$; posons $\underline{\lambda}^* := (\lambda_{\omega_{\underline{\lambda}}(0)}, \dots, \lambda_{\omega_{\underline{\lambda}}(q)}) = \omega_{\underline{\lambda}}(\underline{\lambda})$ pour tout tel $\underline{\lambda}$ (notation de la remarque 5.26(ii)). Par inspection directe des définitions, on déduit de l'observation 5.28 l'identité

$$(*) \quad (-1)^i \cdot \text{sgn}(\omega_{\tau_i(\underline{\lambda})}) = (-1)^{\omega_{\underline{\lambda}}^{-1}(i)} \cdot \text{sgn}(\omega_{\underline{\lambda}}) \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}, \forall i = 0, \dots, q.$$

Or, soit $p^q : \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'homomorphisme de groupes tel que

$$p^q(f_{\bullet})_{\underline{\lambda}} := \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{\underline{\lambda}}) \cdot f_{\underline{\lambda}}^* & \text{si } \underline{\lambda} \in \Sigma_{q+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \forall f_{\bullet} \in \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}.$$

A l'aide de $(*)$, on vérifie aisément que le système $(p^q \mid q \in \mathbb{N})$ définit un morphisme de complexes $p^{\bullet} : \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. De même, on voit aussitôt que $p^{\bullet} \circ i^{\bullet}$ est l'identité de $\check{C}_{\text{alt}}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Il reste à exhiber une homotopie de $p^{\bullet} \circ i^{\bullet}$ vers l'identité de $\check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Pour cela, considérons la résolution simpliciale $(\mathcal{R}(\Lambda)_{\bullet}, d_{\bullet})$ de $\mathbb{Z}$ fournie par l'exemple 5.25. Ainsi, $\mathcal{R}(\Lambda)_{-1} = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}(\Lambda)_q = \mathbb{Z}(\Lambda^{q+1})$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et on dénote par $(e_{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1})$ la base canonique de $\mathbb{Z}(\Lambda^{q+1})$; de plus, posons $|\underline{\lambda}| := \{\lambda_0, \dots, \lambda_q\}$ pour tout $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}$. Soient $r, s \in \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{Z}(\Lambda^{r+1}) \rightarrow \mathbb{Z}(\Lambda^{s+1})$ une application $\mathbb{Z}$ -linéaire; on dira que h est *simpliciale* si $h(e_{\underline{\lambda}}) \in \mathbb{Z}|\underline{\lambda}|^{s+1}$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^{r+1}$, i.e. $h(e_{\underline{\lambda}}) = \sum_{\underline{\mu} \in |\underline{\lambda}|^{s+1}} a_{\underline{\mu}} e_{\underline{\mu}}$ pour un système d'entiers $(a_{\underline{\mu}} \mid \underline{\mu} \in |\underline{\lambda}|^{s+1})$. Noter que toute telle application simpliciale h induit une application $\mathbb{Z}$ -linéaire

$$h^* : \check{C}^s(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \text{avec} \quad h^*(f_{\bullet})_{\underline{\lambda}} := \sum_{\underline{\mu} \in |\underline{\lambda}|^{s+1}} a_{\underline{\mu}} \cdot (f_{\underline{\mu}})_{U_{\underline{\lambda}}} \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{r+1}.$$

Evidemment, si $h_1, h_2 : \mathbb{Z}(\Lambda^{r+1}) \rightarrow \mathbb{Z}(\Lambda^{s+1})$ sont deux applications simpliciales, il en est de même pour $ah_1 + bh_2$ et on a $(ah_1 + bh_2)^* = ah_1^* + bh_2^*$, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$. De même, si $k : \mathbb{Z}(\Lambda^{s+1}) \rightarrow \mathbb{Z}(\Lambda^{u+1})$ est une troisième application simpliciale, la composition $k \circ h$ est simpliciale, et $(k \circ h)^* = h^* \circ k^*$. On définit maintenant un endomorphisme $\mathbb{Z}$ -linéaire ϑ_q de $\mathcal{R}(\Lambda)_q$ par :

$$\vartheta_q(e_{\underline{\lambda}}) := \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{\underline{\lambda}}) \cdot e_{\underline{\lambda}}^* & \text{si } \underline{\lambda} \in \Sigma_{q+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on voit aussitôt que le système $(\vartheta_q \mid q \in \mathbb{N})$ définit un endomorphisme $\vartheta_{\bullet}$ du complexe $\mathcal{R}(\Lambda)_{\bullet}$, qui est complété en degré -1 par $\vartheta_{-1} := Id_{\mathbb{Z}}$. Noter que ϑ_q est simpliciale pour tout $q \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 5.9, il existe alors une homotopie $s_{\bullet}$ de $\vartheta_{\bullet}$ vers l'identité de $\mathcal{R}(\Lambda)_{\bullet}$, mais on souhaite exhiber plus précisément une homotopie $s_{\bullet}$ telle que s_q soit simpliciale en tout degré $q \in \mathbb{N}$. On raisonne par récurrence sur q . Evidemment $s_{-1} : 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'application nulle, et on prend de même pour s_0 l'application nulle $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}(\Lambda)$. On a ainsi pour $i = 0$:

$$(*) \quad \vartheta_i - Id_{\mathcal{R}(\Lambda)_i} = s_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ s_i.$$

Soit maintenant $q \geq 0$, et supposons que l'on ait déjà exhibé s_i vérifiant $(*)$ pour tout $i \leq q$. Posons $\omega_{q+1} := \vartheta_{q+1} - Id_{\mathcal{R}(\Lambda)_{q+1}} - s_q \circ d_{q+1}$; en calculant comme dans la preuve du théorème 5.9, on trouve que $d_{q+1} \circ \omega_{q+1} = 0$. Noter que d_{q+1} est simpliciale, donc de même pour ω_{q+1} ; ainsi, $\omega_{q+1}(e_{\underline{\lambda}}) \in \mathbb{Z}(|\underline{\lambda}|^{q+2}) = \mathcal{R}(|\underline{\lambda}|)_{q+1}$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+2}$. Rappelons que $\mathcal{R}(|\underline{\lambda}|)_{\bullet}$ est une résolution de $\mathbb{Z}$, et évidemment il est un sous-complexe de $\mathcal{R}(\Lambda)_{\bullet}$; par suite, il existe $s_{\underline{\lambda}} \in \mathcal{R}(|\underline{\lambda}|)_{q+2}$ avec $d_{q+2}(s_{\underline{\lambda}}) = \omega_{q+1}(e_{\underline{\lambda}})$, et on pose $s_{q+1}(e_{\underline{\lambda}}) := s_{\underline{\lambda}}$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^{q+2}$. Par construction, l'application $\mathbb{Z}$ -linéaire $s_{q+1} : \mathbb{Z}(\Lambda^{q+2}) \rightarrow \mathbb{Z}(\Lambda^{q+3})$ ainsi définie est simpliciale, et vérifie $(*)$ avec $i = q + 1$. Cela achève la construction de l'homotopie simpliciale $s_{\bullet}$. En dernier lieu, noter que d_q^* est la différentielle en degré q de $\check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, pour tout $q \in \mathbb{N}$; aussi, $\vartheta_q^* = i^q \circ p^q$, par inspection directe des définitions; par suite le système $(s_q^* \mid q \in \mathbb{N})$ est l'homotopie souhaitée de $i^{\bullet} \circ p^{\bullet}$ vers $Id_{\check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$.

(ii) : Cela suit aussitôt de (i) et de la remarque 5.5(iii).

(iii) suit aussitôt de (ii), car dans ce cas $\check{C}_{\text{alt}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq c$. $\square$

Soient maintenant $\mathcal{U} := (U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ et $\mathcal{U}' := (V_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ deux recouvrements de la partie ouverte $U \subset T$, et supposons que $\mathcal{U}$ soit un *raffinement* de $\mathcal{U}'$, i.e. il existe

une application $t : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ telle que $U_\lambda \subset V_{t(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans ce cas, on dit aussi que $\mathcal{U}$ raffine $\mathcal{U}'$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}$ posons $t(\underline{\lambda}) := (t(\lambda_0), \dots, t(\lambda_q))$; on déduit un homomorphisme de groupes

$$t^q : \check{C}^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad t^q(f_\bullet)_{\underline{\lambda}} := (f_{t(\underline{\lambda})})_{U_{\underline{\lambda}}} \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^{q+1}$$

et on voit aussitôt que le système $(t^q \mid q \in \mathbb{N})$ définit des morphismes de complexes

$$t^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad t_{\text{alt}}^\bullet : \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Lemme 5.30. (i) Avec la notation ci-dessus, soit $t' : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ une autre application avec $U_\lambda \subset U_{t'(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors il existe une homotopie de $t^\bullet$ vers $t'^\bullet$.

(ii) En particulier, pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'application induite

$$\rho^q(\mathcal{U}', \mathcal{U}) := H^q(t^\bullet) : \check{H}^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

est indépendante du choix de t .

(iii) Si $\mathcal{U}'' := (W_{\lambda''} \mid \lambda'' \in \Lambda'')$ est un troisième recouvrement de U , et $\mathcal{U}'$ est un raffinement de $\mathcal{U}''$, on a $\rho^q(\mathcal{U}', \mathcal{U}) \circ \rho^q(\mathcal{U}'', \mathcal{U}') = \rho^q(\mathcal{U}'', \mathcal{U})$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

(iv) $\mathcal{U}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique $\Leftrightarrow \rho^q(\{U\}, \mathcal{U})$ est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, tout $i \in \{0, \dots, q\}$ et tout $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}$ posons $u_i(\underline{\lambda}) := (t(\lambda_0), \dots, t(\lambda_i), t'(\lambda_i), \dots, t'(\lambda_q)) \in \Lambda'^{q+2}$. Noter que $U_{\underline{\lambda}} \subset V_{u_i(\underline{\lambda})}$ pour tout tel $\underline{\lambda}$ et tout tel i . Soit $s^0 : \check{C}^0(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ l'application nulle, et pour tout $q > 0$ définissons

$$s^q : \check{C}^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad s^q(f_\bullet)_{\underline{\lambda}} := \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \cdot (f_{u_i(\underline{\lambda})})_{U_{\underline{\lambda}}} \quad \forall \underline{\lambda} \in \Lambda^q.$$

Avec la notation du §5.1.8, on calcule :

$$\begin{aligned} (d^{q-1} \circ s^q(f_\bullet))_{\underline{\mu}} &= \sum_{r=0}^q \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{r+i} \cdot (f_{u_i \circ \tau_r(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} \\ (s^{q+1} \circ d^q(f_\bullet))_{\underline{\mu}} &= \sum_{i=0}^q \sum_{r=0}^{q+1} (-1)^{i+r} \cdot (f_{\tau_r \circ u_i(\underline{\mu})})_{U_{\underline{\mu}}} \end{aligned} \quad \forall \underline{\mu} \in \Lambda^{q+1}$$

et noter que

$$u_i \circ \tau_r = \begin{cases} \tau_{r+1} \circ u_i & \text{si } i < r \\ \tau_r \circ u_{i+1} & \text{si } i \geq r. \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_j \circ u_{j-1} = \tau_j \circ u_j \quad \forall j = 1, \dots, q$$

d'où $d^{q-1} \circ s^q + s^{q+1} \circ d^q = t'^q - t^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$; i.e. $(s^q \mid q \in \mathbb{N})$ est une homotopie de $t'^\bullet$ vers $t^\bullet$, et cela achève la preuve de (i). L'assertion (ii) suit aussitôt de (i) et de la remarque 5.5(iii). L'assertion (iii) est claire, car si $v : \Lambda' \rightarrow \Lambda''$ est une application avec $V_{\lambda'} \subset W_{v(\lambda')}$ pour tout $\lambda' \in \Lambda'$, alors $U_\lambda \subset W_{v \circ t(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et évidemment $(v \circ t)^q = t^q \circ v^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

(iv) : Le morphisme $t^\bullet$ relatif aux recouvrements $\{U\}$ et $\mathcal{U}$ se prolonge de façon évidente en un morphisme $t_{\text{aug}}^\bullet : \check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\{U\}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; d'autre part, avec le théorème 5.29(iii) on vérifie aisément que le recouvrement $\{U\}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique. Il suffit alors de vérifier que $H^q(t^\bullet)$ est bijectif $\Leftrightarrow H^q(t_{\text{aug}}^\bullet)$ est bijectif, pour chaque $q \in \mathbb{Z}$. Mais on a un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\{U\}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\{U\}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U)[-1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow t^\bullet & & \downarrow t_{\text{aug}}^\bullet & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U)[-1] \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes. L'assertion suit alors de la remarque 2.111, de l'exercice 2.104, et d'une simple récurrence sur $q \in \mathbb{N}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

5.2. Schémas. Le langage des faisceaux de la section 4.3 nous aidera non seulement pour formaliser l'opération de recollement de sections, mais même afin de recoller des espaces topologiques (en l'occurrence, des spectres premiers d'anneaux) et ainsi construire des variétés algébro-géométriques tout à fait générales. La première étape consiste à munir l'espace $X := \operatorname{Spec} A$ associé à un anneau arbitraire A , d'un *faisceau* $\mathcal{O}_X$ de *fonctions algébriques*, analogue au faisceau des fonctions continues à valeurs réelles de l'exemple 4.84. Or, l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ des sections globales de $\mathcal{O}_X$ devrait être A ; mais quel est l'anneau des fonctions algébriques sur une partie ouverte U de X ? Si U est une partie ouverte *représentable* au sens de la remarque 3.34, il est naturel de supposer que $\mathcal{O}_X(U)$ devrait être une A -algèbre représentant U . Par exemple, on devrait avoir $\mathcal{O}_X(D(f)) \simeq A_f$ pour tout $f \in A$, au vu de l'exercice 3.35; en tout cas, la restriction à $D(f) \simeq \operatorname{Spec} A_f$ du faisceau $\mathcal{O}_X$ devrait coïncider, à isomorphisme près, avec le faisceau structural $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}$, dont les sections globales devraient nous redonner en effet l'anneau A_f .

5.2.1. Le faisceau structural d'un spectre premier. On arrive ainsi à la question suivante : existe-t-il un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X tel que $\mathcal{O}_X(U)$ soit une A -algèbre représentant U , pour toute partie ouverte représentable U de X ? Noter que si un tel faisceau $\mathcal{O}_X$ existe, cette condition le détermine à isomorphisme unique près, car toute partie ouverte de X admet un recouvrement composé de parties ouvertes représentables. Afin de répondre à notre question, on va d'abord rassembler quelques observations préliminaires sur les parties ouvertes représentables :

Lemme 5.31. *Soient A un anneau, $U, U' \subset \operatorname{Spec} A$ des parties ouvertes représentées par les A -algèbres A_U , respectivement $A_{U'}$, et $f \in A$ tel que $D(f) \subset U$. On a :*

- (i) *La A -algèbre $A_U \otimes_A A_{U'}$ représente $U \cap U'$.*
- (ii) *Il existe un unique isomorphisme $A_f \xrightarrow{\sim} (A_U)_f$ de A -algèbres.*
- (iii) *A_U est une A -algèbre plate et l'homomorphisme structurel $j_U : A \rightarrow A_U$ induit un homéomorphisme $\operatorname{Spec} j_U : \operatorname{Spec} A_U \xrightarrow{\sim} U$.*
- (iv) *Soit $V \subset U$ une partie ouverte. Alors :*

(a) *V est une partie représentable de $\operatorname{Spec} A$ si et seulement si $(\operatorname{Spec} j_U)^{-1}(V)$ est une partie représentable de $\operatorname{Spec} A_U$.*

(b) *Si $(\operatorname{Spec} j_U)^{-1}(V)$ est représentée par la A_U -algèbre $(A_V, i : A_U \rightarrow A_V)$, la A -algèbre $(A_V, i \circ j_U : A \rightarrow A_V)$ représente V .*

Démonstration. (i) : Rappelons que A_U représente le sous-foncteur $F_U \subset \mathbf{h}_A$ tel que $F_U(B) := \{f : A \rightarrow B \mid \operatorname{Im}(\operatorname{Spec} f) \subset U\}$ pour tout anneau B ; or, d'un côté on a $F_U \cap F_{U'} = F_{U \cap U'}$, et de l'autre côté, $A_U \otimes_A A_{U'}$ représente la somme amalgamée de A_U et $A_{U'}$ le long de A ; l'assertion découle alors du lemme 2.47(iii).

(ii) : D'après l'exercice 3.35, la localisation A_f représente la partie $D(f)$; d'après (i), il s'ensuit que $D(f) = U \cap D(f)$ est aussi représentée par $A_U \otimes_A A_f \xrightarrow{\sim} (A_U)_f$ (voir le §3.4.2); comme A_f et $A_U \otimes_A A_f$ représentent le même sous-foncteur de $\mathbf{h}_A$, l'application canonique $A_f \rightarrow A_U \otimes_A A_f : x \mapsto 1 \otimes x$ est alors l'unique homomorphisme de A -algèbres de A_f vers $A_U \otimes_A A_f$, et elle est de plus un isomorphisme (voir l'exercice 2.7), d'où l'assertion.

(iii) : Soit $\mathfrak{p} \in U$, choisissons $a \in A$ tel que $\mathfrak{p} \in D(a) \subset U$, posons $b := j_U(a)$, et soient $i : A \rightarrow A_a$ et $i_U : A_U \rightarrow (A_U)_b$ les localisations. D'après (ii), la composition $i_U \circ j_U : A \rightarrow (A_U)_b$ se factorise à travers un isomorphisme de A -algèbres :

$$(*) \quad A_a \xrightarrow{\sim} (A_U)_b.$$

On a ainsi un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A_U)_b & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(i_U)} & \mathrm{Spec} A_U \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Spec}(j_U) \\ \mathrm{Spec} A_a & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(i)} & \mathrm{Spec} A \end{array}$$

dont la flèche verticale à gauche est l'homéomorphisme induit par $(*)$. Or, d'un côté, par l'exemple 3.32(i), $\mathrm{Spec}(i)$ (resp. $\mathrm{Spec}(i_U)$) identifie $\mathrm{Spec} A_a$ (resp. $\mathrm{Spec}(A_U)_b$) avec la partie ouverte $D(a) \subset \mathrm{Spec} A$ (resp. avec $D(b) \subset \mathrm{Spec} A_U$), et de l'autre côté on a $D(b) = (\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(D(a))$. Par suite, $\mathrm{Spec}(j_U)$ se restreint en un homéomorphisme $(\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(D(a)) \xrightarrow{\sim} D(a)$; mais il est aussi clair que l'image de $\mathrm{Spec}(j_U)$ est contenue dans U , par la propriété universelle de A_U . Comme $\mathfrak{p}$ est arbitraire, il s'ensuit que l'image de $\mathrm{Spec}(j_U)$ est précisément U , et $\mathrm{Spec}(j_U)$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spec} A_U \xrightarrow{\sim} U$. En dernier lieu, $(*)$ induit un isomorphisme d'anneaux : $A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} (A_a)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} ((A_U)_b)_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} (A_U)_{\mathfrak{q}}$, avec $\mathfrak{q} := (\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(\mathfrak{p})$; comme $A_{\mathfrak{p}}$ est une A -algèbre plate, il en est alors de même pour $(A_U)_{\mathfrak{q}}$, pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A_U$, et finalement A_U est une A -algèbre plate, d'après la proposition 3.77.

(iv) : Soient $(\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(V)$ représentable, et $(B, \phi : A \rightarrow B)$ une A -algèbre; si l'image de $\mathrm{Spec} \phi$ est dans V , *a fortiori* elle est dans U , d'où $\phi = \phi' \circ j_U$ pour un homomorphisme unique $\phi' : A_U \rightarrow B$ de A -algèbres, et il vient : $\mathrm{Im}(\mathrm{Spec} \phi') \subset (\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(V)$, ce qui à son tour entraîne l'existence et unicité d'un homomorphisme de A_U -algèbres $\phi'' : A_U \rightarrow B$ avec $\phi'' \circ i = \phi'$. On conclut que ϕ'' est l'unique homomorphisme $(A_U, i \circ j_U) \rightarrow (B, \phi)$ de A -algèbres, donc $(A_U, i \circ j_U)$ représente V . De même on voit réciproquement que si $(A_U, i \circ j_U)$ représente V , alors (A_U, i) représente $(\mathrm{Spec} j_U)^{-1}(V)$: les détails seront confiés au lecteur. $\square$

Exercice 5.32. (i) Soient A un anneau, $U \subset \mathrm{Spec} A$ une partie ouverte représentée par la A -algèbre A_U , et $I \subset A$ un idéal. Montrer que $\mathrm{rad}(IA_U) = \mathrm{rad}(I) \cdot A_U$.

(ii) En particulier, on a $\mathcal{N}(A_U) = \mathcal{N}(A) \cdot A_U$.

(iii) En outre, $\mathfrak{p}A_U$ est un idéal premier de A_U , pour tout $\mathfrak{p} \in U$.

Considérons maintenant la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec} A)$ notée :

$$\mathrm{Rep}(A)$$

dont les objets sont les parties ouvertes représentables de $\mathrm{Spec} A$. D'après le lemme 5.31(i), l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Rep}(A))$ est stable par intersections finies, et il est une base de $\mathrm{Spec} A$, car il contient les parties $D(f)$, pour tout $f \in A$. Pour toute partie ouverte représentable $U \subset \mathrm{Spec} A$ choisissons une A -algèbre A_U représentant U ; si $U' \subset U$ est une inclusion de parties ouvertes représentables, les propriétés universelles de A_U et $A_{U'}$ entraînent l'existence d'un unique homomorphisme $A_{UU'} : A_U \rightarrow A_{U'}$ de A -algèbres. En particulier, si $U'' \subset U'$ est une troisième partie ouverte représentable, on a nécessairement $A_{UU''} = A_{U'U''} \circ A_{UU'}$, donc on a un foncteur bien défini :

$$A_{\bullet} : \mathrm{Rep}(A)^{\mathrm{op}} \rightarrow A\text{-Alg} \quad U \mapsto A_U \quad (U' \subset U) \mapsto A_{UU'}.$$

Remarque 5.33. (i) Le foncteur $A_{\bullet}$ dépend des choix des A -algèbres représentantes, mais on voit aisément que deux systèmes de choix différents conduisent à deux foncteurs isomorphes, et en fait il existe un unique isomorphisme entre les foncteurs ainsi obtenus : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(ii) Soient $U \subset \mathrm{Spec} A$ une partie ouverte représentable, et $j_U : A \rightarrow A_U$ l'homomorphisme structural de l'algèbre représentante correspondante; au vu du lemme 5.31(iv), l'application continue $\mathrm{Spec} j_U : \mathrm{Spec} A_U \rightarrow \mathrm{Spec} A$ induit un foncteur

$$\omega_U : \mathrm{Rep}(A_U) \rightarrow \mathrm{Rep}(A) \quad W \mapsto (\mathrm{Spec} j_U)(W)$$

qui identifie $\text{Rep}(A_U)$ avec la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(A)$ dont les objets sont les parties ouvertes représentables de $\text{Spec } A$ contenues dans U . De plus, la composition $A_\bullet \circ \omega_U^{\text{op}}$ est aussi naturellement identifiée au foncteur $(A_U)_\bullet$: i.e. la restriction de $A_\bullet$ à $\text{Rep}(A_U)$ coïncide avec $(A_U)_\bullet$, à isomorphisme unique près.

Définition 5.34. Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une catégorie.

(i) Un *site* de T est une sous-catégorie pleine $\mathcal{S}$ de $\text{Ouv}(T)$ telle que $\text{Ob}(\mathcal{S})$ est une base de T stable par intersections finies : $U, U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \Rightarrow U \cap U' \in \text{Ob}(\mathcal{S})$.

(ii) Soit $\mathcal{S}$ un site de T . Un *pré-faisceau* sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ (ou, brièvement : un $\mathcal{A}$ -pré-faisceau sur $\mathcal{S}$) est un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$. Les Ens-pré-faisceaux sont appelés simplement *pré-faisceaux* sur $\mathcal{S}$. De même, si $\mathcal{A} = \mathbb{Z} - \text{Alg}$, Grp ou $A - \text{Mod}$ pour un anneau A , on parle de *pré-faisceaux d'anneaux* (resp. de *groupes*, resp. de *A-modules*) sur $\mathcal{S}$: cf. la définition 4.83(i). Pour un tel $\mathcal{F}$ on utilisera la même terminologie introduite pour le cas particulier des pré-faisceaux sur T : donc on parlera e.g. des *U-sections* de $\mathcal{F}$, pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, et de *restrictions à U' des U-sections* de $\mathcal{F}$, pour toute inclusion $U' \subset U$ d'objets de $\mathcal{S}$.

(iii) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$ -pré-faisceau sur le site $\mathcal{S}$ de T . On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau à valeurs dans $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{S}$* (ou, brièvement, un $\mathcal{A}$ -faisceau sur $\mathcal{S}$) si pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ et tout recouvrement $\mathcal{U} \subset \text{Ob}(\mathcal{S})$ de U , le cône $(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ induit par les restrictions est universel. Comme ci-dessus, les Ens-faisceaux seront appelés simplement *faisceaux* sur $\mathcal{S}$. De même on définit les *faisceaux d'anneaux* (resp. de *groupes*, resp. de *A-modules*) sur $\mathcal{S}$.

(iv) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{A}$ -pré-faisceaux (resp. deux $\mathcal{A}$ -faisceaux) sur $\mathcal{S}$; les *morphismes* $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ -pré-faisceaux (resp. de $\mathcal{A}$ -faisceaux) sur $\mathcal{S}$ sont les transformations naturelles, comme pour le cas particulier des $\mathcal{A}$ -pré-faisceaux sur T . Ainsi la catégorie des pré-faisceaux sur $\mathcal{S}$ est

$$\widehat{\mathcal{S}} := \text{Fun}(\mathcal{S}^{\text{op}}, \text{Ens})$$

et $\widehat{\mathcal{S}}$ sera la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{S}}$ dont les objets sont les faisceaux sur $\mathcal{S}$.

Exercice 5.35. (i) Soient $\mathcal{S}$ un site d'un espace topologique $(T, \mathcal{T})$, et $\mathcal{A}$ une catégorie complète. L'inclusion de catégories $j_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \text{Ouv}(T)$ induit un foncteur

$$j_{\mathcal{S}*} := \text{Fun}(j_{\mathcal{S}}^{\text{op}}, \mathcal{A}) : \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{S}^{\text{op}}, \mathcal{A}) \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \circ j_{\mathcal{S}}^{\text{op}}$$

de la catégorie des $\mathcal{A}$ -pré-faisceaux sur T dans celle des $\mathcal{A}$ -pré-faisceaux sur $\mathcal{S}$ (voir l'exercice 1.129(iii)). Montrer que $j_{\mathcal{S}*}$ admet un adjoint à droite plein et fidèle :

$$j_{\mathcal{S}}^* : \text{Fun}(\mathcal{S}^{\text{op}}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\text{Ouv}(T)^{\text{op}}, \mathcal{A}).$$

Pour tout $F \in \text{Ob}(\text{Fun}(\mathcal{S}^{\text{op}}, \mathcal{A}))$ on appelle $j_{\mathcal{S}}^* F$ le *prolongement canonique* de F .

(ii) Montrer que $j_{\mathcal{S}*}$ et $j_{\mathcal{S}}^*$ induisent par restriction des équivalences entre la catégorie des $\mathcal{A}$ -faisceaux sur T et celle des $\mathcal{A}$ -faisceaux sur $\mathcal{S}$.

(iii) Supposons que tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ soit une partie compacte de T , et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$ -pré-faisceau sur $\mathcal{S}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ et tout recouvrement fini $\mathcal{U} \subset \text{Ob}(\mathcal{S})$ de U , le cône $(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ induit par les restrictions est universel.

Voici une première application de l'exercice 5.35 :

Lemme 5.36. (i) Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{A}$ une catégorie complète, $\mathcal{U}$ un recouvrement de T , et considérons deux $\mathcal{A}$ -faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur T . Soit en outre $(\phi^{(U)} : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U \mid U \in \mathcal{U})$ un système de morphismes de $\mathcal{A}$ -faisceaux tel que :

$$\phi_{U \cap U'}^{(U)} = \phi_{U \cap U'}^{(U')} \quad \forall U, U' \in \mathcal{U}.$$

Alors il existe un unique morphisme de $\mathcal{A}$ -faisceaux

$$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \quad \text{tel que} \quad \phi|_U = \phi^{(U)} \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

(ii) ϕ est un isomorphisme (resp. un monomorphisme, resp. un épimorphisme) de $\mathcal{A}$ -faisceaux si et seulement s'il en est de même pour chaque $\phi^{(U)}$.

Démonstration. (i) : Soit $\mathcal{S}$ le site de T avec $\text{Ob}(\mathcal{S}) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{V \in \mathcal{T} \mid V \subset U\}$. Pour tout $V \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, choisissons $U_V \in \mathcal{U}$ avec $V \subset U_V$, et posons $\psi_V := \phi_V^{(U_V)} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$; d'après nos hypothèses, ψ_V ne dépend pas du choix de U_V , et on voit aussitôt que l'association $V \mapsto \psi_V$ définit un morphisme $\psi : \mathcal{F}|_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{S}}$ (avec $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{G}|_{\mathcal{S}}$ les restrictions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ au site $\mathcal{S}$). Par l'exercice 5.35(ii), ψ se prolonge en un unique morphisme $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ -faisceaux sur T , d'où (i).

(ii) : Si chaque $\phi^{(U)}$ est un isomorphisme, évidemment il en est de même pour ψ , et donc aussi pour ϕ ; réciproquement, si ϕ est un isomorphisme, évidemment il en est de même pour chaque $\phi^{(U)}$. Ensuite, soient $\mathcal{H}$ un troisième $\mathcal{A}$ -faisceau sur T , et $\beta_1, \beta_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ -faisceaux avec $\phi \circ \beta_1 = \phi \circ \beta_2$; il vient $\phi^{(U)} \circ \beta_1|_U = \phi^{(U)} \circ \beta_2|_U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, donc $\beta_1|_U = \beta_2|_U$ pour tout tel U , si chaque $\phi^{(U)}$ est un monomorphisme. Avec (i), on conclut que dans ce cas $\beta_1 = \beta_2$, et cela montre que ϕ est un monomorphisme. On raisonne de même pour vérifier que si chaque $\phi^{(U)}$ est un épimorphisme, il en est de même pour ϕ . Réciproquement, soient ϕ un épimorphisme, $\mathcal{K}$ un $\mathcal{A}$ -faisceau sur U , et $\gamma_1, \gamma_2 : \mathcal{G}|_U \rightarrow \mathcal{K}$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ -faisceaux avec $\gamma_1 \circ \phi|_U = \gamma_2 \circ \phi|_U$; notons aussi par $j_U : U \rightarrow T$ l'inclusion. Alors, l'adjonction de l'exemple 4.92(ii) pour le couple $((-)|_U, j_U^*)$ associe à $\gamma_i \circ \phi|_U$ le morphisme $j_U^*(\gamma_i) \circ \phi$ pour $i = 1, 2$; par suite $j_U^*(\gamma_1) \circ \phi = j_U^*(\gamma_2) \circ \phi$, d'où $j_U^*(\gamma_1) = j_U^*(\gamma_2)$, et finalement $\gamma_1 = \gamma_2$; cela achève de vérifier que $\phi^{(U)}$ est un épimorphisme. En dernier lieu, soit ϕ un monomorphisme; notons par $\mathcal{A}_{\hat{T}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\hat{T}}$) la catégorie des $\mathcal{A}$ -préfaisceaux (resp. de $\mathcal{A}$ -faisceaux) sur T , et par $i : \mathcal{A}_{\hat{T}} \rightarrow \mathcal{A}_{\hat{T}}$ l'inclusion. D'après l'exercice 2.66, la diagonale $\Delta_{\mathcal{F}/\mathcal{G}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ de ϕ est un isomorphisme, et d'autre part $i(\Delta_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}) : i(\mathcal{F}) \rightarrow i(\mathcal{F}) \times_{i(\mathcal{G})} i(\mathcal{F})$ est la diagonale $\Delta_{i(\mathcal{F})/i(\mathcal{G})}$ de $i(\phi)$, d'après l'exercice 4.86. Comme les limites de $\mathcal{A}_{\hat{T}}$ se calculent terme à terme (remarque 2.56), on voit en outre que

$$(\Delta_{i(\mathcal{F})/i(\mathcal{G})})|_U : i(\mathcal{F})|_U \rightarrow i(\mathcal{F})|_U \times_{i(\mathcal{G})|_U} i(\mathcal{F})|_U$$

est la diagonale de $i(\phi)|_U$, pour tout $U \in \mathcal{U}$. Toujours avec l'exercice 2.66, on conclut que $i(\phi)|_U$ est un monomorphisme, et donc de même pour $\phi|_U$, pour tout $U \in \mathcal{U}$. $\square$

Avec la terminologie de la définition 5.34, le foncteur $A_\bullet$ est donc un préfaisceau d'anneaux sur le site $\text{Rep}(A)$ de $\text{Spec } A$; mais en fait on a :

Proposition 5.37. *Le foncteur $A_\bullet$ est un faisceau d'anneaux sur le site $\text{Rep}(A)$.*

Démonstration. Noter que toute partie représentable U de $T := \text{Spec } A$ est compacte (lemme 5.31(iii)); d'après l'exercice 5.35(iii), il suffit alors de montrer que pour tout recouvrement fini $\mathcal{U} \subset \text{Ob}(\text{Rep}(A))$ d'une telle U , le cône induit par les restrictions $(A_U \rightarrow A_Q \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est universel. Compte tenu de la remarque 5.33(ii), on peut remplacer A par A_U et $\mathcal{U}$ par le recouvrement correspondant de $\text{Spec } A_U$, et se ramener ainsi au cas où $U = T$. Disons que $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$, et posons $B := A_{U_1} \times \dots \times A_{U_n}$. Noter que $\text{Spec } B$ s'identifie naturellement à la réunion disjointe $U_1 \sqcup \dots \sqcup U_n$ (voir l'exercice 3.66(ii)), donc l'application continue induite $\text{Spec } B \rightarrow T$ est surjective; au vu du lemme 5.31(iii) et du problème 3.83(i.c), la A -algèbre B est alors *fidèlement plate*. De plus, d'après le lemme 5.31(i) on a un isomorphisme naturel de A -algèbres :

$$\omega : B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \prod_{1 \leq i, j \leq n} A_{U_i} \otimes_A A_{U_j} \xrightarrow{\sim} \prod_{1 \leq i, j \leq n} A_{U_i \cap U_j}.$$

Rappelons que pour toute inclusion $V' \subset V$ de parties ouvertes représentables, l'unique homomorphisme de A -algèbres $A_V \rightarrow A_{V'}$ définit la restriction $a \mapsto a_{V'}$ des V -sections du préfaisceau $A_\bullet$, et soit $\varepsilon : A \rightarrow B$ l'homomorphisme tel que $a \mapsto (a_{U_1}, \dots, a_{U_n})$ pour

tout $a \in A$. On obtient un diagramme de A -algèbres :

$$A \xrightarrow{\varepsilon} B \xrightleftharpoons[\partial_1^0]{\partial_0^0} B \otimes_A B$$

où ∂_0^0 et ∂_1^0 sont les homomorphismes de A -algèbres tels que :

$$\begin{aligned} \omega \circ \partial_0^0(a_1, \dots, a_n) &= ((a_j)_{U_i \cap U_j} \mid 1 \leq i, j \leq n) \\ \omega \circ \partial_1^0(a_1, \dots, a_n) &= ((a_i)_{U_i \cap U_j} \mid 1 \leq i, j \leq n) \end{aligned} \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in B$$

et on est ramené à vérifier que ε identifie A avec l'égaliseur de ∂_0^0 et ∂_1^0 (comparer avec la preuve de la proposition 2.40). Mais par ce qui précède, les restrictions

$$A_{U_i} \rightarrow A_{U_i \cap U_j} \leftarrow A_{U_j}$$

s'identifient aux deux uniques homomorphismes de A -algèbres $A_{U_i} \rightarrow A_{U_i} \otimes_A A_{U_j} \leftarrow A_{U_j}$, i.e. aux applications : $a \mapsto a \otimes 1$ et $a' \mapsto 1 \otimes a'$ pour tous $a \in A_{U_i}$ et $a' \in A_{U_j}$; par suite

$$\partial_0^0(b) = 1 \otimes b \quad \text{et} \quad \partial_1^0(b) = b \otimes 1 \quad \forall b \in B.$$

Finalement, on conclut que $\partial_0^0 - \partial_1^0$ n'est rien d'autre que la différentielle d_0 du complexe d'Amitsur associé à ε , donc l'assertion suit du problème 5.12(iii). $\square$

En joignant la proposition 5.37 et l'exercice 5.35(ii) on complète finalement la construction du faisceau des fonctions algébriques, que l'on notera :

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}.$$

Il est caractérisé à isomorphisme unique près, comme le faisceau d'anneaux sur $\text{Spec } A$ qui prolonge le faisceau $A_\bullet$ sur le site $\text{Rep}(A)$.

5.2.2. Schémas. On souhaite maintenant expliquer comment recoller des spectres premiers afin de construire des variétés plus générales ; pour cela, on va d'abord introduire la catégorie qui accueillera les objets géométriques que l'on envisage :

Définition 5.38. (i) Un *espace annelé* est la donnée $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ d'un espace topologique T et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_T$ sur T , dit *faisceau structural* de $\underline{T}$.

(ii) Soient $(T, \mathcal{O}_T)$ et $(S, \mathcal{O}_S)$ deux espaces annelés. Un *morphisme d'espaces annelés* $\underline{f} := (f, f^\flat) : (T, \mathcal{O}_T) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ est la donnée d'une application continue $f : T \rightarrow S$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\flat : \mathcal{O}_S \rightarrow f_* \mathcal{O}_T$.

Remarque 5.39. (i) Soit $\underline{f} : (T, \mathcal{O}_T) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ un morphisme d'espaces annelés. L'adjonction canonique du §4.3.2 associe à $f^\flat : \mathcal{O}_S \rightarrow f_* \mathcal{O}_T$ un morphisme de faisceaux d'anneaux

$$f^\sharp : \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_T$$

et réciproquement, la donnée de $f^\sharp$ détermine $f^\flat$, donc on peut définir aussi un morphisme d'espaces annelés par un tel couple $(f, f^\sharp)$.

(ii) Soit $\underline{g} := (g, g^\flat) : (S, \mathcal{O}_S) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ un deuxième morphisme d'espaces annelés. La composition $\underline{g} \circ \underline{f}$ est le morphisme d'espaces annelés

$$(h, h^\flat) : (T, \mathcal{O}_T) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W) \quad \text{avec} \quad h := g \circ f \quad \text{et} \quad h^\flat := g_*(f^\flat) \circ g^\flat.$$

On voit aussitôt que cette loi de composition est associative, donc les espaces annelés et les morphismes d'espaces annelés forment une catégorie :

$$\text{EspAnn.}$$

(iii) Dans la situation de (i), soit $t \in T$; par inspection directe, on vérifie aisément que la bijection naturelle $\tilde{\omega}_{f, \mathcal{O}_S}^t : (\tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_S)_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{S, f(t)}$ de l'exercice 4.98(ii) est un isomorphisme d'anneaux qui identifie $(f^\sharp)_t$ avec l'homomorphisme d'anneaux :

$$f_t^\sharp : \mathcal{O}_{S, f(t)} \rightarrow \mathcal{O}_{T, t} \quad [s, U] \mapsto [f_U^\flat(s), f^{-1}U].$$

(iv) Dans la situation de (ii), le diagramme suivant commute :

$$\mathcal{D} : \begin{array}{ccc} \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}^{-1} \mathcal{O}_W & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\mathcal{O}_W}^{f,g}} & \widetilde{(g \circ f)^{-1} \mathcal{O}_W} \\ \tilde{f}^{-1}(g^\#) \downarrow & & \downarrow (g \circ f)^\# \\ \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_S & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{O}_T \end{array}$$

où $\tilde{\gamma}_{\mathcal{O}_W}^{f,g}$ est l'isomorphisme naturel de l'exercice 4.98(ii). Pour la preuve, il suffit de montrer la commutativité du diagramme $\mathcal{D}_t$ obtenu en prenant terme à terme les fibres des faisceaux et morphismes de $\mathcal{D}$, en tout point $t \in T$. Mais au vu de la caractérisation de $(\tilde{\gamma}_{\mathcal{O}_W}^{f,g})_t$ en termes du diagramme commutatif (†) de l'exercice 4.98(ii), une chasse au diagramme que l'on laissera au lecteur ramène à son tour aisément la commutativité de $\mathcal{D}_t$ à celle du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{W, g \circ f(t)} & \\ g_{f(t)}^\# \swarrow & & \searrow (g \circ f)_t^\# \\ \mathcal{O}_{S, f(t)} & \xrightarrow{f_t^\#} & \mathcal{O}_{T, t} \end{array}$$

et cela découle de la description explicite de ces applications fournie par (iii).

Exercice 5.40. (i) Soient $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un espace annelé, et $Z \subset T$ une partie ; comme dans l'exercice 2.7(iv), on peut considérer le foncteur

$$\mathbf{h}_{\underline{T}^{\text{op}}} : \mathbf{EspAnn}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens} \quad \underline{X} \mapsto \mathbf{EspAnn}(\underline{X}, \underline{T})$$

et le sous-foncteur $F_Z \subset \mathbf{h}_{\underline{T}^{\text{op}}}$ avec $F_Z(\underline{X}) := \{(g, g^\flat) \in \mathbf{EspAnn}(\underline{X}, \underline{T}) \mid \text{Im}(g) \subset Z\}$. Montrer que F_Z est représentable par un espace annelé que l'on notera $Z \times_T \underline{T}$.

(ii) Soit $j : U \rightarrow T$ l'inclusion d'une partie ouverte. Montrer que F_U est représenté par le sous-espace annelé ouvert $(U, \mathcal{O}_U)$ de $\underline{T}$, où U est muni de la topologie induite par T , et avec $\mathcal{O}_U := (\mathcal{O}_T)|_U$, la restriction de $\mathcal{O}_T$ à la sous-catégorie $\mathbf{Ouv}(U)^{\text{op}} \subset \mathbf{Ouv}(T)^{\text{op}}$. Le morphisme universel $(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \underline{T}$ est le couple $(j, j^\flat)$ avec $j^\flat : \mathcal{O}_T \rightarrow j_* \mathcal{O}_U$ le morphisme de faisceaux tel que $j_V^\flat : \mathcal{O}_T(V) \rightarrow \mathcal{O}_T(V \cap U)$ est l'application de restriction, pour toute partie ouverte $V \subset T$.

Remarque 5.41. (i) Soit $\phi : \underline{T} \rightarrow \underline{T}'$ un morphisme d'espaces annelés, $j : Z \rightarrow T$ et $j' : Z' \rightarrow T'$ les inclusions de deux parties telles que $\phi(Z) \subset Z'$; d'après l'exercice 5.40(i) on déduit des morphismes canoniques $\underline{j} := (j, j^\flat) : Z \times_T \underline{T} \rightarrow \underline{T}$ et $\underline{j}' := (j', j'^\flat) : Z' \times_{T'} \underline{T}' \rightarrow \underline{T}'$ d'espaces annelés, et ϕ se restreint en un morphisme d'espaces annelés unique $(\phi)_{|Z} : Z \times_T \underline{T} \rightarrow Z' \times_{T'} \underline{T}'$ tel que $\underline{j}' \circ (\phi)_{|Z} = \phi \circ \underline{j}$.

(ii) Soit $((T_\lambda, \mathcal{O}_{T_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ une petite famille d'espaces annelés ; rappelons que le coproduit des espaces topologiques sous-jacents $((T_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est représenté par la réunion disjointe $T := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ des ensembles $(T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, munie de la topologie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{U} := (U \times \{\lambda\} \mid \lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{T}_\lambda)$ soit une base de $\mathcal{T}$ (voir la solution du problème 2.51(i)). Le co-cône universel $(j_\lambda : T_\lambda \rightarrow T \mid \lambda \in \Lambda)$ consiste en des applications continues, injectives et ouvertes telles que $j_\lambda(x) := (x, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in T_\lambda$. Soit alors $\mathcal{S}$ le site de T avec $\text{Ob}(\mathcal{S}) = \mathcal{U}$; évidemment on obtient un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{S}$ avec

$$\mathcal{A}(U \times \{\lambda\}) := \mathcal{O}_{T_\lambda}(U) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall U \in \mathcal{T}_\lambda$$

(avec les restrictions $\mathcal{A}(U \times \{\lambda\}) \rightarrow \mathcal{A}(V \times \{\lambda\})$ du faisceau $\mathcal{O}_{T_\lambda}$, pour toute inclusion $V \subset U$ de parties ouvertes de T_λ). D'après l'exercice 5.35(ii) il existe alors un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_T$ sur T , unique à isomorphisme unique près, qui prolonge $\mathcal{A}$, de sorte que l'on a une identification naturelle $j_\lambda^\# : \tilde{j}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T_\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (exemple 4.92(i)). Avec le lemme 5.36(i), on voit en outre que la donnée d'un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$ de faisceaux d'anneaux équivaut à celle d'une famille $(\tilde{j}_\lambda^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{T_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ de morphismes

de faisceaux d'anneaux. En particulier, la donnée d'un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\#) : (T, \mathcal{O}_T) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ revient à celle d'une application continue $f : T \rightarrow X$ et d'une famille de morphismes de faisceaux d'anneaux $(\tilde{f}_\lambda^{-1} \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{T_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$. A son tour, f équivaut à la donnée de la famille $(f_\lambda := f \circ j_\lambda : T_\lambda \rightarrow X \mid \lambda \in \Lambda)$, et rappelons l'isomorphisme naturel de foncteurs $\tilde{f}_\lambda^{-1} \xrightarrow{\sim} \tilde{j}_\lambda^{-1} \circ \tilde{f}^{-1}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ (remarque 4.94). Ainsi, $(f, f^\#)$ équivaut à la donnée d'une famille $((f_\lambda, f_\lambda^\#) : (T_\lambda, \mathcal{O}_{T_\lambda}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \mid \lambda \in \Lambda)$ de morphismes d'espaces annelés ; cela revient à dire que $(T, \mathcal{O}_T)$ représente le coproduit $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (T_\lambda, \mathcal{O}_{T_\lambda})$ dans la catégorie $\mathbf{EspAnn}$, avec co-cône universel $((j_\lambda, j_\lambda^\#) \mid \lambda \in \Lambda)$.

Définition 5.42. Soit $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un espace annelé.

(i) On dit que $\underline{T}$ est un *schéma affine*, s'il existe un anneau A avec un isomorphisme d'espaces annelés $\underline{T} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Spec} A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A})$.

(ii) On dit que $\underline{T}$ est un *schéma*, si tout $t \in T$ admet un voisinage ouvert $U \subset T$ tel que le sous-espace annelé ouvert $(U, (\mathcal{O}_T)|_U)$ est un schéma affine.

Remarque 5.43. Soient A un anneau, $U \in \mathrm{Rep}(A)$, et $\underline{T} := (\mathrm{Spec} A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A})$.

(i) Il suit aussitôt de la remarque 5.33(ii) que $U \times_{\mathrm{Spec} A} \underline{T}$ est un schéma affine.

(ii) Un *sous-schéma ouvert* d'un schéma $\underline{X}$ est un sous-espace annelé ouvert $\underline{U} := (U, \mathcal{O}_U)$ de $\underline{X}$ (voir l'exercice 5.40(ii)). Comme les ouverts représentables forment une base de $\mathrm{Spec} A$, on déduit de (i) que $\underline{U}$ est un schéma. Si $\underline{U}$ est un sous-schéma ouvert affine, on dira aussi que U est une *partie ouverte affine* de $\underline{X}$.

(iii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et $\phi := \mathrm{Spec} f : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$. Alors $\phi^{-1}U \in \mathrm{Rep}(B)$. En effet, pour tout homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow B'$ on a : $\mathrm{Im}(\mathrm{Spec} g) \subset \phi^{-1}U \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Spec}(g \circ f)) \subset U$, i.e. $g \in \mathbf{h}_{\phi^{-1}U}(B') \Leftrightarrow g \circ f \in \mathbf{h}_U(B')$. Avec la notation de la remarque 2.48(ii), cela revient à dire que

$$\mathbf{h}_{\phi^{-1}U} = \mathbf{h}_f^{-1}(\mathbf{h}_U).$$

Mais la somme amalgamée $B \sqcup_A A_U$ est représentée par $B \otimes_A A_U$ (voir la section 3.4), donc, la B -algèbre $B \otimes_A A_U$ représente $\phi^{-1}U \subset \mathrm{Spec} B$, et le foncteur $\mathrm{Ouv}(\phi) : \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec} B) \rightarrow \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec} A)$ du §4.3.2 induit par restriction un foncteur

$$\mathrm{Rep}(f) : \mathrm{Rep}(A) \rightarrow \mathrm{Rep}(B) \quad U \mapsto \phi^{-1}U.$$

Pour tout $\mathcal{A}$ -préfaisceau $\mathcal{F}$ (avec une catégorie $\mathcal{A}$ quelconque) sur le site $\mathrm{Rep}(B)$ on posera $\phi_* \mathcal{F} := \mathcal{F} \circ \mathrm{Rep}(f)^{\mathrm{op}}$; si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau, il est clair que $\phi_* \mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur $\mathrm{Rep}(A)$. En particulier, si $A_\bullet$ (resp. $B_\bullet$) est le faisceau d'anneaux sur $\mathrm{Rep}(A)$ (resp. sur $\mathrm{Rep}(B)$) comme dans la proposition 5.37, il vient un faisceau $\phi_* B_\bullet$ ainsi qu'un morphisme naturel de faisceaux d'anneaux sur $\mathrm{Rep}(A)$:

$$\phi^\flat : A_\bullet \rightarrow \phi_* B_\bullet.$$

En effet, on vient de voir que pour tout $U \in \mathrm{Rep}(A)$ la B -algèbre $B \otimes_A A_U$ représente $B_{\phi^{-1}U}$, d'où un isomorphisme unique de B -algèbres $B \otimes_A A_U \xrightarrow{\sim} B_{\phi^{-1}U}$, et on définit $\phi_U^\flat : A_U \rightarrow B_{\phi^{-1}U}$ comme la composition de cet isomorphisme avec l'homomorphisme canonique $A_U \rightarrow B \otimes_A A_U : a \mapsto 1 \otimes a$. On laisse au lecteur le soin de vérifier la naturalité de l'association : $U \mapsto \phi_U^\flat$.

(iv) Par construction, $\phi_* B_\bullet$ est la restriction du faisceau $\phi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} B}$ sur $\mathrm{Spec} A$; l'exercice 5.35(ii) fournit alors un prolongement unique de $\phi^\flat$ en un morphisme de faisceaux d'anneaux sur $\mathrm{Spec} A$, que l'on notera également

$$\phi^\flat : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}.$$

On a ainsi associé à tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ un morphisme $\mathrm{Spec} f := (\phi, \phi^\flat) : (\mathrm{Spec} B, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} B}) \rightarrow (\mathrm{Spec} A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A})$ d'espaces annelés. On dira que $\mathrm{Spec} f$ est le *morphisme de schémas affines associé à f* . Noter que $\phi^\flat$ détermine f , car on a $f = \phi_{\mathrm{Spec} A}^\flat : A = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A}(\mathrm{Spec} A) \rightarrow B = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} B}(\mathrm{Spec} B)$.

Exemple 5.44. (i) Pour tout anneau A et tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace affine de dimension n sur A est le schéma affine

$$\mathbb{A}_A^n := \operatorname{Spec} A[T_1, \dots, T_n].$$

Si K est un corps algébriquement clos, le Nullstellensatz identifie naturellement l'ensemble des points fermés de $\operatorname{Spec} K[T_1, \dots, T_n]$ avec K^n (voir §1.3.1); les points non fermés (*i.e.* les idéaux premiers non maximaux de $K[T_1, \dots, T_n]$) correspondent d'autre part aux sous-ensembles algébriques irréductibles de K^n .

(ii) Pour un anneau A arbitraire, l'homomorphisme structurel $A \rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ induit un morphisme de schémas affines $\pi : \mathbb{A}_A^n \rightarrow \operatorname{Spec} A$, et pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, la fibre $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ s'identifie naturellement à l'espace topologique $\operatorname{Spec} k(\mathfrak{p})[T_1, \dots, T_n]$. Donc, on peut interpréter $\mathbb{A}_A^n$ comme une famille algébrique d'espaces affines de dimension n indexés par les points de $\operatorname{Spec} A$.

5.2.3. Morphismes de schémas. La géométrie algébrique s'intéresse aux morphismes $\underline{\phi} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ d'origine algébrique entre schémas, *i.e.* ces morphismes d'espaces annelés dont la restriction $U \times_X \underline{X} \rightarrow V \times_Y \underline{Y}$ est le morphisme de schémas affines associé, comme dans la remarque 5.43(iv), à l'homomorphisme d'anneaux

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\phi_V^\flat} \mathcal{O}_X(\phi^{-1}V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

pour tout couple de parties ouvertes affines $U \subset X$ et $V \subset Y$ avec $\phi U \subset V$. On appellera *morphisme de schémas* tout tel morphisme. Ils sont distingués parmi les morphismes d'espaces annelés par une propriété plus intrinsèque, qui joue un rôle important aussi dans de nombreuses autres situations. Avant d'expliquer cette caractérisation, remarquons que tout morphisme d'espaces annelés entre schémas affines n'est pas forcément un morphisme de schémas affines; en effet, on a :

Exemple 5.45. Soit $A := S^{-1}\mathbb{Z}$, avec $S := \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et $B := \mathbb{Q}$. L'espace topologique $\operatorname{Spec} A$ contient le point générique η_A et un unique autre point t , l'idéal maximal de A engendré par 2; on note aussi par η_B l'unique point de $\operatorname{Spec} B$. On considère l'application continue $\phi : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ telle que $\phi(\eta_B) = t$, et le morphisme de faisceaux $\phi^\flat : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ suivant. La partie ouverte $U = \{\eta_A\} = D(\frac{1}{2})$ de $\operatorname{Spec} A$ est représentée par la localisation $A[\frac{1}{2}] = \mathbb{Q}$, et d'autre part $\phi^{-1}U = \emptyset$, donc $\phi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(U) = 0$, et $\phi_U^\flat : \mathbb{Q} \rightarrow 0$ est l'homomorphisme trivial. Pour $U = \operatorname{Spec} A$ l'homomorphisme $\phi_{\operatorname{Spec} A}^\flat : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) \rightarrow B = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\phi^{-1}U)$ est l'inclusion. Le couple $(\phi, \phi^\flat)$ est bien un morphisme $\operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ d'espaces annelés, mais il n'est pas un morphisme de schémas affines, car le cas échéant il devrait coïncider avec $\operatorname{Spec}(\phi_{\operatorname{Spec} A}^\flat)$, et ce dernier envoie $\eta_B \mapsto \eta_A$.

Observons ensuite que pour tout anneau A et tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, la fibre $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathfrak{p}}$ du faisceau structural de $\operatorname{Spec} A$ est une A -algèbre locale, naturellement isomorphe à la localisation $A_{\mathfrak{p}}$. En effet, noter que la partie $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} := \{D(a) \mid a \in A \setminus \mathfrak{p}\}$ est finale dans l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des voisinages ouverts de $\mathfrak{p}$ dans $\operatorname{Spec} A$, et $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a)) \xrightarrow{\sim} A[a^{-1}]$ pour tout $D(a) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$, d'où un isomorphisme naturel :

$$(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{D(a) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}} A[a^{-1}]$$

(voir l'exercice 2.35(iii)) et cette colimite est représentée par $A_{\mathfrak{p}}$, d'après l'exercice 3.41. Or, revenons à la situation de la remarque 5.43(iv), et soient $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ et $\mathfrak{p} := \phi(\mathfrak{q})$; par ce qui précède, l'homomorphisme induit sur les fibres

$$\phi_{\mathfrak{p}}^\sharp : (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathfrak{p}} \rightarrow (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B})_{\mathfrak{q}}$$

est naturellement identifié avec l'unique homomorphisme de A -algèbres $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$, et ce dernier est un *homomorphisme local d'anneaux locaux* (voir le problème 3.83(iii)).

Définition 5.46. (i) Un *espace localement annelé* est un espace annelé $(T, \mathcal{O}_T)$ tel que la fibre $\mathcal{O}_{T,t}$ est un anneau local pour tout $t \in T$. Le corps résiduel $k(t)$ de $\mathcal{O}_{T,t}$ est appelé le *corps résiduel de T au point t* .

(ii) Si $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ et $\underline{T}' := (T', \mathcal{O}_{T'})$ sont deux espaces localement annelés, un *morphisme d'espaces localement annelés* $(\phi, \phi^\flat) : \underline{T} \rightarrow \underline{T}'$ est un morphisme d'espaces annelés tel que l'homomorphisme $\phi_t^\sharp : \mathcal{O}_{T', \phi(t)} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t}$ soit local pour tout $t \in T$. En particulier, $\phi_t^\sharp$ induit une *extension de corps résiduels* $\overline{\phi}_t^\sharp : k(\phi(t)) \rightarrow k(t)$.

Comme la composition d'homomorphismes locaux d'anneaux locaux est un homomorphisme local, on déduit aisément de la remarque 5.39(iv) que la composition de morphismes d'espaces localement annelés est un morphisme d'espaces localement annelés. Donc, les espaces localement annelés et leurs morphismes forment une sous-catégorie (non pleine) de **EsAnn** que l'on notera :

$$\mathbf{EsLocAn}.$$

Par ce qui précède, les associations : $A \mapsto \text{Spec } A$ et $f \mapsto \text{Spec } f$ pour tout anneau A et tout homomorphisme d'anneaux f , définissent un foncteur

$$\text{Spec} : (\mathbb{Z} - \mathbf{Alg})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{EsLocAn}.$$

Avec cette notation, on peut maintenant énoncer le :

Théorème 5.47. *Spec est adjoint à droite du foncteur des sections globales*

$$\Gamma : \mathbf{EsLocAn} \rightarrow (\mathbb{Z} - \mathbf{Alg})^{\text{op}} \quad (T, \mathcal{O}_T) \mapsto \Gamma(\mathcal{O}_T).$$

Démonstration. Tout morphisme $(\phi, \phi^\flat) : (T, \mathcal{O}_T) \rightarrow \text{Spec } A$ d'espaces localement annelés induit un homomorphisme $\phi_{\text{Spec } A}^\flat : A = \Gamma(\mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \rightarrow \Gamma(\phi_* \mathcal{O}_T) = \Gamma(\mathcal{O}_T)$ d'anneaux, et on montrera plus précisément que l'on a une bijection :

$$(*) \quad \mathbf{EsLocAn}((T, \mathcal{O}_T), \text{Spec } A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}(A, \Gamma(\mathcal{O}_T)) \quad (\phi, \phi^\flat) \mapsto \phi_{\text{Spec } A}^\flat.$$

La naturalité en $\underline{T}$ et en A de ce système d'applications est immédiate, donc cela nous fournira une adjonction pour le couple (Γ, Spec) . Vérifions d'abord que l'homomorphisme $f := \phi_{\text{Spec } A}^\flat$ détermine l'application continue ϕ : en effet, soient $t \in T$ et $\mathfrak{p} := \phi(t) \in \text{Spec } A$; on obtient un diagramme commutatif d'anneaux

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Gamma(\mathcal{O}_T) \\ j_{\mathfrak{p}} \downarrow & & \downarrow j_t \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\phi_t^\sharp} & \mathcal{O}_{T,t} \end{array}$$

où $j_{\mathfrak{p}}$ est la localisation, et j_t est l'homomorphisme associant à toute section globale $s \in \Gamma(\mathcal{O}_T)$ son germe $[s, T]$ dans la fibre de $\mathcal{O}_T$ au point t . Soit $\mathfrak{m}_t$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{T,t}$; par hypothèse, $(\phi_t^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_t) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion, car :

$$\mathfrak{p} = j_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = (j_t \circ f)^{-1}(\mathfrak{m}_t).$$

Ensuite, pour toute partie ouverte représentable $U \subset A$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Gamma(\mathcal{O}_T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) & \xrightarrow{\phi_U^\flat} & \mathcal{O}_T(\phi^{-1}U) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les restrictions ; en rappelant que $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$ représente la partie U , on voit que la commutativité de ce diagramme détermine $\phi_U^\flat$. Au vu de l'exercice 5.35(ii), on conclut que f détermine aussi $\phi^\flat$. Cela achève de vérifier l'injectivité de $(*)$. Pour la surjectivité, soit $f : A \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_T)$ un homomorphisme d'anneaux ; on considère

l'application $\phi : T \rightarrow \operatorname{Spec} A$ telle que $\phi(t) := (j_t \circ f)^{-1}(\mathbf{m}_t)$ pour tout $t \in T$, avec j_t et $\mathbf{m}_t \subset \mathcal{O}_{T,t}$ comme ci-dessus. On remarque :

Affirmation 5.48. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $s \in \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et pour tout $x \in X$ notons par $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ le germe de s au point x . On a :

(i) La partie $D(s) := \{x \in X \mid s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$ est ouverte dans X .

(ii) La restriction $s_{D(s)}$ de s est inversible dans $\mathcal{O}_X(D(s))$.

Preuve : (i) : Soit $x \in D(s)$; donc il existe $\sigma \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $s_x \cdot \sigma = 1$, et on trouve un voisinage ouvert U de x dans X tel que σ est le germe en x d'une section $s' \in \mathcal{O}_X(U)$. Quitte à remplacer U par un voisinage plus petit de x , on peut supposer que $s_U \cdot s' = 1$ dans $\mathcal{O}_X(U)$, d'où $U \subset D(s)$, et cela implique l'assertion.

(ii) : En raisonnant comme dans (i), on voit que pour tout $x \in D(s)$ il existe un voisinage ouvert $V \subset D(s)$ de x et une section $u^V \in \mathcal{O}_X(V)$ telle que $u^V \cdot s_V = 1$ dans $\mathcal{O}_X(V)$. On trouve ainsi un recouvrement $\mathcal{V}$ de $D(s)$ et un système de sections $u^\bullet := (u^V \mid V \in \mathcal{V})$ avec ces propriétés pour tout $V \in \mathcal{V}$; il s'ensuit aisément que $(u^V)_{V \cap V'} = (u^{V'})_{V \cap V'}$ pour tous $V, V' \in \mathcal{V}$, donc $u^\bullet$ se recolle en une section unique $u \in \mathcal{O}_X(D(s))$ et évidemment $u \cdot s_{D(s)} = 1$. $\diamond$

Avec la notation de l'observation 5.48(i), on voit aisément que $\phi^{-1}(D(a)) = D(f(a)) \subset T$ pour tout $a \in A$; en particulier ϕ est une application continue. Ensuite, l'observation 5.48(ii) implique que la composition $A \rightarrow \mathcal{O}_T(\phi^{-1}D(a))$ de f et de la restriction $\Gamma(\mathcal{O}_T) \rightarrow \mathcal{O}_T(\phi^{-1}D(a))$ envoie a vers un élément inversible, et donc se factorise à travers la localisation $A \rightarrow A[a^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a))$ et un homomorphisme unique d'anneaux $\phi_{D(a)}^b : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a)) \rightarrow \mathcal{O}_T(\phi^{-1}D(a))$. De plus, si $D(a) \subset D(a')$ on obtient un diagramme commutatif de A -algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a)) & \xrightarrow{\phi_{D(a)}^b} & \mathcal{O}_T(\phi^{-1}D(a)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a')) & \xrightarrow{\phi_{D(a')}^b} & \mathcal{O}_T(\phi^{-1}D(a')) \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les restrictions) car $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a))$ représente la partie $D(a)$. Remarquons maintenant que la sous-catégorie pleine $\mathcal{S}$ de $\operatorname{Ouv}(\operatorname{Spec} A)$ avec $\operatorname{Ob}(\mathcal{S}) = \{D(a) \mid a \in A\}$ est un site de $\operatorname{Spec} A$ contenu dans le site $\operatorname{Rep}(A)$; soient alors $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})|_{\mathcal{S}}$ et $(\phi_* \mathcal{O}_T)|_{\mathcal{S}}$ les restrictions des faisceaux $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ et $\phi_* \mathcal{O}_T$ au site $\mathcal{S}$. On peut interpréter le système d'homomorphismes $(\phi_{D(a)}^b \mid a \in A)$ comme un morphisme $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})|_{\mathcal{S}} \rightarrow (\phi_* \mathcal{O}_T)|_{\mathcal{S}}$ de faisceaux sur $\mathcal{S}$, et d'après l'exercice 5.35(ii), ce dernier se prolonge en un morphisme unique $\phi^b : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_T$ de faisceaux sur T . Le couple (ϕ, ϕ^b) est un morphisme d'espaces annelés $\underline{\phi} : \underline{T} \rightarrow \operatorname{Spec} A$, et par construction on a $\phi_{\operatorname{Spec} A}^b = f$. Pour conclure la preuve il reste seulement à vérifier que $\underline{\phi}$ est bien un morphisme d'espaces localement annelés. Mais pour $t \in T$ et $\mathfrak{p} := \phi(t)$, l'homomorphisme $\phi_t^\sharp$ fait commuter le diagramme ($\dagger$), et par construction on a $(\phi_t^\sharp \circ j_{\mathfrak{p}})^{-1}(\mathbf{m}_t) = (j_t \circ f)^{-1}(\mathbf{m}_t) = \mathfrak{p}$, d'où $(\phi_t^\sharp)^{-1}(\mathbf{m}_t) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. $\square$

Pour tout couple d'anneaux A, B , le théorème 5.47 fournit une bijection naturelle

$$\mathbb{Z} - \operatorname{Alg}(A, B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{EsLocAn}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A).$$

Autrement dit, le foncteur Spec identifie $(\mathbb{Z} - \operatorname{Alg})^{\operatorname{op}}$ avec une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés. On définira donc la *catégorie des schémas* comme la sous-catégorie pleine de $\operatorname{EsLocAn}$ dont les objets sont les schémas.

Remarque 5.49. (i) Soit A un anneau. On déduit aussitôt du théorème 5.47 que les parties représentables de $\operatorname{Spec} A$ sont précisément les parties ouvertes affines du schéma affine $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$.

(ii) Pour toute A -algèbre B , le morphisme structurel $i : A \rightarrow B$ induit un morphisme $\pi_B := \text{Spec } i : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ de schémas, et pour tout couple de A -algèbres B, C la bijection naturelle ci-dessus se restreint en une bijection entre $A\text{-Alg}(B, C)$ et l'ensemble des morphismes de schémas $\phi : \text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ tels que $\pi_B \circ \phi = \pi_C$. Plus généralement, on appellera A -schéma la donnée (X, π) d'un schéma X et d'un morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec } A$; de même, un morphisme de A -schémas $\phi : (X, \pi) \rightarrow (X', \pi')$ est un morphisme de schémas $\phi : X \rightarrow X'$ tel que $\pi' \circ \phi = \pi$.

(iii) Il est utile de généraliser davantage notre terminologie : si S est un schéma arbitraire, on appellera aussi S -schéma la donnée (X, π) d'un schéma X et d'un morphisme de schémas $\pi : X \rightarrow S$. De même, un morphisme de S -schémas $\phi : (X, \pi) \rightarrow (X', \pi')$ sera, comme dans (i), la donnée d'un morphisme de schémas $\phi : X \rightarrow X'$ tel que $\pi' \circ \phi = \pi$.

(iv) Pour tout A -schéma (X, π) on notera aussi par $X(A)$ l'ensemble des sections schématiques de π , i.e. les morphismes $\sigma : \text{Spec } A \rightarrow X$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_{\text{Spec } A}$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{A}_A^n(A)$ est naturellement identifié avec A^n (notation de l'exemple 5.44), comme expliqué par l'exemple 2.6. Tout morphisme $\phi : (X, \pi) \rightarrow (X', \pi')$ de A -schémas induit une application

$$\phi_{(A)} : X(A) \rightarrow X'(A) \quad (\text{Spec } A \xrightarrow{\sigma} X) \mapsto (\text{Spec } A \xrightarrow{\phi \circ \sigma} X').$$

(v) Soit K un corps, (X, π) un K -schéma, et notons par s l'unique point de $S := \text{Spec } K$. D'après le théorème 5.47, la donnée de π équivaut à celle d'un homomorphisme d'anneaux $f : K \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et pour tout $x \in X$ l'homomorphisme $\pi_x^\# : \mathcal{O}_{S,s} = K \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est la composition de f avec l'homomorphisme naturel $\Gamma(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ associant à toute section globale son germe au point x . D'autre part, toute section schématique $\sigma \in X(K)$ est caractérisée par son image $\sigma(s) \in X$ et par le morphisme de faisceaux associé $\sigma^\# : \tilde{\sigma}^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$; ce dernier à son tour équivaut à la donnée de l'homomorphisme d'anneaux $\sigma_s^\# : \mathcal{O}_{X,\sigma(s)} \rightarrow \mathcal{O}_{S,s} = K$ (voir la remarque 5.39(iii)). La condition $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_S$ revient à l'identité $\sigma_s^\# \circ \pi_{\sigma(s)}^\# = \text{Id}_K$. Cette identité montre que $\pi_{\sigma(s)}^\#$ induit un isomorphisme de K sur le corps résiduel $k(\sigma(s))$ de X au point $\sigma(s)$, et cet isomorphisme identifie $\sigma_s^\#$ avec la projection naturelle $\mathcal{O}_{X,\sigma(s)} \rightarrow k(\sigma(s))$. En résumé, toute section $\sigma \in X(K)$ est complètement déterminée par son image $\sigma(s)$, et la partie $\{\sigma(s) \mid \sigma \in X(K)\}$ contient précisément les K -points de X , i.e. les $x \in X$ tels que l'extension de corps résiduels $\bar{\pi}_x^\# : K \rightarrow k(x)$ soit un isomorphisme.

(vi) Pour tout morphisme $\phi : (X, \pi) \rightarrow (X', \pi')$ de K -schémas, l'application $\phi_{(K)} : X(K) \rightarrow X'(K)$ de (iv) envoie ainsi les K -points de X sur ceux de X' ; évidemment $\phi_{(K)}$ coïncide avec la restriction de ϕ sur la partie des K -points de X .

Remarque 5.50. Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma; posons :

$$\underline{X}(x) := \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \quad \forall x \in X.$$

Pour tout voisinage ouvert affine $U \subset X$ de x , l'homomorphisme naturel $\rho_U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit un morphisme de schémas $j_U : \underline{X}(x) \rightarrow \underline{U} := U \times_X \underline{X}$; après composition avec l'inclusion $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$, on obtient ainsi un morphisme de schémas $j_x : \underline{X}(x) \rightarrow \underline{X}$. Noter que si $V \subset U$ est un autre voisinage ouvert affine de x , l'homomorphisme ρ_U se factorise à travers la restriction $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ et l'homomorphisme correspondant $\rho_V : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$; donc j_U est la composition du morphisme $j_V : \underline{X}(x) \rightarrow \underline{V} := V \times_X \underline{X}$ induit par ρ_V et du morphisme d'inclusion $\underline{V} \rightarrow \underline{U}$ (qui est induit par ρ_{UV}). On déduit aussitôt que j_x est indépendant du choix de U . On appelle $j_x : \underline{X}(x) \rightarrow \underline{X}$ la *localisation de $\underline{X}$ au point x* .

Problème 5.51. (i) Montrer que la catégorie EspAnn est complète.

(ii) Soit $\underline{X}_\bullet := ((X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ un système d'espaces localement annelés, indexé par un ensemble partiellement ordonné *cofiltrant* Λ ; montrer que la limite de $\underline{X}_\bullet$ est représentable dans EsLocAn .

5.3. Modules quasi-cohérents. La section précédente nous a montré comment associer à tout anneau A un espace annelé $\text{Spec } A$; on va maintenant expliquer que tout A -module donne lieu naturellement à un faisceau de A -modules sur $\text{Spec } A$. Plus généralement, on obtiendra une catégorie très utile de *faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -modules*, sur tout schéma $(X, \mathcal{O}_X)$.

Définition 5.52. Soit $\mathcal{A}$ un préfaisceau d'anneaux sur l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

(i) Un *pré- $\mathcal{A}$ -module* (resp. un $\mathcal{A}$ -module) est la donnée d'un préfaisceau (resp. un faisceau) $\mathcal{M}$ sur X , et pour tout $U \in \mathcal{T}$ d'une structure de $\mathcal{A}(U)$ -module sur $\mathcal{M}(U)$, telle que pour toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes, la restriction $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U')$ soit $\mathcal{A}(U)$ -linéaire :

$$a_{U'} \cdot s_{U'} = (a \cdot s)_{U'} \quad \forall a \in \mathcal{A}(U), \forall s \in \mathcal{M}(U).$$

(ii) Un *morphisme de pré- $\mathcal{A}$ -modules* (resp. de $\mathcal{A}$ -modules) $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ est un morphisme de préfaisceaux (resp. de faisceaux) tel que $\phi_U : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}'(U)$ soit $\mathcal{A}(U)$ -linéaire pour tout $U \in \mathcal{T}$; on dit aussi que ϕ est *$\mathcal{A}$ -linéaire*. Avec la composition évidente de morphismes, les pré- $\mathcal{A}$ -modules et les $\mathcal{A}$ -modules forment donc des catégories :

$$\mathcal{A} - \text{pré.Mod} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} - \text{Mod}.$$

(iii) On dénote par $\Gamma : \mathcal{A} - \text{Mod} \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}) - \text{Mod}$ le foncteur qui associe à tout $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$ le $\Gamma(\mathcal{A})$ -module $\Gamma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}(X)$ de ses sections globales, et à tout morphisme $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ l'application $\Gamma(\mathcal{A})$ -linéaire $\phi_X : \Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}')$.

Remarque 5.53. (i) Avec la notation de la définition 5.52, noter que pour toute partie ouverte $U \subset X$ et tout pré- $\mathcal{A}$ -module (resp. $\mathcal{A}$ -module) $\mathcal{M}$, la restriction $\mathcal{M}|_U$ de $\mathcal{M}$ à U est un pré- $\mathcal{A}|_U$ -module (resp. un $\mathcal{A}|_U$ -module ; voir l'exemple 4.92) ; on a ainsi des *foncteurs de restriction* bien définis

$$(-)|_U : \mathcal{A} - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{A}|_U - \text{pré.Mod} \quad \text{et} \quad (-)|_U : \mathcal{A} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A}|_U - \text{Mod}.$$

(ii) Soit $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de préfaisceaux d'anneaux sur X . On a des foncteurs évidents de *restriction de scalaires* :

$$\mathcal{B} - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{pré.Mod} \quad \mathcal{B} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{Mod} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{[\phi]}$$

avec $\mathcal{F}_{[\phi]}(U) := \mathcal{F}(U)_{[\phi_U]}$ pour tout $U \in \mathcal{T}$ (notation du §3.2.1).

5.3.1. Le $\mathcal{A}^a$ -module associé à un pré- $\mathcal{A}$ -module. Dans la situation de la définition 5.52, soit $\mathcal{M}$ un pré- $\mathcal{A}$ -module ; considérons le morphisme de $\hat{X}$

$$\mu_{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (a, m) \mapsto am \quad \forall U \in \mathcal{T}, \forall (a, m) \in \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U).$$

On déduit un morphisme $\mu_{\mathcal{M}}^a : (\mathcal{A} \times \mathcal{M})^a \rightarrow \mathcal{M}^a$ de $\tilde{X}$, et rappelons que l'on a une identification naturelle $(\mathcal{A} \times \mathcal{M})^a \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^a \times \mathcal{M}^a$, car le foncteur $(-)^a$ est exact ; en outre, les produits se calculent terme à terme dans $\tilde{X}$ (voir la solution du problème 4.88(iv)), donc $(\mathcal{A}^a \times \mathcal{M}^a)(U) = \mathcal{A}^a(U) \times \mathcal{M}^a(U)$ pour tout $U \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\mu_{\mathcal{M}}^a$ est un morphisme $\mathcal{A}^a \times \mathcal{M}^a \rightarrow \mathcal{M}^a$ définissant une structure naturelle de $\mathcal{A}^a$ -module sur $\mathcal{M}^a$; avec la description explicite de la remarque 4.89(i,ii), il vient

$$\langle a^\bullet, \mathcal{U} \rangle \cdot \langle m^\bullet, \mathcal{U}' \rangle := \langle am^\bullet, \mathcal{U}'' \rangle \quad \text{où } \mathcal{U}'' := \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \text{ et } am^V := a^V \cdot m^V \quad \forall V \in \mathcal{U}''$$

pour toute donnée localement recollée $(a^\bullet, \mathcal{U})$ de $\mathcal{A}^a(U)$ et $(m^\bullet, \mathcal{U}')$ de $\mathcal{M}^a(U)$.

• Rappelons que l'unité d'adjonction $u_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^a$ est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux (remarque 4.89(iv)) ; par suite, l'unité d'adjonction $u_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{M}^a)_{[u_{\mathcal{A}}]}$, et l'association $\mathcal{M} \mapsto u_{\mathcal{M}}$ est l'unité d'une adjonction entre le foncteur

$$(-)_{[u_{\mathcal{A}}]} : \mathcal{A}^a - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{pré.Mod} \quad \mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}_{[u_{\mathcal{A}}]}$$

et son adjoint à gauche ainsi défini

$$(-)^a : \mathcal{A} - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{A}^a - \text{Mod} \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^a.$$

- Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$ -module, $u_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme, et la composition

$$\mathcal{A}^a \times \mathcal{M} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}^a} \times u_{\mathcal{M}}} \mathcal{A}^a \times \mathcal{M}^a \xrightarrow{\mu_{\mathcal{M}}} \mathcal{M}^a \xrightarrow{u_{\mathcal{M}}^{-1}} \mathcal{M}$$

définit l'unique structure de $\mathcal{A}^a$ -module sur $\mathcal{M}$ telle que la restriction de scalaires $\mathcal{M}_{[u_{\mathcal{A}}]}$ redonne le $\mathcal{A}$ -module $(\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}})$. Ainsi, on a un *isomorphisme de catégories*

$$\mathcal{A}^a - \text{Mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} - \text{Mod} \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_{[u_{\mathcal{A}}]}$$

par restriction de scalaires. Le foncteur $(-)[u_{\mathcal{A}}]$ considéré en (iv) s'identifie alors canoniquement avec le foncteur d'oubli $\mathcal{A} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{pré.Mod}$, et son adjoint $(-)^a$ s'identifie de même avec un foncteur $\mathcal{A} - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{Mod}$.

Remarque 5.54. (i) Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue, $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) un préfaisceau d'anneaux sur X (resp. sur Y), $\mathcal{M}$ un pré- $\mathcal{A}$ -module, et $\mathcal{N}$ un pré- $\mathcal{B}$ -module. On voit aussitôt que $f_*\mathcal{M}$ est naturellement un pré- $f_*\mathcal{A}$ -module, et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$ -module, $f_*\mathcal{M}$ est un $f_*\mathcal{A}$ -module.

(ii) De même, puisque le foncteur $\hat{f}^{-1}$ est exact (exercice 4.93(i)), on peut raisonner comme au §5.3.1 pour munir $f^{-1}\mathcal{N}$ d'une structure naturelle de pré- $f^{-1}\mathcal{B}$ -module. Explicitement, rappelons que pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur Y et toute partie ouverte $V \subset X$, les éléments de $f^{-1}\mathcal{F}(V)$ sont les classes d'équivalence $[s, U]_V$, où $U \subset Y$ est une partie ouverte contenant fV , et $s \in \mathcal{F}(U)$; cela posé, le produit de deux sections $[a, U]_V, [b, U']_V \in f^{-1}\mathcal{B}(V)$ est donné par :

$$[a, U]_V \cdot [b, U']_V := [a_{U''} \cdot b_{U''}, U'']_V \quad \text{avec } U'' := U \cap U'$$

et de même pour la loi d'addition. On a une description analogue pour la multiplication scalaire $f^{-1}\mathcal{B}(V) \times f^{-1}\mathcal{N}(V) \rightarrow f^{-1}\mathcal{N}(V)$ du pré- $f^{-1}\mathcal{B}$ -module $f^{-1}\mathcal{N}$.

(iii) Si $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ est un morphisme de pré- $\mathcal{A}$ -modules, évidemment $f_*(\phi) : f_*\mathcal{M} \rightarrow f_*\mathcal{M}'$ est un morphisme de pré- $f_*\mathcal{A}$ -modules, et si $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ est un morphisme de pré- $\mathcal{B}$ -modules, alors $f^{-1}(\psi) : f^{-1}\mathcal{N} \rightarrow f^{-1}\mathcal{N}'$ est un morphisme de pré- $f^{-1}\mathcal{B}$ -modules. On obtient ainsi deux foncteurs :

$$f_* : \mathcal{A} - \text{pré.Mod} \rightarrow f_*\mathcal{A} - \text{pré.Mod} \quad \hat{f}^{-1} : \mathcal{B} - \text{pré.Mod} \rightarrow f^{-1}\mathcal{B} - \text{pré.Mod}.$$

Remarque 5.55. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

(i) Puisque l'unité d'adjonction est un isomorphisme $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^a$, le §5.3.1 montre que le foncteur d'oubli $\mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$ admet l'adjoint à gauche

$$(-)^a : \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod}.$$

(ii) Soit $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules. On voit aisément que les associations : $U \mapsto \text{Ker}(\phi_U : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U))$ pour toute partie ouverte $U \subset X$, définissent un $\mathcal{O}_X$ -sous-module $\text{Ker } \phi$ de $\mathcal{M}$, représentant le noyau de ϕ dans la catégorie $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(iii) Aussi le conoyau de ϕ est représentable dans $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$: en effet, pour toute partie ouverte $U \subset X$, posons $\mathcal{C}(U) := \text{Coker}(\phi_U)$; noter que pour toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes, la composition de la restriction $\mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U')$ avec la projection $\mathcal{N}(U') \rightarrow \mathcal{C}(U')$ se factorise à travers la projection $\mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ et une application $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire unique $\rho_{UU'} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U')$. Les associations : $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ et $(U' \subset U) \mapsto \rho_{UU'}$ définissent ainsi un pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{C}$ avec un morphisme naturel $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$. On voit alors aussitôt que $\mathcal{C}$ représente le conoyau de ϕ dans la catégorie $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$, et π est la projection naturelle. Or, $\mathcal{C}$ n'est pas forcément un $\mathcal{O}_X$ -module, mais noter que le foncteur $(-)^a$ de (i) commute avec les conoyaux (proposition 2.49(ii)), donc $\mathcal{C}^a$ représente le conoyau de ϕ dans $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$, et $\pi^a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}^a$ est la projection naturelle.

Exercice 5.56. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et $f : A \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que le foncteur

$$(-)_{[f]} \circ \Gamma : \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod} \rightarrow A - \text{Mod} \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(X)_{[f]}$$

(notation du §3.2.1) admet un adjoint à gauche :

$$\mathcal{O}_X \otimes_A - : A - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod} \quad M \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_A M$$

associant à tout $\phi \in \text{Hom}_A(M, M')$ un morphisme $\mathcal{O}_X \otimes_A \phi : \mathcal{O}_X \otimes_A M \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_A M'$. Par restriction aux $\mathcal{O}_X$ -modules, on déduit un couple de foncteurs adjoints :

$$\begin{aligned} \Gamma_{[f]} : \mathcal{O}_X - \text{Mod} &\rightarrow A - \text{Mod} & \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{M}(X)_{[f]} \\ \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A - : A - \text{Mod} &\rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod} & M &\mapsto \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A M := (\mathcal{O}_X \otimes_A M)^a. \end{aligned}$$

Définition 5.57. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $x \in X$, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module.

(i) On dit que $\mathcal{M}$ est *quasi-cohérent au point x* s'il existe un voisinage ouvert U de x , un $\mathcal{O}_X(U)$ -module M , et un isomorphisme $\mathcal{O}_{X|U}$ -linéaire

$$(*) \quad \mathcal{M}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X|U} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X(U)} M$$

(avec la notation de l'exercice 5.56 : ici $\mathcal{O}_{X|U} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X(U)} -$ est donc l'adjoint à gauche de $\Gamma = \Gamma_{[f]} : \mathcal{O}_{X|U} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(U) - \text{Mod}$, avec $f := \text{Id}_{\mathcal{O}_X(U)}$).

(ii) Dans la situation de (i), si l'on a un isomorphisme $(*)$ avec un $\mathcal{O}_X(U)$ -module M de type fini (resp. de présentation finie, resp. libre, resp. projectif de type fini), on dit que $\mathcal{M}$ est *de type fini* (resp. *de présentation finie*, resp. *localement libre*, resp. *localement projectif de type fini*) au point x .

(iii) $\mathcal{M}$ est *quasi-cohérent* (resp. *de type fini*, resp. *de présentation finie*, resp. *localement libre*, resp. *localement projectif de type fini*) s'il est quasi-cohérent (resp. de type fini, resp. de présentation finie, resp. localement libre, resp. localement projectif de type fini) en tout point de X . On notera :

$$\mathcal{O}_X - \text{Qcoh}$$

la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ formée des $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents.

Problème 5.58. (i) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Montrer que :

(a) Pour toute partie ouverte $U \subset X$ le foncteur de restriction $\mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_{X|U} - \text{Mod}$ de la remarque 5.53(i) induit un foncteur $\mathcal{O}_X - \text{Qcoh} \rightarrow \mathcal{O}_{X|U} - \text{Qcoh}$.

(b) Si $(X, \mathcal{O}_X) = \text{Spec } A$ pour $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, le foncteur $\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A -$ (adjoint à gauche de $\Gamma_{[Id_A]}$) établit une équivalence de catégories

$$A - \text{Mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X - \text{Qcoh}.$$

En outre, pour tout A -module M , la restriction $(\mathcal{O}_X \otimes_A M)|_{\text{Rep}(A)^{\text{op}}}$ est un faisceau de A -modules sur le site $\text{Rep}(A)$, et l'unité d'adjonction $\mathcal{O}_X \otimes_A M \rightarrow \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A M$ induit par restriction un isomorphisme de faisceaux de A -modules sur $\text{Rep}(A)$.

(ii) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent, et $x \in X$.

(a) Montrer que $\mathcal{M}$ est de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre) en $x \Leftrightarrow$ il existe un voisinage ouvert affine U de x dans X , tel que $\mathcal{M}(U)$ soit un $\mathcal{O}_X(U)$ -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. libre).

(b) Montrer que $\mathcal{M}$ est de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre de type fini) $\Leftrightarrow$ pour toute partie ouverte affine V de X , le $\mathcal{O}_X(V)$ -module $\mathcal{M}(V)$ est de type fini (resp. de présentation finie, resp. projectif de type fini).

(c) Soit $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents. Montrer que $\text{Ker } \phi$ et $\text{Coker } \phi$ sont quasi-cohérents.

5.3.2. *Produit tensoriel de $\mathcal{O}_X$ -modules.* Soient $\mathcal{A}$ un préfaisceau d'anneaux sur l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$, et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux pré- $\mathcal{A}$ -modules; on pose

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{G}(U) \quad \forall U \in \mathcal{T}.$$

Pour toute inclusion de parties ouvertes $U' \subset U \subset X$, soient

$$\rho_{U,U'} : \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}(U') \quad \rho_{U,U'}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U') \quad \rho_{U,U'}^{\mathcal{G}} : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U')$$

les restrictions respectives; on obtient un morphisme de $\mathbf{AlgMod}$:

$$(\rho_{U,U'}, \rho_{U,U'}^{\mathcal{F}} \otimes_{\rho_{U,U'}} \rho_{U,U'}^{\mathcal{G}}) : (\mathcal{A}(U), (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})(U)) \rightarrow (\mathcal{A}(U'), (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})(U'))$$

et la discussion du §3.2.6 entraîne aussitôt que le système de ces morphismes définit les applications de restriction pour un pré- $\mathcal{A}$ -module

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$$

que l'on appelle *le produit tensoriel des pré- $\mathcal{A}$ -modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$* . Evidemment, tout couple de morphismes de pré- $\mathcal{A}$ -modules $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}', \beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ induit un morphisme de pré- $\mathcal{A}$ -modules $\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \beta : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}'$.

- D'après le §5.3.1, on a une structure naturelle de $\mathcal{A}^a$ -module sur

$$\mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G} := (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})^a.$$

En particulier, si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé, et si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$ -modules, on appellera $\mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ le *produit tensoriel des $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$* .

Exercice 5.59. Avec la notation ci-dessus, exhiber un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^a \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G}^a \quad \text{dans } \mathcal{A}^a - \mathbf{Mod}.$$

- Tout couple de morphismes de pré- $\mathcal{A}$ -modules $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}', \beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ induit un morphisme de $\mathcal{A}^a$ -modules $\alpha \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \beta := (\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \beta)^a : \mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}' \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G}'$. En outre, au vu de la remarque 3.21 et de l'exercice 5.59, on obtient pour tous $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A} - \mathbf{pré.Mod})$ des isomorphismes naturels de $\mathcal{A}^a$ -modules :

$$\mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \quad (\mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{G}) \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{G} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}).$$

- Ensuite, soit $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de préfaisceaux d'anneaux sur X . Le préfaisceau $\mathcal{B}$ est muni d'une structure évidente de pré- $\mathcal{B}$ -module, et après restriction de scalaires, on a le pré- $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{B}_{[\phi]}$ (notation de la remarque 5.53(ii)). Pour tout pré- $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$, on obtient alors une structure naturelle de pré- $\mathcal{B}$ -module (resp. $\mathcal{B}^a$ -module) sur le produit tensoriel $\mathcal{B}_{[\phi]} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{B}_{[\phi]} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$), et pour tout morphisme de pré- $\mathcal{A}$ -modules $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, le morphisme $\mathcal{B}_{[\phi]} \otimes_{\mathcal{A}} \psi$ (resp. $\mathcal{B}_{[\phi]} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \psi$) est $\mathcal{B}$ -linéaire (resp. $\mathcal{B}^a$ -linéaire), d'où des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} - : \mathcal{A} - \mathbf{pré.Mod} &\rightarrow \mathcal{B} - \mathbf{pré.Mod} & \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \\ \mathcal{B} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} - : \mathcal{A} - \mathbf{pré.Mod} &\rightarrow \mathcal{B}^a - \mathbf{Mod} & \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{B} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Par construction, pour tout pré- $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ il vient

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F})_{[\phi]} = \mathcal{B}_{[\phi]} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \quad (\mathcal{B} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{F})_{[\phi]} = \mathcal{B}_{[\phi]} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{F}.$$

Exercice 5.60. Montrer que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} -$ (resp. $\mathcal{B} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}} -$) est adjoint à gauche de la restriction de scalaires $(-)_{[\phi]}$ pour les pré- $\mathcal{B}$ -modules (resp. pour les $\mathcal{B}^a$ -modules).

Exercice 5.61. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Montrer les assertions suivantes :

- Les catégories $\mathcal{O}_X - \mathbf{pré.Mod}$ et $\mathcal{O}_X - \mathbf{Mod}$ sont complètes et cocomplètes.
- $\mathcal{O}_X - \mathbf{pré.Mod}$ (resp. $\mathcal{O}_X - \mathbf{Mod}$) est une catégorie de Grothendieck munie d'un générateur projectif (resp. d'un générateur).

• Soit maintenant $\underline{f} := (f, f^\flat) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés. A tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$, on associe d'abord le $f_*\mathcal{O}_X$ -module $f_*\mathcal{F}$ (remarque 5.54(i)) et ensuite le $\mathcal{O}_Y$ -module $(f_*\mathcal{F})_{[f^\flat]}$, par restriction de scalaires suivant le morphisme $f^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. On obtient ainsi un foncteur

$$f_* : \mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \quad \mathcal{F} \mapsto (f_*\mathcal{F})_{[f^\flat]}.$$

Soit aussi $f^\sharp : \tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ le morphisme adjoint à $f^\flat$ (voir la remarque 5.39(i)); pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{G}$, la remarque 5.54(ii) munit $f^{-1}\mathcal{G}$ d'une structure naturelle de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module, d'où une structure de $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module sur $\tilde{f}^{-1}\mathcal{G} = (f^{-1}\mathcal{G})^a$ en vertu du §5.3.1, et finalement un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y} \tilde{f}^{-1}\mathcal{G}$, par extension de scalaires suivant le morphisme $f^\sharp$. On a ainsi un foncteur :

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} : \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod} \quad \mathcal{G} \mapsto \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} := \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y} \tilde{f}^{-1}\mathcal{G}.$$

Exercice 5.62. (i) Montrer que le foncteur $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -$ est adjoint à gauche de f_* .

(ii) Montrer que si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent, alors $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent.

(iii) Pour tout couple de $\mathcal{O}_Y$ -modules $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$, exhiber un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{G} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}) \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}') \quad \text{dans } \mathcal{O}_X - \text{Mod}.$$

5.3.3. Fibres des $\mathcal{O}_X$ -modules. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, $x \in X$, et $\mathcal{U}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X , muni de l'ordre partiel induit par l'inclusion de parties ouvertes; on obtient un système filtrant $((\mathcal{O}_X(U), \mathcal{M}(U)) \mid U \in \mathcal{U}_x^{\text{op}})$ d'objets de AlgMod , avec morphismes de transition $(\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V), \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V))$ donnés par les restrictions, pour tous $U, V \in \mathcal{U}_x$ avec $V \subset U$. D'après la remarque 3.23, la colimite de ce système est représentée dans AlgMod par le couple $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{M}_x)$; i.e. la fibre $\mathcal{M}_x$ est naturellement un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module. Explicitement, pour tous $U, V \in \mathcal{U}_x$, et tout $s \in \mathcal{M}(U)$ et $a \in \mathcal{O}_X(V)$, le germe $[as, V \cap U]_x \in \mathcal{M}_x$ ne dépend que des germes $s_x := [s, U]_x \in \mathcal{M}_x$ de s , et $a_x := [a, V]_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ de a (notation du §4.3.3); ainsi, la multiplication scalaire $\mathcal{O}_{X,x} \times \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ est définie par l'association :

$$([a, U]_x, [s, V]_x) \mapsto a_x \cdot s_x := [as, V \cap U]_x.$$

Définition 5.63. (i) Dans la situation du §5.3.3, soient $U \subset X$ une partie ouverte, et $s \in \mathcal{M}(U)$. Le *support* de s est la partie

$$\text{Supp}(s) := \{x \in U \mid s_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{M}_x\}.$$

(ii) Soit $Z \subset X$ une partie quelconque; pour toute partie ouverte $V \subset X$, posons

$$\Gamma_Z \mathcal{M}(V) := \{s \in \mathcal{M}(V) \mid \text{Supp}(s) \subset Z \cap V\}.$$

On voit aussitôt que l'association : $V \mapsto \Gamma_Z \mathcal{M}(V)$ définit un $\mathcal{O}_X$ -sous-module $\Gamma_Z \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, que l'on appelle le *$\mathcal{O}_X$ -sous-module de $\mathcal{M}$ à support dans Z* .

Remarque 5.64. (i) Dans la situation de la définition 5.63(ii), soient $U := X \setminus Z$, $(U, \mathcal{O}_U) := U \times_X (X, \mathcal{O}_X)$ (notation de l'exercice 5.40(i)), et $(j, j^\sharp) : (U, \mathcal{O}_U) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ le morphisme naturel d'espaces annelés, de sorte que $j : U \rightarrow X$ est l'inclusion, et $j^\sharp : \tilde{j}^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_U$ est le morphisme identité de $\mathcal{O}_U$. Par suite, on a une identification naturelle

$$\tilde{j}^{-1}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

et l'unité adjonction $\eta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow j_*\tilde{j}^{-1}\mathcal{M}$ est un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire. En outre, pour tout $x \in U$ l'exercice 4.98(ii) fournit l'identification naturelle $\tilde{\omega}_j^x : (\tilde{j}^{-1}\mathcal{M})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_x$. Pour tout voisinage ouvert V de x dans X , et tout $s \in \mathcal{M}(V)$ on a $\eta_{\mathcal{M},V}(s) \in \tilde{j}^{-1}\mathcal{M}(V \cap U)$, et on vérifie aisément que $\tilde{\omega}_j^x(\eta_{\mathcal{M},V}(s)_x) = s_x$. Si $s \in \Gamma_Z \mathcal{M}(V)$, il vient alors $\eta_{\mathcal{M},V}(s)_x = 0$ pour tout $x \in V \cap U$, i.e. $\eta_{\mathcal{M},V}(s) = 0$. Réciproquement, si $\eta_{\mathcal{M},V}(s) = 0$, tout $x \in V \cap U$ admet un voisinage ouvert $W_x \subset V$ tel que $s_{W_x} = 0$; avec $W := \bigcup_{x \in V \cap U} W_x$ on a

$s_W = 0$, donc $[s, V]_{V \cap U} = [s_W, W]_{V \cap U} = 0$ dans $j^{-1}\mathcal{M}(V \cap U)$, d'où $\eta_{\mathcal{M}, V}(s) = 0$. Cela montre que $\Gamma_Z \mathcal{M} = \text{Ker}(\eta_{\mathcal{M}})$, et on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$0 \rightarrow \Gamma_Z \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{M}}} j_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{M}.$$

(ii) Avec la notation du §5.3.3, soient $A := \mathcal{O}_X(X)$, M un A -module, et prenons $\mathcal{M} := \mathcal{O}_X \otimes_A M$; d'après l'exercice 4.96(ii), le A -module sous-jacent à $\mathcal{M}_x$ est naturellement isomorphe à la fibre en x du pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{O}_X \otimes_A M$, et on vérifie aussitôt que cet isomorphisme est même $\mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire. D'autre part, $(\mathcal{O}_X \otimes_A M)_x$ représente la colimite du système filtrant $(\mathcal{O}_X(U) \otimes_A M \mid U \in \mathcal{U}_x^{\text{op}})$ de A -modules (voir la solution de l'exercice 5.56), et il est donc naturellement isomorphe à $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M$ (exercice 3.14). On obtient ainsi un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire naturel :

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_x.$$

(iii) En particulier, si $(X, \mathcal{O}_X)$ est le schéma affine $\text{Spec } A$, rappelons que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, la fibre $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ est naturellement isomorphe à la localisation $A_{\mathfrak{p}}$ (voir §5.2.3) ; on a alors une identification naturelle de $A_{\mathfrak{p}}$ -modules :

$$M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}.$$

Rappelons aussi l'identification naturelle A -linéaire $\omega_M : M \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{M})$; il s'ensuit aisément que pour tout $s \in M$, la partie $\text{Supp}_A(s) \subset X$ coïncide avec $\text{Supp}(\omega_M(s))$ (notation de la définition 3.57 : les détails sont laissés au lecteur).

Exercice 5.65. (i) Montrer qu'un morphisme $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$ -modules est un monomorphisme (resp. épimorphisme, resp. isomorphisme) de $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \Leftrightarrow \phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est une injection (resp. surjection, resp. bijection) pour tout $x \in X$.

(ii) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé, $x \in X$, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) $\mathcal{F}|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X|U}^n$, sur un voisinage U de x , pour quelque $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\mathcal{F}$ est à la fois localement libre en x et localement de type fini en x .
- (c) $\mathcal{F}$ est localement projectif de type fini en x .

Exercice 5.66. (i) Soit $\underline{f} := (f, f^b) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés avec $\mathcal{O}_Y = f_* \mathcal{O}_X$ et $f^b = \text{Id}_{\mathcal{O}_Y}$, et tel que la topologie de X soit induite par celle de Y via f . Montrer que $\underline{f}_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ est plein et fidèle.

(ii) Si en outre, $f(X)$ est une partie fermée de Y , montrer que $\underline{f}_*$ est une équivalence, et induit par restriction une équivalence $\mathcal{O}_X\text{-Qcoh} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y\text{-Qcoh}$.

(iii) Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et munissons $Z := \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \neq 0\}$ de la topologie induite par l'inclusion dans X ; posons $(Z, \mathcal{O}_Z) := Z \times_X \underline{X}$, et soit $\underline{j} := (j, j^b) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \underline{X}$ le morphisme naturel d'espaces annelés. Montrer que Z est une partie fermée de X , et que $j^b : \mathcal{O}_X \rightarrow j_* \mathcal{O}_Z$ est un isomorphisme.

(iv) Dédurre de (iii) que $\underline{j}_*$ est une équivalence, induisant une équivalence

$$\mathcal{O}_Z\text{-Qcoh} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X\text{-Qcoh}$$

et qu'un $\mathcal{O}_Z$ -module $\mathcal{F}$ est localement libre de type fini (resp. inversible) si et seulement s'il en est de même pour le $\mathcal{O}_X$ -module $\underline{j}_* \mathcal{F}$.

Définition 5.67. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module.

(i) Le faisceau $\mathcal{O}_X$ est muni d'une structure évidente de $\mathcal{O}_X$ -module (voir la définition 5.52(i)), et on appelle *idéal* de $\mathcal{O}_X$ tout $\mathcal{O}_X$ -sous-module de $\mathcal{O}_X$.

(ii) Un *idéal quasi-cohérent* de $\mathcal{O}_X$ est un idéal de $\mathcal{O}_X$ qui est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent (voir la définition 5.57(i)).

(iii) $\mathcal{M}$ est *inversible* si tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U et un $\mathcal{O}_X(U)$ -module inversible M , avec un isomorphisme $\mathcal{O}_{X|U}$ -linéaire $\mathcal{O}_{X|U} \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}|_U$.

Remarque 5.68. (i) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et $(X, \mathcal{O}_X) := \text{Spec } A$; l'inclusion $I \rightarrow A$ est un monomorphisme dans $A - \text{Mod}$, donc le morphisme induit $\mathcal{O}_X \otimes_A I \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_A A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$ est aussi un monomorphisme, d'après le problème 5.58(i.b). Ainsi $\mathcal{O}_X \otimes_A I$ s'identifie naturellement avec un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ que l'on notera $I\mathcal{O}_X$. Réciproquement, pour tout idéal quasi-cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$, le A -module $\mathcal{I}(X)$ est un idéal de A , et $\mathcal{I} = \mathcal{I}(X) \cdot \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X \otimes_A \mathcal{I}(X)$.

(ii) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, $(\mathcal{N}_i | i \in I)$ une famille de $\mathcal{O}_X$ -sous-modules de $\mathcal{M}$; on voit aisément que le faisceau $\bigcap_{i \in I} \mathcal{N}_i$ est un $\mathcal{O}_X$ -sous-module de $\mathcal{M}$. En particulier, pour tout sous-préfaisceau $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, l'intersection de tous les $\mathcal{O}_X$ -sous-modules de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{F}$ est le plus petit $\mathcal{O}_X$ -sous-module contenant $\mathcal{F}$; on dénote par $\mathcal{O}_X \cdot \mathcal{F}$ ce $\mathcal{O}_X$ -sous-module, et on l'appelle le $\mathcal{O}_X$ -sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathcal{F}$. Explicitement, pour toute partie ouverte $U \subset X$, les U -sections de $\mathcal{O}_X \cdot \mathcal{F}$ sont les $s \in \mathcal{M}(U)$ vérifiant la condition suivante. Tout $t \in U$ admet un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que s_V appartient au $\mathcal{O}_X(V)$ -sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathcal{F}(V)$ (les détails sont laissés au lecteur).

(iii) Soient $(f, f^\flat) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal; alors $\tilde{f}^{-1}\mathcal{I}$ est un idéal du faisceau d'anneaux $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X$: en effet, d'un côté l'exactitude du foncteur $\tilde{f}^{-1}$ implique que $\tilde{f}^{-1}\mathcal{I}$ est un sous-faisceau de $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X$ (exercices 2.66(ii) et 4.93(i)), et pour toute partie ouverte $U \subset Y$ on a

$$(*) \quad (\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})(U) = \{s \in (\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X)(U) \mid s_y \in (\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})_y \quad \forall y \in U\}.$$

De l'autre côté, l'inclusion $(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})_y \subset (\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X)_y$ est naturellement identifiée avec l'inclusion $\mathcal{I}_{f(y)} \subset \mathcal{O}_{X, f(y)}$ (exercice 4.98(ii)); comme $\mathcal{I}_{f(y)}$ est un $\mathcal{O}_{X, f(y)}$ -module, il s'ensuit que $(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})_y$ est un $(\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X)_y$ -module pour tout $y \in Y$, donc $(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})(U)$ est un $(\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_X)(U)$ -module, compte tenu de (*), d'où l'assertion.

(iv) Dans la situation de (iii), soit $f^\sharp(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I}) \subset \mathcal{O}_Y$ le préfaisceau tel que

$$f^\sharp(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I})(U) := f_U^\sharp(\tilde{f}^{-1}\mathcal{I}(U)) \subset \mathcal{O}_Y(U) \quad \forall U \in \text{Ob}(\text{Ouv}(Y)).$$

D'après (ii), ce préfaisceau engendre un idéal de $\mathcal{O}_Y$, que l'on dénote $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$, ou plus simplement $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$, si la notation ne donne pas lieu à des ambiguïtés. Explicitement, pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $f_y^\sharp : \mathcal{O}_{X, f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$ munit $\mathcal{O}_{Y, y}$ d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_{X, f(y)}$ -algèbre (voir la remarque 5.39(iii)), et on a :

$$(\mathcal{I}\mathcal{O}_Y)_y = \mathcal{I}_{f(y)} \cdot \mathcal{O}_{Y, y}.$$

Si $(X, \mathcal{O}_X) = \text{Spec } A$ est un schéma affine, de sorte que $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$ pour $I := \mathcal{I}(X)$, on dénote l'idéal $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ aussi par $I\mathcal{O}_Y$.

Exercice 5.69. (i) Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent. Montrer que $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_Y$.

(ii) Soient A un anneau, $X := \text{Spec } A$, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module inversible. Montrer que $M := \Gamma(\mathcal{M})$ est un A -module inversible et qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules

$$\mathcal{O}_X \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}.$$

Lemme 5.70. Soient A un anneau, $I, J \subset A$ deux idéaux de type fini, $(f, f^\flat) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme d'espaces localement annelés. Alors on a :

(i) L'idéal $I\mathcal{O}_Y$ est inversible $\Leftrightarrow I\mathcal{O}_{Y, y}$ est un $\mathcal{O}_{Y, y}$ -module inversible $\forall y \in Y$.

(ii) Si $IJ\mathcal{O}_Y$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_Y$, il en est de même pour $I\mathcal{O}_Y$ et $J\mathcal{O}_Y$.

Démonstration. (i) : La condition est évidemment nécessaire; supposons donc que la condition soit vérifiée. Soient $a_1, \dots, a_n$ un système fini de générateurs de I , et $y \in Y$; d'après la proposition 3.51, quitte à permuter les a_i , on peut supposer que le germe $a_{1, y}$ de a_1 engendre $(I\mathcal{O}_{Y, y})$. Ainsi, pour tout $i = 2, \dots, n$ il existe $c_i \in \mathcal{O}_{Y, y}$ avec $a_{i, y} = c_i a_{1, y}$; on trouve alors un voisinage U de y dans Y , et pour tout $i = 2, \dots, n$ une section

$\beta_i \in \mathcal{O}_Y(U)$ avec $\beta_{i,y} = c_i$ et $a_i = \beta_i a_1$ dans $\mathcal{O}_Y(U)$. En particulier, pour tout $u \in U$ le germe $a_{1,u}$ engendre $I\mathcal{O}_{Y,u}$, et par hypothèse ce dernier est un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module libre de rang un ; il s'ensuit aisément que $a_{1,u}$ est un élément régulier de $\mathcal{O}_{Y,u}$ pour tout $u \in U$. Soit donc $\mu : \mathcal{O}_Y|_U \rightarrow \mathcal{O}_Y|_U$ l'endomorphisme $\mathcal{O}_Y|_U$ -linéaire tel que $\mu(s) := a_1 s$ pour toute partie ouverte $V \subset U$ et tout $s \in \mathcal{O}_Y(V)$; on déduit aussitôt que μ se factorise à travers un isomorphisme $\mathcal{O}_Y|_U \xrightarrow{\sim} a_1 \mathcal{O}_Y|_U = I\mathcal{O}_Y|_U$, et cela achève de montrer que $I\mathcal{O}_Y$ est inversible.

(ii) : Soit en outre $b_1, \dots, b_m$ un système fini de générateurs de J , de sorte que $(a_i b_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ engendre IJ . Soit $y \in Y$; en raisonnant comme dans la preuve de (i), on peut alors supposer que le germe $(a_1 b_1)_y$ de $a_1 b_1$ engendre $IJ\mathcal{O}_{Y,y}$. Comme ce dernier est un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module libre de rang un, il s'ensuit que $(a_1 b_1)_y$ est régulier dans $\mathcal{O}_{Y,y}$; cela entraîne aussitôt que $a_{1,y}$ et $b_{1,y}$ sont de même réguliers dans $\mathcal{O}_{Y,y}$. Mais comme $(a_1 b_j)_y, (a_i b_1)_y \in a_1 b_1 \mathcal{O}_{Y,u}$, il vient $a_{i,y} \in a_1 \mathcal{O}_{Y,y}$ et $b_{j,y} \in b_1 \mathcal{O}_{Y,y}$ pour $i = 2, \dots, n$ et $j = 2, \dots, m$. Ainsi, les $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modules $I\mathcal{O}_{Y,y}$ et $J\mathcal{O}_{Y,y}$ sont engendrés par les éléments réguliers $a_{1,y}$ et respectivement $b_{1,y}$, et sont donc libres de rang un ; l'assertion découle alors de (i). $\square$

Exemple 5.71. (i) Soient A un anneau, $(Y, \mathcal{O}_Y) := \text{Spec } A$, et $\mathcal{I} := \mathcal{N}(A) \cdot \mathcal{O}_Y$ (notation de la définition 1.48(ii)). D'après le problème 5.58(i.b) et l'exercice 5.32(ii), on a $\mathcal{I}(U) = \mathcal{N}(\mathcal{O}_Y(U))$ pour toute partie ouverte représentable U de Y . En outre, $\mathcal{I}_y = \mathcal{N}(A) \cdot \mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{N}(\mathcal{O}_{Y,y})$ pour tout $y \in Y$ (exercice 3.38(i)).

(ii) Soit ensuite $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, et posons

$$\mathcal{N}_{\underline{X}}(U) := \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s_x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{X,x}) \ \forall x \in U\} \quad \forall U \in \text{Ob}(\text{Ouv}(X)).$$

On voit aisément que l'association $U \mapsto \mathcal{N}_{\underline{X}}(U)$ pour toute partie ouverte $U \subset X$, définit un idéal de $\mathcal{O}_X$. En outre, pour toute partie ouverte affine $V \subset X$, posons $A_V := \mathcal{O}_X(V)$ et $\mathcal{O}_V := (\mathcal{O}_X)|_V$; au vu de (i), la restriction $(\mathcal{N}_{\underline{X}})|_V$ coïncide avec l'idéal quasi-cohérent $\mathcal{N}(A_V) \cdot \mathcal{O}_V$ de $\mathcal{O}_V$. Ainsi, $\mathcal{N}_{\underline{X}}$ est un idéal quasi-cohérent, que l'on appelle *le radical nilpotent* (ou le *nilradical*) de $\underline{X}$. Par construction, on a $\mathcal{N}_{\underline{X}}(U) = \mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U))$ pour toute partie ouverte affine $U \subset X$.

(iii) Plus généralement, $\mathcal{N}_{\underline{X}}(U) = \mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U))$ pour toute partie ouverte compacte $U \subset X$; en effet, l'inclusion $\mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U)) \subset \mathcal{N}_{\underline{X}}(U)$ découle des définitions, pour toute partie ouverte U . Si U est compacte, on a un recouvrement fini $\{U_1, \dots, U_n\}$ de U formé de parties ouvertes affines ; le produit des restrictions $\rho : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow A := \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_X(U_i)$ est alors un homomorphisme injectif d'anneaux induisant une injection

$$\mathcal{N}_{\underline{X}}(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{N}_{\underline{X}}(U_i) = \prod_{i=1}^n \mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U_i)) = \mathcal{N}(A).$$

D'autre part, $\rho^{-1}(\mathcal{N}(A)) = \mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U))$, d'où l'inclusion réciproque $\mathcal{N}_{\underline{X}}(U) \subset \mathcal{N}(\mathcal{O}_X(U))$.

Définition 5.72. Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma. On dit que $\underline{X}$ est *réduit*, si $\mathcal{N}_{\underline{X}} = 0$ (notation de l'exemple 5.71(ii)). On dit que $\underline{X}$ est *intègre*, s'il est réduit et si X est un espace topologique irréductible.

Remarque 5.73. (i) Soit A un anneau ; avec l'exercice 1.57 on voit que $\text{Spec } A$ est un schéma réduit (resp. intègre) $\Leftrightarrow A$ est un anneau réduit (resp. intègre).

(ii) En outre, tout schéma intègre $(X, \mathcal{O}_X)$ admet un unique *point générique*, i.e. un unique $\eta_X \in X$ tel que tout $x \in X$ est une spécialisation de η_X . En effet, toute partie ouverte affine $U \subset X$ est spectrale et irréductible pour la topologie induite par X (exercice 1.22), donc admet un unique point générique η_U ; et si V est une deuxième partie ouverte affine, on a $U \cap V \neq \emptyset$, donc forcément $\eta_U, \eta_V \in U \cap V$, par suite η_U est une spécialisation de η_V dans U , ainsi $\eta_V = \eta_U$, d'où l'assertion.

(iii) Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est intègre, et si $\eta \in X$ est son point générique, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\eta_X}$ est un corps : en effet, pour toute partie affine $U \subset X$, le sous-schéma ouvert $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$ est également intègre, car $\mathcal{N}_{\underline{U}} = (\mathcal{N}_{\underline{X}})|_U$, et avec (i) il est clair que $\mathcal{O}_{X,\eta} = \mathcal{O}_{U,\eta}$ s'identifie naturellement avec le corps des fractions de $\mathcal{O}_X(U)$.

(iv) Soient $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme de schémas intègres, $\eta_X \in X$, $\eta_Y \in Y$ les points génériques respectifs ; alors $f(X)$ est dense dans $Y \Leftrightarrow f(\eta_X) = \eta_Y$. En effet, la condition est évidemment suffisante ; réciproquement, si $f(X)$ est dense dans Y , soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des parties ouvertes affines avec $f(U) \subset V$; on a $\eta_X \in U$ et $\eta_Y \in V$, et puisque U est dense dans X , la partie $f(U)$ est dense dans V (exercice 1.21(iv)), donc on peut supposer que les schémas en question soient affines, et dans ce cas on a bien $f(\eta_X) = \eta_Y$, d'après l'exercice 3.37.

(v) Dans la situation de (iv), si $f(X)$ est dense dans Y , l'homomorphisme $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif pour tout $x \in X$. Pour la preuve, on se ramène aussitôt au cas où $\underline{X} = \text{Spec } B$ et $\underline{Y} = \text{Spec } A$ pour deux anneaux intègres A, B , et f est induit par un homomorphisme injectif $\phi : A \rightarrow B$ (exercice 3.37(ii)). Mais alors $\mathcal{O}_{Y,f(x)} = B_{\mathfrak{q}}$ et $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$ pour des idéaux premiers $\mathfrak{q} \subset B$ et $\mathfrak{p} := \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$, et $f_x^\#$ est l'unique homomorphisme de A -algèbres $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$, d'où l'assertion.

5.4. Constructions élémentaires de schémas.

5.4.1. *L'espace projectif.* Pour illustrer les généralités des paragraphes précédents, on veut expliquer comment réaliser les espaces projectifs (sur un corps K quelconque) dans la catégorie des schémas. Plus précisément, on va exhiber pour tout $n \in \mathbb{N}$ un K -schéma Y et une bijection naturelle de $Y(K)$ avec le K -espace projectif $\mathbb{P}_K^n$, défini comme l'ensemble des *droites vectorielles*, i.e. des K -sous-espaces vectoriels de dimension un, du K -espace vectoriel K^{n+1} . De façon équivalente

$$\mathbb{P}_K^n := (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

le quotient de l'ensemble $K^{n+1} \setminus \{0\}$ des vecteurs non nuls de K^{n+1} , par la relation d'équivalence $\sim$ telle que $v \sim v'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ avec $\lambda v = v'$. Pour $i = 0, \dots, n$, soit $\Omega_i \subset \mathbb{P}_K^n$ la partie des classes d'équivalence $[v]$ des vecteurs $v := (a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ avec $a_i \neq 0$; évidemment

$$\Omega_0 \cup \dots \cup \Omega_n = \mathbb{P}_K^n$$

et tout $[v] \in \Omega_i$ admet un représentant unique $v' := (a'_0, \dots, a'_n)$ avec $a'_i = 1$. Donc chaque partie Ω_i admet une identification naturelle avec le K -espace affine de dimension n

$$\psi_i : \Omega_i \xrightarrow{\sim} K^n \quad [a_0, \dots, a_n] \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right)$$

et les applications $t_j^{(i)} : \Omega_i \rightarrow K$ telles que $[a_0, \dots, a_n] \mapsto a_j/a_i$ pour tout $j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ et tout $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}_K^n$, forment un système de coordonnées sur chaque Ω_i . Pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, la partie $\Omega_{ij} := \Omega_i \cap \Omega_j$ consiste en des classes $[v] \in \Omega_i$ telles que $t_j^{(i)}([v]) \neq 0$, et on a les identités évidentes :

$$(*) \quad t_k^{(j)}([v]) = t_k^{(i)}([v]) / t_j^{(i)}([v]) \quad \forall [v] \in \Omega_{ij}, \forall k \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

En résumé, on voit que l'on peut aussi construire $\mathbb{P}_K^n$ par un procédé de *recollement* des espaces affines $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ identifiant la partie $\Omega_{ij} \subset \Omega_i$ avec $\Omega_{ji} \subset \Omega_j$ pour tous $i \neq j$; autrement dit, on recolle $n+1$ copies de l'ensemble K^n , en identifiant la partie $U_{ij} := \psi_i(\Omega_{ij})$ de la i -ème copie avec la partie $U_{ji} := \psi_j(\Omega_{ji})$ de la j -ème copie. Plus précisément, tout $u \in U_{ij}$ est déterminé par ses coordonnées $(u_k := t_k^{(i)} \circ \psi_i^{-1}(u) \mid k \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\})$, et le recollement de U_{ij} et U_{ji} identifie u avec le point $u' \in U_{ji}$ dont les coordonnées $(u'_0, \dots, u'_{j-1}, u'_{j+1}, \dots, u'_n)$ sont déduites des identités $(*)$, i.e. $u'_k = u_k/u_j$ pour tous $k \neq i, j$ et $u'_i = 1/u_j$.

• Compte tenu de l'exemple 5.44, notre modèle schématique de l'espace projectif sera alors obtenu par recollement de $n+1$ copies de l'espace affine $\mathbb{A}_K^n$. Pour cela, considérons plus généralement une *donnée de recollement*, constituée de :

— une famille d'espaces annelés $\underline{X}_\bullet := (\underline{X}_\lambda := (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$

— et pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, d'une partie ouverte $U_{\lambda\mu} \subset X_\lambda$, et un isomorphisme

$$\omega_{\lambda\mu} := (\omega_{\lambda\mu}, \omega_{\lambda\mu}^\flat) : \underline{U}_{\lambda\mu} \xrightarrow{\sim} \underline{U}_{\mu\lambda} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_{\lambda\mu} := U_{\lambda\mu} \times_{X_\lambda} \underline{X}_\lambda \quad \text{et} \quad \underline{U}_{\mu\lambda} := U_{\mu\lambda} \times_{X_\mu} \underline{X}_\mu$$

vérifiant la condition suivante. Pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in \Lambda^3$, posons $U_{\lambda\mu\nu} := U_{\lambda\mu} \cap U_{\lambda\nu}$ et $\underline{U}_{\lambda\mu\nu} := U_{\lambda\mu\nu} \times_{X_\lambda} \underline{X}_\lambda$; alors $\omega_{\lambda\mu}(U_{\lambda\mu\nu}) = U_{\mu\lambda\nu}$, et le diagramme suivant commute :

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} \underline{U}_{\lambda\mu\nu} & \xrightarrow{(\omega_{\lambda\mu})|_{U_{\lambda\mu\nu}}} & \underline{U}_{\mu\lambda\nu} \\ & \searrow (\omega_{\lambda\nu})|_{U_{\lambda\mu\nu}} \quad \swarrow (\omega_{\mu\nu})|_{U_{\mu\lambda\nu}} & \\ & \underline{U}_{\nu\lambda\mu} & \end{array}$$

Noter que $U_{\lambda\lambda\lambda} = U_{\lambda\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $(\dagger)$ entraîne que $\omega_{\lambda\lambda} = \mathbf{1}_{\underline{U}_{\lambda\lambda}}$; sans perte de généralité, on pourra alors aussi supposer que $U_{\lambda\lambda} = X_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. De même, $U_{\lambda\mu\lambda} = U_{\lambda\lambda\mu} = U_{\lambda\mu}$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, et pour $\nu = \lambda$ dans $(\dagger)$, il vient $\omega_{\lambda\mu} = \omega_{\mu\lambda}^{-1}$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, soit de plus $\iota_{\lambda\mu} : U_{\lambda\mu} \rightarrow X_\lambda$ l'inclusion, et $\iota_{\lambda\mu} : \underline{U}_{\lambda\mu} \rightarrow \underline{X}_\lambda$ le morphisme d'espaces annelés induit par $\iota_{\lambda\mu}$ (exercice 5.40(ii)).

• Rappelons que le coproduit de toute petite famille d'espaces annelés est représentable dans **EspAnn** (remarque 5.41(ii)); soient alors des co-cônes universels :

$$(\underline{j}_\lambda : \underline{X}_\lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \underline{X}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad \text{et} \quad (\underline{j}_{\lambda\mu} : \underline{U}_{\lambda\mu} \rightarrow \bigsqcup_{\lambda, \mu \in \Lambda} \underline{U}_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda)$$

et considérons les morphismes d'espaces annelés :

$$\bigsqcup_{\lambda, \mu \in \Lambda} \underline{U}_{\lambda\mu} \xrightarrow[\underline{\beta}]{\underline{\alpha}} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \underline{X}_\lambda$$

appelés *morphismes de recollement*, tels que :

$$\underline{\alpha} \circ \underline{j}_{\lambda\mu} = \underline{j}_\lambda \circ \iota_{\lambda\mu} \quad \text{et} \quad \underline{\beta} \circ \underline{j}_{\lambda\mu} = \underline{j}_\mu \circ \iota_{\mu\lambda} \circ \omega_{\lambda\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Lemme 5.74. *Avec la notation ci-dessus, on a :*

- (i) Le coégaliseur de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ est représenté par un espace annelé $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$.
- (ii) Le co-cône universel est un système $((\iota_\lambda, \iota_\lambda^\flat) : \underline{X}_\lambda \rightarrow \underline{Y} \mid \lambda \in \Lambda)$ de morphismes d'espaces annelés dont les applications continues ι_λ sont injectives et ouvertes.
- (iii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $Y_\lambda := \iota_\lambda(X_\lambda)$. Alors $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$ le morphisme $(\iota_\lambda, \iota_\lambda^\flat)$ se factorise à travers un isomorphisme $\underline{X}_\lambda \xrightarrow{\sim} Y_\lambda \times_Y \underline{Y}$ et le morphisme canonique $Y_\lambda \times_Y \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$ (voir la remarque 5.41(i)).
- (iv) Si chaque $\underline{X}_\lambda$ est un espace localement annelé (resp. un schéma), il en est de même pour $\underline{Y}$, et dans ce cas $\underline{Y}$ représente le coégaliseur de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ dans **EsLocAn**.

On dira que $\underline{Y}$ est le recollement de la famille $\underline{X}_\bullet$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta : \bigsqcup_{\lambda, \mu \in \Lambda} U_{\lambda\mu} \rightarrow X := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ les applications continues sous-jacentes à $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$; d'après le problème 2.51(i), le coégaliseur de α et β dans la catégorie **Top** est représenté par un espace topologique Y . Explicitement :

$$Y = X / \sim$$

le quotient de la réunion disjointe $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}$ par la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que $(x, \lambda) \sim (\omega_{\lambda\mu}(x), \mu)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$ et tout $x \in U_{\lambda\mu}$. La topologie de Y est induite par X via la projection $\pi : X \rightarrow Y$ (voir l'exemple 1.20(iii)), et X est muni de la topologie $\mathcal{T}$ telle que $(X, \mathcal{T})$ représente le coproduit des espaces topologiques $X_\lambda = (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, i.e. la topologie engendrée par la base $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{U \times \{\lambda\} \mid U \in \mathcal{T}_\lambda\}$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ soit $\iota_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y$ l'application telle que : $x \mapsto \pi(x, \lambda)$ pour tout $x \in X_\lambda$.

Affirmation 5.75. (i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application ι_λ est injective.

(ii) $\pi^{-1}(\pi V) = \bigcup_{\mu \in \Lambda} \omega_{\lambda\mu}(V \cap U_{\lambda\mu}) \times \{\mu\}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et toute partie $V \subset X_\lambda$.

Preuve : Soient $x \in X_\lambda$, $x' \in X_\mu$ avec $\pi(x, \lambda) = \pi(x', \mu)$, i.e. $(x, \lambda) \sim (x', \mu)$; cela veut dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, une suite d'indices $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \Lambda$ avec $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_{n+1} = \mu$, et pour tout $k = 0, \dots, n$ un point $x_k \in U_{\lambda_k \lambda_{k+1}}$ tels que $x' \in U_{\mu \lambda_n}$ et :

$$x_0 = x \quad \omega_{\lambda_k \lambda_{k+1}}(x_k) = x_{k+1} \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \quad \omega_{\lambda_n \mu}(x_n) = x'.$$

Montrons par récurrence sur n que $x \in U_{\lambda \mu}$ et $\omega_{\lambda \mu}(x) = x'$. Si $n = 0$ il n'y a rien à montrer. Soit donc $n > 0$; on a $x_0 \in U_{\lambda_0 \lambda_1}$ et $\omega_{\lambda_0 \lambda_1}(x_0) = x_1 \in U_{\lambda_1 \lambda_2} \cap U_{\lambda_1 \lambda_0} = U_{\lambda_1 \lambda_0 \lambda_2}$, d'où $x_0 \in U_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}$ et la commutativité de $(\dagger)$ donne : $\omega_{\lambda_0 \lambda_2}(x_0) = \omega_{\lambda_1 \lambda_2}(\omega_{\lambda_0 \lambda_1}(x_0)) = \omega_{\lambda_1 \lambda_2}(x_1) = x_2$. Posons $\lambda'_0 := \lambda$ et $y_0 := x$, ainsi que $\lambda'_k := \lambda_{k+1}$ et $y_k := x_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, n-1$; il vient $\omega_{\lambda'_k \lambda'_{k+1}}(y_k) = y_{k+1}$ pour $k = 0, \dots, n-2$ et $\omega_{\lambda'_{n-1} \mu}(y_{n-1}) = x'$, et pour conclure on invoque l'hypothèse de récurrence.

L'assertion (ii) suit aussitôt, et de même pour (i), car $\omega_{\lambda \lambda} = Id_{X_\lambda}$. $\diamond$

Soit $V \subset X_\lambda$ une partie ouverte; l'observation 5.75(ii) montre que $\pi^{-1}(\pi V)$ est une partie ouverte de X , donc πV est une partie ouverte de Y ; avec l'observation 5.75(i), on conclut que ι_λ est une application injective et ouverte pour tout $\lambda \in \Lambda$.

On définit un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y$ sur Y , comme suit. Pour toute partie ouverte $V \subset Y$ et tout $\lambda \in \Lambda$, soit $V_\lambda := \iota_\lambda^{-1}V$, et notons $\mathcal{O}_Y(V) \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_{X_\lambda}(V_\lambda)$ la partie des $(s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ tels que $(s_\lambda)_{U_{\lambda \mu} \cap V_\lambda} = \omega_{\lambda \mu}^\flat((s_\mu)_{U_{\mu \lambda} \cap V_\mu})$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ (noter que -- d'après l'observation 5.75(ii) -- on a $\omega_{\lambda \mu}(U_{\lambda \mu} \cap V_\lambda) = U_{\mu \lambda} \cap V_\mu$). Toute inclusion $V' \subset V$ de parties ouvertes de Y induit une application

$$\rho_{VV'} : \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_Y(V') \quad (s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto ((s_\lambda)_{V'_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda).$$

La structure d'anneau sur $\mathcal{O}_Y(V)$ est l'unique telle que les projections

$$(\dagger\dagger) \quad \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X_\lambda}(V_\lambda) \quad (s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto s_\lambda$$

soient des homomorphismes d'anneaux, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il est évident que l'on obtient ainsi un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y$ dont les restrictions sont les applications $\rho_{VV'}$, et les projections $(\dagger\dagger)$ définissent des morphismes $\iota_\lambda^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow \iota_{\lambda*} \mathcal{O}_{X_\lambda}$ de préfaisceaux d'anneaux, pour tout $\lambda \in \Lambda$. En dernier lieu, vérifions que $\mathcal{O}_Y$ est un faisceau. En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement d'une partie ouverte $V \subset Y$, et $(s_\bullet^W \mid W \in \mathcal{U})$ un système de sections avec $s_\bullet^W := (s_\lambda^W \mid \lambda \in \Lambda) \in \mathcal{O}_Y(W)$ pour tout $W \in \mathcal{U}$, et vérifiant la condition de recollement $(*)$ de la section 4.3; alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ la famille $\mathcal{U}_\lambda := \{\iota_\lambda^{-1}W \mid W \in \mathcal{U}\}$ recouvre V_λ , et on déduit une famille de sections $s_\lambda^\bullet := (s_\lambda^Q \mid Q \in \mathcal{U}_\lambda)$ du faisceau $\mathcal{O}_{X_\lambda}$, vérifiant la même condition de recollement. La famille $s_\lambda^\bullet$ se recolle en une unique section $s_\lambda \in \mathcal{O}_{X_\lambda}(V_\lambda)$, et on voit aisément que le système $s_\bullet := (s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est l'unique section de $\mathcal{O}_Y(V)$ avec $(s_\bullet)_W = s_\bullet^W$ pour tout $W \in \mathcal{U}$: les détails seront confiés aux soins du lecteur.

Ensuite, noter que si $V \subset Y_\lambda := \iota_\lambda(X_\lambda)$, on a $V_\mu = \omega_{\lambda \mu}(U_{\lambda \mu} \cap V_\lambda)$ pour tout $\mu \in \Lambda$ (toujours grâce à l'observation 5.75(ii)); donc, pour tout $s_\bullet \in \mathcal{O}_Y(V)$ et tout $\mu \in \Lambda$ on a $s_\mu = \omega_{\mu \lambda}^\flat((s_\lambda)_{U_{\lambda \mu} \cap V_\lambda})$, et en particulier, la projection $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X_\lambda}(V_\lambda)$ est un isomorphisme. Avec l'exercice 5.40(ii), on déduit aisément l'assertion (iii) du lemme pour les morphismes $\iota_\lambda := (\iota_\lambda, \iota_\lambda^\flat) : \underline{X}_\lambda \rightarrow \underline{Y}$ ainsi obtenus. Une simple inspection montre que :

$$\iota_\lambda \circ \iota_{\lambda \mu} = \iota_\mu \circ (\iota_{\mu \lambda} \circ \omega_{\lambda \mu}) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \Lambda^2.$$

Donc le système $(\iota_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ fournit un morphisme $\iota : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \underline{X}_\lambda \rightarrow \underline{Y}$ d'espaces annelés avec $\iota \circ \alpha = \iota \circ \beta$, et il nous reste à vérifier qu'il s'agit d'un coégaliseur de α et β . Soient donc $\underline{Z}$ un espace annelé, et $(\nu_\lambda := (\nu_\lambda, \nu_\lambda^\flat) : \underline{X}_\lambda \rightarrow \underline{Z} \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de morphismes d'espaces annelés tels que

$$(\dagger \dagger \dagger) \quad \nu_\lambda \circ \iota_{\lambda \mu} = \nu_\mu \circ (\iota_{\mu \lambda} \circ \omega_{\lambda \mu}) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \Lambda^2.$$

Par la propriété universelle de Y , il existe alors une application continue unique $\nu : Y \rightarrow Z$ telle que $\nu \circ \iota_\lambda = \nu_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $W \subset Z$ une partie ouverte; noter que les

sections de $\nu_* \mathcal{O}_Y(W) = \mathcal{O}_Y(\nu^{-1}W)$ sont les systèmes $(s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ avec $s_\lambda \in \mathcal{O}_{X_\lambda}(\nu_\lambda^{-1}W)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et tels que $(s_\lambda)_{U_{\lambda\mu} \cap \nu_\lambda^{-1}W} = \omega_{\lambda\mu}^\flat((s_\mu)_{U_{\lambda\mu} \cap \nu_\mu^{-1}W})$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux bien défini :

$$\nu_W^\flat : \mathcal{O}_Z(W) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_Y(W) \quad s \mapsto (\nu_\lambda^\flat(W(s) \mid \lambda \in \Lambda)$$

et il est clair que l'association : $W \mapsto \nu_W^\flat$ pour toute partie ouverte W de Z , définit un morphisme $\nu^\flat : \mathcal{O}_Z \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_Y$ de faisceaux d'anneaux, d'où un morphisme d'espaces annelés $\underline{\nu} := (\nu, \nu^\flat) : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$. Par construction, il est l'unique morphisme avec $\underline{\nu} \circ \underline{\iota}_\lambda = \underline{\nu}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et cela conclut la preuve de (i), (ii) et (iii).

(iv) : Il est clair que si chaque $\underline{X}_\lambda$ est un espace localement annelé (resp. un schéma), il en est de même pour $\underline{Y}$. Soient ensuite $(\underline{\nu}_\lambda : \underline{X}_\lambda \rightarrow \underline{Z} \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de morphismes d'espaces localement annelés vérifiant $(\dagger \dagger \dagger)$, et $\underline{\nu} : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ l'unique morphisme d'espaces annelés avec $\underline{\nu} \circ \underline{\iota}_\lambda = \underline{\nu}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; d'après la remarque 5.39(iv), on a des isomorphismes d'anneaux :

$$(\tilde{\nu}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_Y)_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y, \iota_\lambda(x)} \quad (\tilde{\iota}_\lambda^{-1} \tilde{\nu}^{-1} \mathcal{O}_Z)_x \xrightarrow{\sim} (\tilde{\nu}^{-1} \mathcal{O}_Z)_{\iota_\lambda(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Z, \nu_\lambda(x)} \xleftarrow{\sim} (\tilde{\nu}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_Z)_x$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in X_\lambda$, qui identifient les homomorphismes :

$$(\tilde{\nu}^{-1} \mathcal{O}_Z)_{\iota_\lambda(x)} \xrightarrow{(\nu^\sharp)_{\iota_\lambda(x)}} \mathcal{O}_{Y, \iota_\lambda(x)} \quad (\tilde{\iota}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_Y)_x \xrightarrow{(\iota_\lambda^\sharp)_x} \mathcal{O}_{X_\lambda, x} \quad (\tilde{\nu}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_Z)_x \xrightarrow{(\nu_\lambda^\sharp)_x} \mathcal{O}_{X_\lambda, x}$$

avec des homomorphismes :

$$\mathcal{O}_{Z, \nu_\lambda(x)} \xrightarrow{\iota_\lambda^\sharp} \mathcal{O}_{Y, \iota_\lambda(x)} \xrightarrow{\iota_{\lambda, x}^\sharp} \mathcal{O}_{X_\lambda, x} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{Z, \nu_\lambda(x)} \xrightarrow{\nu_{\lambda, x}^\sharp} \mathcal{O}_{X_\lambda, x}$$

tels que $\nu_{\lambda, x}^\sharp = \iota_{\lambda, x}^\sharp \circ \nu_{\iota_\lambda(x)}^\sharp$. Mais évidemment $(\iota_\lambda^\sharp)_x$ est un isomorphisme, donc de même pour $\iota_{\lambda, x}^\sharp$, et par hypothèse $(\nu_\lambda^\sharp)_x$ est un homomorphisme local d'anneaux, donc de même pour $\nu_{\iota_\lambda(x)}^\sharp$. Ainsi, $\nu_{\iota_\lambda(x)}^\sharp$ est un homomorphisme local, pour tous tels λ et x , donc il en est de même pour $(\nu^\sharp)_y$, pour tout $y \in Y$. Cela achève de montrer que $\underline{\nu}$ est un morphisme d'espaces localement annelés, et la preuve est complète. $\square$

Or, soit A un anneau arbitraire; pour $i = 0, \dots, n$ on considère la A -algèbre de polynômes $B_i := A[T_k^{(i)} \mid k = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n]$, et on pose $T_i^{(i)} := 1 \in B_i$. Pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$ on considère aussi l'isomorphisme de A -algèbres

$$\phi_{ij} : B_j[1/T_i^{(j)}] \xrightarrow{\sim} B_i[1/T_j^{(i)}] \quad T_k^{(j)} \mapsto T_k^{(i)}/T_j^{(i)} \quad \forall k = 0, \dots, n.$$

Posons $X_i := \text{Spec } B_i$ et $U_{ij} := \text{Spec } B_i[1/T_j^{(i)}]$ pour tous $i, j = 0, \dots, n$; ainsi, $U_{ij} \subset X_i$ est une partie ouverte, et $\omega_{ij} := \text{Spec } \phi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}) \xrightarrow{\sim} (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_{ji}})$ un isomorphisme de schémas, pour tout tel couple (i, j) . On voit aussitôt que $((X_i, \mathcal{O}_{X_i}), \omega_{ij} \mid i, j \in \{0, \dots, n\})$ est une donnée de recollement, et on dénote

$$\mathbb{P}_A^n$$

le recollement de la famille $\underline{X}_\bullet$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$. Pour $A = K$, noter que l'ensemble des K -points $U_{ij}(K)$ est naturellement identifié à une partie de $X_i(K)$, et d'autre part le système de coordonnées $(T_0^{(i)}, \dots, T_n^{(i)})$ induit pour tous i, j des bijections $X_i(K) \xrightarrow{\sim} K^n$ et $U_{ij}(K) \xrightarrow{\sim} U_{ij}$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U_{ij}(K) & \xrightarrow{\sim} & U_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i(K) & \xrightarrow{\sim} & K^n \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les inclusions. De plus, ces bijections identifient l'application $\omega_{ij, (K)} : U_{ij}(K) \xrightarrow{\sim} U_{ji}(K)$ avec $(\psi_j^{-1} \circ \psi_i)|_{U_{ij}} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$. Il s'ensuit aussitôt que l'ensemble des K -points $\mathbb{P}_K^n(K)$ est naturellement identifié avec le K -espace projectif de

dimension n , comme souhaité. Pour un anneau A arbitraire, l'homomorphisme structurel $A \rightarrow B_i$ induit un morphisme de schémas $\pi_i : X_i \rightarrow \operatorname{Spec} A$ pour tout $i = 0, \dots, n$, et évidemment $(\pi_j)|_{U_{ji}} \circ \omega_{ij} = (\pi_i)|_{U_{ij}}$ pour tous $i, j = 0, \dots, n$; il existe alors un unique morphisme de schémas $\pi : \mathbb{P}_A^n \rightarrow \operatorname{Spec} A$ dont la restriction à chaque partie ouverte X_i coïncide avec π_i . En raisonnant comme dans l'exemple 5.44(ii), on voit aisément que pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, la fibre $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ s'identifie naturellement au $k(\mathfrak{p})$ -espace projectif $\mathbb{P}_{k(\mathfrak{p})}^n$; donc on peut interpréter $\mathbb{P}_A^n$ comme une famille d'espaces projectifs indexés par les points de $\operatorname{Spec} A$.

Théorème 5.76. *Tout produit fibré est représentable dans la catégorie des schémas.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ la catégorie des schémas, et $\mathcal{A}$ sa sous-catégorie pleine dont les objets sont les schémas affines; rappelons que le foncteur $\operatorname{Spec} : \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}^{\operatorname{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ est plein et fidèle, induit une équivalence entre $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}^{\operatorname{op}}$ et $\mathcal{A}$, et admet un adjoint à gauche (théorème 5.47). Comme $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ est cocomplète (exemple 2.44(ii)), il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est complète, et les limites dans $\mathcal{A}$ représentent aussi les limites dans $\mathcal{S}$ (lemme 2.52(ii,iii)). Explicitement, la discussion de la section 3.4 montre que si A est un anneau et B, C sont deux A -algèbres, le produit fibré $\operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ dans $\mathcal{S}$ est représenté par $\operatorname{Spec} B \otimes_A C$, et les homomorphismes naturels de A -algèbres $B \rightarrow B \otimes_A C \leftarrow C$ induisent les projections universelles :

$$\operatorname{Spec} B \leftarrow \operatorname{Spec} B \otimes_A C \rightarrow \operatorname{Spec} C.$$

Pour tout schéma $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ et toute partie $V \subset X$ on notera $\underline{V} := V \times_X \underline{X}$.

Affirmation 5.77. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X), \underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y), \underline{Y}' := (Y', \mathcal{O}_{Y'})$ trois schémas, $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}, f' : \underline{Y}' \rightarrow \underline{X}$ deux morphismes de schémas, $U \subset Y, U' \subset Y', V \subset X$ des parties ouvertes avec $fU, f'U' \subset V$. Soient aussi $\underline{Z} := (Z, \mathcal{O}_Z)$ un schéma représentant le produit fibré $\underline{Y} \times_{\underline{X}} \underline{Y}'$ dans la catégorie $\mathcal{S}$, et $\underline{Y} \xrightarrow{p} \underline{Z} \xrightarrow{p'} \underline{Y}'$ un cône universel, et posons $W := p^{-1}U \cap p'^{-1}U'$. Alors $\underline{W}$ représente $\underline{U} \times_{\underline{V}} \underline{U}'$, avec cône universel donné par les restrictions $p|_W : \underline{W} \rightarrow \underline{U}$ et $p'|_W : \underline{W} \rightarrow \underline{U}'$.

Preuve : Cela suit aussitôt des propriétés universelles des sous-schémas ouverts : voir l'exercice 5.40(ii). $\diamond$

Soient maintenant $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}, f' : \underline{Y}' \rightarrow \underline{X}$ comme dans l'observation 5.77; notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples (U, U') tels que $U \subset Y, U' \subset Y'$ sont des parties ouvertes affines, et tels qu'il existe une partie ouverte affine $V \subset X$ avec $fU, f'U' \subset V$. Pour tout $(U, U') \in \mathcal{U}$ et tout $V \subset X$ affine vérifiant la condition ci-dessus, par ce qui précède, le produit fibré $\underline{U} \times_{\underline{V}} \underline{U}'$ est représentable dans $\mathcal{S}$ par un schéma $\underline{P}_{(U, U')}$, et on voit aisément que $\underline{P}_{(U, U')}$ représente aussi le produit fibré $\underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{U}'$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. On notera

$$\underline{U} \xleftarrow{\pi_U} \underline{P}_{(U, U')} \xrightarrow{\pi_{U'}} \underline{U}'$$

le cône universel correspondant. Ensuite, soient $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}$ et posons $U_{12} := U_1 \cap U_2, U'_{12} := U'_1 \cap U'_2$; par l'observation 5.77, le produit fibré $\underline{U}_{12} \times_{\underline{X}} \underline{U}'_{12}$ est représentable par un schéma qui s'identifie naturellement avec les sous-schémas ouverts $\underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} \subset \underline{P}_{(U_1, U'_1)}$ et $\underline{P}_{(U_{21}, U'_{21})} \subset \underline{P}_{(U_2, U'_2)}$ dont les parties ouvertes sous-jacentes sont respectivement

$$P_{(U_{12}, U'_{12})} := \pi_{U_1}^{-1}U_{12} \cap \pi_{U'_1}^{-1}U'_{12} \quad \text{et} \quad P_{(U_{21}, U'_{21})} := \pi_{U_2}^{-1}U_{12} \cap \pi_{U'_2}^{-1}U'_{12}.$$

Ainsi, il existe un isomorphisme unique de schémas

$$\omega_{12} : \underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} \xrightarrow{\sim} \underline{P}_{(U_{21}, U'_{21})} \quad \text{tel que} \quad \pi_{U_{21}} \circ \omega_{12} = \pi_{U_{12}} \quad \text{et} \quad \pi_{U'_{21}} \circ \omega_{12} = \pi_{U'_{12}}$$

où $\underline{U}_{12} \xleftarrow{\pi_{U_{12}}} \underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} \xrightarrow{\pi_{U'_{12}}} \underline{U}'_{12}$ sont les restrictions de π_{U_1} et $\pi_{U'_1}$, et de même pour $\pi_{U_{21}}$ et $\pi_{U'_{21}}$. Soit (U_3, U'_3) un troisième élément de $\mathcal{U}$, et posons

$$U_{123} := U_{12} \cap U_3 \quad U'_{123} := U'_{12} \cap U'_3.$$

Toujours d'après l'observation 5.77, le produit fibré $\underline{U}_{123} \times_X \underline{U}'_{123}$ est représenté par le sous-schéma ouvert $\underline{P}_{(U_{123}, U'_{123})} \subset \underline{P}_{(U_1, U'_1)}$ dont la partie ouverte sous-jacente est $P_{(U_{123}, U'_{123})} := \pi_{U_1}^{-1} U_{123} \cap \pi_{U'_1}^{-1} U'_{123}$. De même, ce produit fibré est représenté par le sous-schéma ouvert $\underline{P}_{(U_{312}, U'_{312})} \subset \underline{P}_{(U_3, U'_3)}$ dont la partie ouverte sous-jacente est $P_{(U_{312}, U'_{312})} := \pi_{U_3}^{-1} U_{123} \cap \pi_{U'_3}^{-1} U'_{123}$. Il s'ensuit aussitôt que $\omega_{13}(P_{(U_{123}, U'_{123})}) = P_{(U_{312}, U'_{312})}$, et la restriction $\underline{P}_{(U_{123}, U'_{123})} \xrightarrow{\sim} \underline{P}_{(U_{312}, U'_{312})}$ de ω_{13} est l'unique isomorphisme de schémas dont la composition avec la restriction de π_{U_3} (resp. avec la restriction de $\pi_{U'_3}$) coïncide avec la restriction de π_{U_1} (resp. avec la restriction de $\pi_{U'_1}$). Ces propriétés d'unicité entraînent aisément que la famille de schémas $\underline{P}_{(\bullet, \bullet)} := (\underline{P}_{(U, U')} \mid (U, U') \in \mathcal{U})$ et d'isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$ est une donnée de recollement, au sens de §5.4.1. Le recollement $\underline{P}$ de la famille $\underline{P}_{(\bullet, \bullet)}$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$ est alors un schéma, d'après le lemme 5.74(iv).

Pour tout $(U, U') \in \mathcal{U}$, soient aussi $\iota_U : \underline{U} \rightarrow \underline{Y}$ et $\iota_{U'} : \underline{U}' \rightarrow \underline{Y}'$ les morphismes naturels (dont les applications sous-jacentes $U \rightarrow Y$ et $U' \rightarrow Y'$ sont les inclusions); par construction, pour tous $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}$ la restriction $\underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} \rightarrow \underline{Y}$ de $\iota_{U_1} \circ \pi_{U_1}$ coïncide avec la composition de ω_{12} avec la restriction $\underline{P}_{(U_{21}, U'_{21})} \rightarrow \underline{Y}$ de $\iota_{U_2} \circ \pi_{U_2}$. Par la propriété universelle du recollement, il existe alors un unique morphisme de schémas $\pi_Y : \underline{P} \rightarrow \underline{Y}$ dont la restriction à $\underline{P}_{(U, U')}$ coïncide avec $\iota_U \circ \pi_U$, pour tout $(U, U') \in \mathcal{U}$ (rappelons que le co-cône universel du recollement identifie $\underline{P}_{(U, U')}$ avec un sous-schéma ouvert de $\underline{P}$). De même on montre l'existence et l'unicité d'un morphisme de schémas $\pi_{Y'} : \underline{P} \rightarrow \underline{Y}'$ dont la restriction à $\underline{P}_{(U, U')}$ coïncide avec $\iota_{U'} \circ \pi_{U'}$, pour tout $(U, U') \in \mathcal{U}$, et on vérifie aisément que $f \circ \pi_Y = f' \circ \pi_{Y'}$. Pour conclure, on va montrer que $\underline{P}$ représente $\underline{Y} \times_X \underline{Y}'$, et que le couple $(\pi_Y, \pi_{Y'})$ fournit un cône universel pour ce produit fibré.

En effet, soient $\underline{Z} := (Z, \mathcal{O}_Z)$ un schéma, $g : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}, g' : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}'$ des morphismes de schémas avec $f \circ g = f' \circ g'$; pour toute partie ouverte $U \subset Y, U' \subset Y'$ posons

$$Z_{(U, U')} := g^{-1}U \cap g'^{-1}U' \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{(U, U')} := Z_{(U, U')} \times_Z \underline{Z}.$$

En particulier, pour tous $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}$, le schéma $\underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} = \underline{Z}_{(U_{21}, U'_{21})}$ est un sous-schéma ouvert à la fois de $\underline{Z}_{(U_1, U'_1)}$ et de $\underline{Z}_{(U_2, U'_2)}$, et on obtient ainsi une donnée de recollement pour la famille $\underline{Z}_{(\bullet, \bullet)} := (\underline{Z}_{(U, U')} \mid (U, U') \in \mathcal{U})$, dont les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}^Z : \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} \xrightarrow{\sim} \underline{Z}_{(U_{21}, U'_{21})}$ sont les identités. On voit aussitôt que le recollement de la famille $\underline{Z}_{(\bullet, \bullet)}$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}^Z$ n'est rien d'autre que $\underline{Z}$, à isomorphisme unique près. Or, pour tout $(U, U') \in \mathcal{U}$, les restrictions $g_U : \underline{Z}_{(U, U')} \rightarrow \underline{U}$ et $g'_{U'} : \underline{Z}_{(U, U')} \rightarrow \underline{U}'$ de g et g' induisent un morphisme unique de schémas $h_{(U, U')} : \underline{Z}_{(U, U')} \rightarrow \underline{P}_{(U, U')}$ avec $\pi_U \circ h_{(U, U')} = g_U$ et $\pi_{U'} \circ h_{(U, U')} = g'_{U'}$. De même, pour tous $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}$, les restrictions $g_{U_{12}} : \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} \rightarrow \underline{U}_{12}$ et $g'_{U'_{12}} : \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} \rightarrow \underline{U}'_{12}$ de g et g' induisent un morphisme unique de schémas $h_{(U_{12}, U'_{12})} : \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} \rightarrow \underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})}$ avec $\pi_{U_{12}} \circ h_{(U_{12}, U'_{12})} = g_{U_{12}}$ et $\pi_{U'_{12}} \circ h_{(U_{12}, U'_{12})} = g'_{U'_{12}}$. En dernier lieu, soient $j_{12} : \underline{U}_{12} \rightarrow \underline{U}_1$, ainsi que

$$\underline{Z}_{(U_2, U'_2)} \xleftarrow{i_{21}^Z} \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} \xrightarrow{i_{12}^Z} \underline{Z}_{(U_1, U'_1)} \quad \underline{P}_{(U_2, U'_2)} \xleftarrow{i_{21}^P} \underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} \xrightarrow{i_{12}^P} \underline{P}_{(U_1, U'_1)}$$

les morphismes naturels d'inclusion de sous-schémas ouverts. Il vient :

$$\pi_{U_1} \circ h_{(U_1, U'_1)} \circ i_{12}^Z = g_U \circ i_{12}^Z = j_{12} \circ g_{U_{12}} = j_{12} \circ \pi_{U_{12}} \circ h_{(U_{12}, U'_{12})} = \pi_{U_1} \circ i_{12}^P \circ h_{(U_{12}, U'_{12})}$$

et de même on vérifie que $\pi_{U'_1} \circ h_{(U_1, U'_1)} \circ i_{12}^Z = \pi_{U'_1} \circ i_{12}^P \circ h_{(U_{12}, U'_{12})}$, d'où :

$$(*) \quad h_{(U_1, U'_1)} \circ i_{12}^Z = i_{12}^P \circ h_{(U_{12}, U'_{12})}.$$

Un calcul analogue, que l'on laissera aux soins du lecteur, montre l'identité :

$$(**) \quad h_{(U_2, U'_2)} \circ i_{21}^Z = i_{21}^P \circ \omega_{12} \circ h_{(U_{12}, U'_{12})}.$$

On a ainsi un diagramme de schémas :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}} \underline{Z}_{(U_{12}, U'_{12})} & \xrightarrow[\underline{\beta}^Z]{\underline{\alpha}^Z} & \bigsqcup_{(U, U') \in \mathcal{U}} \underline{Z}_{(U, U')} \xrightarrow{i^Z} \underline{Z} \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h' \\
 \bigsqcup_{(U_1, U'_1), (U_2, U'_2) \in \mathcal{U}} \underline{P}_{(U_{12}, U'_{12})} & \xrightarrow[\underline{\beta}]{\underline{\alpha}} & \bigsqcup_{(U, U') \in \mathcal{U}} \underline{P}_{(U, U')} \xrightarrow{i^P} \underline{P}
 \end{array}$$

où $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ (resp. $\underline{\alpha}^Z$ et $\underline{\beta}^Z$) sont les morphismes de recollement et h' (resp. h'') est la somme directe des morphismes $h_{(U, U')}$ (resp. $h_{(U_{12}, U'_{12})}$). Les identités (*) (resp. (**)) reviennent à dire que le carré formé par $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}^Z$ (resp. par $\underline{\beta}$ et $\underline{\beta}^Z$) et par les flèches verticales, commute. Il vient par suite un unique morphisme de schémas

$$h : \underline{Z} \rightarrow \underline{P} \quad \text{tel que} \quad h \circ i^Z = i^P \circ h'.$$

On déduit aussitôt que h est l'unique morphisme de schémas avec $\pi_Y \circ h = g$ et $\pi_{Y'} \circ h = g'$, comme souhaité. $\square$

Exercice 5.78. Montrer que pour tout diagramme cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{X}' & \xrightarrow{(g', g'^b)} & \underline{X} \\
 (f', f'^b) \downarrow & & \downarrow (f, f^b) \\
 \underline{Y}' & \xrightarrow{(g, g^b)} & \underline{Y}
 \end{array}$$

on a $g^{-1}(f(X)) = f'(X')$. Donc, si f est surjectif, il est en de même pour f' .

Plusieurs notions de l'algèbre commutative se généralisent aisément aux schémas ; voici un échantillon :

Définition 5.79. Soit $\underline{\phi} := (\phi, \phi^b) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme de schémas.

(i) On dit que $\underline{\phi}$ est *de type fini* (resp. *de présentation finie*) au point $x \in X$, s'il existe des voisinages ouverts affines $U \subset X$ de x , et $V \subset Y$ de $\phi(x)$, avec $\phi(U) \subset V$, tels que ϕ^b induit un homomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ de type fini (resp. de présentation finie).

(ii) On dit que $\underline{\phi}$ est *compact*, si $\phi : X \rightarrow Y$ est une application compacte.

(iii) On dit que $\underline{\phi}$ est *localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) s'il est de type fini (resp. de présentation finie) en tout point de X . Si en outre $\underline{\phi}$ est compact, on dira que $\underline{\phi}$ est *de type fini* (resp. *de présentation finie*).

(iv) Soit en outre $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module ; on dit que $\mathcal{M}$ est *$\underline{\phi}$ -plat au point x* , si $(\mathcal{M}_x)_{[\phi_x^\#]}$ est un $\mathcal{O}_{Y, \phi(x)}$ -module plat (notation de la remarque 5.39(iii)).

(v) On dit que $\mathcal{M}$ est *$\underline{\phi}$ -plat*, s'il est $\underline{\phi}$ -plat en tout point de X . Si $\underline{\phi} = \mathbf{1}_{(X, \mathcal{O}_X)}$, on dit simplement *plat*, au lieu de $\underline{\phi}$ -plat. Si $\mathcal{O}_X$ est $\underline{\phi}$ -plat au point x (resp. si $\mathcal{O}_X$ est $\underline{\phi}$ -plat), on dit que $\underline{\phi}$ est *plat au point x* (resp. que $\underline{\phi}$ est *plat*).

(vi) La *dimension* de $(X, \mathcal{O}_X)$ est $\dim X$ (voir la définition 4.64(ii)).

Exercice 5.80. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, M un B -module, $X := \text{Spec } A$, $Y := \text{Spec } B$, et $\phi := \text{Spec } f : Y \rightarrow X$ le morphisme induit de schémas. Montrer les assertions suivantes :

(i) ϕ est un morphisme de type fini (resp. de présentation finie) $\Leftrightarrow f$ est un homomorphisme de type fini (resp. de présentation finie).

(ii) $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_B M$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module $\underline{\phi}$ -plat $\Leftrightarrow M_{[f]}$ est un A -module plat.

Lemme 5.81. (i) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X), \underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ des schémas, $\phi := (\phi, \phi^b) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de schémas, et $(U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de Y ; posons

$$V_\lambda := \phi^{-1}U_\lambda \quad \underline{U}_\lambda := U_\lambda \times_Y \underline{Y} \quad \underline{V}_\lambda := V_\lambda \times_X \underline{X} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

(notation de l'exercice 5.40) et soit $\phi_\lambda : \underline{V}_\lambda \rightarrow \underline{U}_\lambda$ la restriction de ϕ . Alors ϕ est compact (resp. localement de type fini, resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie) si et seulement s'il en est de même pour chaque ϕ_λ .

(ii) Soit en outre un diagramme cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}' := (X', \mathcal{O}_{X'}) & \xrightarrow{\psi'} & \underline{X} \\ \phi' \downarrow & & \downarrow \phi \\ \underline{Y}' := (Y', \mathcal{O}_{Y'}) & \xrightarrow{\psi} & \underline{Y}. \end{array}$$

Si ϕ est compact (resp. localement de type fini, resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie), il en est de même pour ϕ' .

Démonstration. (i) : Il est clair que si chaque ϕ_λ est localement de type fini (resp. localement de présentation finie), alors il en est de même pour ϕ . En outre, le lemme 4.60 montre que si chaque ϕ_λ est compact, alors il en est de même pour ϕ ; par suite, si chaque ϕ_λ est de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même pour ϕ . Il est aussi clair que si ϕ est compact, il en est de même pour chaque ϕ_λ .

Ensuite, si ϕ est localement de type fini, et si $x \in V_\lambda$, par hypothèse il existe des voisinages ouverts affines $V \subset X$ de x et $U \subset Y$ de $y := \phi(x)$ avec $\phi(U) \subset V$, tels que ϕ^b induit un homomorphisme d'anneaux de type fini

$$f : A := \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow B := \mathcal{O}_X(V).$$

Donc, la restriction $V \times_X \underline{X} \rightarrow U \times_Y \underline{Y}$ de ϕ s'identifie avec $\text{Spec}(f) : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ (théorème 5.47). Soit $\mathfrak{p} \subset A$ (resp. $\mathfrak{q} \subset B$) l'idéal premier correspondant à y (resp. à x) sous cette identification; alors, $(\text{Spec } A[a^{-1}] | a \in A \setminus \mathfrak{p})$ (resp. $(\text{Spec } B[b^{-1}] | b \in B \setminus \mathfrak{q})$) est un système fondamental de voisinages ouverts de $\mathfrak{p}$ dans $\text{Spec } A$ (resp. de $\mathfrak{q}$ dans $\text{Spec } B$), et correspond à un système fondamental $(U_a | a \in A \setminus \mathfrak{p})$ (resp. $(V_b | b \in B \setminus \mathfrak{q})$) de voisinages ouverts de y dans Y (resp. de x dans X), avec $\mathcal{O}_Y(U_a) = A[a^{-1}]$ pour tout $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ (resp. $\mathcal{O}_X(V_b) = B[b^{-1}]$ pour tout $b \in B \setminus \mathfrak{q}$). Ainsi, prenons $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ avec $U_a \subset U_\lambda$, et posons $b := f(a)$; par construction, $V_b \subset V_\lambda$, et ϕ^b induit l'homomorphisme d'anneaux $f_b : \mathcal{O}_Y(U_a) = A[a^{-1}] \rightarrow \mathcal{O}_X(V_b) = B[b^{-1}]$ de type fini; en outre, si f est de présentation finie, il est en de même pour f_b . Cela montre que ϕ_λ est localement de type fini, et même localement de présentation finie, s'il en est de même pour ϕ . On déduit aussitôt que si ϕ est de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même pour chaque ϕ_λ .

(ii) : Soit $y' \in Y'$; d'après (i), il suffit d'exhiber un voisinage ouvert $U' \subset Y'$ de y' tel que, avec $V' := \phi'^{-1}U'$, la restriction $V' \times_{X'} \underline{X}' \rightarrow U' \times_Y \underline{Y}'$ soit compacte (resp. localement de type fini, resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie). Or, soit $U \subset Y$ un voisinage ouvert affine de $y := \psi(y')$, et $V := \phi^{-1}U$; d'après (i), la restriction $\phi|_V : V \times_X \underline{X} \rightarrow U \times_Y \underline{Y}$ de ϕ est compacte (resp. localement de type fini, resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie); soient $Y'' := \psi^{-1}U$, et $X'' := \phi'^{-1}Y''$. Quitte à remplacer ϕ par $\phi|_V$ et ϕ' par sa restriction $X'' \times_{X'} \underline{X}' \rightarrow Y'' \times_Y \underline{Y}'$, on peut alors supposer que $\underline{Y}$ soit affine. Si ϕ est compact, on trouve un recouvrement fini $V_1 \cup \dots \cup V_n = X$ formé de parties ouvertes affines. Soit $\underline{U}' := (U', \mathcal{O}_{Y'|U'})$ un sous-schéma ouvert affine de $\underline{Y}'$, et pour tout $i = 1, \dots, n$ posons $\underline{V}_i := V_i \times_X \underline{X}$; le produit fibré $(V'_i, \mathcal{O}_{V'_i}) := \underline{U}' \times_{\underline{Y}} \underline{V}_i$ s'identifie alors avec un sous-schéma ouvert affine de $\underline{X}'$, et $\phi'^{-1}U' = V'_1 \cup \dots \cup V'_n$ (voir

la preuve du théorème 5.76). Ainsi, $\phi'^{-1}U'$ est une partie compacte de X' , et cela achève de vérifier que $\underline{\phi}'$ est compact.

Ensuite, si $\underline{\phi}$ est localement de type fini, soient $x' \in X'$, $y' := \phi'(x')$, $x := \psi'(x')$, et $y := \phi(x)$; prenons des voisinages ouverts affines $V \subset X$ de x , et $U \subset Y$ de y , tels que ϕ^b induise un homomorphisme d'anneaux de type fini $f : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$, et soit $U' \subset Y'$ un voisinage ouvert affine de y' tel que $\psi'(U') \subset U$. Alors la preuve du théorème 5.76 montre que $V' := \phi'^{-1}(U') \cap \psi'^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert affine de x' dans X' , et que l'on a un diagramme cocartésien d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y'}(U') & \xrightarrow{g} & \mathcal{O}_{X'}(V'). \end{array}$$

Ainsi, ϕ^b induit un homomorphisme d'anneaux g de type fini, et même de présentation finie, si f est de présentation finie. Cela achève de vérifier que $\underline{\phi}'$ est localement de type fini, et même localement de présentation finie, si $\underline{\phi}$ est localement de présentation finie. On déduit aussitôt que si $\underline{\phi}$ est de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même pour $\underline{\phi}'$. $\square$

Exercice 5.82. Soient $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ et $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ deux morphismes de schémas.

(i) Montrer que si f et g sont de localement de type fini (resp. localement de présentation finie), il en est de même pour $g \circ f$.

(ii) Montrer que si $g \circ f$ est localement de type fini, il en est de même pour f .

(iii) Montrer que si $g \circ f$ est localement de présentation finie, et si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie.

5.4.2. Sous-schémas fermés. Pour tout schéma $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ et tout idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, on considère le foncteur représentable $\mathbf{h}_{X^{\text{op}}} : \mathbf{EsLocAn}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (cf. l'exercice 5.40(i)) et son sous-foncteur $F_{\mathcal{I}} \subset \mathbf{h}_{X^{\text{op}}}$ tel que

$$F_{\mathcal{I}}(\underline{T}) := \{(g, g^b) \in \mathbf{EsLocAn}(\underline{T}, \underline{X}) \mid g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_T = 0\} \quad \forall \underline{T} \in \mathbf{Ob}(\mathbf{EsLocAn}).$$

Proposition 5.83. (i) $F_{\mathcal{I}}$ est représenté par un $\underline{X}$ -schéma (remarque 5.49(iii))

$$i : \underline{V}(\mathcal{I}) := (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \rightarrow \underline{X}.$$

(ii) $Z := \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$ est une partie fermée de X , et i induit un homéomorphisme $V(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} Z$, pour la topologie de Z induite par X .

(iii) $i^b : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$.

Démonstration. (i) : Pour toute partie ouverte $U \subset X$ soit $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$; on a :

Affirmation 5.84. Soient $\underline{i} : \underline{V}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{X}$ un $\underline{X}$ -schéma représentant $F_{\mathcal{I}}$, et $U \subset X$ une partie ouverte; posons $\underline{V}_U := i^{-1}(U) \times_{V(\mathcal{I})} \underline{V}(\mathcal{I})$. Alors le $\underline{U}$ -schéma induit $\underline{i}_U : \underline{V}_U \rightarrow \underline{U}$ (voir la remarque 5.41(i)) représente le foncteur $F_{\mathcal{I}|_U}$.

Preuve : Soient $\underline{j} := (j, j^b) : \underline{U} \rightarrow \underline{X}$ et $\underline{k} : \underline{V}_U \rightarrow \underline{V}(\mathcal{I})$ les morphismes d'inclusion, $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{EsLocAn})$, et $\underline{g} := (g, g^b) : \underline{T} \rightarrow \underline{U}$ un morphisme de $\mathbf{EsLocAn}$ avec $g^{-1}(\mathcal{I}|_U) \cdot \mathcal{O}_T = 0$; ainsi, $(j \circ g)^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_T = 0$, donc il existe un unique morphisme $\underline{h} := (h, h^b) : \underline{T} \rightarrow \underline{V}(\mathcal{I})$ de $\mathbf{EsLocAn}$ tel que $\underline{i} \circ \underline{h} = \underline{j} \circ \underline{g}$. En particulier, $h(T) \subset i^{-1}U$; par la propriété universelle de $\underline{k}$ (voir l'exercice 5.40(ii)), on a alors un unique morphisme $\underline{l} : \underline{T} \rightarrow \underline{V}_U$ de $\mathbf{EsLocAn}$ tel que $\underline{h} = \underline{k} \circ \underline{l}$. Ainsi, $\underline{j} \circ \underline{i}_U \circ \underline{l} = \underline{i} \circ \underline{k} \circ \underline{l} = \underline{i} \circ \underline{h} = \underline{j} \circ \underline{g}$, et puisque $\underline{j}$ est évidemment un monomorphisme, il vient $\underline{i}_U \circ \underline{l} = \underline{g}$. Mais noter aussi que $\underline{i}$ est un épimorphisme de $\mathbf{EsLocAn}^{\text{op}}$, car $F_{\mathcal{I}}$ est un sous-foncteur de $\mathbf{h}_{\underline{X}} : \mathbf{EsLocAn}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (exercice 2.7(ii)); i.e. $\underline{i}$ est un monomorphisme de $\mathbf{EsLocAn}$, donc de même pour $\underline{i}_U$ (remarque 2.23(iii)), et par suite $\underline{l}$ est l'unique morphisme tel que $\underline{i}_U \circ \underline{l} = \underline{g}$, d'où l'assertion. $\diamond$

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un recouvrement de X , tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$ le foncteur $F_{\mathcal{J}|_U}$ est représenté par un $\underline{U}$ -schéma $i_U : \underline{V}(\mathcal{J}|_U) \rightarrow \underline{U}$. Posons

$$\underline{V}_{UU'} := i_U^{-1}(U \cap U') \times_{V(\mathcal{J}|_U)} \underline{V}(\mathcal{J}|_U) \xrightarrow{(i_U)|_{U \cap U'}} \underline{U \cap U'} \quad \forall U, U' \in \mathcal{U}.$$

D'après l'observation 5.84, les $\underline{U \cap U'}$ -schémas $\underline{V}_{UU'}$ et $\underline{V}_{U'U}$ représentent le même foncteur $F_{\mathcal{J}|_{U \cap U'}}$; il existe alors un unique isomorphisme de $\underline{U \cap U'}$ -schémas $\omega^{UU'} : \underline{V}_{UU'} \xrightarrow{\sim} \underline{V}_{U'U}$. De même, pour tous $U, U', U'' \in \mathcal{U}$, le $\underline{U \cap U' \cap U''}$ -schéma

$$\underline{V}_{UU'U''} := i^{-1}(U \cap U' \cap U'') \times_{V(\mathcal{J}|_U)} \underline{V}(\mathcal{J})$$

représente le foncteur $F_{\mathcal{J}|_{U \cap U' \cap U''}}$; d'autre part, les morphismes $\omega^{UU'}, \omega^{U'U''}$ et $\omega^{UU''}$ induisent par restriction des isomorphismes de $\underline{U \cap U' \cap U''}$ -schémas

$$\begin{array}{ccc} \underline{V}_{UU'U''} & \xrightarrow{\omega_{|U \cap U' \cap U''}^{UU'}} & \underline{V}_{U'U''} \\ & \searrow \omega_{|U \cap U' \cap U''}^{UU''} & \swarrow \omega_{|U \cap U' \cap U''}^{U'U''} \\ & \underline{V}_{U'U''} & \end{array}$$

et par suite $\omega_{|U \cap U' \cap U''}^{UU''} = \omega_{|U \cap U' \cap U''}^{U'U''} \circ \omega_{|U \cap U' \cap U''}^{UU'}$. Donc $(\underline{V}(\mathcal{J}|_U), \omega^{UU'} | U, U' \in \mathcal{U})$ est une donnée de recollement de schémas, dont on notera le recollement par $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$. Soit $(j_U : \underline{V}(\mathcal{J}|_U) \rightarrow \underline{Y} | U \in \mathcal{U})$ le co-cône universel; par la propriété universelle de $\underline{Y}$, il existe un unique morphisme $i : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ tel que $i \circ j_U : \underline{V}(\mathcal{J}|_U) \rightarrow \underline{X}$ soit la composition de i_U avec le morphisme d'inclusion $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Affirmation 5.85. Le $\underline{X}$ -schéma $i : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ représente le foncteur $F_{\mathcal{J}}$.

Preuve : Soient $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un espace localement annelé et $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme d'espaces localement annelés tel que $g^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_T = 0$; pour tout $U \in \mathcal{U}$ on déduit un morphisme d'espaces annelés $g_U : g^{-1}\underline{U} := g^{-1}(U) \times_T \underline{T} \rightarrow \underline{U}$ (remarque 5.41(i)), et $g_U^{-1}(\mathcal{J}|_U) \cdot \mathcal{O}_T = 0$. Donc g_U se factorise à travers i_U et un unique morphisme d'espaces localement annelés $k_U : g^{-1}\underline{U} \rightarrow \underline{V}(\mathcal{J}|_U)$; posons

$$h_U := j_U \circ k_U : g^{-1}\underline{U} \rightarrow \underline{Y} \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

Or, noter que pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$, l'espace annelé $g^{-1}\underline{U \cap U'} := g^{-1}(U \cap U') \times_T \underline{T}$ est un sous-espace annelé ouvert à la fois de $g^{-1}\underline{U}$ et de $g^{-1}\underline{U'}$; on en déduit une donnée de recollement $(g^{-1}\underline{U}, \tau^{UU'} | U, U' \in \mathcal{U})$ si l'on prend pour chaque

$$\tau^{UU'} : g^{-1}(U \cap U') \times_{g^{-1}U} g^{-1}\underline{U} \xrightarrow{\sim} g^{-1}(U \cap U') \times_{g^{-1}U'} g^{-1}\underline{U'}$$

le morphisme identité (la source et le but de ce morphisme étant justement le même schéma $g^{-1}\underline{U \cap U'}$). Il est clair que le recollement de la famille $(g^{-1}\underline{U} | U \in \mathcal{U})$ suivant ce système d'isomorphismes $\tau^{\bullet\bullet}$ n'est rien d'autre que $\underline{T}$, et le co-cône universel est constitué des morphismes d'inclusion $g^{-1}\underline{U} \rightarrow \underline{T}$ de l'exercice 5.40(ii). En dernier lieu, pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$ soit $k_{UU'} : g^{-1}\underline{U \cap U'} \rightarrow \underline{V}_{UU'}$ la restriction de k_U ; noter que

$$(i_U)|_{U \cap U'} \circ k_{UU'} = (i_{U'})|_{U \cap U'} \circ k_{U'U} = (i_U)|_{U \cap U'} \circ \omega^{UU'} \circ k_{U'U}$$

d'où $k_{UU'} = \omega^{UU'} \circ k_{U'U}$, par la propriété universelle de $(i_U)|_{U \cap U'}$. On déduit :

$$(h_U)|_{g^{-1}\underline{U \cap U'}} = (h_{U'})|_{g^{-1}\underline{U \cap U'}} \quad \forall U, U' \in \mathcal{U}$$

et donc le système de morphismes $(h_U | U \in \mathcal{U})$ se recolle en un morphisme d'espaces localement annelés $h : \underline{T} \rightarrow \underline{Y}$; par construction, il s'agit de l'unique tel morphisme avec $i \circ h = g$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\diamond$

Avec l'observation 5.85, on est ramené aussitôt au cas où $\underline{X}$ est un schéma affine, disons $\underline{X} = \text{Spec } A$, et $\mathcal{J} = I\mathcal{O}_X$ pour un idéal $I \subset A$. Soit alors $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un espace localement annelé, et $(g, g^b) : \underline{T} \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme d'espaces localement annelés; d'après le théorème 5.47, (g, g^b) correspond à un homomorphisme d'anneaux

$f : A \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_T)$, et la description explicite de la remarque 5.68(iv) montre que l'on a $g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_T = 0$ si et seulement si $f(I) \cdot \mathcal{O}_{T,t} = 0$ pour tout $t \in T$. À son tour, cette dernière condition est vérifiée si et seulement si f se factorise à travers la projection $\pi : A \rightarrow A/I$; donc les éléments de $F_{\mathcal{I}}(T)$ correspondent aux homomorphismes d'anneaux $\bar{f} : A/I \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_T)$, qui finalement correspondent aux morphismes d'espaces localement annelés $\underline{T} \rightarrow \operatorname{Spec} A/I$, sous l'adjonction du théorème 5.47. Cela achève de montrer que $F_{\mathcal{I}}$ est représenté par le morphisme de schémas $\operatorname{Spec}(\pi) : \operatorname{Spec} A/I \rightarrow \operatorname{Spec} A$.

(ii) et (iii) suivent par inspection directe de la construction de $\underline{V}(\mathcal{I})$. $\square$

Exemple 5.86. (i) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, $Z \subset X$ une partie fermée, et pour toute partie ouverte $U \subset X$ posons :

$$\mathcal{I}_Z(U) := \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^\times \forall x \in Z \cap U\}.$$

On voit aisément que l'association : $U \mapsto \mathcal{I}_Z(U)$ définit un idéal de $\mathcal{O}_X$.

(ii) Si $\underline{X}$ est affine et si U est une partie ouverte affine, on a $\underline{X} = \operatorname{Spec} A$ pour $A := \mathcal{O}_X(X)$, et U est représentée par $A_U := \mathcal{O}_X(U)$ (remarque 5.49(i)); en outre, pour tout $\mathfrak{p} \in U$, l'idéal $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}A_U \subset A_U$ est premier (exercice 5.32(iii)), et consiste en des $a \in A_U$ dont l'image $a_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} = A_{U,\mathfrak{q}}$ est contenue dans $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, i.e. $a_{\mathfrak{p}} \notin \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^\times$ (lemme 3.30(ii)). Ainsi, si $Z = V(I)$ pour un idéal I , il vient $\mathcal{I}_Z(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z \cap U} \mathfrak{p}A_U = \operatorname{rad}(IA_U) = \operatorname{rad}(I)A_U$, toujours par l'exercice 5.32(i).

(iii) Avec (ii), on voit que, dans la situation de (i), l'idéal $\mathcal{I}_Z$ est quasi-cohérent. Plus précisément, si $\underline{X}$ est affine et $Z = V(I)$ pour un idéal $I \subset A := \mathcal{O}_X(X)$, on a $\mathcal{I}_Z = \operatorname{rad}(I) \cdot \mathcal{O}_X$, et par suite $\mathcal{I}_{Z,\mathfrak{p}} = \operatorname{rad}(I)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{rad}(I_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in X$. Dans la situation générale de (i), on a alors $Z = \{x \in X \mid \mathcal{I}_{Z,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$.

(iv) D'après (iii) et la proposition 5.83(ii,iii), Z est alors l'espace topologique sous-jacent au $\underline{X}$ -schéma $\underline{V}(\mathcal{I}_Z)$, et $\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{X,z}/\mathcal{I}_{Z,z}$ est un anneau réduit, pour tout $z \in Z$; ainsi, $\underline{V}(\mathcal{I}_Z)$ est un schéma réduit que l'on dénote

$$\underline{Z}_{\text{red}}$$

et qu'on appelle le *sous-schéma fermé réduit de $\underline{X}$ d'espace sous-jacent Z* .

(v) Noter aussi que $\underline{X}_{\text{red}} = \underline{V}(\mathcal{N}_{\underline{X}})$ (notation de l'exemple 5.71(ii)), et en particulier, $\underline{X}$ est un schéma réduit si et seulement si $\underline{X} = \underline{X}_{\text{red}}$.

5.5. Immersions, morphismes séparés, et éclatements.

Définition 5.87. Soit $\underline{f} := (f, f^b) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de schémas.

(i) On dit que $\underline{f}$ est une *immersion ouverte*, s'il existe une partie ouverte $U \subset Y$ tel que $\underline{f}$ soit la composition d'un isomorphisme de schémas $\underline{X} \xrightarrow{\sim} \underline{U} := U \times_Y \underline{Y}$ avec le morphisme naturel $\underline{U} \rightarrow \underline{Y}$.

(ii) On dit que $\underline{f}$ est une *immersion fermée*, s'il existe un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ tel que $\underline{f}$ soit la composition d'un isomorphisme $\underline{X} \xrightarrow{\sim} \underline{V}(\mathcal{I})$ avec le morphisme naturel $\underline{V}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{Y}$ (notation de la proposition 5.83).

(iii) Rappelons que les produits fibrés sont représentables dans la catégorie des schémas (théorème 5.76), et soit $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}} : \underline{X} \rightarrow \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$ le morphisme diagonal de $\underline{f}$ (voir l'exercice 2.66(i)). On dit que $\underline{f}$ est *quasi-séparé* (resp. *séparé*) si $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est un morphisme compact (resp. est une immersion fermée).

Remarque 5.88. (i) La définition 5.87(iii) est motivée par l'exercice 2.21, selon lequel un espace topologique T est séparé si et seulement si la diagonale Δ_T est une partie fermée du produit $T \times T$: voir aussi le corollaire 5.95(i).

(ii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $\underline{X} := \operatorname{Spec} B$, et $\underline{Y} := \operatorname{Spec} A$; la preuve de la proposition 5.83 montre que $\operatorname{Spec} f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est une *immersion fermée* si et seulement si f est *surjectif*, et dans ce cas $\operatorname{Spec} f$ s'identifie avec le morphisme naturel $\underline{V}(I\mathcal{O}_Y) \rightarrow \underline{Y}$, avec $I := \operatorname{Ker} f$.

(iii) En outre, pour tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$, le morphisme $\text{Spec } f$ est séparé. Pour la preuve, gardons la notation de (ii), et rappelons que $\underline{Z} := \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$ est représenté par $\text{Spec}(B \otimes_A B)$, et les projections canoniques $\underline{Z} \rightarrow \underline{X}$ correspondent aux homomorphismes d'anneaux $j_1, j_2 : B \rightarrow B \otimes_A B$ tels que $j_1(b) = b \otimes 1$ et $j_2(b) = 1 \otimes b$ pour tout $b \in B$ (voir la preuve du théorème 5.76). Par suite, $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}} : \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ correspond à l'unique homomorphisme d'anneaux $\mu : B \otimes_A B \rightarrow B$ tel que $\mu \circ j_i = \text{Id}_B$ pour $i = 1, 2$; évidemment μ est alors la loi de multiplication de B , i.e. $\mu(b \otimes b') = bb'$ pour tous $b, b' \in B$. En particulier, μ est une surjection, avec $I := \text{Ker}(\mu)$ l'idéal engendré par le système $(b \otimes 1 - 1 \otimes b \mid b \in B)$, et d'après (ii), $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ s'identifie avec l'immersion fermée $\underline{V}(I\mathcal{O}_Z) \rightarrow \underline{Z}$, d'où l'assertion.

(iv) On voit aisément que toute immersion ouverte $\underline{U} \rightarrow \underline{Y}$ est un monomorphisme dans la catégorie des schémas; par suite $\Delta_{\underline{U}/\underline{Y}}$ est un isomorphisme (exercice 2.66(i)). Donc, toute immersion ouverte est un morphisme séparé.

Exercice 5.89. (i) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X), \underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ des schémas, $\underline{f} := (f, f^\flat) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de schémas, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ un idéal quasi-cohérent. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de $\underline{X}$ -schémas :

$$\underline{V}(\mathcal{I}\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{V}(\mathcal{I}).$$

(ii) Soient $\underline{h} : \underline{S}' \rightarrow \underline{S}$ un morphisme de schémas, et $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{S}$ -schémas (voir la remarque 5.49(iii)). Posons $\underline{X}' := \underline{S}' \times_{\underline{S}} \underline{X}$ et $\underline{Y}' := \underline{S}' \times_{\underline{S}} \underline{Y}$; montrer que si $\underline{f}$ est une immersion fermée (resp. quasi-séparé, resp. séparé), il en est de même pour le morphisme $\underline{f}' : \underline{X}' \rightarrow \underline{Y}'$ déduit de $\underline{f}$ après le changement de base $\underline{h}$ (voir la remarque 2.24).

(iii) Soit en outre $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de Y ; pour tout $\lambda \in \Lambda$, posons $V_\lambda := f^{-1}U_\lambda, \underline{U}_\lambda := U_\lambda \times_Y \underline{Y}, \underline{V}_\lambda := V_\lambda \times_X \underline{X}$, et soit $\underline{f}_\lambda : \underline{V}_\lambda \rightarrow \underline{U}_\lambda$ la restriction de $\underline{f}$. Montrer que $\underline{f}$ est une immersion fermée (resp. quasi-séparé, resp. séparé) si et seulement s'il en est de même pour chaque $\underline{f}_\lambda$.

Proposition 5.90. Soit $(f, f^\flat) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme compact et quasi-séparé de schémas, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Alors on a :

- (i) $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent.
- (ii) Si Y est un espace spectral, il en est de même pour X .

Démonstration. (i) : Rappelons que pour toute partie ouverte $V \subset Y$, la restriction $\mathcal{F}|_{f^{-1}V}$ de $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X|f^{-1}V}$ -module quasi-cohérent (problème 5.58(i.a)). On se ramène ainsi aussitôt au cas où $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un schéma affine, disons $\underline{Y} = \text{Spec } A$, pour un anneau A . Par hypothèse, X est alors compact, donc admet un recouvrement fini $\mathcal{U} := (U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ formé de parties ouvertes affines, disons $\underline{U}_\lambda := U_\lambda \times_X \underline{X} = \text{Spec } B_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soient $\underline{X} \xleftarrow{p} \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X} \xrightarrow{q} \underline{X}$ les projections canoniques, et $\underline{W}_{\lambda\mu} := (W_{\lambda\mu}, \mathcal{O}_{W_{\lambda\mu}}) := \underline{U}_\lambda \times_{\underline{Y}} \underline{U}_\mu$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$; d'après l'observation 5.77, le morphisme de schémas $\underline{W}_{\lambda\mu} \rightarrow \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$ induit par les inclusions $\underline{U}_\lambda \rightarrow \underline{X} \leftarrow \underline{U}_\mu$ identifie $W_{\lambda\mu}$ avec la partie ouverte affine $p^{-1}U_\lambda \cap q^{-1}U_\mu$. Par hypothèse, $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est compact; par suite, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, la partie de X :

$$\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}^{-1}(W_{\lambda\mu}) = \Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}^{-1}(p^{-1}U_\lambda) \cap \Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}^{-1}(q^{-1}U_\mu) = U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu$$

est compacte. Fixons alors pour tous tels λ, μ un recouvrement fini $\mathcal{U}_{\lambda\mu}$ de $U_{\lambda\mu}$ formé de parties ouvertes affines de X , et pour toute partie ouverte $V \subset Y$ notons par

$$(\check{C}^\bullet(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}), d_{V, \bullet}^\bullet) \quad (\text{resp. par } (\check{C}^\bullet(\mathcal{U}_{\lambda\mu} \wedge V, \mathcal{F}), d_{V, \lambda\mu, \bullet}^\bullet))$$

le complexe de Čech de $\mathcal{F}$ relatif au recouvrement $\mathcal{U} \wedge V := (U \cap f^{-1}V \mid U \in \mathcal{U})$ (resp. relatif à $\mathcal{U}_{\lambda\mu} \wedge V := (U \cap f^{-1}V \mid U \in \mathcal{U}_{\lambda\mu})$). Rappelons que $\check{C}^0(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) =$

$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}(U_\lambda \cap f^{-1}V)$ et $\check{C}^1(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) = \prod_{\lambda, \mu \in \Lambda} \mathcal{F}(U_{\lambda\mu} \cap f^{-1}V)$, et de même pour $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}_{\lambda\mu} \wedge V, \mathcal{F})$; en outre, on a des augmentations canoniques (remarque 5.26(i)) :

$$\mathcal{F}(f^{-1}V) \xrightarrow{\varepsilon_V} \check{C}^0(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) \quad \mathcal{F}(U_{\lambda\mu} \cap f^{-1}V) \xrightarrow{\varepsilon_V^{\lambda\mu}} \check{C}^0(\mathcal{U}_{\lambda\mu} \wedge V, \mathcal{F}) \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda$$

où ε_V est donnée par le produit des restrictions $\mathcal{F}(f^{-1}V) \rightarrow \mathcal{F}(U_\lambda \cap f^{-1}V)$ (et de même pour $\varepsilon_V^{\lambda\mu}$). Pour toute partie ouverte affine $V \subset Y$ posons $A_V := \mathcal{O}_Y(V)$, et

$$\varepsilon_V^{\bullet\bullet} := \prod_{\lambda, \mu \in \Lambda} \varepsilon_V^{\lambda\mu} : \check{C}^1(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}_{\bullet\bullet} \wedge V, \mathcal{F}) := \prod_{\lambda, \mu \in \Lambda} \check{C}^0(\mathcal{U}_{\lambda\mu} \wedge V, \mathcal{F}).$$

Soient en outre $\delta_V^0 := \varepsilon_V^{\bullet\bullet} \circ d_V^0 : \check{C}^0(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}_{\bullet\bullet} \wedge V, \mathcal{F})$ et $\underline{V} := V \times_Y \underline{Y}$; posons aussi $F := \mathcal{F}(X)$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_V \otimes_A F & \xrightarrow{A_V \otimes_A \varepsilon_Y} & A_V \otimes_A \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{A_V \otimes_A \delta_Y^0} & A_V \otimes_A \check{C}^0(\mathcal{U}_{\bullet\bullet} \wedge Y, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}V) & \xrightarrow{\varepsilon_V} & \check{C}^0(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_V^0} & \check{C}^0(\mathcal{U}_{\bullet\bullet} \wedge V, \mathcal{F}) \end{array}$$

où α (resp. β , resp. γ) est induite par la restriction $F \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}V)$ (resp. par les restrictions $(\mathcal{F}(U_\lambda) \rightarrow \mathcal{F}(U_\lambda \cap f^{-1}V) \mid \lambda \in \Lambda)$, resp. par les restrictions $(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap f^{-1}V) \mid \lambda, \mu \in \Lambda, U \in \mathcal{U}_{\lambda\mu})$). Or, noter que $\underline{T}_\lambda := (U_\lambda \cap f^{-1}V) \times_X \underline{X}$ représente le produit fibré $\underline{U}_\lambda \times_Y \underline{V}$, avec pour projections canoniques le morphisme d'inclusion $\underline{T}_\lambda \rightarrow \underline{U}_\lambda$ et la restriction $\underline{T}_\lambda \rightarrow \underline{V}$ de $\underline{f}$ (observation 5.77); ces dernières correspondent à des homomorphismes de A -algèbres $B_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_X(U_\lambda \cap f^{-1}V) \leftarrow A_V$, induisant un isomorphisme $A_V \otimes_A B_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U_\lambda \cap f^{-1}V)$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Puisque la restriction $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ est un $\mathcal{O}_{X|U_\lambda}$ -module quasi-cohérent (problème 5.58(i.a)), on déduit un isomorphisme de $A_V \otimes_A B_\lambda$ -modules :

$$A_V \otimes_A \mathcal{F}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} (A_V \otimes_A B_\lambda) \otimes_{B_\lambda} \mathcal{F}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U_\lambda \cap f^{-1}V) \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

En vertu de la finitude de $\mathcal{U}$, il s'ensuit que β est un isomorphisme, et un raisonnement analogue montre qu'il en est de même pour γ : les détails sont confiés aux soins du lecteur. En outre, la ligne horizontale en bas du diagramme est exacte d'après la remarque 5.26(i) (noter que $\varepsilon_V^{\bullet\bullet}$ est une injection, pour toute partie ouverte $V \subset Y$), et de même pour la ligne horizontale en haut, car A_V est une A -algèbre plate (lemme 5.31(iii)). Avec l'exercice 2.104, on conclut que α est un isomorphisme; cela montre que la restriction de $f_*\mathcal{F}$ au site $\text{Rep}(A)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_Y \otimes_A F)|_{\text{Rep}(A)}$ (cf. la solution du problème 5.58(i.b)), d'où un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules $f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y \otimes_A F$ (exercice 5.35(ii)).

(ii) : Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de Y formé de parties ouvertes affines; comme Y est spectral, $U \cap U'$ est une partie compacte de Y , pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$ (remarque 4.51(i)). Puisque f est compact, le recouvrement $\mathcal{V} := \{f^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ de X est alors formé de parties ouvertes compactes, et $V \cap V'$ est compacte dans X pour tous $V, V' \in \mathcal{V}$; d'après l'exercice 4.52, il suffit alors de montrer que tout $V \in \mathcal{V}$ est spectral, pour la topologie induite par X . Cela nous ramène au cas où $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est affine, et donc X est compact; soit alors $\mathcal{W}$ un recouvrement fini de X formé de parties ouvertes affines; la preuve de (i) montre que $W \cap W'$ est compact, pour tous $W, W' \in \mathcal{W}$, et pour conclure, on peut alors invoquer encore l'exercice 4.52. $\square$

Corollaire 5.91. *Soit $(f, f^\flat) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme de schémas, et munissons $Z := f(X)$ de la topologie induite par l'inclusion $i : Z \rightarrow Y$; alors $(f, f^\flat)$ est une immersion fermée si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :*

- (a) Z est une partie fermée de Y , et f induit un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} Z$.
- (b) $f^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est un épimorphisme de faisceaux.

Démonstration. Posons $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$, $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$, et $\underline{f} := (f, f^b)$; si $\underline{f}$ est une immersion fermée, les conditions sont vérifiées, d'après la proposition 5.83. Pour la réciproque, remarquons :

Affirmation 5.92. Si (a) et (b) sont vérifiées, $\underline{f}$ est un monomorphisme.

Preuve : Soient $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un schéma, et $\underline{g} := (g, g^b)$, $\underline{h} := (h, h^b) : \underline{T} \rightarrow \underline{X}$ deux morphismes de schémas avec $(k, k^b) := \underline{f} \circ \underline{g} = \underline{f} \circ \underline{h}$; on doit vérifier que $\underline{g} = \underline{h}$. Or, (a) entraîne aisément que $g = h$; d'autre part, puisque $k^b = f_*(g^b) \circ f^b = f_*(h^b) \circ f^b$, la condition (b) entraîne que $f_*(g^b) = f_*(h^b)$, d'où $g^b = h^b$, encore par (a). $\diamond$

L'observation 5.92 entraîne que $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est un isomorphisme si (a) et (b) sont vérifiées (exercice 2.66(i)), donc $\underline{f}$ est séparé, et évidemment $\underline{f}$ est compact; par suite $f_*\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent (proposition 5.90(i)), donc de même pour $\mathcal{I} := \text{Ker}(f^b)$ (problème 5.58(ii.c)). Mais alors $\underline{f}$ coïncide, à isomorphe unique près de $\underline{Y}$ -schémas, avec l'immersion fermée $\underline{V}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{Y}$ (proposition 5.83). $\square$

Exercice 5.93. (i) Soient $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ et $\underline{g} : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ deux morphismes de schémas. Montrer que si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont des immersions fermées (resp. sont quasi-séparés, resp. sont séparés), il en est de même pour $\underline{h} := \underline{g} \circ \underline{f}$.

(ii) Soient $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ et $\underline{g} : \underline{Y} \rightarrow \underline{S}$ deux morphismes de schémas, $\underline{h} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{S}$ -schémas, et $\underline{X} \xleftarrow{p} \underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{Y} \xrightarrow{q} \underline{Y}$ les projections canoniques. Le *graphe* de $\underline{f}$ est l'unique morphisme $\Gamma_{\underline{f}} : \underline{X} \rightarrow \underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{Y}$ tel que $p \circ \Gamma_{\underline{f}} = \mathbf{1}_{\underline{X}}$ et $q \circ \Gamma_{\underline{f}} = \underline{f}$. Montrer que si $\underline{g}$ est quasi-séparé (resp. séparé), alors $\Gamma_{\underline{f}}$ est un morphisme compact (resp. est une immersion fermée).

(iii) Soient $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ et $\underline{g} : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ deux morphismes de schémas; montrer que si $\underline{g} \circ \underline{f}$ est compact, et si $\underline{g}$ est quasi-séparé, alors $\underline{f}$ est compact.

Exercice 5.94. (i) Soient $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un schéma, $Z \subset Y$ une partie fermée, $U := Y \setminus Z$, $j : U \rightarrow Y$ l'inclusion, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent, et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{Y|U}$ -module quasi-cohérent. Supposons que tout $y \in Y$ admet un voisinage ouvert affine $V \subset Y$ tel que la partie $Z \cap V$ soit constructible dans l'espace spectral V ; montrer que $\Gamma_Z \mathcal{M}$ et $j_* \mathcal{N}$ sont alors des $\mathcal{O}_Y$ -modules quasi-cohérents.

(ii) Soient A un anneau, M un A -module, $(X, \mathcal{O}_X) := \text{Spec } A$, et $\mathcal{M} := \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$. Soient aussi $Z \subset X$ une partie fermée constructible, $\mathfrak{p} \in X$, et posons $Z_{\mathfrak{p}} := Z \cap \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ (rappelons que $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ est naturellement identifié avec l'ensemble des générisations de $\mathfrak{p}$ dans X). Montrer que l'isomorphisme $\omega_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ de la remarque 5.64(iii) identifie $(\Gamma_Z \mathcal{M})_{\mathfrak{p}}$ avec $\Gamma_{Z_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) := \{x \in M_{\mathfrak{p}} \mid \text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(x) \subset Z_{\mathfrak{p}}\}$.

Corollaire 5.95. (i) Un morphisme de schémas $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est séparé $\Leftrightarrow$ l'image de $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est une partie fermée de l'espace topologique sous-jacent à $\underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$.

(ii) Si en outre, $\underline{Y} = \text{Spec } A$ est affine, $\underline{X} = (X, \mathcal{O}_X)$, et $(U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ est un recouvrement de X par des parties ouvertes affines, alors $\underline{f}$ est séparé si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$:

(a) $U_{\lambda} \cap U_{\mu}$ est une partie ouverte affine de $\underline{X}$.

(b) La A -algèbre $\mathcal{O}_X(U_{\lambda} \cap U_{\mu})$ est engendrée par la réunion des images des restrictions $\mathcal{O}_X(U_{\lambda}) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_{\lambda} \cap U_{\mu}) \leftarrow \mathcal{O}_X(U_{\mu})$.

Démonstration. (i) : Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$, $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$, $(p, p^b), (q, q^b) : \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ les projections, et $\underline{f} := (f, f^b)$; notons par T l'espace topologique sous-jacent à $\underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$, et par $D \subset T$ l'image de $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}} = (\Delta, \Delta^b) : \underline{X} \rightarrow \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X}$, munie de la topologie induite par l'inclusion $D \rightarrow T$. Puisque $p \circ \Delta = \text{Id}_X$, l'application Δ induit un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} D$; d'après le corollaire 5.91, on est alors ramené à vérifier que $\Delta^b : \mathcal{O}_T \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$ est un épimorphisme de faisceaux, si D est fermée dans T , i.e. que $\Delta_t^b : \mathcal{O}_{T,t} \rightarrow (\Delta_* \mathcal{O}_X)_t$ est une surjection pour tout $t \in T$ (théorème 4.97(ii)). Mais comme D est une partie

fermée de T , on a $(\Delta_* \mathcal{O}_X)_t = 0$ si $t \in T \setminus D$, donc on peut supposer que $t = \Delta(x)$ pour quelque $x \in X$; dans ce cas, comme Δ induit un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} D$, on a une identification naturelle :

$$\omega_t : (\Delta_* \mathcal{O}_X)_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x} \quad [s, U]_t \mapsto [s, \Delta^{-1}U]_x$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). En outre, comme $\underline{p} \circ \Delta_{\underline{X}/\underline{Y}} = \mathbf{1}_{\underline{X}}$, la composition $\mathcal{O}_X \xrightarrow{p^\flat} p_* \mathcal{O}_T \xrightarrow{p_*(\Delta^\flat)} p_* \Delta_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$ est l'identité de $\mathcal{O}_X$; rappelons aussi que l'isomorphisme $(\tilde{p}^{-1} \mathcal{O}_X)_{\Delta(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$ fourni par l'exercice 4.98(ii) identifie $(p^\sharp)_t : (\tilde{p}^{-1} \mathcal{O}_X)_t \rightarrow \mathcal{O}_{T,t}$ avec l'homomorphisme

$$p_t^\sharp : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t} \quad [s, U]_x \mapsto [p_U^\flat(s), p^{-1}U]_t$$

de sorte que $\omega_t \circ \Delta_t^\flat \circ p_t^\sharp : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est alors l'homomorphisme tel que :

$$[s, U]_x \mapsto [\Delta_{p^{-1}U}^\flat \circ p_U^\flat(s), p^{-1}U]_t = [s, p^{-1}U]_t \mapsto [s, \Delta^{-1}p^{-1}U]_x = [s, U]_x$$

i.e. $\Delta_t^\flat$ admet un inverse à droite si $t = \Delta(x)$, donc est un épimorphisme.

(ii) : Soient $\underline{U}_\lambda := U_\lambda \times_X \underline{X}$, $B_\lambda := \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et posons $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu$, $\underline{U}_{\lambda\mu} := U_{\lambda\mu} \times_X \underline{X}$, et $(W_{\lambda\mu}, \mathcal{O}_{W_{\lambda\mu}}) := \underline{U}_\lambda \times_{\underline{Y}} \underline{U}_\mu$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$; en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.90(i), on voit que $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}^{-1}(W_{\lambda\mu}) = U_{\lambda\mu}$. Donc $\underline{f}$ est séparé $\Leftrightarrow$ la restriction de $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$

$$\Delta_{\lambda\mu} : \underline{U}_{\lambda\mu} \rightarrow \underline{W}_{\lambda\mu}$$

est une immersion fermée pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ (exercice 5.89(iii)), et au vu de la remarque 5.88(ii), pour cela il faut et il suffit que $\underline{U}_{\lambda\mu}$ soit un schéma affine, et que l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(\mathcal{O}_{W_{\lambda\mu}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{U_{\lambda\mu}})$ correspondant à $\Delta_{\lambda\mu}$ soit surjectif. Noter que les compositions de $\Delta_{\lambda\mu}$ avec les projections :

$$\underline{U}_\lambda \xleftarrow{p_{\lambda\mu}} \underline{W}_{\lambda\mu} \xrightarrow{q_{\lambda\mu}} \underline{U}_\mu$$

sont les morphismes d'inclusion $\underline{U}_\lambda \leftarrow \underline{U}_{\lambda\mu} \rightarrow \underline{U}_\mu$. En outre, $\underline{U}_\lambda$ s'identifie avec $\text{Spec } B_\lambda$, et $\underline{W}_{\lambda\mu}$ s'identifie avec $\text{Spec } B_\lambda \otimes_A B_\mu$, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, et sous ces identifications, $p_{\lambda\mu}$ et $q_{\lambda\mu}$ correspondent aux homomorphismes d'anneaux :

$$B_\lambda \xrightarrow{i_{\lambda\mu}} B_\lambda \otimes_A B_\mu \xleftarrow{j_{\lambda\mu}} B_\mu \quad \text{tels que} \quad b \mapsto b \otimes 1 \text{ et } b' \mapsto 1 \otimes b' \quad \forall b \in B_\lambda, \forall b' \in B_\mu.$$

Ainsi, la réunion des images de $i_{\lambda\mu}$ et $j_{\lambda\mu}$ engendre $B_\lambda \otimes_A B_\mu$, et finalement, $\Delta_{\lambda\mu}$ est une immersion fermée $\Leftrightarrow$ les conditions (a) et (b) de (ii) sont vérifiées. $\square$

Exemple 5.96. (i) Soient K un corps, $A := K[X]$, (resp. $B := K[Y]$) la K -algèbre des polynômes d'une indéterminée X (resp. Y), et $\underline{U}_1 := \text{Spec } A$, $\underline{U}_2 := \text{Spec } B$; notons par U_1 et U_2 les espaces topologiques sous-jacents à $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$, et soient en outre $\mathbf{m}_1 := XA \in U_1$ et $\mathbf{m}_2 := YB \in U_2$. Posons :

$$U_{12} := U_1 \setminus \{\mathbf{m}_1\} \quad U_{21} := U_2 \setminus \{\mathbf{m}_2\} \quad \underline{U}_{12} := U_{12} \times_{U_1} \underline{U}_1 \quad \underline{U}_{21} := U_{21} \times_{U_2} \underline{U}_2.$$

Ainsi, U_{12} et U_{21} sont des parties ouvertes affines de $\underline{U}_1$ et respectivement $\underline{U}_2$, avec $\mathcal{O}_{U_1}(U_{12}) = A[X^{-1}]$, $\mathcal{O}_{U_2}(U_{21}) = B[Y^{-1}]$, et l'unique isomorphisme de K -algèbres $f : A[Y^{-1}] \xrightarrow{\sim} B[X^{-1}]$ avec $f(X) = Y$ induit un isomorphisme de schémas $\omega : \underline{U}_{21} \xrightarrow{\sim} \underline{U}_{12}$, d'où une donnée de recollement $(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \omega)$; on dénote par $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ le schéma obtenu par recollement de $(\underline{U}_1, \underline{U}_2)$ suivant l'isomorphisme ω (voir le lemme 5.74(iv)), et par $(j_i := (j_i, j_i^\flat) : \underline{U}_i \rightarrow \underline{X} \mid i = 1, 2)$ le co-cône universel. Pour $i = 1, 2$, posons $V_i := j_i(\underline{U}_i)$, et rappelons que j_i identifie $\underline{U}_i$ au sous-schéma ouvert affine $\underline{V}_i := V_i \times_X \underline{X}$ de $\underline{X}$, et que $\mathcal{V} := \{V_1, V_2\}$ est un recouvrement de X . Les homomorphismes d'anneaux structurels $A \leftarrow K \rightarrow B$ induisent des morphismes de schémas $(\phi_i : \underline{U}_i \rightarrow \text{Spec } K \mid i = 1, 2)$ avec $\phi_{2|\underline{U}_{21}} = (\phi_{1|\underline{U}_{12}}) \circ \omega$, d'où un unique morphisme de schémas $\phi : \underline{X} \rightarrow \text{Spec } K$

avec $\phi \circ j_i = \phi_i$ pour $i = 1, 2$. Or, soient $V := V_1 \cap V_2$ et $\underline{V} := V \times_X \underline{X}$; les morphismes j_1 et j_2 induisent par restriction des isomorphismes de schémas :

$$\underline{U}_{12} \xrightarrow{\tau_1} \underline{V} \xleftarrow{\tau_2} \underline{U}_{21} \quad \text{tels que} \quad \tau_2 = \tau_1 \circ \omega.$$

On obtient par suite un diagramme commutatif d'anneaux :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_X(V_1) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{O}_X(V) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_X(V) & \xleftarrow{\rho_2} & \mathcal{O}_X(V_2) \\ j_1^\flat \downarrow & & \tau_1^\flat \downarrow & & \downarrow \tau_2^\flat & & \downarrow j_2^\flat \\ \mathcal{O}_{U_1}(U_1) & \xrightarrow{\rho_{12}} & \mathcal{O}_{U_1}(U_{12}) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_{U_2}(U_{21}) & \xleftarrow{\rho_{21}} & \mathcal{O}_{U_2}(U_{21}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes et où $\rho_1, \rho_2, \rho_{12}, \rho_{21}$ sont les restrictions. D'après le corollaire 5.95(ii), ϕ est un morphisme séparé si et seulement si la réunion des images de ρ_1 et ρ_2 engendre la K -algèbre $\mathcal{O}_X(V)$, et pour cela il faut et il suffit que la réunion des images de $f \circ \rho_{12}$ et ρ_{21} engendre la K -algèbre $\mathcal{O}_{U_2}(U_{21})$; mais $f \circ \rho_{12}$ et ρ_{21} ont la même image : la K -sous-algèbre $K[Y]$, qui n'engendre pas $K[Y, Y^{-1}]$. Cela achève de vérifier que ϕ n'est pas un morphisme séparé; on appelle $\underline{X}$ la droite affine sur K avec origine dédoublée.

(ii) Si dans la situation de (i), on remplace f par l'unique isomorphisme de K -algèbres $g : K[X, X^{-1}] \xrightarrow{\sim} K[Y, Y^{-1}]$ avec $g(X) = Y^{-1}$, on obtient un isomorphisme de schémas différent $\omega' : \underline{U}_{21} \xrightarrow{\sim} \underline{U}_{12}$, et le recollement de la donnée $(\underline{U}_1, \underline{U}_2)$ suivant ω' n'est rien d'autre que la droite projective $\mathbb{P}_1^1$ sur K (comparer avec la discussion du §5.4.1). En particulier, les espaces topologiques sous-jacents aux K -schémas $\underline{X}$ et $\mathbb{P}_K^1$ sont homéomorphes, mais ces deux schémas sont toutefois très différents : notamment, on aura pour $\mathbb{P}_K^1$ un diagramme commutatif correspondant à $(*)$, avec f remplacé par g , et noter que les images de $g \circ \rho_{12}$ et ρ_{21} dans $\mathcal{O}_{U_2}(U_{21})$ sont respectivement $K[Y]$ et $K[Y^{-1}]$. Donc, ces images engendrent la K -algèbre $\mathcal{O}_{U_2}(U_{21})$, et par suite le morphisme structurel $\pi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \text{Spec } K$ est séparé.

(iii) Gardons les notations de (i) et (ii); en raisonnant avec le complexe de Čech $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X)$, on voit que la restriction $\Gamma(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X(V_i)$ est un isomorphisme pour $i = 1, 2$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur); d'après le théorème 5.47, il existe alors un morphisme de schémas unique $\psi : \underline{X} \rightarrow \mathbb{A}_K^1 = \text{Spec } K[X]$ dont la restriction $\underline{V}_i \rightarrow \mathbb{A}_K^1$ est un isomorphisme, pour $i = 1, 2$: il s'agit du morphisme ψ qui pince les deux origines dédoublées de $\underline{X}$ sur l'unique origine de $\mathbb{A}_K^1$. Par contre, en raisonnant avec le complexe analogue $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathbb{P}_K^1)$, on voit que $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1})$ s'identifie avec la K -sous-algèbre de $K[X] \times K[Y]$ formée des couples de polynômes $(P(X), Q(Y))$ tels que $P(1/Y) = Q(Y)$; évidemment on a $P = Q \in K$ pour tout tel couple, i.e. $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}) = K$, et en particulier, tout morphisme de schémas $\mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_K^1$ se factorise à travers le morphisme structurel $\pi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \text{Spec } K$.

5.5.1. Eclatement d'idéaux quasi-cohérents. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal; pour plusieurs questions d'algèbre commutative et de géométrie algébrique, on aimerait disposer d'un *changement de base universel qui rend I inversible*, i.e. d'une A -algèbre B telle que : (a) IB soit un B -module inversible (voir la définition 4.112), et (b) pour toute A -algèbre C vérifiant la même condition, il existe un unique homomorphisme de A -algèbres $B \rightarrow C$. Malheureusement, une telle A -algèbre n'existe pas en général; toutefois, le dernier théorème de cette section montrera que ce problème universel -- convenablement reformulé et généralisé -- admet une solution dans la catégorie des schémas : la construction dont il s'agit est sans doute l'une des plus fondamentales de la géométrie algébrique.

Théorème 5.97. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent. Il existe un $\underline{X}$ -schéma $(\underline{E} := (E, \mathcal{O}_E), \pi : \underline{E} \rightarrow \underline{X})$, déterminé à isomorphisme unique près de $\underline{X}$ -schémas par les conditions suivantes :

- (i) L'idéal $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_E$ est inversible.

(ii) Pour tout espace localement annelé $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ et tout morphisme $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ d'espaces localement annelés tel que $g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ est inversible, il existe un unique morphisme d'espaces localement annelés $h : \underline{Y} \rightarrow \underline{E}$ avec $\pi \circ h = g$.

On dit que $(\underline{E}, \pi)$ est un éclatement de l'idéal quasi-cohérent $\mathcal{I}$.

Démonstration. L'unicité de l'éclatement de $\mathcal{I}$ à isomorphisme unique près de $\underline{X}$ -schémas découle formellement de sa propriété universelle : cf. la preuve du lemme 2.4(i). Pour toute partie ouverte $U \subset X$ posons $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$; on a :

Affirmation 5.98. Soient $U \subset X$ une partie ouverte, $(\underline{E}, \pi)$ un éclatement de $\mathcal{I}$, et $\underline{E}_U := \pi^{-1}(U) \times_X \underline{E}$. Le morphisme induit $\pi_U : \underline{E}_U \rightarrow \underline{U}$ est un éclatement de l'idéal $\mathcal{I}|_U \subset \mathcal{O}_U$.

Preuve : Soient $j : \underline{U} \rightarrow \underline{X}$ et $k : \underline{E}_U \rightarrow \underline{E}$ les morphismes d'inclusion, $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ un espace localement annelé, et $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{U}$ un morphisme d'espaces localement annelés tel que $g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ soit inversible. En raisonnant – *mutatis mutandis* – comme dans l'observation 5.84, on vérifie aisément qu'il existe un morphisme $h : \underline{Y} \rightarrow \underline{E}_U$ tel que $\pi_U \circ h = g$. Soit $h' : \underline{Y} \rightarrow \underline{E}_U$ un deuxième morphisme avec $\pi_U \circ h' = g$; il vient $\pi \circ k \circ h = j \circ \pi_U \circ h = j \circ \pi_U \circ h' = \pi \circ k \circ h'$; or, bien que π ne soit pas forcément un monomorphisme de $\mathbf{EsLocAn}$, la condition (ii) du théorème suffit pour déduire que $k \circ h = k \circ h'$, et alors $h = h'$, car k est évidemment un monomorphisme. $\diamond$

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un recouvrement de X , tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe un éclatement $(\underline{E}_U := (E_U, \mathcal{O}_{E_U}), \pi^U : \underline{E}_U \rightarrow \underline{U})$ de l'idéal $\mathcal{I}|_U$ de $\mathcal{O}_U := (\mathcal{O}_X)|_U$. Posons $\underline{E}_{UU'} := (\pi^U)^{-1}(U \cap U') \times_{E_U} \underline{E}_U$ pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$, et soit $\pi^U_{U \cap U'} : \underline{E}_{UU'} \rightarrow \underline{U \cap U'}$ la restriction de π_U ; d'après l'observation 5.98, les $\underline{U \cap U'}$ -schémas $\underline{E}_{UU'}$ et $\underline{E}_{U'U}$ sont des éclatements du même idéal $\mathcal{I}|_{U \cap U'}$. Il existe alors un unique isomorphisme de $\underline{U \cap U'}$ -schémas $\omega^{UU'} : (\underline{E}_{UU'}, \pi^U_{U \cap U'}) \xrightarrow{\sim} (\underline{E}_{U'U}, \pi^{U'}_{U \cap U'})$, et en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.83, on vérifie aisément que le système $(\underline{E}_U, \omega^{UU'} | U, U' \in \mathcal{U})$ est une donnée de recollement. Soient $\underline{E}$ le recollement de la famille $\underline{E}_\bullet$ suivant les isomorphismes $\omega^{\bullet\bullet}$ (lemme 5.74), et $(i_U : \underline{E}_U \rightarrow \underline{E} | U \in \mathcal{U})$ le co-cône universel pour ce recollement; donc, chaque morphisme de schémas i_U identifie $\underline{E}_U$ avec un sous-schéma ouvert de $\underline{E}$. Evidemment $\pi^U_{U'U} \circ \omega^{UU'} = \pi^{U'}_{UU'}$, pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$; par la propriété universelle de $\underline{E}$, on obtient alors un unique morphisme $\pi : \underline{E} \rightarrow \underline{X}$ de schémas tel que $\pi \circ i_U : \underline{E}_U \rightarrow \underline{X}$ soit la composition de π^U avec le morphisme naturel d'inclusion $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$, et en raisonnant comme dans la preuve de l'observation 5.85, on voit que $(\underline{E}, \pi)$ est un éclatement de l'idéal $\mathcal{I}$. On est ainsi ramené aussitôt au cas où $\underline{X}$ est un schéma affine, disons $\underline{X} = \text{Spec } A$, et $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$ pour un idéal $I \subset A$. Dans ce cas, soit $(a_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ un système de générateurs de l'idéal I ; posons

$$B_\lambda := A\left[\frac{a_\mu}{a_\lambda} \mid \mu \in \Lambda\right] \subset A\left[\frac{1}{a_\lambda}\right] \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

la A -sous-algèbre de $A[1/a_\lambda]$ engendrée par toutes les fractions $a_\mu/a_\lambda \in A[1/a_\lambda]$. Aussi, pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ soit $B_{\lambda\mu} := B_\lambda[a_\lambda/a_\mu]$, la localisation de B_λ qui rend a_μ/a_λ inversible, et de même $B_{\lambda\mu\nu} := B_{\lambda\mu}[a_\lambda/a_\nu]$; noter que $B_{\lambda\mu\nu} = B_{\lambda\nu\mu}$, et qu'il existe un unique isomorphisme de A -algèbres

$$f_{\lambda\mu} : B_{\lambda\mu} \xrightarrow{\sim} A\left[\frac{a_\nu}{a_\lambda}, \frac{a_\nu}{a_\mu} \mid \nu \in \Lambda\right] \subset A\left[\frac{1}{a_\lambda a_\mu}\right].$$

En particulier, posons $g_{\lambda\mu} := f_{\mu\lambda}^{-1} \circ f_{\lambda\mu} : B_{\lambda\mu} \xrightarrow{\sim} B_{\mu\lambda}$, et pour tout $\nu \in \Lambda$ soit $g_{\lambda\mu}\left[\frac{a_\lambda}{a_\nu}\right] : B_{\lambda\mu\nu} \xrightarrow{\sim} B_{\mu\lambda\nu}$ la localisation de $g_{\lambda\mu}$; il vient :

$$g_{\mu\nu}\left[\frac{a_\mu}{a_\lambda}\right] \circ g_{\lambda\mu}\left[\frac{a_\lambda}{a_\nu}\right] = g_{\lambda\nu}\left[\frac{a_\lambda}{a_\mu}\right] \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda.$$

Donc, soit $\underline{E}_\lambda := \text{Spec } B_\lambda$ et $\underline{E}_{\lambda\mu} := \text{Spec } B_{\lambda\mu}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$; on obtient ainsi une donnée de recollement $(\underline{E}_\lambda, \omega_{\lambda\mu} | \lambda, \mu \in \Lambda)$ avec les isomorphismes de A -schémas

$\omega_{\lambda\mu} := \text{Spec } g_{\mu\lambda} : \underline{E}_{\lambda\mu} \xrightarrow{\sim} \underline{E}_{\mu\lambda}$, et on dénote par $\underline{E}$ le recollement du système de A -schémas $\underline{E}_\bullet$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$. Soit $(\iota_\lambda : \underline{E}_\lambda \rightarrow \underline{E} \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel correspondant ; comme d'habitude, on voit aussitôt que les morphismes structurels $\pi_\lambda : \underline{E}_\lambda \rightarrow \text{Spec } A$ se recollent en un unique morphisme de schémas $\pi : \underline{E} \rightarrow \text{Spec } A$ tel que $\pi \circ \iota_\lambda = \pi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Montrons que $(\underline{E}, \pi)$ est un éclatement de l'idéal $\mathcal{I}$. Soit donc $g : \underline{Y} \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme d'espaces localement annelés tel que $g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ est inversible ; on remarque :

Affirmation 5.99. Pour tout $y \in Y$ il existe $\lambda \in \Lambda$ et un voisinage ouvert U de y dans Y , tels que pour toute partie ouverte $V \subset U$, l'idéal $(g^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y)(V)$ de $\mathcal{O}_Y(V)$ coïncide avec $a_\lambda \cdot \mathcal{O}_Y(V)$, et l'image de a_λ dans $\mathcal{O}_Y(V)$ est régulière.

Preuve : La description explicite de la remarque 5.68(ii,iii,iv) montre que

$$(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y)_y = I \cdot \mathcal{O}_{Y,y}$$

où l'on regarde $\mathcal{O}_{Y,y}$ comme une $\mathcal{O}_{X,g(y)}$ -algèbre, via l'homomorphisme local induit $g_y^\# : \mathcal{O}_{X,g(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert $U \subset Y$ de y avec un isomorphisme de $(\mathcal{O}_Y)_{|U}$ -modules $\beta : (\mathcal{O}_Y)_{|U} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)_{|U}$. En particulier, β induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modules $\beta_y : \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{\sim} I \cdot \mathcal{O}_{Y,y}$. Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert plus petit de y , on trouve alors une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et une suite $(s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$ de U -sections de $\mathcal{O}_Y$ tels que $\beta_y(1)$ soit le germe au point y de $s := \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda s_\lambda \in (\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(U)$; par suite, pour U suffisamment petit, on aura aussi $\beta_U(1) = s$. Notons par $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ l'idéal maximal ; on doit ainsi avoir $a_{\lambda_0} \in I \mathcal{O}_{Y,y} \setminus \mathfrak{m}_y I \mathcal{O}_{Y,y}$ pour au moins un indice $\lambda_0 \in \Lambda'$, et donc $\beta_y^{-1}(a_{\lambda_0}) \in \mathcal{O}_{Y,y}^\times$. Quitte à restreindre U ultérieurement, on trouve alors aussi une suite $(a'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$ de U -sections de $\mathcal{O}_Y$ tels que $a_\lambda = a'_\lambda a_{\lambda_0}$ dans $(\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(U)$ pour chaque $\lambda \in \Lambda'$, d'où $s = a_{\lambda_0} s'$, avec $s' := \sum_{\lambda \in \Lambda'} a'_\lambda s_\lambda$. Or, pour toute partie ouverte $V \subset U$, l'isomorphisme $\beta_V : \mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(V)$ est l'application telle que $t \mapsto a_{\lambda_0} t s'$ pour tout $t \in \mathcal{O}_Y(V)$; on conclut que l'image de a_{λ_0} dans $\mathcal{O}_Y(V)$ doit être un élément régulier, et $a_{\lambda_0} \mathcal{O}_Y(V) = (\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(V)$. $\diamond$

Notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties ouvertes $U \subset Y$ telles qu'il existe $\lambda(U) \in \Lambda$ avec $(\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(U) = a_{\lambda(U)} \mathcal{O}_Y(U)$ et l'image $\bar{a}_{\lambda(U)} \in \mathcal{O}_Y(U)$ de $a_{\lambda(U)}$ est régulière.

Affirmation 5.100. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe un unique morphisme d'espaces localement annelés $h^U : \underline{U} := U \times_Y \underline{Y} \rightarrow \underline{E}$ tel que $\pi \circ h^U = g_{|U} : \underline{U} \rightarrow \underline{X}$.

Preuve : Soit $\phi_U : A \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)$ la composition de $g_X^\flat : A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ et de la restriction $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)$; puisque $U \in \mathcal{U}$, la localisation $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)[1/\bar{a}_{\lambda(U)}]$ est injective, et pour tout $\mu \in \Lambda$ il existe un unique $s_\mu \in \mathcal{O}_Y(U)$ tel que $\phi_U(a_\mu) = s_\mu \bar{a}_{\lambda(U)}$. Or, ϕ_U se prolonge en un unique homomorphisme de A -algèbres $\phi'_U : A[1/a_{\lambda(U)}] \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)[1/\bar{a}_{\lambda(U)}]$, et évidemment $\phi'_U(a_\mu/a_{\lambda(U)}) = s_\mu$ pour tout $\mu \in \Lambda$; donc ϕ'_U induit par restriction un homomorphisme $\psi_U : B_{\lambda(U)} \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)$ de A -algèbres, pour chaque $U \in \mathcal{U}$. D'après le théorème 5.47, il existe alors pour tout $U \in \mathcal{U}$ un unique morphisme d'espaces localement annelés

$$k^U : \underline{U} \rightarrow \underline{E}_{\lambda(U)} \quad \text{tel que} \quad \Gamma(k^U) = \psi_U.$$

La construction montre aussitôt que ψ_U est l'unique homomorphisme $B_{\lambda(U)} \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)$ de A -algèbres, donc k^U est l'unique morphisme d'espaces localement annelés tel que $\pi_{\lambda(U)} \circ k^U = g_{|U}$, et ainsi $h^U := \iota_{\lambda(U)} \circ k^U$ est l'unique morphisme d'espaces localement annelés $\underline{U} \rightarrow \underline{E}$ avec $h^U(U) \subset \iota_{\lambda(U)}(E_{\lambda(U)})$ et tel que $\pi \circ h^U = g_{|U}$. Pour conclure, il suffira donc de montrer que pour tout morphisme d'espaces localement annelés $f : \underline{U} \rightarrow \underline{E}$ tel que $\pi \circ f = g_{|U}$, on a $f(U) \subset \iota_{\lambda(U)}(E_{\lambda(U)})$. Or, pour un tel f et pour $\mu \in \Lambda$, soit $V := f^{-1}(\iota_\mu(E_\mu))$, de sorte que $f_{|V} : \underline{V} \rightarrow \underline{E}$ est la composition de $\iota_\mu : \underline{E}_\mu \rightarrow \underline{E}$ et d'un unique morphisme $f_\mu : \underline{V} \rightarrow \underline{E}_\mu$ d'espaces localement annelés ; l'application $\gamma := \Gamma(f_\mu) : B_\mu \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ est un homomorphisme de A -algèbres, car $\pi_\mu \circ f_\mu = g_{|V}$. D'après l'observation 5.99, on a $(\mathcal{I} \mathcal{O}_Y)(V) = a_{\lambda(U)} \mathcal{O}_Y(V)$, et $\gamma(a_{\lambda(U)})$ est un élément

régulier de $\mathcal{O}_Y(V)$; on déduit que $\gamma(I) \cdot \mathcal{O}_Y(V) = a_{\lambda(U)} \mathcal{O}_Y(V)$, et la multiplication scalaire par $a_{\lambda(U)}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y(V)$ -modules $\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\sim} a_{\lambda(U)} \mathcal{O}_Y(V)$. D'autre part, noter que $IB_\mu = a_\mu B_\mu$, d'où $\gamma(I) \cdot \mathcal{O}_Y(V) = \gamma(a_\mu) \cdot \mathcal{O}_Y(V)$; comme on vient de voir que le $\mathcal{O}_Y(V)$ -module $\gamma(a_\mu) \cdot \mathcal{O}_Y(V)$ est libre de rang un, on conclut que $\gamma(a_\mu)$ est régulier dans $\mathcal{O}_Y(V)$, et de plus $\gamma(a_{\lambda(U)})/\gamma(a_\mu) \in \mathcal{O}_Y(V)^\times$. Donc γ se prolonge en un homomorphisme de A -algèbres $\gamma' : B_{\mu\lambda} \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$, i.e. l'image de f_μ est dans $U_{\mu\lambda(U)} \subset E_\mu$; mais alors $f(V) \subset \iota_\mu(U_{\mu\lambda(U)}) \subset \iota_{\lambda(U)}(E_{\lambda(U)})$, comme souhaité. $\diamond$

D'après l'observation 5.99, l'ensemble $\mathcal{U}$ est un recouvrement de Y , et on a $U \cap U' \in \mathcal{U}$ pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$; au vu de l'observation 5.100, il vient $(h^U)_{|U \cap U'} = (h^{U'})_{|U \cap U'}$ pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$; le système $(h^U | U \in \mathcal{U})$ se recolle alors en un morphisme d'espaces localement annelés $h : \underline{Y} \rightarrow \underline{E}$. Par construction, ce dernier est l'unique tel morphisme avec $\pi \circ h = g$, et cela achève la preuve. $\square$

Corollaire 5.101. (i) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent; alors l'éclatement $\pi : (E, \mathcal{O}_E) \rightarrow \underline{X}$ de $\mathcal{I}$ est un morphisme séparé.

(ii) Si $\mathcal{I}$ est un idéal de type fini, π est un morphisme de type fini.

(iii) Si $\underline{X}$ est réduit (resp. intègre), il en est de même pour $(E, \mathcal{O}_E)$.

Démonstration. (i) : Avec l'observation 5.98 et l'exercice 5.89(iii), on se ramène aussitôt au cas où $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau A , et alors $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$ pour un idéal $I \subset A$ (problème 5.58(i.b)). Soit donc $(a_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ un système de générateurs de I ; la preuve du théorème 5.97 exhibe un recouvrement $(U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ de E avec $U_\lambda := \text{Spec } B_\lambda$, où $B_\lambda := A[\frac{a_\mu}{a_\lambda} | \mu \in \Lambda]$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, tel que $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu$ soit identifié avec $\text{Spec } B_{\lambda\mu}$, où $B_{\lambda\mu} := A[\frac{a_\nu}{a_\lambda}, \frac{a_\nu}{a_\mu} | \nu \in \Lambda]$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, de sorte que les restrictions $\mathcal{O}_X(U_\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_{\lambda\mu}) \leftarrow \mathcal{O}_X(U_\mu)$ correspondent aux morphismes évidents $B_\lambda \rightarrow B_{\lambda\mu} \leftarrow B_\mu$ de A -algèbres, sous ces identifications. En particuliers, les conditions (a) et (b) du corollaire 5.95(ii) sont vérifiées, d'où l'assertion.

(ii) : D'après le lemme 5.81(i) on peut encore supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ et que $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$ pour un idéal $I \subset A$ de type fini; dans ce cas, avec la notation de la preuve de (i), l'ensemble Λ est alors fini, et donc chaque B_λ est une A -algèbre de type fini. Cela montre déjà que π est localement de type fini, et il faut vérifier que π est compact, i.e. que $\pi^{-1}U$ est une partie compacte de E , pour toute partie ouverte affine $U \subset X$; mais la restriction $\pi^{-1}(U) \times_E (E, \mathcal{O}_E) \rightarrow U \times_X \underline{X}$ de π est l'éclatement de $\mathcal{I}|_U$ (observation 5.98), donc on est ramené à prouver que E est compact si $\underline{X}$ est affine. Mais cela est clair, car le recouvrement $(U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ de la preuve de (i) est formé d'un nombre fini de parties ouvertes affines.

(iii) : Montrons d'abord que si $\underline{X}$ est réduit, il en est de même pour $(E, \mathcal{O}_E)$. Par simple inspection, on constate que pour toute partie ouverte $U \subset X$, l'idéal $(\mathcal{N}_{\underline{X}})_{|U}$ est le radical nilpotent du schéma $U \times_X \underline{X}$ (notation de l'exemple 5.71(ii)); on est ainsi ramené au cas où $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau A réduit, et $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$, et on garde encore la notation de la preuve de (i). Il suffit alors de noter que chaque B_λ est réduit, car il est un sous-anneau de l'anneau réduit $A[1/a_\lambda]$ (exercice 3.38).

En suite, soit $\underline{X}$ intègre; alors toute partie ouverte affine non vide $U \subset X$ est irréductible, et si $\pi^{-1}U$ est irréductible pour tout tel U , alors E est irréductible (exercice 1.22), donc intègre, par ce qui précède. Ainsi, on peut supposer que $X = \text{Spec } A$ pour un anneau intègre A (remarque 5.73(i)), et que $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_X$, et on doit vérifier que E est irréductible dans ce cas. Soit donc $(a_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ un système de générateurs de I ; évidemment on peut supposer que $a_\lambda \neq 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et alors $B_\lambda, B_{\lambda\mu} \neq 0$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, avec la notation de la preuve de (i). Par suite, $U_\lambda, U_{\lambda\mu} \neq \emptyset$ pour tous tels λ et μ , et on conclut avec l'exercice 1.22. $\square$

Exercice 5.102. Soient A un anneau, B_1, B_2 deux A -algèbres, $I \subset A$, $J_1 \subset B_1$, $J_2 \subset B_2$ des idéaux de type fini, $\pi_I : E_I \rightarrow S := \text{Spec } A$ et $\pi_i : E_i \rightarrow S_i := \text{Spec } B_i$ les éclatements

des idéaux $I\mathcal{O}_S$ et respectivement $IJ_i\mathcal{O}_{S_i}$, pour $i = 1, 2$. D'après le lemme 5.70(ii), l'idéal $I\mathcal{O}_{E_i}$ est inversible, d'où un unique morphisme de S -schémas $q_i : E_i \rightarrow E_I$, pour $i = 1, 2$. On considère les diagrammes cartésiens de schémas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & E_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow q_1 \\ E_2 & \xrightarrow{q_2} & E_I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y := \operatorname{Spec} B_3 & \xrightarrow{p'_1} & S_1 \\ p'_2 \downarrow & & \downarrow q'_1 \\ S_2 & \xrightarrow{q'_2} & S \end{array}$$

avec $B_3 := B_1 \otimes_A B_2$. Le couple $(\pi_1 \circ p_1, \pi_2 \circ p_2)$ détermine un morphisme de schémas $p : X \rightarrow Y$. Soient en outre J_3 l'image de $J_1 I \otimes_A J_2 I$ dans B_3 , et $Z := p^{-1}V(J_3)$. Posons $\mathcal{J} := \Gamma_Z(\mathcal{O}_X)$, et notons par $j : \underline{V}(\mathcal{J}) \rightarrow X$ le monomorphisme induit de schémas (notation de la proposition 5.83). Montrer que

$$p \circ j : \underline{V}(\mathcal{J}) \rightarrow Y$$

est un éclatement de l'idéal quasi-cohérent $J_3\mathcal{O}_Y$.

5.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 5.3, partie (i) : Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $L_n = 0$ pour tout $n \leq n_0$; on construit s_n par récurrence sur n . Si $n \leq n_0$ évidemment $s_n : 0 \rightarrow L_{n+1}$ est l'application triviale, et comme $d_{n+1} : L_{n+1} \rightarrow 0$ est aussi triviale, il n'y a rien à montrer. Soit ensuite $n > n_0$ tel que s_{n-1} a déjà été exhibé; on voit aisément que $L_n = Z_n \oplus s_{n-1}(B_{n-1})$, et soit $\pi_n : L_n \rightarrow Z_n$ la projection déduite de cette décomposition. Par le lemme 4.99(i), le A -module Z_n est projectif; mais on a $\operatorname{Im} d_{n+1} = Z_n$, car $L_\bullet$ est exact. Par suite Id_{Z_n} se factorise à travers $d_{n+1} : L_{n+1} \rightarrow Z_n$ et une application A -linéaire $s'_n : Z_n \rightarrow L_{n+1}$; on voit aisément que $s_n := s'_n \circ \pi_n$ convient.

Partie (ii) : On vient de voir que si $L_\bullet$ est scindé, Z_n est un A -module projectif pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'autre part, le noyau de $2 \cdot \operatorname{Id}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ est isomorphe au $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et ce dernier n'est pas projectif, par exemple car la projection $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'admet aucune section $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -linéaire.

Partie (iii) : Soit $L_\bullet$ un complexe exact de $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang fini; alors $Z_n = B_n$ est un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion et de type fini, donc libre pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par suite, la suite exacte $0 \rightarrow Z_n \rightarrow L_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \rightarrow 0$ est scindée, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors raisonner comme dans (i) pour construire un scindage de $L_\bullet$.

Exercice 5.8, partie (i) : Soit M un A -module. On construit inductivement une résolution libre $L_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ comme suit. On choisit un système $(x_i \mid i \in I)$ de générateurs pour M , et on pose $L_0 := A^{(I)}$; l'augmentation $\varepsilon : L_0 \rightarrow M$ est l'application A -linéaire telle que $\varepsilon(e_i) := x_i$ pour tout $i \in I$ (où $(e_i \mid i \in I)$ dénote la base canonique de $A^{(I)}$). Ensuite, soit $n > 0$, et on suppose que l'on a déjà exhibé les termes $L_0, \dots, L_{n-1}$, ainsi que les différentielles $d_k : L_k \rightarrow L_{k-1}$ pour tout $k < n$; on choisit un système de générateurs $(y_j \mid j \in J)$ pour $\operatorname{Ker} d_{n-1}$ et on pose $L_n := A^{(J)}$. La différentielle $d_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$ est bien sûr l'application A -linéaire telle que $e_j \mapsto y_j$ pour tout $j \in J$. On voit aisément que ce procédé fournit la résolution cherchée.

Partie (ii) : Pour le cas $n = 1$, soit $\varepsilon_1 : A_1 \rightarrow k(\mathfrak{m}_1)$ la projection. La résolution cherchée est le complexe $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{X_1 \cdot \operatorname{Id}_{A_1}} A_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} k(\mathfrak{m}_1) \rightarrow 0$.

Pour $n = 2$, soit $\varepsilon_2 : A_2 \rightarrow k(\mathfrak{m}_2)$ la projection; le noyau de ε_2 est engendré par X_1 et X_2 , donc la différentielle en degré 1 sera l'application

$$d_1 : A_2 \oplus A_2 \rightarrow A_2 \quad e_i \mapsto X_i \quad \forall i = 1, 2$$

(ici, $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $A_2 \oplus A_2$). Soit maintenant $(a, b) \in \operatorname{Ker} d_1$; cela veut dire que $X_1 a + X_2 b = 0$, donc il existe $c \in A_2$ tel que $a = cX_2$ et $b = -cX_1$. La différentielle de notre complexe en degré 2 sera donc l'application

$$d_2 : A_2 \rightarrow A_2 \oplus A_2 \quad c \mapsto (cX_2, -cX_1) \quad \forall c \in A_2.$$

Evidemment d_2 est injectif, donc notre résolution s'arrête ici :

$$0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{d_2} A_2 \oplus A_2 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} k(\mathbf{m}_2) \rightarrow 0.$$

Pour $n = 3$, l'augmentation $\varepsilon_3 : A_3 \rightarrow k(\mathbf{m}_3)$ est encore la projection, dont le noyau est engendré par X_1, X_2, X_3 , donc la différentielle en degré 1 sera l'application

$$d_1 : A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \rightarrow A_3 \quad e_i \mapsto X_i \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Evidemment, $\text{Ker } d_1$ contient $v_1 := (X_2, -X_1, 0)$, $v_2 := (X_3, 0, -X_1)$ et $v_3 := (0, X_3, -X_2)$; montrons que ces trois vecteurs engendrent $\text{Ker } d_1$. En effet, soit $(a, b, c) \in \text{Ker } d_1$; cela veut dire que $X_1a + X_2b + cX_3 = 0$. On a alors $a', b' \in A_2$ et $a'', b'' \in A_3$ tels que $a = a' + X_3a''$ et $b = b' + X_3b''$, et il vient

$$X_1a' + X_2b' = -X_3(c + X_1a'' + X_2b'')$$

d'où $c + X_1a'' + X_2b'' = 0 = X_1a' + X_2b'$. Par suite, il existe $d \in A_2$ tel que $a' = X_2d$ et $b' = -X_1d$, et on a : $(a, b, c) = d(X_2, -X_1, 0) + a''(X_3, 0, -X_1) + b''(0, X_3, -X_2)$. Donc, pour la différentielle en degré 2 on choisit l'application

$$d_2 : A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \rightarrow A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \quad e_1 \mapsto v_1 \quad e_2 \mapsto v_2 \quad e_3 \mapsto v_3.$$

Or, soit $(a, b, c) \in \text{Ker } d_2$; cela veut dire que $aX_2 + bX_3 = cX_3 - aX_1 = -bX_1 - cX_2 = 0$. On déduit qu'il existe $a' \in A_3$ tel que $a = a'X_3$ et $b = -a'X_2$; ensuite, on a $cX_3 = aX_1 = a'X_1X_3$, d'où $c = a'X_1$. Ainsi $(a, b, c) = a' \cdot (X_3, -X_2, X_1)$ et donc $\text{Ker } d_2$ est engendré par $(X_3, -X_2, X_1)$. La différentielle en degré 3 est donc

$$d_3 : A_3 \rightarrow A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \quad 1 \mapsto (X_3, -X_2, X_1).$$

Ce dernier est injectif, donc notre résolution est :

$$0 \rightarrow A_3 \xrightarrow{d_3} A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \xrightarrow{d_2} A_3 \oplus A_3 \oplus A_3 \xrightarrow{d_1} A_3 \xrightarrow{\varepsilon_3} k(\mathbf{m}_3) \rightarrow 0.$$

Problème 5.11, partie (i) : On a vu au §4.1.4 que tout A -module admet une injection dans un A -module injectif. On peut alors procéder inductivement pour construire les termes I^n ainsi que les différentielles $d^n : I^n \rightarrow I^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: on pose $I^{-1} := M$ et $d^{-1} := \varepsilon$; ensuite, si $n \geq 0$ et $d^{n-1} : I^{n-1} \rightarrow I^n$ a déjà été exhibé, on pose $C^n := \text{Coker } d^{n-1}$, on trouve une injection $j^n : C^n \rightarrow I^{n+1}$ avec I^{n+1} injectif, et $d^n : I^n \rightarrow I^{n+1}$ sera la composition de j^n avec la projection $I^n \rightarrow C^n$.

Partie (ii) : On construit la résolution $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ de proche en proche comme dans (i), en prenant soin de choisir pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une enveloppe injective $j^n : \text{Coker } d^{n-1} \rightarrow J^{n+1}$, dont l'existence est assurée par le théorème 4.31.

Partie (iii) : Comme d'habitude, $f^\bullet$ se prolonge aux degrés négatifs par : $J^{-1} = J'^{-1} := M$, $f^{-1} := \text{Id}_M$ et $f^n := 0$ pour tout $n < -1$; montrons, par récurrence sur $n \geq -1$, que $f^n : J^n \rightarrow J'^n$ est un isomorphisme. L'assertion est triviale pour $n = -1$. Soit donc $n \geq 0$; il vient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} J^{n-2} & \xrightarrow{d^{n-2}} & J^{n-1} & \longrightarrow & \text{Coker } d^{n-2} & \xrightarrow{j^{n-1}} & J^n \\ f^{n-2} \downarrow & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow \bar{f}^{n-1} & & \downarrow f^n \\ J'^{n-2} & \xrightarrow{d'^{n-2}} & J'^{n-1} & \longrightarrow & \text{Coker } d'^{n-2} & \xrightarrow{j'^{n-1}} & J'^n \end{array}$$

où j^{n-1} et j'^{n-1} sont des enveloppes injectives. Par hypothèse de récurrence, f^{n-2} et f^{n-1} sont bijectifs; il s'ensuit aisément que $\bar{f}^{n-1}$ est un isomorphisme. D'après l'exercice 4.25(v.b), on conclut que f^n est un isomorphisme.

Partie (iv) : Soit $M \xrightarrow{\varepsilon} (J^\bullet, d^\bullet)$ une résolution injective à droite minimale; d'après la remarque 5.10(iii), il existe des morphismes de complexes $f^\bullet : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$ et $g^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ tels que $\varepsilon' = f^0 \circ \varepsilon$ et $\varepsilon = g^0 \circ \varepsilon'$, et par (iv) la composition $g^\bullet \circ f^\bullet : J^\bullet \rightarrow J^\bullet$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer chaque J^i par $f^i(J^i)$, on déduit que $J^\bullet \oplus \text{Ker } g^\bullet = I^\bullet$, avec $\text{Ker } g^\bullet$ un complexe de A -modules injectifs (remarque 4.2(iii)); la décomposition

induite $H^i(J^\bullet) \oplus H^i(\text{Ker } g^\bullet) = H^i(I^\bullet)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ montre que $\text{Ker } g^\bullet$ est exact, et par construction on a bien $\varepsilon'(x) = (\varepsilon(x), 0)$ pour tout $x \in M$.

Problème 5.12, partie (i) : Par inspection directe on trouve :

$$\partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r = \partial_{j+1}^r \circ \partial_i^r \quad \forall i, j, r \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq j \leq r+1.$$

Par suite, pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} d^{r+1} \circ d^r &= \sum_{i=0}^{r+2} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{i+j} \cdot \partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq r+1} (-1)^{i+j} \partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r + \sum_{0 \leq j < i \leq r+2} (-1)^{i+j} \partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq r+1} (-1)^{i+j} \partial_{j+1}^r \circ \partial_i^r + \sum_{0 \leq j < i \leq r+2} (-1)^{i+j} \partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq r+2} (-1)^{j+i-1} \partial_j^{r+1} \circ \partial_i^r + \sum_{0 \leq j < i \leq r+2} (-1)^{i+j} \partial_i^{r+1} \circ \partial_j^r = 0. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $d^0 \circ f = 0$.

Partie (ii) : Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on considère l'application A -linéaire

$$s^r : \mathcal{A}m(f)^r \rightarrow \mathcal{A}m(f)^{r-1} \quad b_0 \otimes \cdots \otimes b_r \mapsto g(b_0) \cdot b_1 \otimes \cdots \otimes b_r.$$

Un calcul direct montre que $s^{r+1} \circ d^r + d^{r-1} \circ s^r = \text{Id}_{\mathcal{A}m(f)^r}$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$, i.e. $(s^r \mid r \in \mathbb{N})$ est une homotopie de $\text{Id}_{\mathcal{A}m(f)^\bullet}$ vers le morphisme zéro, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Munissons $C := B \otimes_A B$ de la structure de B -module telle que

$$b \cdot (b_1 \otimes b_2) := bb_1 \otimes b_2 \quad \forall b, b_1, b_2 \in B$$

et posons

$$C^{\otimes 1} := C \quad C^{\otimes r+1} := C \otimes_B C^{\otimes r} \quad \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Par la proposition 3.20 (et une simple récurrence sur r) on a des isomorphismes naturels de B -modules :

$$B \otimes_A B^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} C^{\otimes r} \quad 1 \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_r) \mapsto (1 \otimes b_1) \otimes \cdots \otimes (1 \otimes b_r) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

et on voit aisément que ce système d'isomorphismes induit une identification :

$$B \otimes_A \mathcal{A}m(f)^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}m(B \otimes_A f)^\bullet.$$

Mais l'homomorphisme $B \otimes_A f : B \rightarrow C$ admet la section $C \rightarrow B : b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$, donc $B \otimes_A \mathcal{A}m(f)^\bullet$ est homotopiquement trivial par (ii), et de même pour $B \otimes_A \mathcal{A}m(f)^\bullet \otimes_A M$, au vu de la remarque 5.5(v). En particulier, ce dernier est un complexe exact (remarque 5.5(i)) ; comme B est une A -algèbre plate, en vertu de la proposition 2.102(iii) il vient

$$B \otimes_A H^i(\mathcal{A}m(f)^\bullet \otimes_A M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

et alors $\mathcal{A}m(f)^\bullet \otimes_A M$ est exact, car f est fidèlement plat (problème 3.83(i.b)).

Exercice 5.18 : Fixons un co-cône universel $(f_i^1 : X \rightarrow X'' \mid i = 0, 1, 2)$, et soient $(e_i^1 : X' \rightarrow X'' \mid i = 0, 1, 2)$ caractérisés par les *identités simpliciales* :

$$e_0^1 \circ e_0^0 = f_2 = e_1^1 \circ e_0^0 \quad e_1^1 \circ e_1^0 = f_0 = e_2^1 \circ e_1^0 \quad e_0^1 \circ e_1^0 = f_1 = e_2^1 \circ e_0^0.$$

On a ainsi un isomorphisme $\phi X''$ -linéaire unique $e_i^{1\dagger}(\gamma_F) : (e_i^1 \circ e_0^0)^* N \xrightarrow{\sim} (e_i^1 \circ e_1^0)^* N$ pour $i = 0, 1, 2$ (avec γ_F défini comme au §5.1.4), faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (e_i^1 \circ e_0^0)^* N & \xrightarrow{e_i^{1\dagger}(\gamma_F)} & (e_i^1 \circ e_1^0)^* N \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_i^{1*}(e_0^0)^* N & \xrightarrow{e_i^{1*}(\gamma_F)} & e_i^{1*}(e_1^0)^* N \end{array}$$

dont les flèches verticales sont, comme toujours, les identifications canoniques de la remarque 3.15. Vérifions d'abord la commutativité du diagramme correspondant :

$$\begin{array}{ccc} & f_0^* N & \\ e_1^{1\dagger}(\gamma_F) \nearrow & & \nwarrow e_2^{1\dagger}(\gamma_F) \\ f_2^* N & \xrightarrow{e_0^{1\dagger}(\gamma_F)} & f_1^* N. \end{array}$$

Pour cela, posons $N' := FX'$ et $N'' := FX''$, et remarquons que la composition :

$$(*) \quad (e_i^1 e_j^0)^* N \xrightarrow{\sim} e_i^{1*} e_j^{0*} N \xrightarrow{e_i^{1*}(F^* e_j^0)} e_i^{1*}(N') \xrightarrow{F^* e_i^1} N''$$

coïncide avec $F^*(e_i^1 e_j^0) : (e_i^1 e_j^0)^* N \xrightarrow{\sim} N''$, pour tous $i = 0, 1, 2$ et $j = 0, 1$; pour la preuve, il suffit de remarquer que la composition de $(*)$ avec l'application ϕX -linéaire naturelle $N \rightarrow (e_i^1 e_j^0)^* N$ coïncide avec $F(e_i^1 e_j^0)$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. Compte tenu des identités simpliciales, on déduit le diagramme commutatif suivant d'isomorphismes de $\phi X''$ -modules, qui entraîne l'assertion :

$$\begin{array}{ccccccc} & & e_1^{1*} e_0^{0*} N & \xleftarrow{\sim} & f_2^* N & \xrightarrow{\sim} & e_0^{1*} e_0^{0*} N \\ & & \downarrow e_1^{1*}(F^* e_0^0) & & & & \downarrow e_0^{1*}(F^* e_0^0) \\ e_1^{1*} e_1^{0*} N & \xrightarrow{e_1^{1*}(F^* e_1^0)} & e_1^{1*} N' & \xrightarrow{F^* e_1^1} & N'' & \xleftarrow{F^* e_0^1} & e_0^{1*} N' \xleftarrow{e_0^{1*}(F^* e_1^0)} e_0^{1*} e_0^{0*} N \\ \uparrow & & & & \uparrow F^* e_2^1 & & \uparrow \\ f_0^* N & \xrightarrow{\sim} & e_2^{1*} e_1^{0*} N & \xrightarrow{e_2^{1*}(F^* e_1^0)} & e_2^{1*} N' & \xleftarrow{e_2^{1*}(F^* e_0^0)} & e_2^{1*} e_0^{0*} N \xleftarrow{\sim} f_1^* N. \end{array}$$

Or, il existe un unique isomorphisme de A -algèbres

$$\omega' : \phi X'' \xrightarrow{\sim} B^{\otimes 3} \quad \text{tel que} \quad \omega' \circ \phi(f_i) = \delta_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

et une inspection des définitions fournit un diagramme commutatif de $B^{\otimes 3}$ -modules :

$$\begin{array}{ccc} (\partial_i^1 \circ \partial_0^0)^* N & \xrightarrow{\partial_i^{1\dagger}(\beta_F)} & (\partial_i^1 \circ \partial_1^0)^* N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega'^*(e_i^1 \circ e_0^0)^* N & \xrightarrow{\omega'^*(e_i^{1\dagger}(\gamma_F))} & \omega'^*(e_i^1 \circ e_1^0)^* N \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les identifications naturelles de la remarque 3.15, d'où la commutativité souhaitée du diagramme $(\dagger)$.

Exercice 5.21 : Soit $m : B^{\otimes 3} \rightarrow B$ l'homomorphisme de A -algèbres tel que

$$m(b \otimes b' \otimes b'') := bb'b'' \quad \forall b, b', b'' \in B$$

et noter que $m \circ \partial_i^1 \partial_j^0 = Id_B$ pour tous $i = 0, 1, 2$ et $j = 0, 1$; compte tenu des isomorphismes de la remarque 5.20(ii), on déduit des identifications naturelles :

$$m^*(B \otimes_A B \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} m^*(B \otimes_A N \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} m^*(N \otimes_A B \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} N.$$

Explicitement, pour tous $b, b' \in B$ et $x \in N$ ces isomorphismes identifient $1_{[m]} \otimes (b \otimes b' \otimes x)$ (resp. $1_{[m]} \otimes (b \otimes x \otimes b')$, resp. $1_{[m]} \otimes (x \otimes b \otimes b')$) avec $bb'x \in N$. Par suite, le diagramme $m^*(\dagger\dagger)$ (déduit du diagramme commutatif $(\dagger\dagger)$ de la remarque 5.20(ii)), s'identifie avec un diagramme commutatif de B -modules :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\gamma_0} & N \\ & \searrow \gamma_1 & \swarrow \gamma_2 \\ & N. & \end{array}$$

Or, par définition, $\beta''_0(1 \otimes 1 \otimes x) = 1 \otimes \beta'(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n 1 \otimes x_i \otimes b_i$; par suite, $\gamma_0(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, et de même, on a $\gamma_1(x) = \gamma_2(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$. Autrement dit, $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$. Mais comme chaque β''_i est un isomorphisme, il en est de même pour les γ_i , et la commutativité de $(*)$ entraîne alors que $\gamma_0 = Id_N$, d'où l'assertion.

Problème 5.23, partie (i) : Adoptons la description de la remarque 5.20(iii) : les objets de $\text{Desc}(B, \text{Mod})$ sont les couples (N, β') composés d'un B -module N et d'un isomorphisme $B \otimes_A B$ -linéaire $\beta' : B \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A B$ faisant commuter le diagramme $(\dagger\dagger)$ de la remarque 5.20(ii) ; en outre, $\Delta_B(M) = (f^*M, \beta'_M)$ est le couple explicité au §5.1.6, pour tout A -module M . Pour tout A -module M , soit $i_M : M \rightarrow f^*M = B \otimes_A M$ l'application A -linéaire naturelle telle que $x \mapsto 1_{[f]} \otimes x$. Noter que $i_M(M) \subset \{y \in f^*M \mid \beta'_M(1_{[f]} \otimes y) = y \otimes 1_{[f]}\}$. Posons alors

$$\Gamma_B(N, \beta') := \{n \in N \mid \beta'(1_{[f]} \otimes n) = n \otimes 1_{[f]}\}.$$

En général, $\Gamma_B(N, \beta')$ n'est pas forcément un B -sous-module de N , mais il est un A -sous-module de $N_{[f]}$, et on voit aisément que tout morphisme $\nu : (N_1, \beta'_1) \rightarrow (N_2, \beta'_2)$ de données de descente se restreint en une application A -linéaire

$$\Gamma_B(\nu) : \Gamma_B(N_1, \beta'_1) \rightarrow \Gamma_B(N_2, \beta'_2).$$

En outre, on vient d'observer que i_M est la composition de l'inclusion $\Gamma_B \circ \Delta_B(M) \rightarrow f^*M$ et d'une unique application A -linéaire $\eta_M^f : M \rightarrow \Gamma_B \circ \Delta_B(M)$, pour tout A -module M ; par inspection directe on voit que $\eta_{M'}^f \circ h = \Gamma_B(\Delta_B(h)) \circ \eta_M^f$ pour tout homomorphisme $h : M \rightarrow M'$ de A -modules, i.e. on a ainsi un foncteur

$$\Gamma_B : \text{Desc}(B, \text{Mod}) \rightarrow A - \text{Mod}$$

et le système $(\eta_M^f \mid M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}))$ définit une transformation naturelle

$$\eta_\bullet^f : \mathbf{1}_{A - \text{Mod}} \rightarrow \Gamma_B \circ \Delta_B.$$

D'autre part, l'inclusion $i_{(N, \beta')} : \Gamma_B(N, \beta') \rightarrow N_{[f]}$ induit, par adjonction, un homomorphisme de B -modules $\varepsilon_{(N, \beta')}^f : f^* \Gamma_B(N, \beta') \rightarrow N$ tel que $1_{[f]} \otimes n \mapsto n$ pour tout $n \in N$. Montrons que ce dernier définit un morphisme de données de descente

$$\varepsilon_{(N, \beta)}^f : \Delta_B \circ \Gamma_B(N, \beta') \rightarrow (N, \beta').$$

Cela revient à prouver l'identité : $\beta' \circ (B \otimes_A \varepsilon_{(N, \beta)}^f) = (\varepsilon_{(N, \beta)}^f \otimes_A B) \circ \beta'_{\Gamma_B(N, \beta)}$. Comme il s'agit d'applications $B^{\otimes 2}$ -linéaires, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les éléments de la forme $x := 1_{[f]} \otimes 1_{[f]} \otimes n$, avec $n \in \Gamma_B(N, \beta')$ arbitraire. Mais un calcul direct montre que

$$\beta' \circ (B \otimes_A \varepsilon_{(N, \beta')}^f)(x) = n \otimes 1_{[f]} = (\varepsilon_{(N, \beta)}^f \otimes_A B) \circ \beta'_{\Gamma_B(N, \beta')}(x)$$

comme souhaité. En somme, on a obtenu une transformation naturelle

$$\varepsilon_\bullet^f : \Delta_B \circ \Gamma_B \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Desc}(B, \text{Mod})}.$$

Une simple inspection montre que le couple $(\eta_\bullet^f, \varepsilon_\bullet^f)$ satisfait les identités triangulaires du problème 2.13(ii) ; par la partie (iii) du même problème, elles sont alors l'unité et la coïunité d'une unique adjonction pour le couple de foncteurs (Δ_B, Γ_B) .

Pour montrer que Δ'_B admet de même un adjoint à droite, remarquons que si (C, β) est une donnée de descente pour B -algèbres, alors $\Gamma_B(C, \beta)$ est une A -sous-algèbre de $C_{[f]}$ et $\varepsilon_{(C, \beta)}^f$ est un homomorphisme de B -algèbres ; d'où un foncteur

$$\Gamma'_B : \text{Desc}(B, \text{Alg}) \rightarrow A - \text{Alg}$$

avec un couple de transformations naturelles $(\tilde{\eta}_\bullet^f, \tilde{\varepsilon}_\bullet^f)$ qui sont l'unité et coïunité d'une adjonction pour (Δ'_B, Γ'_B) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Si (a) est vérifiée, posons $\mathcal{S} := A - \text{Alg}$ et $\phi := 1_{\mathcal{S}}$; noter que l'hypothèse entraîne que $\mathcal{S}(B, C) \neq \emptyset$ pour tout $C \in \text{Ob}(\mathcal{S})$. Au vu de la proposition 5.22, il suffit alors de montrer que le foncteur $\underline{T} : A - \text{Mod} \rightarrow \text{Cart}(1_{\mathcal{S}})$ de l'exemple 5.15(ii) est une équivalence. On voit aussitôt que $\underline{T}$ est plein et fidèle : les détails sont confiés aux soins du lecteur. Ensuite, soit $\underline{F} : \mathcal{S} \rightarrow A - \text{AlgMod}$ un objet de $\text{Cart}(1_{\mathcal{S}})$, et posons $M := FA$; pour toute A -algèbre $g : A \rightarrow C$, soit $\omega_C := F^*g : T_M(C) \xrightarrow{\sim} FC$. On vérifie aisément que l'association $(A \xrightarrow{g} C) \mapsto \omega_C$ est un isomorphisme de sections cartésiennes $\omega_{\bullet} : \underline{T}_M \xrightarrow{\sim} \underline{F}$, d'où l'assertion pour Δ_B . En particulier, cela montre que $\eta_{\bullet}^f$ et $\varepsilon_{\bullet}^f$ sont des isomorphismes de foncteurs; mais alors il en est de même pour $\tilde{\eta}_{\bullet}^f$ et $\tilde{\varepsilon}_{\bullet}^f$, d'où l'assertion pour Δ'_B .

Supposons ensuite que (b) soit vérifiée; on doit alors montrer que $\eta_{\bullet}$ et $\varepsilon_{\bullet}$ sont des isomorphismes de foncteurs, et d'après le problème 3.83(ii.d) il suffit de prouver que $B \otimes_A \eta_M$ et $B \otimes_A \varepsilon_{(N, \beta')}$ sont des isomorphismes, pour tout A -module M et toute donnée de descente (N, β') relative à f . Pour cela, posons $A' := B$, $B' := B \otimes_A B$, et $f' := B \otimes_A f : A' \rightarrow B'$, et notons par $\eta'_{\bullet}$ et $\varepsilon'_{\bullet}$ l'unité et la coïté de l'adjonction pour le couple de foncteurs $(\Delta_{B'}, \Gamma_{B'})$, exhibées dans la solution de (i); rappelons aussi le foncteur $\text{Desc}(B, \text{Mod}) \rightarrow \text{Desc}(B', \text{Mod}) : (N, \beta') \mapsto A' \otimes_A (N, \beta')$ (remarque 5.20(iv)), et noter que $A' \otimes_A \Delta_B(M) = \Delta_{B'}(A' \otimes_A M)$. En outre, puisque A' est une A -algèbre plate, on a une identification naturelle : $A' \otimes_A \Gamma_B(N, \beta') \xrightarrow{\sim} \Gamma_{B'}(A' \otimes_A (N, \beta'))$; les détails sont laissés aux soins du lecteur. Par inspection directe, on voit que $A' \otimes_A \eta_M$ et $A' \otimes_A \varepsilon_{(N, \beta')}$ correspondent respectivement à $\eta'_{A' \otimes_A M}$ et $\varepsilon'_{A' \otimes_A (N, \beta')}$, sous ces identifications; on est ainsi ramené à vérifier que $\Delta_{B'}$ est une équivalence; mais noter que l'application A' -linéaire $g' : B' \rightarrow A'$ telle que $b \otimes b' \mapsto bb'$ est un homomorphisme d'anneaux avec $g' \circ f' = \text{Id}_{A'}$, donc le cas (a) permet de conclure. De même on voit que Δ'_B est une équivalence si (b) est vérifiée.

Exercice 5.32, partie (i) : Evidemment $J := \text{rad}(I) \cdot A_U \subset J' := \text{rad}(IA_U)$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que $J_{\mathfrak{p}} = J'_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A_U$ (proposition 3.55). Pour cela, rappelons que l'application continue $\text{Spec } A_U \rightarrow \text{Spec } A$ induite par le morphisme structurel $j : A \rightarrow A_U$, identifie $\text{Spec } A_U$ avec U (lemme 5.31(iii)); soit alors $f \in A$ avec $j^{-1}(\mathfrak{p}) \in D(f) \subset U$. D'après le lemme 5.31(ii), la localisation $j_f : A_f \rightarrow (A_U)_f$ est un isomorphisme; avec l'exercice 3.38, il vient :

$$J_f = \text{rad}(I)_f \cdot (A_U)_f = \text{rad}(I_f) \cdot (A_U)_f = \text{rad}((IA_U)_f) = J'_f$$

et d'autre part on a $(J_f)_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ et $(J'_f)_{\mathfrak{p}} = J'_{\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Il s'agit du cas particulier de (i), avec $I = 0$.

Partie (iii) : D'après (i), $\mathfrak{p}A_U$ est un idéal radical de A_U ; d'autre part, d'après le lemme 5.31(iii) et la remarque 1.45(ii), l'application $\text{Spec}(j) : \text{Spec } A_U \rightarrow \text{Spec } A$ induit un homéomorphisme $V(\mathfrak{p}A_U) \xrightarrow{\sim} U \cap V(\mathfrak{p})$, et comme $V(\mathfrak{p})$ est irréductible, il en est de même pour sa partie ouverte non vide $U \cap V(\mathfrak{p})$ (exercice 1.22); $V(\mathfrak{p}A_U)$ est alors une partie irréductible de $\text{Spec } A_U$, et on conclut avec la remarque 1.56(iv).

Exercice 5.35, partie (i) : L'adjoint à droite de $j_{\mathcal{S}*}$ est le foncteur associant à chaque $\mathcal{A}$ -préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$ son extension de Kan à droite $j_{\mathcal{S}*}^* \mathcal{F} := \int_{j_{\mathcal{S}}} \mathcal{F}$ (théorème 2.62(i)). Ce foncteur $j_{\mathcal{S}}^*$ est plein et fidèle, d'après l'exercice 2.64(i). Explicitement, pour toute partie ouverte U de T , soit $\mathcal{S}/U$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}$ telle que $\text{Ob}(\mathcal{S}/U) = \{V \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \mid V \subset U\}$; alors

$$j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U) := \lim_{V \in (\mathcal{S}/U)^{\text{op}}} \mathcal{F}(V) \quad \forall U \in \mathcal{T}.$$

Si $U' \subset U$ est une autre partie ouverte, évidemment $\mathcal{S}/U'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{S}/U$, et la restriction à U' des U -sections de $j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}$ est l'unique application

$$\rho_{UU'}^* : j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U) \rightarrow j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U') \quad \text{telle que} \quad \pi_{U'V} \circ \rho_{UU'}^* = \pi_{UV} \quad \forall V \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U')$$

où $\pi_{UV} : j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ est la projection canonique, et de même pour $\pi_{U'V}$. Noter que si $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, la partie ouverte U est l'objet final de la catégorie $\mathcal{S}/U$; il s'ensuit aussitôt que la projection $\pi_{UU} : j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est un isomorphisme pour toute telle U ; de plus, si $U' \subset U$ est un deuxième objet de $\mathcal{S}$, ces isomorphismes identifient $\rho_{UU'}^*$ avec la restriction correspondante $\rho_{UU'} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$. Autrement dit, la restriction $j_{\mathcal{S}*} j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}$ de $j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}$ au site $\mathcal{S}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}$, et en fait le système d'isomorphismes $(\pi_{UU} | U \in \text{Ob}(\mathcal{S}))$ définit la coïunité $j_{\mathcal{S}*} j_{\mathcal{S}}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ pour l'adjonction canonique du couple $(j_{\mathcal{S}*}, j_{\mathcal{S}}^*)$.

Partie (ii) : On doit vérifier que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur $\mathcal{S}$, alors $j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur T . Pour cela, gardons la notation de (i), et soient $U \subset T$ une partie ouverte, $\mathcal{U}$ un recouvrement de U , et $(\phi_V^* : A \rightarrow j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(V) | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ un cône de sommet $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; posons

$$\mathcal{U}' := \bigcup_{V \in \mathcal{U}} \text{Ob}(\mathcal{S}/V) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}'/U' := \{V' \in \mathcal{U}' | V' \subset U'\} \quad \forall U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U).$$

On voit aisément que $\mathcal{U}'$ (resp. $\mathcal{U}'/U'$) est un recouvrement de U (resp. de U' , pour tout $U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U)$). Pour tout $V' \in \mathcal{U}'$ choisissons $V \in \mathcal{U}$ tel que $V' \subset V$, et soit $\phi_{V'} := \pi_{VV'} \circ \phi_V^* : A \rightarrow \mathcal{F}(V')$; noter que $\phi_{V'}$ ne dépend pas du choix de V : en effet, si $V' \subset W$ pour un autre $W \in \mathcal{U}$, on a

$$\begin{aligned} \phi_{V'} &= \pi_{V \cap W, V'} \circ \rho_{V, V \cap W}^* \circ \phi_V^* = \pi_{V \cap W, V'} \circ \phi_{V \cap W}^* = \pi_{V \cap W, V'} \circ \rho_{W, V \cap W}^* \circ \phi_W^* \\ &= \pi_{W, V'} \circ \phi_W^*. \end{aligned}$$

De même, il est clair que $\rho_{V'V''} \circ \phi_{V'} = \phi_{V'V''}$ pour toute inclusion $V'' \subset V'$ d'éléments de $\mathcal{U}'$. Autrement dit, $(\phi_{V'} | V' \in \mathcal{U}')$ est un cône de sommet A , donc de même pour sa restriction $(\phi_{V'} | V' \in \mathcal{U}'/U')$, pour tout $U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U)$. Comme $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$ -faisceau sur $\mathcal{S}$, il existe alors pour tout tel U' un unique morphisme $\phi_{U'} : A \rightarrow \mathcal{F}(U')$ tel que $\rho_{UV'} \circ \phi_{U'} = \phi_{V'}$ pour tout $V' \in \mathcal{U}'/U'$. On vérifie aussitôt que $(\phi_{U'} | U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U))$ est un cône de sommet A ; par construction, il existe alors un unique morphisme $\psi : A \rightarrow j_{\mathcal{S}}^* \mathcal{F}(U)$ tel que $\pi_{UU'} \circ \psi = \phi_{U'}$ pour tout $U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/U)$. Il vient $\pi_{VV'} \circ \rho_{UV}^* \circ \psi = \pi_{UV'} \circ \psi = \phi_{V'} = \pi_{VV'} \circ \phi_V$ pour tout $V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ et tout $V' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/V)$; par suite $\rho_{UV}^* \circ \psi = \phi_V$, par l'universalité du cône $(\pi_{VV'} | V' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/V))$. Cela achève de montrer que $(\rho_{UV}^* : \mathcal{F}^\dagger(U) \rightarrow \mathcal{F}^\dagger(V) | V \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est un cône universel, CQFD.

Partie (iii) : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soient $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ un recouvrement de U ; comme U est compacte, il existe une partie finie $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ qui recouvre déjà U . Par hypothèse, pour toute partie finie $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contenant $\mathcal{U}_0$, le cône $(\rho_{UQ} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(Q) | Q \in \mathcal{V} \wedge \mathcal{V})$ est universel. Or, soient $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $(f_Q : X \rightarrow \mathcal{F}(Q) | Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ un cône arbitraire; pour tout $\mathcal{V}$ comme ci-dessus, il existe alors un unique morphisme $g_{\mathcal{V}} : X \rightarrow \mathcal{F}(U)$ de $\mathcal{A}$ tel que $\rho_{UQ} \circ g_{\mathcal{V}} = f_Q$ pour tout $Q \in \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$. Mais l'unicité de $g_{\mathcal{V}}$ entraîne aussitôt que $g_{\mathcal{V}} = g_{\mathcal{U}_0}$ pour tout tel $\mathcal{V}$. Ainsi, $g_{\mathcal{U}_0}$ est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $\rho_{UQ} \circ g_{\mathcal{U}_0} = f_Q$ pour tout $Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$, i.e. le cône $(\rho_{UQ} | Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ est universel, CQFD.

Exercice 5.40, partie (i) : Munissons Z de la topologie $\mathcal{T}_Z$ induite par T via l'inclusion $j_Z : Z \rightarrow T$; on pose

$$Z \times_T \underline{T} := ((Z, \mathcal{T}_Z), \mathcal{O}_Z) \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}_Z := \tilde{j}_Z^{-1} \mathcal{O}_T.$$

L'unité de l'adjonction canonique pour le couple de foncteurs $(\tilde{j}_Z^{-1}, j_{Z*})$ fournit un morphisme de faisceaux d'anneaux $j_Z^\flat : \mathcal{O}_T \rightarrow j_{Z*} \mathcal{O}_Z$ (voir §4.3.2), d'où un morphisme

$$\underline{j}_Z := (j_Z, j_Z^\flat) : Z \times_T \underline{T} \rightarrow \underline{T}.$$

Or, soit $\underline{g} := (g, g^b) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \underline{T}$ un morphisme d'espaces annelés tel que $g(X) \subset Z$, de sorte que g se factorise à travers j_Z et une unique application continue $h : X \rightarrow (Z, \mathcal{F}_Z)$; par la même adjonction, $g^b : \mathcal{O}_T \rightarrow g_* \mathcal{O}_X = j_{Z*} h_* \mathcal{O}_X$ correspond à un morphisme de faisceaux

$$h^b : \mathcal{O}_Z \rightarrow h_* \mathcal{O}_X$$

d'où un morphisme d'espaces annelés

$$\underline{h} := (h, h^b) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Z \times_T \underline{T}.$$

Le morphisme h^b est caractérisé par l'identité : $j_{Z*}(h^b) \circ j_Z^b = g^b$ (voir le problème 2.13(iii)), et cela équivaut à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (X, \mathcal{O}_X) & \\ \swarrow \underline{h} & & \searrow \underline{g} \\ Z \times_T \underline{T} & \xrightarrow{j_Z} & \underline{T} \end{array}$$

d'où l'assertion.

Partie (ii) : Cela suit aussitôt de la construction de $U \times_T \underline{T}$ et de l'exemple 4.92(i).

Problème 5.51, partie (i) : Soient Λ une catégorie, $\underline{X}_\bullet : \Lambda \rightarrow \mathbf{EspAnn}$ un foncteur avec $\underline{X}_\bullet(\lambda) := (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda})$ et $\underline{X}_\bullet(f) := (\phi_f, \phi_f^\sharp) : (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \rightarrow (X_\mu, \mathcal{O}_{X_\mu})$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ et tout morphisme $f : \lambda \rightarrow \mu$ de Λ . Soit X la limite du foncteur $\underline{X}_\bullet : \Lambda \rightarrow \mathbf{Top}$ avec $X_\bullet(\lambda) := X_\lambda$ et $X_\bullet(f) := \phi_f$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ et tout morphisme f de Λ ; soit $(\pi_\lambda : X \rightarrow X_\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\Lambda))$ un cône universel, et pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ posons $x_\lambda := \pi_\lambda(x)$. Pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ soit $\mathcal{F}_\lambda := \tilde{\pi}_\lambda^{-1} \mathcal{O}_{X_\lambda}$; pour tout morphisme $f : \lambda \rightarrow \mu$ de Λ , on a $\pi_\mu = \phi_f \circ \pi_\lambda$, et on dénote

$$h_f : \mathcal{F}_\mu \xrightarrow{\sim} \tilde{\pi}_\lambda^{-1} \tilde{\phi}_f^{-1} \mathcal{O}_{X_\mu} \xrightarrow{\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(\phi_f^\sharp)} \mathcal{F}_\lambda$$

la composition de $\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(\phi_f^\sharp)$ avec l'isomorphisme naturel $\tilde{\pi}_\mu^{-1} \mathcal{O}_{X_\mu} \xrightarrow{\sim} \tilde{\pi}_\lambda^{-1} \tilde{\phi}_f^{-1} \mathcal{O}_{X_\mu}$ de l'exercice 4.98(ii); par simple inspection, on voit qu'il s'agit d'un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Lemme 5.103. *Pour tous morphismes $\lambda \xrightarrow{f} \mu \xrightarrow{g} \nu$ de Λ on a $h_f \circ h_g = h_{g \circ f}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $(h_f)_x \circ (h_g)_x = (h_{g \circ f})_x$ pour tout $x \in X$. Or, l'application $(h_f)_x$ est caractérisée par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mu,x} & \xrightarrow{(h_f)_x} & \mathcal{F}_{\lambda,x} \\ \tilde{\omega}_\mu \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega}_\lambda \\ \mathcal{O}_{X_\mu, x_\mu} & \xrightarrow{\tilde{\omega}_f} (\tilde{\phi}_f^{-1} \mathcal{O}_{X_\mu})_{x_\lambda} \xrightarrow{\phi_{f,x_\lambda}^\sharp} & \mathcal{O}_{X_\lambda, x_\lambda} \end{array}$$

où $\tilde{\omega}_\lambda, \tilde{\omega}_\mu$ et $\tilde{\omega}_f$ sont les identifications canoniques de l'exercice 4.98(ii); de même on caractérise $(h_g)_x$ et $(h_{g \circ f})_x$. On est ainsi ramené à montrer l'identité :

$$\phi_{\lambda\nu, x_\lambda}^\sharp \circ \tilde{\omega}_{g \circ f} = \phi_{\lambda\mu, x_\lambda}^\sharp \circ \tilde{\omega}_f \circ \phi_{\mu\nu, x_\mu}^\sharp \circ \tilde{\omega}_g.$$

Mais cela suit aussitôt de la remarque 5.39(iii). □

On a donc un foncteur bien défini $\mathcal{F}_\bullet : \Lambda^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\tilde{X}} - \mathbf{Alg}$ tel que $\mathcal{F}_\bullet(\lambda) := \mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{F}_\bullet(f) := h_f$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$ et tout morphisme f de Λ . D'après l'exercice 4.90(i), la colimite de $\mathcal{F}_\bullet$ est représentée par un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$, et on fixe un co-cône universel $(\pi_\lambda^\sharp : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_X \mid \lambda \in \text{Ob}(\Lambda))$. Au vu de la remarque 5.39(iv), on déduit un cône de sommet $(X, \mathcal{O}_X)$ et avec pour base le foncteur $\underline{X}_\bullet$:

$$(\pi_\lambda := (\pi_\lambda, \pi_\lambda^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \mid \lambda \in \text{Ob}(\Lambda))$$

et il reste à montrer que ce cône est universel. Soit alors $(\psi_\lambda := (\psi_\lambda, \psi_\lambda^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \mid \lambda \in \text{Ob}(\Lambda))$ un autre cône; par la propriété universelle de X , il existe une application continue unique $\psi : Y \rightarrow X$ telle que $\pi_\lambda \circ \psi = \psi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$, et on dénote $\beta_\lambda : \tilde{\psi}^{-1}\mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_Y$ la composition de $\psi_\lambda^\# : \tilde{\psi}_\lambda^{-1}\mathcal{O}_{X_\lambda} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ avec l'isomorphisme naturel $\tilde{\psi}^{-1}\mathcal{F}_\lambda = \tilde{\psi}^{-1}\tilde{\pi}_\lambda^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \tilde{\psi}_\lambda^{-1}\mathcal{O}_{X_\lambda}$ de l'exercice 4.98(ii). En raisonnant comme dans la preuve du lemme 5.103, on voit aisément que

$$\beta_\lambda = \beta_\mu \circ \tilde{\psi}^{-1}(h_f) \quad \text{pour tout morphisme } f : \lambda \rightarrow \mu \text{ de } \Lambda.$$

Par la proposition 2.49(ii), le co-cône $(\tilde{\psi}^{-1}(\pi_\lambda^\#) : \tilde{\psi}^{-1}\mathcal{F}_\lambda \rightarrow \tilde{\psi}^{-1}\mathcal{O}_X \mid \lambda \in \text{Ob}(\Lambda))$ est encore universel, donc il existe un unique morphisme de faisceaux d'anneaux

$$\psi^\# : \tilde{\psi}^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \quad \text{tel que} \quad \psi^\# \circ \tilde{\psi}^{-1}(\pi_\lambda^\#) = \beta_\lambda \quad \forall \lambda \in \text{Ob}(\Lambda).$$

Au vu de la remarque 5.39(iv), cela revient à dire que $\psi := (\psi, \psi^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ est l'unique morphisme d'espaces annelés tel que $\pi_\lambda \circ \psi = \psi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Ob}(\Lambda)$; i.e. $(X, \mathcal{O}_X)$ représente la limite de $\underline{X}_\bullet$, et cela achève la preuve de (i).

Partie (ii) : pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, notons par $\phi_{\lambda\mu} : (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \rightarrow (X_\mu, \mathcal{O}_{X_\mu})$ l'homomorphisme de transition du système $\underline{X}_\bullet$; par définition, il s'agit d'un morphisme d'espaces localement annelés. On sait déjà que la limite de $\underline{X}_\bullet$ est représentable dans la catégorie **EspAnn** par l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ exhibé dans la preuve de (i), et on va montrer d'abord que $(X, \mathcal{O}_X)$ est localement annelé. En effet, par construction le faisceau $\mathcal{O}_X$ est la colimite du système filtrant de faisceaux $(\mathcal{F}_\lambda := \tilde{\pi}_\lambda^{-1}\mathcal{O}_{X_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$, et d'après la proposition 2.49(ii), pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ est la colimite du système induit d'anneaux locaux $(\mathcal{F}_{\lambda,x} \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$; la preuve du lemme 5.103 montre que pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$ l'homomorphisme de transition $\mathcal{F}_{\mu,x} \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda,x}$ s'identifie à l'homomorphisme local d'anneaux $\phi_{\lambda,\mu}^\# : \mathcal{O}_{X_\mu,x_\mu} \rightarrow \mathcal{O}_{X_\lambda,x_\lambda}$ (avec x_λ et x_μ définis comme dans la preuve de (i)). L'assertion suit ainsi de l'observation plus générale suivante :

Lemme 5.104. (i) Soit $A_\bullet := ((A_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ un système filtrant d'anneaux locaux, avec homomorphismes locaux de transition $f_{\mu\lambda} : A_\mu \rightarrow A_\lambda$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$. Alors la colimite A de $A_\bullet$ est un anneau local, et le co-cône universel $(j_\lambda : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ est constitué d'homomorphismes locaux d'anneaux.

(ii) Soient $(B, \mathfrak{n})$ un anneau local, $(A_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} B \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ un co-cône d'homomorphismes locaux d'anneaux. Alors l'homomorphisme induit $g : A \rightarrow B$ est local.

Démonstration. (i) : D'après le problème 2.51(ii), le cône induit d'espaces topologiques $(\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel, et rappelons que la limite de $(\text{Spec } A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est représentée par l'ensemble des suites cohérentes $(\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, avec $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Spec } A_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $\mathfrak{p}_\mu = f_{\mu\lambda}^{-1}(\mathfrak{p}_\lambda)$ pour tout $\mu \geq \lambda$. En particulier la suite cohérente $(\mathfrak{m}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ correspond à un unique $\mathfrak{m} \in \text{Spec } A$ avec $\mathfrak{m}_\lambda = j_\lambda^{-1}(\mathfrak{m})$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ correspond à la suite cohérente $(\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, on aura $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{m}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'où $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Cela achève de montrer que A est local, et prouve aussi que tout homomorphisme j_λ est local.

(ii) : Par hypothèse on a $\text{Spec}(g_\lambda)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; on déduit aussitôt que $\text{Spec}(g)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, d'où l'assertion. $\square$

Ensuite, soit $(\pi_\lambda^\# : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_X \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ le co-cône universel comme dans la preuve de (i); pour tout $x \in X$ le co-cône induit $(\pi_{\lambda,x}^\# : \mathcal{F}_{\lambda,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ est encore universel (toujours d'après la proposition 2.49(ii)), et le lemme 5.104(i) entraîne alors aussi que $\pi_\lambda : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda})$ est un morphisme d'espaces localement annelés pour tout $\lambda \in \Lambda$. En dernier lieu, soit $((\psi_\lambda, \psi_\lambda^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ un cône constitué de morphismes d'espaces localement annelés, et $\underline{\psi} : (\psi, \psi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ le morphisme induit d'espaces annelés; avec le lemme 5.104(ii) on déduit aisément que $\underline{\psi}$ est un morphisme d'espaces localement annelés (les détails sont laissés aux soins du lecteur),

et cela achève la preuve de (ii).

Exercice 5.56 : Pour toute partie ouverte $U \subset X$, la composition de f avec la restriction $\Gamma(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ fournit un homomorphisme d'anneaux $A \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$; à tout A -module M on associe alors le préfaisceau sur X

$$\mathcal{O}_X \otimes_A M : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow A\text{-Mod} \quad U \mapsto \mathcal{O}_X(U) \otimes_A M$$

dont la restriction $\mathcal{O}_X \otimes_A M(U) \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_A M(U')$ est induite de la façon évidente par la restriction $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$, pour toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes de X . Evidemment $\mathcal{O}_X \otimes_A M$ hérite de $\mathcal{O}_X$ une structure naturelle de pré- $\mathcal{O}_X$ -module, et toute application A -linéaire $\phi : M \rightarrow N$ induit un morphisme évident de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{O}_X \otimes_A \phi : \mathcal{O}_X \otimes_A M \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_A N$. On a ainsi un foncteur bien défini $\mathcal{O}_X \otimes_A (-)$ et on doit exhiber une bijection naturelle

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(\mathcal{F})_{[f]}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X\text{-pré.Mod}(\mathcal{O}_X \otimes_A M, \mathcal{F})$$

pour tout A -module M et tout pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$. Soit donc $\psi : M \rightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ une application A -linéaire; pour toute partie ouverte $U \subset X$, la composition de ψ avec la restriction $\Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est une application A -linéaire $M \rightarrow \mathcal{F}(U)$, à laquelle l'adjonction du 3.2.2 associe une application $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire $\psi_U : \mathcal{O}_X \otimes_A M(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, et il est clair que l'association $U \mapsto \psi_U$ définit un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\psi_\bullet : \mathcal{O}_X \otimes_A M \rightarrow \mathcal{F}$. On voit aussitôt que $\psi_\bullet$ est l'unique morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire tel que $\Gamma(\psi_\bullet) : A \otimes_A M \rightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ soit la composition de ψ avec l'isomorphisme A -linéaire naturel $A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$, d'où la bijection souhaitée. L'adjonction pour le couple de foncteurs $(\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_X (-), \Gamma_{[f]})$ se déduit de celle pour le couple $(\mathcal{O}_X \otimes_X (-), (-)_f \circ \Gamma_{[f]})$, au vu de l'exercice 2.17(i) et de la remarque 5.55(i).

Problème 5.58, partie (i.a) : Posons $A := \mathcal{O}_X(X)$ et $A_U := \mathcal{O}_X(U)$, et soit M un A -module; pour toute partie ouverte $V \subset U$, la remarque 3.15 fournit un isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_U(V)$ -modules

$$\mathcal{O}_U \otimes_{A_U} (A_U \otimes_A M)(V) = \mathcal{O}_X(V) \otimes_{A_U} (A_U \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(V) \otimes_A M = \mathcal{O}_X \otimes_A M(V)$$

et évidemment ce système d'isomorphismes définit un isomorphisme de pré- $\mathcal{O}_U$ -modules $\mathcal{O}_U \otimes_{A_U} (A_U \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \otimes_A M)|_U$, d'où un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$ -modules

$$\mathcal{O}_U \widetilde{\otimes}_{A_U} (A_U \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} ((\mathcal{O}_X \otimes_A M)|_U)^a = (\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A M)|_U$$

d'où l'assertion.

Partie (i.b) : On va d'abord donner une deuxième construction de l'adjoint à gauche du foncteur $\Gamma : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$, quand $(X, \mathcal{O}_X) = \text{Spec } A$. Pour cela, rappelons que la restriction du faisceau $\mathcal{O}_X$ au site $\text{Rep}(A)$ coïncide avec le faisceau $A_\bullet$ fourni par la proposition 5.37; pour tout A -module M , soit alors

$$A_\bullet \otimes_A M$$

la restriction à $\text{Rep}(A)$ du pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{O}_X \otimes_A M$. On va montrer que $A_\bullet \otimes_A M$ est un faisceau sur le site $\text{Rep}(A)$. Avec l'exercice 5.35(iii), on se ramène à vérifier la propriété de recollement pour un recouvrement fini $\{U_1, \dots, U_n\}$ de $\text{Spec } A$. Or, soient $\varepsilon : A \rightarrow B := A_{U_1} \times \dots \times A_{U_n}$ et $\partial_0^0, \partial_1^0 : B \rightarrow B \otimes_A B$ comme dans la preuve de la proposition 5.37; on doit montrer que $\varepsilon \otimes_A M$ identifie M avec l'égaliseur de $\partial_0^0 \otimes_A M$ et $\partial_1^0 \otimes_A M$. Mais on a observé que $\partial_0^0 - \partial_1^0$ est la différentielle d_0 du complexe d'Amitsur $\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$, donc l'assertion suit du problème 5.12(iii).

D'après l'exercice 5.35(ii), le faisceau $A_\bullet \otimes_A M$ est la restriction d'un faisceau de A -modules sur $\text{Spec } A$, que l'on notera $A_\bullet \widetilde{\otimes}_A M$. Explicitement, pour toute partie ouverte $U \subset X$, l'ensemble $(A_\bullet \widetilde{\otimes}_A M)(U)$ représente la limite du système

$$A_{\bullet/U} \otimes_A M := (A_V \otimes_A M \mid V \in \text{Ob}(\text{Rep}(A)/U))$$

où $\text{Rep}(A)/U$ est la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(A)$ dont les objets sont les parties représentables $V \subset U$. Pour tout tel V , la restriction des scalaires suivant l'homomorphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V) = A_V$ munit $A_V \otimes_A M$ d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X(U)$ -module, et pour toute inclusion $V' \subset V$ de parties représentables la restriction $A_V \otimes_A M \rightarrow A_{V'} \otimes_A M$ est évidemment $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire. Il existe alors une unique structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module sur $(A_\bullet \tilde{\otimes}_A M)(U)$ représentant la limite du système de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules $A_{\bullet/U} \otimes_A M$ (voir l'exemple 2.22(ii)). Une simple inspection montre que avec ces structures, le faisceau $A_\bullet \tilde{\otimes}_A M$ est bien un $\mathcal{O}_X$ -module. De plus, tout $f \in \text{Hom}_A(M, M')$ induit un morphisme évident $A_\bullet \otimes_A f : A_\bullet \otimes_A M \rightarrow A_\bullet \otimes_A M'$ de faisceaux sur $\text{Rep}(A)$, qui se prolonge en un unique morphisme $A_\bullet \tilde{\otimes}_A f : A_\bullet \tilde{\otimes}_A M \rightarrow A_\bullet \tilde{\otimes}_A M'$ de faisceaux sur X , et une simple inspection montre que ce dernier est $\mathcal{O}_X$ -linéaire. On a ainsi un foncteur bien défini $A_\bullet \tilde{\otimes}_A (-) : A - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod}$, et il nous reste à vérifier qu'il est adjoint à gauche de Γ . Soient donc M un A -module, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, et $f : M \rightarrow \Gamma(\mathcal{M})$ une application A -linéaire; pour toute partie ouverte représentable $U \subset X$, la composition $M \rightarrow \mathcal{M}(U)$ de f avec la restriction $\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ se factorise à travers l'application naturelle $M \rightarrow A_U \otimes_A M$ et une unique application A_U -linéaire $\phi_U : A_U \otimes_A M \rightarrow \mathcal{M}(U)$, et on voit aisément que l'association : $U \mapsto \phi_U$ pour tout $U \in \text{Ob}(\text{Rep}(A))$ définit un morphisme de faisceaux $\phi_{\text{Rep}(A)} : A_\bullet \otimes_A M \rightarrow \mathcal{M}|_{\text{Rep}(A)}$, où l'on a noté par $\mathcal{M}|_{\text{Rep}(A)}$ la restriction de $\mathcal{M}$ au site $\text{Rep}(A)$. Le morphisme $\phi_{\text{Rep}(A)}$ se prolonge ensuite en un unique morphisme $\phi : A_\bullet \tilde{\otimes}_A M \rightarrow \mathcal{M}$ de faisceaux sur X , et on vérifie aisément que ϕ est l'unique morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire tel que $\Gamma(\phi) = f$. En dernier lieu, on voit aussitôt que l'association : $f \mapsto \phi$ établit une bijection

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X - \text{Mod}(A_\bullet \tilde{\otimes}_A M, \mathcal{M})$$

naturelle par rapport aux applications A -linéaire $M \rightarrow M'$ et aux morphismes $\mathcal{O}_X$ -linéaires $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$; cela achève la preuve. Noter que l'unité d'adjonction $\eta_M : M \rightarrow \Gamma(A_\bullet \tilde{\otimes}_A M) = A \otimes_A M$ est l'application A -linéaire naturelle : $x \mapsto 1 \otimes x$ pour tout $x \in M$. D'autre part, soit $u_M : \mathcal{O}_X \otimes_A M \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$ l'unité de l'adjonction canonique du problème 4.88(iv); par construction, l'unité $\eta_M : M \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M)$ de l'adjonction pour le couple $(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (-), \Gamma)$ est :

$$\Gamma(u_M) \circ \eta_M : M \xrightarrow{\sim} A \otimes_A M = \Gamma(\mathcal{O}_X \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M) \quad \forall M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}).$$

L'exercice 2.14(i,ii), fournit alors un isomorphisme unique de foncteurs

$$\omega : A_\bullet \tilde{\otimes}_A (-) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (-) \quad \text{tel que} \quad \Gamma(\omega_M) = \Gamma(u_M) \quad \forall M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}).$$

La restriction de ω_M à $\text{Rep}(A)$ doit alors coïncider avec la restriction de u_M :

$$A_\bullet \otimes_A M \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M)|_{\text{Rep}(A)} \quad \forall M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}).$$

Puisque η_M est un isomorphisme pour tout A -module M , le foncteur $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (-)$ est plein et fidèle (proposition 2.16(iii)). Il reste donc à vérifier que tout $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A \Gamma(\mathcal{M})$. Or, par hypothèse (et en vertu de la compacité de X) il existe un recouvrement fini $\{U_1, \dots, U_n\}$ de X par des parties ouvertes affines, et pour $i = 1, \dots, n$ un isomorphisme $\mathcal{O}_{U_i}$ -linéaire $\nu_i : \mathcal{O}_{U_i} \tilde{\otimes}_{A_{U_i}} M_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}|_{U_i}$ avec $M_i := \mathcal{M}(U_i)$. Notons par $\mathcal{T}$ le site de X dont les objets sont les parties ouvertes affines $V \subset X$ telles que $V \subset U_i$ pour quelque $i \in \{1, \dots, n\}$; soit en outre $\mathcal{S}$ la catégorie des familles $(V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'objets V_λ de $\mathcal{T}$, indexées par des ensembles *finis* arbitraires Λ . pour tous $V_\bullet := (V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), W_\bullet := (W_\mu \mid \mu \in \Lambda') \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, les morphismes $u : V_\bullet \rightarrow W_\bullet$ de $\mathcal{S}$ sont les applications ensemblistes $u : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ avec $V_\lambda \subset W_{u(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Notons par $\phi : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow A - \text{Alg}$ le foncteur avec $\phi(V_\bullet) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_X(V_\lambda)$, et tel que, pour tout u comme ci-dessus, $\phi(u) : \phi(W_\bullet) \rightarrow \phi(V_\bullet)$ est l'homomorphisme de A -algèbres :

$$(s_\mu \mid \mu \in \Lambda') \mapsto ((s_{u(\lambda)})_{V_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda) \quad \forall (s_\mu \mid \mu \in \Lambda') \in \phi(W_\bullet).$$

Pour tout $V_\bullet := (V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, on munit le produit

$$F(V_\bullet) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}(V_\lambda)$$

de sa structure évidente de $\phi(V_\bullet)$ -algèbre ; pour tout $u : V_\bullet \rightarrow W_\bullet$ comme ci-dessus, le système des restrictions $(\rho_{W_{u(\lambda)}, U_\lambda}^\mathcal{M} : \mathcal{M}(W_{u(\lambda)}) \rightarrow \mathcal{M}(V_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ induit une application $\phi(V_\bullet)$ -linéaire $Fu : F(W_\bullet) \rightarrow F(V_\bullet)_{[\phi(u)]}$. Puisque chaque restriction $\mathcal{M}_{|U_i}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{U_i} \tilde{\otimes}_{A_{U_i}} M_i$, il est clair que l'adjointe de $\rho_{W_{u(\lambda)}, U_\lambda}^\mathcal{M}$ est un isomorphisme $\mathcal{O}_X(V_\lambda)$ -linéaire $\mathcal{O}_X(V_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X(W_{u(\lambda)})} \mathcal{M}(W_{u(\lambda)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc l'adjointe de Fu est un isomorphisme $\phi(V_\bullet)$ -linéaire $\phi(V_\bullet) \otimes_{\phi(W_\bullet)} F(W_\bullet) \xrightarrow{\sim} F(V_\bullet)$. On obtient ainsi une section cartésienne $\underline{F} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow A\text{-AlgMod}$ de $\pi : A\text{-AlgMod} \rightarrow A\text{-Alg}$ sur ϕ (voir la définition 5.14). Noter ensuite que pour tous $V_\bullet$ et $W_\bullet$ comme ci-dessus, l'objet

$$V_\bullet \wedge W_\bullet := (V_\lambda \cap W_\mu \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda')$$

représente le produit de $V_\bullet$ et $W_\bullet$ dans $\mathcal{S}$, donc $(V_\bullet \wedge W_\bullet)^{\text{op}}$ représente le coproduit de $V_\bullet^{\text{op}}$ et $W_\bullet^{\text{op}}$ dans $\mathcal{S}^{\text{op}}$, et compte tenu du lemme 5.31(i) (et de l'exercice 3.6(iii)), on voit que ϕ commute avec ces coproduits. Posons $U_\bullet := (U_1, \dots, U_n) \in \text{Ob}(\mathcal{S})$; par construction, on a $\mathcal{S}(V_\bullet, U_\bullet) \neq \emptyset$ pour tout $V_\bullet \in \text{Ob}(\mathcal{S})$; en outre, $\phi(U_\bullet)$ est une A -algèbre fidèlement plate (lemme 5.31(iii) et problème 3.83(i.c)). D'après le problème 5.23(ii) et la proposition 5.22, on a alors un A -module M et un isomorphisme de sections cartésiennes $\omega : \underline{T}_M \xrightarrow{\sim} \underline{F}$, avec $\underline{T}_M : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow A\text{-AlgMod}$ comme dans l'exemple 5.15(i). D'autre part, le site $\mathcal{T}$ s'identifie avec une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}$: à savoir, à tout $V \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ on associe $(V_\lambda \mid \lambda \in \{\emptyset\}) \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, avec $V_\emptyset := V$. Par construction, la restriction de $\underline{F}$ à $\mathcal{T}^{\text{op}}$ coïncide avec la restriction $\mathcal{M}_{|\mathcal{T}}$ du faisceau $\mathcal{M}$ sur X , et la restriction de $\underline{T}_M$ coïncide avec la restriction $(A_\bullet \otimes_A M)_{|\mathcal{T}}$ du faisceau $A_\bullet \otimes_A M$ défini ci-dessus sur le site $\text{Rep}(A)$; la donnée de ω revient alors à celle d'un isomorphisme de faisceaux de A -modules sur $\mathcal{T}$:

$$(*) \quad (A_\bullet \otimes_A M)_{|\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{|\mathcal{T}}.$$

Or, avec l'exercice 5.35(ii), on voit aussitôt que les restrictions suivant les inclusions $\mathcal{T} \rightarrow \text{Rep}(A) \rightarrow \text{Ouv}(X)$ induisent des équivalences entre les catégories des faisceaux sur X , sur $\text{Rep}(A)$, et sur $\mathcal{T}$; mais le faisceau $A_\bullet \otimes_A M$ sur $\text{Rep}(A)$ est (à isomorphisme près) la restriction de $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$, donc $(*)$ se prolonge en un (unique) isomorphisme $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ de faisceaux, et on voit aisément qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules, CQFD.

Partie (ii.a) : Cela suit aussitôt de (i.a), (i.b), et de la remarque 2.15(iii).

Partie (ii.b) : Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent, $U' \subset U$ une inclusion de parties ouvertes affines de X , et $M := \mathcal{M}(U)$; d'après (i.b), la restriction $M \rightarrow \mathcal{M}(U')$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X(U')$ -modules $\mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(U')$, et par suite, si M est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. libre de rang fini), il en est de même pour le $\mathcal{O}_X(U')$ -module $\mathcal{M}(U')$. Cela montre que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre de type fini), il en est de même pour le $\mathcal{O}_U$ -module $\mathcal{M}_{|U}$. On peut donc remplacer X par sa partie ouverte affine V , et $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}_{|V}$, et pour $A := \mathcal{O}_X(X)$, il faut montrer que $M := \mathcal{M}(X)$ est un A -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. projectif de type fini). Mais par hypothèse, il existe un recouvrement $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ par des parties ouvertes affines, tel que $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_A M$ soit un $\mathcal{O}_X(U_i)$ -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. libre de rang fini) pour tout $i \in I$, et par compacité de X , on peut supposer que I soit un ensemble fini. Avec $B := \prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i)$, on déduit aisément que $B \otimes_A M$ est un B -module de type fini (resp. de présentation finie, resp. projectif de type fini), et par construction, B est une A -algèbre fidèlement plate (voir la preuve de la proposition 5.37) ; l'assertion découle alors du problème 3.83(ii.c) et de l'exercice 4.102(iii).

Partie (ii.c) : Avec la remarque 5.55(ii,iii), il est clair que pour toute partie ouverte $U \subset X$ on a $(\text{Ker } \phi)|_U = \text{Ker}(\phi|_U : \mathcal{M}|_U \rightarrow \mathcal{N}|_U)$, et de même pour $(\text{Coker } \phi)|_U$; de l'autre côté, il suffit de montrer que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert affine U tel que $(\text{Ker } \phi)|_U$ et $(\text{Coker } \phi)|_U$ soient des $(\mathcal{O}_X)|_U$ -modules quasi-cohérents. Au vu de (i.a), on est ainsi ramené au cas où $(X, \mathcal{O}_X) = \text{Spec } A$ pour un anneau A , et d'après (i.b) on peut supposer que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$, $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A N$, et $\phi = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A f$ pour une application A -linéaire $f : M \rightarrow N$. Dans ce cas, on vérifie aisément que la restriction $(\text{Ker } \phi)|_{\text{Rep}(A)}$ (resp. $(\text{Coker } \phi)|_{\text{Rep}(A)}$) de $\text{Ker } \phi$ (resp. de $\text{Coker } \phi$) au site $\text{Rep}(A)$ coïncide avec le faisceau $A_\bullet \otimes_A (\text{Ker } f)$ (resp. avec $A_\bullet \otimes_A (\text{Coker } f)$: notation de la preuve de (i.b)); par suite, $\text{Ker } \phi$ (resp. $\text{Coker } \phi$) est représenté par $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (\text{Ker } f)$ (resp. par $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (\text{Coker } f)$).

Remarque 5.105. Il faut avouer que notre solution du problème 5.58(i.b) n'est ni la plus rapide, ni la plus élémentaire : voir [36] et [51] pour des autres preuves. Notre méthode a au moins l'avantage de se généraliser essentiellement *verbatim* à des autres *topologies de Grothendieck* que l'on rencontre dans l'étude ultérieure de la géométrie algébrique, *e.g.* à la *topologie plate* ou la *topologie étale* d'un schéma.

Exercice 5.59 : Pour tout $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{H}$, soit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'ensemble des morphismes de préfaisceaux $\beta : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ qui sont $\mathcal{A}$ -bilinéaires, *i.e.* tels que pour tout $U \in \mathcal{T}$ l'application $\beta_U : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ soit $\mathcal{A}(U)$ -bilinéaire. Tout morphisme $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ de $\mathcal{A}$ -modules induit l'application

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \phi) : \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}') \quad \beta \mapsto \phi \circ \beta$$

d'où un foncteur bien défini $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, -) : \mathcal{A} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$.

Or, tout $\beta \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H})$ induit un unique morphisme de pré- $\mathcal{A}$ -modules $b : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $b(s \otimes t) = \beta(s, t)$ pour toute partie ouverte $U \subset X$ et tout $(s, t) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$. Ensuite, b se factorise à travers l'unité d'adjonction $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G}$ et un unique morphisme de $\mathcal{A}^a$ -modules $b^a : \mathcal{F} \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Autrement dit, $\mathcal{F} \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G}$ représente le foncteur $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, -)$, et le système des applications bilinéaires universelles

$$(\mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}(U) \mid U \in \mathcal{T})$$

fournit un élément universel $\omega_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H})$ pour ce foncteur. D'autre part, tout β comme ci-dessus se factorise à travers l'unité d'adjonction $u : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{F} \times \mathcal{G})^a = \mathcal{F}^a \times \mathcal{G}^a$ et un unique morphisme de faisceaux $\beta^a : \mathcal{F}^a \times \mathcal{G}^a \rightarrow \mathcal{H}$; on voit aisément que β^a est $\mathcal{A}^a$ -bilinéaire (pour cela, on peut par exemple raisonner avec les données de recollement locales, comme dans le §5.3.1), donc se factorise à son tour à travers l'élément universel $\omega_{\mathcal{F}^a, \mathcal{G}^a} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}^a}(\mathcal{F}^a \times \mathcal{G}^a, \mathcal{H})$ et un unique morphisme de $\mathcal{A}^a$ -modules $b' : \mathcal{F}^a \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G}^a \rightarrow \mathcal{H}$. Autrement dit, $\mathcal{F}^a \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \mathcal{G}^a$ représente encore le même foncteur $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, -)$ (et l'élément universel correspondant est $\omega_{\mathcal{F}^a, \mathcal{G}^a} \circ u$), donc l'isomorphisme souhaité est fourni comme d'habitude par le lemme 2.4(i).

Exercice 5.60 : Pour tout pré- $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ on a un morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}_{[\phi]} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$ tel que $\eta_{\mathcal{F}, U}(a) := 1 \otimes a$ pour toute partie ouverte $U \subset X$ et tout $a \in \mathcal{F}(U)$. De l'autre côté, pour tout pré- $\mathcal{B}$ -module $\mathcal{G}$ on a un morphisme $\mathcal{B}$ -linéaire $\varepsilon_{\mathcal{G}} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varepsilon_{\mathcal{G}, U}(b \otimes a) := ba$ pour toute partie ouverte $U \subset X$, tout $a \in \mathcal{G}(U)$, et tout $b \in \mathcal{B}(U)$. On vérifie aisément que les associations : $\mathcal{F} \mapsto \eta_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{G} \mapsto \varepsilon_{\mathcal{G}}$ définissent des transformations naturelles $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{A} - \text{pré.Mod}} \rightarrow (-)_{[\phi]} \circ (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} -)$ et respectivement $\varepsilon : (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} -) \circ (-)_{[\phi]} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{B} - \text{pré.Mod}}$. En outre, η et ε vérifient les identités triangulaires du problème 2.13(ii), et ils sont ainsi l'unité et la co-unité d'une unique adjonction pour le couple $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} -, (-)_{[\phi]})$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Rappelons ensuite que le foncteur $(-)^a : \mathcal{B} - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{B}^a - \text{Mod}$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli; compte tenu de l'exercice 2.17(i), il s'ensuit aussitôt que $\mathcal{B} \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}} -$ est adjoint à gauche de $(-)_{[\phi]} : \mathcal{B}^a - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{pré.Mod}$.

Exercice 5.61, partie (i) : D'après la remarque 5.55(ii,iii) les noyaux et les conoyaux sont représentables dans $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ et $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$, donc aussi tout égaliseur et tout coégaliseur. Afin de vérifier la complétude (resp. cocomplétude), il suffit alors de montrer que le produit (resp. le coproduit) de toute petite famille est de même représentable dans ces catégories (proposition 2.40). Soit alors $\mathcal{M}_\bullet := (\mathcal{M}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une petite famille de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules, et munissons $\mathcal{M}(U) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda(U)$ de sa structure naturelle de $\mathcal{O}_X(U)$ -module, pour toute partie ouverte $U \subset X$; évidemment l'association $U \mapsto \mathcal{M}(U)$ définit un pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{M}$ (avec les restrictions évidentes $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$, pour toute inclusion $V \subset U$ de parties ouvertes), et on voit aisément que $\mathcal{M}$ représente la limite de la famille $\mathcal{M}_\bullet$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. De même on construit la colimite de $\mathcal{M}_\bullet$ dans $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$. Ensuite, puisque le foncteur $(-)^a$ du §5.3.1 est adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$, on peut raisonner comme dans la solution de l'exercice 4.90(i) pour vérifier que $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ est complète et cocomplète.

Partie (ii) : Evidemment les catégories $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ et $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$ sont additives. En outre, d'après la remarque 5.55(ii), la formation des noyaux et conoyaux dans $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$ commute avec le foncteur d'oubli $F : \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod}$; comme tout morphisme de $\mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod}$ est strict (exercice 4.90(ii)), il s'ensuit aussitôt qu'il en est de même pour tout morphisme de $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$, donc cette dernière est une catégorie abélienne. De même, puisque la formation des noyaux et conoyaux dans $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ commute avec le foncteur d'oubli $G : \mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod}$, on déduit que $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ est abélienne. Ensuite, soit $\mathcal{M}$ un pré- $\mathcal{O}_X$ -module, et $\mathcal{N} \in \text{Sub}(\mathcal{M})$, de sorte que $F\mathcal{N} \in \text{Sub}(F\mathcal{M})$; mais on sait déjà que $\text{Sub}(F\mathcal{M})$ est un ensemble (exercice 4.90(ii)), donc de même pour $\text{Sub}(\mathcal{M})$. En outre, soit $(\mathcal{N}'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille filtrante de sous-objets de $\mathcal{M}$; comme F commute avec toute colimite, on déduit aisément que

$$\mathcal{N} \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{N}'_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{N} \cap \mathcal{N}'_\lambda)$$

car la même identité est vérifiée pour toute famille filtrante de sous-objets de $F\mathcal{M}$. Cela achève de vérifier que $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$ est une catégorie de Grothendieck. Quitte à remplacer F par le foncteur d'oubli G , le même raisonnement montre que $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$ est une catégorie de Grothendieck : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Ensuite, soit $\mathcal{A}$ l'unique préfaisceau d'anneaux sur X tel que $\mathcal{A}(U) := \mathbb{Z}$ pour toute partie ouverte $U \subset X$; évidemment $\mathcal{A} - \text{pré.Mod}$ est la catégorie $\mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod}$ des préfaisceaux de groupes abéliens sur X , et il existe un unique morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_X$ de préfaisceaux d'anneaux. Rappelons que le foncteur $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{A}} - : \mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$ est adjoint à gauche de F (exercice 5.60); d'après l'exercice 4.90(ii), $\mathbb{Z}_{\widehat{X}} - \text{Mod}$ admet un générateur projectif $\mathcal{P}$, et avec l'exercice 4.6(ii) on déduit que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ est un objet projectif de $\mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$. En outre, avec l'exercice 4.3(i) on voit aisément que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ est un générateur; en dernier lieu, avec le même exercice on déduit aussi que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ est un générateur de $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$.

Exercice 5.62, partie (i) : Noter que l'unité d'adjonction $\eta : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y$ est la composition de l'unité $\eta_1 : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ avec $f_*(\eta_2)$, où $\eta_2 : f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y$ est l'unité de l'adjonction pour le couple formé de l'inclusion $\tilde{X} \rightarrow \widehat{X}$ et son adjoint à gauche $(-)^a : \widehat{X} \rightarrow \tilde{X}$. D'après la remarque 4.89(iv), η_2 est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux, donc de même pour $f_*(\eta_2)$; d'autre part, $\eta_{1,U} : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow (f^{-1} \mathcal{O}_Y)(f^{-1}U)$ est l'application telle que $a \mapsto [a, U]_{f^{-1}U}$, pour toute partie ouverte $U \subset X$ et tout $a \in \mathcal{O}_Y(U)$ (notation du §4.3.2). Compte tenu de la remarque 5.54(ii), on voit que η_1 est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux, et donc de même pour η . Cela posé, on va montrer que le foncteur

$$f_*(-)_{[\eta]} : \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \quad \mathcal{G} \mapsto (f_* \mathcal{G})_{[\eta]}$$

est adjoint à droite de $\tilde{f}^{-1} : \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \rightarrow \tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y - \text{Mod}$. Or, pour tous $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\tilde{Y})$ et $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\tilde{X})$, soient $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow f_*\tilde{f}^{-1}\mathcal{F}$ et $\varepsilon_{\mathcal{G}} : \tilde{f}^{-1}f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ l'unité et la coïunité de l'adjonction canonique pour le couple $(\tilde{f}^{-1}, f_*)$. Ainsi, l'adjonction associe à tout morphisme $\phi : \tilde{f}^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de $\tilde{X}$ le morphisme $f_*(\phi) \circ \eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$, et son inverse associe à tout morphisme $\psi : \mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ de $\tilde{Y}$ le morphisme $\varepsilon_{\mathcal{G}} \circ \tilde{f}^{-1}(\psi)$. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module, $\mathcal{G}$ un $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module, et si ϕ est $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire, alors $(f_*\phi)_{[\eta]}$ est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire, et si ψ est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire, $\tilde{f}^{-1}(\psi)$ est $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire; par suite, on est ramené à vérifier que $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow (f_*\tilde{f}^{-1}\mathcal{F})_{[\eta]}$ est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire et que $\varepsilon_{\mathcal{G}} : \tilde{f}^{-1}(f_*\mathcal{G})_{[\eta]} \rightarrow \mathcal{G}$ est $\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire. Mais $\eta_{\mathcal{F}} = f_*(\eta_{2,\mathcal{F}})_{[\eta_1]} \circ \eta_{1,\mathcal{F}}$, avec les unités $\eta_{1,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow f_*f^{-1}(\mathcal{F})_{[\eta_1]}$ et $\eta_{2,\mathcal{F}} : f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\mathcal{F})_{[\eta_2]}$; on sait déjà que $\eta_{2,\mathcal{F}}$ est $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire (voir le §5.3.1), donc $f_*(\eta_{2,\mathcal{F}})_{[\eta_1]}$ est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire. Avec la remarque 5.54(ii), on voit aussi aisément que $\eta_{1,\mathcal{F}}$ est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire, d'où l'assertion pour $\eta_{\mathcal{F}}$. En dernier lieu, $\varepsilon_{\mathcal{G}} = (\varepsilon_{1,\mathcal{G}})^a$, où $\varepsilon_{1,\mathcal{G}} : f^{-1}f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ est la coïunité pour le couple $(\hat{f}^{-1}, f_*)$, donc il suffit de vérifier que $\varepsilon_{1,\mathcal{G}}$ est $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire (voir le §5.3.1). Mais cela est clair, car $\varepsilon_{1,\mathcal{G}}$ associe à toute partie ouverte $V \subset X$ l'application $f^{-1}f_*\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ telle que $[s, U]_V \mapsto s_V$ (rappelons que $[s, U]_V$ est la classe du couple formé de la partie ouverte $U \subset Y$ avec $V \subset f^{-1}U$, et de $s \in \mathcal{F}(f^{-1}U)$).

Or, $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -$ est la composition de $\tilde{f}^{-1}$ et $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y} - : \tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod}$. D'après les exercices 5.60 et 2.17(i), il est alors adjoint à gauche de $f_*(-)_{[\eta]} \circ (-)_{[f^\#]}$. Mais noter que pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{G}$ on a $f_*(\mathcal{G}_{[f^\#]})_{[\eta]} = ((f_*\mathcal{G})_{[f_*(f^\#)]})_{[\eta]} = (f_*\mathcal{G})_{[f_*(f^\#) \circ \eta]}$, et d'autre part $f^\flat = f_*(f^\#) \circ \eta$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Posons $A := \mathcal{O}_Y(Y)$ et $B := \mathcal{O}_X(X)$; noter que $f^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induit un homomorphisme d'anneaux $f_Y^\flat : A \rightarrow B$. On se ramène aussitôt au cas où $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A M$ pour un A -module M , et on exhibera dans ce cas un isomorphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_B M_B$, avec $M_B := B \otimes_A M$. Pour cela, soit $\underline{T}_A := (T_A, \mathcal{O}_{T_A})$ l'espace annelé tel que $T_A := \{t_A\}$ est un ensemble avec un seul élément, muni de l'unique topologie $\mathcal{T}_{T_A}$, et $\mathcal{O}_{T_A}$ est l'unique faisceau d'anneaux sur T_A avec $\Gamma(\mathcal{O}_{T_A}) = A$. Définissons de même l'espace annelé $\underline{T}_B$; on a un diagramme commutatif d'espaces annelés :

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ \pi_B \downarrow & & \downarrow \pi_A \\ \underline{T}_B & \xrightarrow{g} & \underline{T}_A \end{array}$$

où $g := (g, g^\flat)$ est l'unique morphisme d'espaces annelés $\underline{T}_B \rightarrow \underline{T}_A$ avec $g_{T_A}^\flat = f_Y^\flat$, et $\pi_A := (\pi_A, \pi_A^\flat)$ est l'unique morphisme d'espaces annelés $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \underline{T}_A$ avec $(\pi_A^\flat)_{T_A} = \text{Id}_A$, et de même pour π_B . Avec cette notation, on vérifie aisément que le $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A M$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_A}} \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est l'unique $\mathcal{O}_{T_A}$ -module avec $\mathcal{M}(T_A) = M$. De même, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_B M_B \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_B}} \mathcal{M}_B$, où $\mathcal{M}_B$ est l'unique $\mathcal{O}_{T_B}$ -module avec $\mathcal{M}_B(T_B) = M_B$. Or, les compositions de foncteurs

$$F := (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -) \circ (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_A}} -) \quad \text{et} \quad G := (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_B}} -) \circ (\mathcal{O}_{T_B} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_A}} -)$$

sont adjointes à gauche de la composition $\pi_{A*} \circ \underline{f}_* = \underline{g}_* \circ \pi_{B*}$, d'après (i) et l'exercice 2.17(i); mais alors F et G sont isomorphes, et pour conclure il suffit de remarquer l'isomorphisme évident de $\mathcal{O}_{T_B}$ -modules $\mathcal{M}_B \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T_B} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{T_A}} \mathcal{M}$.

Partie (iii) : Compte tenu de l'exercice 5.59, il suffit d'exhiber un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}')$$

de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules. D'autre part, avec la proposition 3.20, on obtient aisément un isomorphisme naturel de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}').$$

Ainsi, on est ramené à exhiber un isomorphisme naturel de pré- $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -modules :

$$f^{-1}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}'.$$

Mais compte tenu de l'exercice 5.59, on voit aisément que $f^{-1}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}')$ représente le foncteur $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}', f_*) : \mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \text{Ens}$, composition de $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}', -) : \mathcal{O}_Y - \text{pré.Mod} \rightarrow \text{Ens}$ avec l'adjoint à droite $f_* : \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y - \text{pré.Mod}$ du foncteur f^{-1} . On est ainsi ramené à exhiber un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}', f_*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{G} \times f^{-1}\mathcal{G}', -).$$

Or, à toute application $\mathcal{O}_Y$ -bilinéaire $\beta : \mathcal{G} \times \mathcal{G}' \rightarrow f_*\mathcal{F}$ correspond par adjonction un unique morphisme de préfaisceaux $\beta^* : f^{-1}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}') = f^{-1}(\mathcal{G}) \times f^{-1}(\mathcal{G}') \rightarrow \mathcal{F}$ et par simple inspection on vérifie que β^* est $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -bilinéaire, d'où l'assertion.

Exercice 5.65, partie (i) : Si ϕ_x est injective (resp. surjective, resp. bijective) pour tout $x \in X$, alors ϕ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) de la catégorie $\tilde{X}$ (théorème 4.97), donc aussi de la catégorie $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$. Ensuite, si ϕ est un monomorphisme, il vient $\text{Ker}(\phi) = 0$, donc $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est injective pour toute partie ouverte $U \subset X$ (remarque 5.55(ii)), donc ϕ_x est injective pour tout $x \in X$. Evidemment, si ϕ est un isomorphisme, chaque ϕ_x est bijective. En dernier lieu, soit ϕ un épimorphisme de $\mathcal{O}_X - \text{Mod}$, et pour tout $x \in X$ soient $j_x : \{x\} \rightarrow X$ l'inclusion, et $X(x) := (\{x\}, \mathcal{O}_{X(x)})$ l'espace annelé avec $\mathcal{O}_{X(x)} := \tilde{j}_x^{-1}\mathcal{O}_X$. On a un morphisme naturel d'espaces annelés $(j_x, j_x^\#) : X(x) \rightarrow X$ avec $j_x^\# := \text{Id}_{\mathcal{O}_{X(x)}}$, ainsi qu'un isomorphisme naturel évident de $\mathcal{O}_{X(x)}$ -modules $\mathcal{O}_{X(x)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x$ pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$. Or, $\mathcal{O}_{X(x)} \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ est un foncteur exact à droite, car il est adjoint à gauche (proposition 2.49(ii)); comme ϕ est un épimorphisme, il en est alors de même pour $\mathcal{O}_{X(x)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \phi$ (exercice 2.66(iv)), et ce dernier est naturellement identifié avec $\mathcal{O}_{X(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \phi_x$, par suite ϕ_x est un épimorphisme de $\mathcal{O}_{X,x} - \text{Mod}$, i.e. une surjection.

Partie (ii) : Trivialement (a) $\Rightarrow$ (b). Montrons ensuite que (b) $\Rightarrow$ (c). L'assertion étant local sur X , on peut supposer que l'on a des isomorphismes $\mathcal{O}_X$ -linéaires :

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$$

avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, pour un A -module M de type fini et un A -module libre L . La composition ϕ de ces isomorphismes induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire $\phi_x : \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A L \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M$ (remarque 5.64(ii)); fixons une base $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de L , et un système fini de générateurs $x_1, \dots, x_n$ de M . On a alors une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et un système $(a_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda', i = 1, \dots, n)$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $\phi_x(\sum_{\lambda \in \Lambda'} a_{\lambda,i} \otimes e_\lambda) = 1 \otimes x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x , on peut supposer que chaque $a_{\lambda,i}$ soit la classe d'une section globale $b_{\lambda,i} \in A$, et que l'on ait $\phi_X(\sum_{\lambda \in \Lambda'} b_{\lambda,i} \otimes e_\lambda) = 1 \otimes x_i$ dans $\Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M)$, pour $i = 1, \dots, n$. Notons par $L' \subset L$ le facteur direct engendré par $(e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$; la restriction $\psi : \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L' \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$ de ϕ induit par suite un épimorphisme $\mathcal{O}_{X,t}$ -linéaire $\psi_t : \mathcal{O}_{X,t} \otimes_A L' \rightarrow \mathcal{O}_{X,t} \otimes_A M$, pour tout $t \in X$. Mais ψ_t est injective, car composition de ϕ_t avec l'injection $\mathcal{O}_{X,t} \otimes_A L' \rightarrow \mathcal{O}_{X,t} \otimes_A L$; ainsi ψ_t est un isomorphisme pour tout $t \in X$, i.e. ψ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules, d'après (i), et finalement $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L'$, d'où (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) : L'assertion étant locale sur X , on peut supposer que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A P$, avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et un A -module projectif P de type fini. Ensuite, l'homomorphisme d'anneaux $\text{Id}_A : A \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$ correspond, par adjonction, à un unique morphisme $\underline{f} := (f, f^\flat) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y} := \text{Spec } A$ d'espaces localement annelés (théorème 5.47); soit aussi

$\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ l'espace annelé avec $T = \{t\}$, muni de l'unique topologie $\mathcal{T}_T$, et où $\mathcal{O}_T$ est l'unique faisceau d'anneaux sur T tel que $\Gamma(\mathcal{O}_T) = A$; on a un morphisme évident d'espaces annelés $\underline{g} := (g, g^\flat) : \underline{Y} \rightarrow \underline{T}$ tel que $g^\flat_T = Id_A$, de sorte que $(h, h^\flat) : \underline{g} \circ \underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{T}$ soit l'unique morphisme d'espaces annelés tel que $h^\flat_T = Id_A$. Par inspection directe des définitions, on voit que $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A P$) est isomorphe au $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}$ (resp. au $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}$), avec $\mathcal{P} := \mathcal{O}_T \tilde{\otimes}_A P$; d'autre part la composition $(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -) \circ (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_T} -)$ est adjointe à gauche de $g_* \circ f_* = h_* : \mathcal{O}_X - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_T - \text{Mod}$ (exercices 5.62(i) et 2.17(i)), donc elle est isomorphe au foncteur $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_T} -$. On obtient ainsi un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A P)$; mais $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A P$ est localement libre de type fini (théorème 4.103), donc de même pour $\mathcal{F}$.

Exercice 5.66, partie (i) : Comme la topologie de X est induite par Y , on voit aisément que $\underline{f}_*$ est fidèle : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Ensuite, soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$ -modules, et $\phi : \underline{f}_* \mathcal{F} \rightarrow \underline{f}_* \mathcal{G}$ un morphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules; d'après l'exercice 4.93(ii), il existe un unique morphisme de faisceaux $\phi^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $f_*(\phi^*) = \phi$, et puisque $\mathcal{O}_Y = f_* \mathcal{O}_X$, on voit aisément que ϕ^* est $\mathcal{O}_X$ -linéaire, donc $\underline{f}_*$ est un foncteur plein.

Partie (ii) : D'après (i), l'exercice 5.62(i) et la proposition 2.16(iii), la coïté $\varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} (\underline{f}_* \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$, et il suffit de montrer que l'unité $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \underline{f}_*(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G})$ est un isomorphisme pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{G}$. Or, d'après l'exercice 4.93(ii) et la proposition 2.16(iii), la coïté

$$\varepsilon'_{\mathcal{O}_Y} = f^\sharp : \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y = \tilde{f}^{-1} f_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$$

est un isomorphisme de faisceaux d'anneaux; par suite le foncteur

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y} - : \tilde{f}^{-1} \mathcal{O}_Y - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \text{Mod}$$

est une équivalence, et on est ramené à vérifier que l'unité $\eta'_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \underline{f}_* \tilde{f}^{-1} \mathcal{G}$ est un isomorphisme pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{G}$, i.e. que $\eta'_{\mathcal{G}, y} : \mathcal{G}_y \rightarrow (f_* f^{-1} \mathcal{G})_y$ est un isomorphisme pour tout $y \in Y$ (exercice 5.65(i)).

Si $y \in U := Y \setminus f(X)$, on a $\mathcal{O}_{Y, y} = 0$ (car U est une partie ouverte de Y , et $f_* \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$ pour toute partie ouverte $V \subset U$: voir la remarque 4.85(iii)), par suite $\mathcal{G}_y = (f_* \tilde{f}^{-1} \mathcal{G})_y = 0$, et alors l'assertion est claire. Si $y \in f(X)$, soit $x \in X$ tel que $y = f(x)$; par définition, $(f_* \tilde{f}^{-1} \mathcal{G})_y$ représente la colimite du système $(\tilde{f}^{-1} \mathcal{G}(f^{-1}V) \mid V \in \mathcal{W}_y^{\text{op}})$, indexé par l'ensemble filtrant $\mathcal{W}_y^{\text{op}}$ des voisinages ouverts de y dans Y . Mais noter que la famille $(f^{-1}V \mid V \in \mathcal{W}_y^{\text{op}})$ est aussi l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X , donc $(f_* \tilde{f}^{-1} \mathcal{G})_y = (\tilde{f}^{-1} \mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_y$ (exercice 4.98(ii)), et par inspection directe, on voit aisément que sous ces identifications naturelles, l'application $\eta'_{\mathcal{G}, y}$ correspond à l'identité de $\mathcal{G}_y$, d'où l'assertion. Il reste à vérifier que $\underline{f}_*$ se restreint en une équivalence de catégories

$$\mathcal{O}_X - \text{Qcoh} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y - \text{Qcoh}.$$

Mais, puisque $\underline{f}_*$ est une équivalence, il en est de même pour son adjoint à gauche $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -$ (remarque 2.15(iii)), et ce dernier envoie la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}_Y - \text{Qcoh}$ de $\mathcal{O}_Y - \text{Mod}$ dans $\mathcal{O}_X - \text{Qcoh}$ (exercice 5.62(ii)); il suffit alors de montrer que $\underline{f}_* \mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent, pour tout $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent $\mathcal{F}$. Or, soit $V \subset Y$ une partie ouverte, munissons V et $U := f^{-1}V$ des topologies induites par Y et respectivement X , et posons $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$ et $\mathcal{O}_V := \mathcal{O}_Y|_V$; évidemment la topologie de U est induite par celle de V via la restriction $g : U \rightarrow V$ de f . En outre $\mathcal{O}_V = g_* \mathcal{O}_U$, et avec $\underline{g} := (g, Id_{\mathcal{O}_V}) : (U, \mathcal{O}_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$, on a $\underline{g}_*(\mathcal{F}|_U) = (\underline{f}_* \mathcal{F})|_V$. Quitte à remplacer X et Y par U et V , et $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}|_U$, on peut alors supposer que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \otimes_A M$, avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathcal{O}_Y)$, pour un A -module M . Dans ce cas, on a plus précisément un isomorphisme $\mathcal{O}_Y$ -linéaire $\phi : \mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A M \xrightarrow{\sim} \underline{f}_* \mathcal{F}$; en effet, puisque $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} -$ est un

quasi-inverse de f_* , la donnée de ϕ équivaut à celle d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\psi : \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_A M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, et un tel ψ est fourni par l'exercice 5.62(ii).

Partie (iii) : $X \setminus Z$ est formé des $x \in X$ tels que $1 = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$; cette identité persiste dans un voisinage ouvert de x dans X , donc $X \setminus Z$ est une partie ouverte, et Z est fermé dans X . Afin de vérifier que $j^b : \mathcal{O}_X \rightarrow j_* \mathcal{O}_Z$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $j_x^b : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (j_* \mathcal{O}_Z)_x$ est bijectif pour tout $x \in X$; mais par construction, $\mathcal{O}_Z = \tilde{j}^{-1} \mathcal{O}_X$, et j^b est l'unité d'adjonction $\mathcal{O}_X \rightarrow j_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{O}_X$. On raisonne alors comme dans la solution de (ii) : l'assertion est claire si $x \in X \setminus Z$, car alors $\mathcal{O}_{X,x} = (j_* \mathcal{O}_Z)_x = 0$, et pour $x \in Z$ on a un isomorphisme naturel $(j_* \mathcal{O}_Z)_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$ identifiant j_x^b avec l'identité de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Partie (iv) : On déduit aussitôt de (ii) et (iii) que j_* est une équivalence, induisant une équivalence entre les respectives sous-catégories de modules quasi-cohérents. En outre, la solution de (ii) entraîne aisément que $\mathcal{F}$ est localement libre de type fini (resp. inversible) si et seulement s'il en est de même pour $j_* \mathcal{F}$.

Exercice 5.69, partie (i) : D'après la remarque 5.68(iv) on a :

$$(*) \quad (f^{-1} \mathcal{I} \mathcal{O}_Y)_y = \mathcal{I}_{f(y)} \cdot \mathcal{O}_{Y,y} \quad \forall y \in Y.$$

Or, soient $U \subset X$, $V \subset Y$ des parties ouvertes avec $fV \subset U$, et $f|_V : (V, \mathcal{O}_V) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$ la restriction de f , de sorte que $\mathcal{O}_U = (\mathcal{O}_X)|_U$ et $\mathcal{O}_V = (\mathcal{O}_Y)|_V$; soit aussi $\mathcal{I}_U \subset \mathcal{O}_U$ la restriction de $\mathcal{I}$. On déduit de (*) que $f|_V^{-1} \mathcal{I}_U \cdot \mathcal{O}_V$ est la restriction de $f^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$. Quitte à remplacer Y et X par des sous-schémas ouverts affines, disons $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, on peut ainsi supposer que $\mathcal{I} = I \mathcal{O}_X$ pour un idéal $I \subset A$, et on a alors $\mathcal{I}_x = I \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$; avec (*) il vient $(f^{-1} \mathcal{I} \mathcal{O}_Y)_y = I \mathcal{O}_{Y,y}$ pour tout $y \in Y$, donc $f^{-1} \mathcal{I} \mathcal{O}_Y = (IB) \cdot \mathcal{O}_Y$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : L'isomorphisme souhaité $\mathcal{O}_X \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ suit du problème 5.58(i.b). D'après l'exercice 5.65(ii), pour tout $x \in X$ il existe $f \in A$ tel que $x \in D(f) \subset X$, et un isomorphisme $(\mathcal{O}_X)|_{D(f)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}|_{D(f)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X)|_{D(f)} \otimes_{A_f} (A_f \otimes_A M)$ (voir le problème 5.58(i.a)), qui est donc induit par un isomorphisme de A_f -modules $A_f \xrightarrow{\sim} A_f \otimes_A M$. Cela achève de montrer que M est un A -module inversible.

Exercice 5.78 : Soit Σ l'ensemble des (U, U', V) , où $U \subset Y$, $U' \subset Y'$, $V \subset X$ sont des parties ouvertes affines avec $g(U') \subset U \supset f(V)$. On a d'un côté $g^{-1}f(X) = \bigcup_{(U, U', V) \in \Sigma} U' \cap g^{-1}(f(V))$, et de l'autre côté

$$f'(X') = \bigcup_{(U, U', V) \in \Sigma} U' \cap f'(g'^{-1}V) = \bigcup_{(U, U', V) \in \Sigma} f'(f'^{-1}U' \cap g'^{-1}V).$$

Donc, il suffit de vérifier que $U' \cap g^{-1}(f(V)) = f'(f'^{-1}U' \cap g'^{-1}V)$ pour tout $(U, U', V) \in \Sigma$, et noter que $f'^{-1}U' \cap g'^{-1}V$ s'identifie naturellement à l'espace sous-jacent au sous-schéma ouvert $\underline{U}' \times_{\underline{U}} \underline{V}$ de $\underline{X}'$ (avec $\underline{U} := U \times_Y Y$, et de même pour $\underline{U}'$ et $\underline{V}$: voir l'observation 5.77). Autrement dit, on peut supposer que $\underline{X}$, $\underline{Y}$ et $\underline{Y}'$ soient affines, et dans ce cas l'assertion est déjà connue, d'après l'exercice 3.72.

Exercice 5.80, partie (i) : Evidemment, si f est de type fini (resp. de présentation finie), ϕ est un morphisme de type fini (resp. de présentation finie). Réciproquement, supposons que ϕ soit de type fini (resp. de présentation finie); ainsi, pour tout $y \in Y$ il existe des voisinages ouverts affines $U \subset Y$ de y , et $V \subset X$ de $x := \phi(y)$ avec $\phi(U) \subset V$, tels que ϕ^b induit un homomorphisme

$$g : A_V := \mathcal{O}_X(V) \rightarrow B_U := \mathcal{O}_Y(U)$$

de type fini (resp. de présentation finie). Soient alors $a \in A, b \in B$ tels que $x \in D(a) \subset V$ et $y \in D(b) \subset U \cap \phi^{-1}D(a)$; d'après le lemme 5.31(ii) (et la remarque 5.49(i)), l'unique homomorphisme $A_a \rightarrow (A_V)_a$ de A -algèbres (resp. $B_b \rightarrow (B_U)_b$ de B -algèbres) est un

isomorphisme. En outre, comme $\phi(D(b)) \subset D(a)$, l'image de a est inversible dans B_b , donc on obtient un diagramme commutatif de A -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} A_V & \xrightarrow{g} & B_U \\ j_a \downarrow & & \downarrow j_b \\ A_a & \xrightarrow{h} & B_b \end{array}$$

où j_a et j_b sont les localisations. En particulier, $j_b : B_U \rightarrow (B_U)_b = B_U[T]/(bT - 1)$ est de présentation finie, et de même pour j_a . D'après l'exercice 1.4, $j_b \circ g$ est alors de type fini (resp. de présentation finie), par suite il en est de même pour h (exercice 3.17(iv)). Comme la localisation $A \rightarrow A_a$ est de présentation finie, B_b est ainsi une A -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), encore par l'exercice 1.4. Puisque Y est compact, on trouve alors une partie finie $b_\bullet := \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset B$ avec : (a) $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(b_\lambda)$, et telle que : (b) $B[b_\lambda^{-1}]$ soit une A -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), pour tout $\lambda \in \Lambda$. La condition (a) revient à dire que l'idéal engendré par $b_\bullet$ contient 1, i.e. il existe une partie $c_\bullet := \{c_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset B$ avec $\sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda c_\lambda = 1$. Soit $A' := A[b_\lambda, c_\lambda \mid \lambda \in \Lambda] \subset B$; évidemment l'idéal de A' engendré par la partie $b_\bullet$ contient encore 1, et l'inclusion $A' \rightarrow B$ induit un homomorphisme de type fini $h_\lambda : A'[b_\lambda^{-1}] \rightarrow B[b_\lambda^{-1}]$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi, les localisations induisent un homomorphisme fidèlement plat $A' \rightarrow A'' := \prod_{\lambda \in \Lambda} A'[b_\lambda^{-1}]$ (problème 3.83(i.c)), et $A'' \otimes_{A'} B = \prod_{\lambda \in \Lambda} B[b_\lambda^{-1}]$ est une A'' -algèbre de type fini; par suite, B est une A' -algèbre de type fini (problème 3.83(ii.c)), donc aussi une A -algèbre de type fini.

En dernier lieu, si chaque $B[b_\lambda^{-1}]$ est une A -algèbre de présentation finie, on sait déjà que B est une A -algèbre de type fini, donc choisissons un homomorphisme surjectif $\pi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ de A -algèbres, et pour tout $\lambda \in \Lambda$ soient $p_\lambda, q_\lambda \in A[X_\bullet]$ avec $\pi(p_\lambda) = b_\lambda$ et $\pi(q_\lambda) = c_\lambda$; soient en outre $u := \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda q_\lambda$, et $C := A[X_\bullet]_u$. Puisque $\pi(u) = 1$, l'homomorphisme π se factorise à travers un homomorphisme $\pi' : C \rightarrow B$ de A -algèbres, qui à son tour induit par localisation un homomorphisme $\pi_\lambda : C[p_\lambda^{-1}] \rightarrow B[b_\lambda^{-1}]$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Comme $C[p_\lambda^{-1}]$ est une A -algèbre de type fini, il s'ensuit que π_λ est de présentation finie pour tout tel λ (exercice 3.17(iv)); d'autre part, par construction on a $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(p_\lambda) = \text{Spec } C$, donc les localisations induisent un homomorphisme fidèlement plat $C \rightarrow C' := \prod_{\lambda \in \Lambda} C[p_\lambda^{-1}]$, et $C' \otimes_C B = \prod_{\lambda \in \Lambda} B[b_\lambda^{-1}]$ est une C' -algèbre de présentation finie, donc B est une C -algèbre de présentation finie (problème 3.83(ii.c)), et comme C est une A -algèbre de présentation finie, il en est de même pour la A -algèbre B (exercice 1.4).

Partie (ii) : Cela découle de la proposition 3.77 et de la remarque 5.64(iii).

Exercice 5.82, partie (i) : Soit $x \in X$, et posons $y := f(x)$ et $z := g(y)$. Par hypothèse, il existe des voisinages ouverts affines $V \subset Y$ de y et $W \subset Z$ de z , avec $gV \subset W$, tels que g^b induit un homomorphisme d'anneaux $\phi : A := \mathcal{O}_Z(W) \rightarrow B := \mathcal{O}_Y(V)$ de type fini (resp. de présentation finie). En outre, la restriction $f^{-1}(V) \times_X \underline{X} \rightarrow V \times_Y \underline{Y}$ de f est encore localement de type fini (resp. localement de présentation finie : voir le lemme 5.81(i)), donc on a des voisinages ouverts affines $U \subset f^{-1}V$ de x et $V' \subset V$, avec $fU \subset V'$, tels que f^b induit un homomorphisme d'anneaux $\psi : B' := \mathcal{O}_Y(V') \rightarrow C := \mathcal{O}_X(U)$ de type fini (resp. de présentation finie). Soit aussi $\rho : B \rightarrow B'$ l'homomorphisme de restriction. Avec cette notation, les restrictions $U \times_X \underline{X} \rightarrow V' \times_Y \underline{Y}$ de f et $V \times_Y \underline{Y} \rightarrow W \times_X \underline{X}$ de g s'identifient avec $\text{Spec}(\psi) : \text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B'$ et respectivement $\text{Spec}(\phi) : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, et V' s'identifie avec la partie ouverte de $\text{Spec } B$ représentée par la B -algèbre B' (remarque 5.49(i)). Soit alors $b \in B$ tel que $y \in V'' := D(b) \subset V'$, et posons $b' := \rho(b)$, $c := \psi(b')$, et $U' := U \cap f^{-1}V''$; il vient $\mathcal{O}_Y(V'') = B'[b'^{-1}] = B[b^{-1}]$ (lemme 5.31(ii)), et U' s'identifie avec la partie ouverte $D(c) \subset \text{Spec } C$, donc $\mathcal{O}_X(U') = C[c^{-1}]$. Évidemment la B -algèbre $B[b^{-1}] = B[T]/(bT - 1)$ est de présentation finie, et $C[c^{-1}]$ est une $B'[b'^{-1}]$ -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), donc si ϕ est

de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même pour la composition $A \rightarrow B \rightarrow B[b^{-1}] = B'[b'^{-1}] \rightarrow C[c^{-1}]$ (exercice 1.4), i.e. $(g \circ f)^b$ induit un homomorphisme $\mathcal{O}_Z(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$ de type fini (resp. de présentation finie).

Partie (ii) : Soient x, y et z comme ci-dessus, et $W \subset Z$ un voisinage ouvert affine de z ; posons $\underline{Z}' := W \times_Z \underline{Z}$, $\underline{Y}' := g^{-1}(W) \times_Y \underline{Y}$ et $\underline{X}' := (g \circ f)^{-1}W \times_X \underline{X}$. D'après le lemme 5.81(i), la restriction $\underline{X}' \rightarrow \underline{Z}'$ de $g \circ f$ est encore localement de type fini, et il suffit de vérifier que la restriction $\underline{X}' \rightarrow \underline{Y}'$ de f est de type fini au point x ; ainsi, quitte à remplacer $\underline{X}, \underline{Y}$ et $\underline{Z}$ par $\underline{X}', \underline{Y}'$ et $\underline{Z}'$, on peut supposer que $\underline{Z} = \text{Spec } A$ soit un schéma affine. Soient ensuite $U \subset X$ et $V \subset Y$ des voisinages ouverts affines de x et y avec $fU \subset V$, et posons $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$ et $\underline{V} := V \times_Y \underline{Y}$; évidemment le morphisme d'inclusion $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$ est localement de type fini, donc la restriction $\underline{U} \rightarrow \underline{V} \rightarrow \underline{Z}$ de $g \circ f$ est de type fini au point x , d'après (i), et il suffit de vérifier qu'il en est de même pour la restriction $\underline{U} \rightarrow \underline{V}$ de f . Cela nous ramène au cas où aussi $\underline{X} = \text{Spec } C$ et $\underline{Y} = \text{Spec } B$ sont affines; d'après l'exercice 5.80(i), l'homomorphisme $A \rightarrow C$ correspondant à $g \circ f$ est alors de type fini, donc de même pour l'homomorphisme $B \rightarrow C$ correspondant à f , d'où l'assertion.

Partie (iii) : En raisonnant comme pour la preuve de (ii), on se ramène aisément au cas où $\underline{Z} = \text{Spec } A$, $\underline{Y} = \text{Spec } B$, et $\underline{X} = \text{Spec } C$; d'après l'exercice 5.80(i), l'homomorphisme $A \rightarrow C$ correspondant à $g \circ f$ est alors de présentation finie, et B est une A -algèbre de type fini, donc l'homomorphisme $B \rightarrow C$ correspondant à f est de présentation finie (exercice 3.17(iv)), d'où l'assertion.

Exercice 5.89, partie (i) : Comme d'habitude, il suffit de vérifier que les schémas $\underline{V}(\mathcal{I}\mathcal{O}_X)$ et $\underline{X} \times_Y \underline{V}(\mathcal{I})$ représentent le même foncteur. Pour cela, soit $\underline{T} := (T, \mathcal{O}_T)$ un schéma, et noter que la donnée d'un morphisme de schémas $\underline{T} \rightarrow \underline{X} \times_Y \underline{V}(\mathcal{I})$ équivaut à celle d'un morphisme de schémas $\underline{g} := (g, g^b) : \underline{T} \rightarrow \underline{X}$ tel que $\underline{h} := (h, h^b) := \underline{f} \circ \underline{g} : \underline{T} \rightarrow \underline{Y}$ se factorise à travers $\underline{V}(\mathcal{I})$; pour tout tel $\underline{h}$ on a :

$$h = f \circ g \quad \text{et} \quad h^b = f_*(g^b) \circ f^b : \mathcal{O}_Y \rightarrow h_*\mathcal{O}_T.$$

Soit aussi $j : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ l'inclusion; l'adjonction canonique pour le couple de foncteurs $(\tilde{f}^{-1}, f_*)$ associée à h^b et à $h^b \circ j : \mathcal{I} \rightarrow h_*\mathcal{O}_T$ les morphismes

$$g^b \circ f^\# : \tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*\mathcal{O}_T \quad \text{et} \quad g^b \circ f^\# \circ \tilde{f}^{-1}(j) : \tilde{f}^{-1}(\mathcal{I}) \rightarrow g_*\mathcal{O}_T.$$

Or, $\underline{h}$ se factorise à travers $\underline{V}(\mathcal{I}) \Leftrightarrow h^b \circ j = 0 \Leftrightarrow g^b \circ f^\# \circ \tilde{f}^{-1}(j) = 0$. Mais le préfaisceau $f^\# \circ \tilde{f}^{-1}(\mathcal{I})$ engendre l'idéal $\mathcal{I}\mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$ (voir la remarque 5.68(iv)), donc cette dernière condition équivaut à : $\mathcal{I}\mathcal{O}_X \subset \text{Ker}(g^b)$, qui, à son tour est vérifiée si et seulement si $\underline{g}$ se factorise à travers $\underline{V}(\mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Si $\underline{f}$ est une immersion fermée, disons que $\underline{X} = \underline{V}(\mathcal{I})$ pour un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$, de sorte que $\underline{f}$ soit le morphisme naturel $\underline{V}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{Y}$; par la remarque 2.24, on a une identification de $\underline{Y}'$ -schémas $\underline{X}' \xrightarrow{\sim} \underline{Y}' \times_Y \underline{X}$, pour la structure de $\underline{Y}'$ -schéma sur $\underline{X}'$ fournie par $\underline{f}'$. Au vu de (i), on a d'autre part un isomorphisme $\underline{V}(\mathcal{I}\mathcal{O}_{Y'}) \xrightarrow{\sim} \underline{Y}' \times_Y \underline{X}$ de $\underline{Y}'$ -schémas, identifiant $\underline{f}'$ avec l'immersion fermée $\underline{V}(\mathcal{I}\mathcal{O}_{Y'}) \rightarrow \underline{Y}'$. Ensuite, remarquons :

Lemme 5.106. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie dont les produits fibrés sont représentables, $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B \xleftarrow{\alpha_2} A_2$, $B' \xrightarrow{\beta} B$ des morphismes de $\mathcal{C}$, et $(A_1 \times_B A_2 \xrightarrow{p_i} A_i \mid i = 1, 2)$ les projections. Alors, avec $A'_i := B' \times_B A_i$, on a un diagramme cartésien dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B (A_1 \times_B A_2) & \xrightarrow{B' \times_B p_1} & A'_1 \\ \downarrow B' \times_B p_2 & & \downarrow B' \times_B \alpha_1 \\ A'_2 & \xrightarrow{B' \times_B \alpha_2} & B'. \end{array}$$

(ii) Si en outre, $A := A_1 = A_2$ et $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$, de sorte que $A' := A'_1 = A'_2$, alors le morphisme $B' \times_B \Delta_{A/B} : A' \rightarrow B' \times_B (A \times_B A)$ correspond au morphisme diagonal $\Delta_{A'/B'}$, sous l'identification $B' \times_B (A \times_B A) = A' \times_{B'} A'$ fournie par (i).

Démonstration. (i) : La donnée d'un morphisme $C \rightarrow B' \times_B (A_1 \times_B A_2)$ de $\mathcal{C}$ équivaut à celle d'un couple de morphismes $\gamma : C \rightarrow B', \delta : C \rightarrow A_1 \times_B A_2$ tels que $\beta \circ \gamma = \alpha \circ p_i \circ \delta$ pour $i = 1, 2$; cela à son tour équivaut à celle de morphismes $\gamma : C \rightarrow B'$ et $\delta_i : C \rightarrow A_i$ pour $i = 1, 2$, tels que $\beta \circ \gamma = \alpha_i \circ \delta_i$ pour $i = 1, 2$. Tout tel couple (γ, δ_i) détermine un unique morphisme $\gamma_i : C \rightarrow A'_i$ pour $i = 1, 2$, et il vient $(B' \times_B \alpha_i) \circ \gamma_1 = \gamma = (B' \times_B \alpha_2) \circ \gamma_2$; donc (γ_1, γ_2) à son tour équivaut à la donnée d'un morphisme $C \rightarrow A'_1 \times_{B'} A'_2$, d'où l'assertion.

(ii) : Le morphisme $\delta_{A'/B'} := B' \times_B \Delta_{A/B} : A' \rightarrow B' \times_B (A \times_B A)$ vérifie les identités : $(B' \times_B p_i) \circ \delta_{A'/B'} = 1_{A'}$ pour $i = 1, 2$, d'où l'assertion. $\square$

Revenons aux schémas : avec le lemme 5.106(ii), il s'ensuit que si $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est une immersion fermée, il en est de même pour $\Delta_{\underline{X}'/\underline{Y}'}$, car cette dernière s'identifie avec $\underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$; i.e. si $\underline{f}$ est séparé, il en est de même pour $\underline{f}'$. En outre, si $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ est compact, il en est de même pour $\Delta_{\underline{X}'/\underline{Y}'}$, en vertu du lemme 5.81(ii) (et de la remarque 2.24(i)), i.e. si $\underline{f}$ est quasi-séparé, il en est de même pour $\underline{f}'$.

Partie (iii) : Avec (ii) on voit que si $\underline{f}$ est une immersion fermée (resp. quasi-séparé, resp. séparé), il en est de même pour chaque $\underline{f}_\lambda$. Réciproquement, si chaque $\underline{f}_\lambda$ est une immersion fermée, alors $f(V_\lambda) = f(X) \cap U_\lambda$ est une partie fermée de Y , et l'application continue sous-jacente $f_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$ identifie V_λ avec $f(V_\lambda)$, munie de la topologie induite par l'inclusion dans Y , pour tout $\lambda \in \Lambda$ (proposition 5.83(ii)); cela entraîne que $f(X)$ est une partie fermée de Y , et $f : X \rightarrow Y$ se factorise à travers un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} f(X)$, où l'on munit $f(X)$ de la topologie induite par Y . En outre, soit $\mathcal{I} := \text{Ker}(f^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X)$; évidemment $\mathcal{I}_{|U_\lambda} = \text{Ker}(f_\lambda^\flat)$, et par la proposition 5.83(iii), $f_\lambda^\flat$ induit un isomorphisme

$$(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})_{|U_\lambda} \xrightarrow{\sim} (f_* \mathcal{O}_X)_{|U_\lambda} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Par suite, $f^\flat$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{O}_X$ (théorème 4.97(ii)), et encore avec la proposition 5.83, on déduit aisément que $\underline{f}$ se factorise à travers un isomorphisme de schémas $\underline{X} \xrightarrow{\sim} \underline{V}(\mathcal{I})$ et le morphisme naturel $\underline{V}(\mathcal{I}) \rightarrow \underline{Y}$. Ensuite, en raisonnant comme pour (ii), on voit que la diagonale $\Delta_{\underline{V}_\lambda/\underline{U}_\lambda}$ s'identifie avec la restriction $(\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}})_{|\underline{V}_\lambda} : \underline{V}_\lambda \rightarrow \underline{U}_\lambda \times_{\underline{Y}} (\underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X})$ de $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$; par ce qui précède, on conclut que si chaque $\underline{f}_\lambda$ est séparé, il en est de même pour $\underline{f}$. En dernier lieu, avec le lemme 5.81(i) on voit de même que si chaque $\underline{f}_\lambda$ est quasi-séparé, il en est de même pour $\underline{f}$.

Exercice 5.93, partie (i) : Disons que $\underline{X} = (X, \mathcal{O}_X)$, $\underline{Y} = (Y, \mathcal{O}_Y)$, $\underline{Z} = (Z, \mathcal{O}_Z)$, $\underline{f} = (f, f^\flat)$, $\underline{g} = (g, g^\flat)$, et $\underline{h} = (h, h^\flat)$; si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont des immersions fermées, évidemment $\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f}$ induit un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} T := g \circ f(X)$, pour la topologie de T induite par l'inclusion dans Z . En outre, $f^\flat : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules (proposition 5.83(iii)), donc $g_*(f^\flat) : g_* \mathcal{O}_Y \rightarrow g_* f_* \mathcal{O}_X$ est un épimorphisme de $g_* \mathcal{O}_Y$ -modules (exercice 5.66(iv)), donc aussi un épimorphisme de $\mathcal{O}_Z$ -modules (exercice 5.65(i)), et de même pour $g^\flat : \mathcal{O}_Z \rightarrow g_* \mathcal{O}_Y$. Par suite $h^\flat = g_*(f^\flat) \circ g^\flat$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_Z$ -modules, et d'après le corollaire 5.91, $\underline{h}$ est alors une immersion fermée. Ensuite, remarquons :

Lemme 5.107. (i) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie dont les produits fibrés sont représentables, $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ et $\beta : B \rightarrow C$ trois morphismes de $\mathcal{C}$; notons par :

$$A_1 \times_B A_2 \xrightarrow{p_i} A_i \xleftarrow{q_i} A_1 \times_C A_2 \quad (i = 1, 2)$$

les projections canoniques. Alors on a un diagramme cartésien dans $\mathcal{C}$:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} A_1 \times_B A_2 & \xrightarrow{\pi} & B \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Delta_{B/C} \\ A_1 \times_C A_2 & \xrightarrow{\alpha_1 \times_C \alpha_2} & B \times_C B \end{array} \quad \text{avec } \pi := \alpha_1 \circ p_1 = \alpha_2 \circ p_2$$

où ϕ est l'unique morphisme avec $q_1 \circ \phi = p_1$ et $q_2 \circ \phi = p_2$.

(ii) Si de plus on a $A := A_1 = A_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, alors $\phi \circ \Delta_{A/B} = \Delta_{A/C}$.

Démonstration. (i) : Soient $r_1, r_2 : B \times_C B \rightarrow B$ les projections ; on a :

$$r_i \circ \Delta_{B/C} \circ \pi = \pi = \alpha_i \circ q_i \circ \phi = r_i \circ (\alpha_1 \times_C \alpha_2) \circ \phi \quad (i = 1, 2)$$

donc $(*)$ commute. Soient ensuite $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et $\delta : T \rightarrow A_1 \times_C A_2$, $\gamma : T \rightarrow B$ deux morphismes de $\mathcal{C}$ avec $(\alpha_1 \times_C \alpha_2) \circ \delta = \Delta_{B/C} \circ \gamma$; la donnée de δ équivaut à celle de morphismes $(\delta_i : T \rightarrow A_i \mid i = 1, 2)$ de $\mathcal{C}$ avec $\beta \circ \alpha_1 \circ \delta_1 = \beta \circ \alpha_2 \circ \delta_2$, et il vient : $\gamma = r_i \circ (\alpha_1 \times_C \alpha_2) \circ \delta = \alpha_i \circ q_i \circ \delta = \alpha_i \circ \delta_i$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, le couple (δ, γ) détermine un unique morphisme $\omega : T \rightarrow A_1 \times_B A_2$ avec $p_i \circ \omega = \delta_i$ pour $i = 1, 2$; par suite, $q_i \circ \phi \circ \omega = \delta_i$ pour $i = 1, 2$, donc $\phi \circ \omega = \delta$, et $\pi \circ \omega = \gamma$, et cela montre que $(*)$ est cartésien.

(ii) : Il suffit de remarquer que $q_i \circ \phi \circ \Delta_{A/B} = p_i \circ \Delta_{A/B} = \mathbf{1}_A$ pour $i = 1, 2$. $\square$

Soient $p_1, p_2 : \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ et $q_1, q_2 : \underline{X} \times_{\underline{Z}} \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ les projections canoniques, et $\phi : \underline{X} \times_{\underline{Y}} \underline{X} \rightarrow \underline{X} \times_{\underline{Z}} \underline{X}$ l'unique morphisme tel que $q_i \circ \phi = p_i$ pour $i = 1, 2$; d'après le lemme 5.107(ii), on a $\Delta_{\underline{X}/\underline{Z}} = \phi \circ \Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$, et compte tenu de l'exercice 5.89(ii) et du lemme 5.107(i), si $\Delta_{\underline{Y}/\underline{Z}}$ est une immersion fermée, il en est de même pour ϕ . Alors, si $\Delta_{\underline{Y}/\underline{Z}}$ et $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ sont des immersions fermées, par ce qui précède il en est de même pour $\Delta_{\underline{X}/\underline{Z}}$; i.e. si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont séparés, il en est de même pour $\underline{h}$. On raisonne de même si $\Delta_{\underline{Y}/\underline{Z}}$ et $\Delta_{\underline{X}/\underline{Y}}$ sont compacts : dans ce cas, ϕ est compact (lemme 5.81(ii)) et donc de même pour $\Delta_{\underline{X}/\underline{Z}}$.

Partie (ii) : Dans la situation du lemme 5.107(i), prenons $A_1 := \underline{X}$, $A_2 = B := \underline{Y}$, $C := \underline{S}$, $\alpha_1 := \underline{f}$ et $\alpha_2 := \mathbf{1}_{\underline{Y}}$; par suite, $\phi = \Gamma_{\underline{f}}$, et $\Delta_{\underline{Y}/\underline{S}}$ est un morphisme compact (resp. une immersion fermée), par hypothèse. On conclut alors avec le lemme 5.81(ii) (resp. avec l'exercice 5.89(ii)).

Partie (iii) : Puisque $\underline{g} \circ \underline{f}$ est compact, il en est de même pour $\underline{p} := \underline{Y} \times_{\underline{Z}} (\underline{g} \circ \underline{f}) : \underline{Y} \times_{\underline{Z}} \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ (lemme 5.81(ii)) ; d'autre part, $\underline{f}$ est la composition de $\underline{p}$ avec le graphe $\Gamma_{\underline{f}} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y} \times_{\underline{Z}} \underline{X}$ de $\underline{f}$, et $\Gamma_{\underline{f}}$ est compact, d'après (ii), donc de même pour $\underline{f}$.

Exercice 5.94, partie (i) : Remarquons d'abord que $U \times_Y (Y, \mathcal{O}_Y) = (U, \mathcal{O}_{Y|U})$, et $\mathcal{O}_{Y|U} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M} = \tilde{j}^{-1} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{Y|U}$ -module quasi-cohérent (exercice 5.62(ii)) ; par suite, si $j_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent, il en est de même pour $\Gamma_Z \mathcal{M}$, en vertu de la remarque 5.64(i) et du problème 5.58(ii.c). Ainsi, il suffit de vérifier l'assertion pour $\mathcal{N}$. Mais on sait déjà que j est un morphisme séparé (remarque 5.88(iv)), et nos hypothèses entraînent aisément que j soit un morphisme compact ; l'assertion découle alors de la proposition 5.90(i).

Partie (ii) : Soit $\Gamma_Z M \subset M$ le A -sous-module des éléments à support dans Z ; la remarque 5.64(iii) montre que $\Gamma_Z M$ correspond au A -sous-module $(\Gamma_Z \mathcal{M})(X)$ sous l'identification naturelle $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$, et compte tenu de (i), on déduit que $\omega_{\mathfrak{p}}$ se restreint en une identification naturelle $(\Gamma_Z M)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} (\Gamma_Z \mathcal{M})_{\mathfrak{p}}$. Or, il est clair que $(\Gamma_Z M)_{\mathfrak{p}} \subset \Gamma_{Z_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. Réciproquement, soit $x \in \Gamma_{Z_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$, et disons que $Z = V(I)$ pour un idéal de type fini $I \subset A$; alors $x = m/s$ pour certains $m \in M$ et $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, et on voit aisément qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n \cdot (m/s) = 0$ dans $M_{\mathfrak{p}}$. Soit $a_1, \dots, a_r$ un système fini de générateurs de I^n ; il existe alors $t_1, \dots, t_r \in A \setminus \mathfrak{p}$ tels que $a_i t_i m = 0$ dans M . Par suite, $I^n \cdot (tm) = 0$ dans M , pour $t := t_1 \cdots t_r \in A \setminus \mathfrak{p}$, et ainsi $x = (tm)/(ts) \in (\Gamma_Z M)_{\mathfrak{p}}$.

Exercice 5.102 : Soit $\phi : T \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, tel que l'idéal $\phi^{-1}(J_3\mathcal{O}_Y) \cdot \mathcal{O}_T$ soit inversible ; montrons d'abord qu'il existe un unique morphisme $\psi : T \rightarrow X$ de schémas, tel que $\phi = p \circ \psi$. Pour cela, notons par $J'_3, J''_3 \subset B_3$ les images des applications naturelles $J_1I \otimes_A B_2 \rightarrow B_3$ et respectivement $B_1 \otimes_A J_2I \rightarrow B_3$; alors $J_3 = J'_3J''_3$, et d'après le lemme 5.70(ii) les idéaux

$$\phi^{-1}(J'_3\mathcal{O}_Y) \cdot \mathcal{O}_T = (p'_1 \circ \phi)^{-1}(J_1I\mathcal{O}_{S_1}) \quad \text{et} \quad \phi^{-1}(J''_3\mathcal{O}_Y) \cdot \mathcal{O}_T = (p'_2 \circ \phi)^{-1}(J_2I\mathcal{O}_{S_2}) \cdot \mathcal{O}_T$$

sont inversibles. Par suite, il existe pour $i = 1, 2$ un unique morphisme $\phi_i : T \rightarrow E_i$ de schémas, tel que $\pi_i \circ \phi_i = p'_i \circ \phi$; il vient

$$\pi_I \circ q_1 \circ \phi_1 = q'_1 \circ \pi_1 \circ \phi_1 = q'_1 \circ p'_1 \circ \phi = q'_2 \circ p'_2 \circ \phi = q'_2 \circ \pi_2 \circ \phi_2 = \pi_I \circ q_2 \circ \phi_2$$

d'où $q_1 \circ \phi_1 = q_2 \circ \phi_2$, et on a alors un unique morphisme $\psi : T \rightarrow X$ de schémas tel que $p_i \circ \psi = \phi_i$ pour $i = 1, 2$. Il vient $p'_i \circ p \circ \psi = \pi_i \circ p_i \circ \psi = \pi_i \circ \phi_i = p'_i \circ \phi$ pour $i = 1, 2$, d'où $p \circ \psi = \phi$. Ensuite, soit $\psi' : T \rightarrow X$ un deuxième morphisme de schémas tel que $\phi = p \circ \psi'$; afin de vérifier que $\psi = \psi'$, il suffit de montrer que $p_i \circ \psi' = \phi_i$, et pour cela il suffit que $\pi_i \circ p_i \circ \psi' = \pi_i \circ \phi_i$, pour $i = 1, 2$. Mais cela est clair, car $\pi_i \circ p_i \circ \psi' = p'_i \circ p \circ \psi' = p'_i \circ \phi$.

Vérifions que $\psi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_T = 0$; d'après la remarque 5.68(iv), cela revient à montrer que $\mathcal{J}_{\psi(t)} \cdot \mathcal{O}_{T,t} = 0$ pour tout $t \in T$. Or, $\mathcal{O}_{X,\psi(t)}$ est naturellement une B_3 -algèbre, et d'après l'exercice 5.94(ii) on a :

$$\mathcal{J}_{\psi(t)} = \{a \in \mathcal{O}_{X,\psi(t)} \mid \text{Supp}(a) \in Z \cap \text{Spec } \mathcal{O}_{X,\psi(t)}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a \in \mathcal{O}_{X,\psi(t)} \mid J_3^n a = 0\}.$$

D'autre part, par hypothèse $\psi^{-1}(J_3\mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{O}_T = \phi^{-1}(J_3\mathcal{O}_Y) \cdot \mathcal{O}_T$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_T$, i.e. $J_3\mathcal{O}_{T,t}$ est engendré par un élément régulier de $\mathcal{O}_{T,t}$, pour tout $t \in T$ (lemme 5.70(i)). Ainsi, si $b \in \mathcal{O}_{T,t}$ est un élément régulier avec $b\mathcal{O}_{T,t} = J_3\mathcal{O}_{T,t}$ et $a \in \mathcal{J}_{\psi(t)}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n a = 0$, d'où $a = 0$, comme souhaité.

Par ce qui précède et par la proposition 5.83, il existe alors un unique morphisme de schémas $\lambda : T \rightarrow \underline{V}(\mathcal{J})$ tel que $p \circ j \circ \lambda = \phi$. Montrons ensuite que $(p \circ j)^{-1}(J_3\mathcal{O}_Y)$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{\underline{V}(\mathcal{J})}$. Pour cela, soient $U \subset E_I$ et $U_i \subset E_i$ pour $i = 1, 2$ des parties ouvertes affines avec $q_1(U_1), q_2(U_2) \subset U$; ainsi, $U = \text{Spec } C$ pour une A -algèbre C , et $U_i = \text{Spec } C_i$ pour une B_i -algèbre C_i , et supposons que l'idéal J_iIC_i soit engendré par un élément régulier $c_i \in C_i$, pour $i = 1, 2$. La restriction $U_i \rightarrow U$ de q_i induit un homomorphisme de A -algèbres $C \rightarrow C_i$ pour $i = 1, 2$, et $U_3 := U_1 \times_U U_2$ est une partie ouverte affine de X avec $\mathcal{O}_X(U_3) = C_1 \otimes_C C_2$; en outre, X admet un recouvrement constitué de parties ouvertes affines de cette forme. Evidemment l'idéal J_3C_3 est engendré par $c_3 := c_1 \otimes c_2$, et $\mathcal{J}(U_3) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{C_3}(c_3^n)$; en outre, la preuve de la proposition 5.83 montre que $j^{-1}U_3 = \text{Spec } \overline{C}_3$, avec $\overline{C}_3 := C_3/\mathcal{J}(U_3)$. On est ainsi ramené à vérifier que l'image $\overline{c}_3 \in \overline{C}_3$ de c_3 est un élément régulier ; mais si $\overline{x} \cdot \overline{c}_3 = 0$ pour la classe $\overline{x}$ d'un élément $x \in C_3$, il vient $xc_3 \in \mathcal{J}(U_3)$, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $xc_3^{n+1} = 0$, et alors $x \in \mathcal{J}(U_3)$, d'où $\overline{x} = 0$, CQFD.

On peut maintenant conclure comme dans la preuve du lemme 2.4(i) : soit $\pi_3 : E_3 \rightarrow Y$ un éclatement de l'idéal $J_3\mathcal{O}_Y$; il existe alors un unique morphisme de schémas $\alpha : \underline{V}(\mathcal{J}) \rightarrow E_3$ tel que $\pi_3 \circ \alpha = p \circ j$, et d'autre part on vient de voir qu'il existe un unique morphisme de schémas $\beta : E_3 \rightarrow \underline{V}(\mathcal{J})$ tel que $p \circ j \circ \beta = \pi_3$. Il s'ensuit que $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \alpha$ sont les uniques morphismes de schémas tels que $\pi_3 \circ \alpha \circ \beta = \pi_3$ et $p \circ j \circ \beta \circ \alpha = p \circ j$; ainsi $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{E_3}$ et $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\underline{V}(\mathcal{J})}$, et en particulier, $p \circ j : \underline{V}(\mathcal{J}) \rightarrow Y$ est bien un éclatement de $J_3\mathcal{O}_Y$.



ON atteint ici finalement le cœur de notre cours : cette leçon introduit d’abord l’importante classe des *homomorphismes entiers* d’anneaux, généralisant les extensions algébriques des corps. D’un point de vue géométrique, il s’agit des homomorphismes $f : A \rightarrow B$ tels que $\text{Spec } f$ soit un morphisme *universellement fermé* (voir le problème 6.59). En particulier, tout homomorphisme *fini* est entier, et plus généralement, si f est entier, les fibres non vides de $\text{Spec } f$ sont de dimension 0. En ce sens, il s’agit de la plus simple classe d’homomorphismes que l’on rencontre dans l’étude de la géométrie algébrique : notamment, tout revêtement fini d’une variété affine correspond à un homomorphisme fini d’anneaux ; les résultats principaux sont la proposition 6.14, établissant la nature locale des extensions entières, et les théorèmes 6.19 et 6.28 de *Cohen et Seidenberg*, qui montrent que $\text{Spec } f$ est spécialisante pour f entier, et même générissante, si B est intègre et si A est intégralement clos. J’ai inclus aussi un théorème, découvert par Gruson et Raynaud ([35]), de *descente de la platitude* par les homomorphismes finis injectifs : on en fait bon usage au §6.4.2, lors de notre calcul du groupe de Picard d’un pincement.

On s’intéresse ensuite aux *homomorphismes quasi-finis* -- i.e. les homomorphismes d’anneaux $f : A \rightarrow B$ de type fini tels que les fibres de $\text{Spec } f$ sont discrètes -- dont l’étude est en grande partie ramenée à celui des homomorphismes entiers, grâce au “Main Theorem” de Zariski (ainsi appelé car il était le “main theorem” de l’article [71]). Ce dernier est un résultat extrêmement important, démontré originairement par Zariski avec des méthodes de théorie des valuations ; une autre preuve, de nature tout à fait différente, est due à Grothendieck, et se trouve dans le troisième chapitre de [16], où le théorème est présenté comme le corollaire immédiat d’un énoncé cohomologique bien plus général. Notre preuve -- plus élémentaire, mais assez longue et délicate -- est empruntée essentiellement à l’article [61] de Peskine.

La section 6.3 introduit les *anneaux noethériens*, sans doute la classe la plus importante d’anneaux commutatifs, et celle qui, depuis les travaux de Noether et de Krull aux années 20, domine le paysage de l’algèbre commutative. Presque tous les anneaux étudiés dans la géométrie algébrique et la théorie des nombres sont noethériens, et presque tous les théorèmes les plus profonds de l’algèbre commutative portent sur les anneaux noethériens, ou sont démontrés par réduction au cas noethérien. Leur ubiquité découle en grande partie de leurs bonnes propriétés de stabilité vis-à-vis des opérations usuelles : si A est noethérien, tout quotient et toute localisation de A , ainsi que toute A -algèbre de type fini est aussi un anneau noethérien ; on verra plus tard qu’il en est de même pour toute *complétion adique* de A . Avec ces généralités, on peut finalement aborder le

Nullstellensatz : parmi les nombreuses preuves disponibles, j'ai choisi l'élégante variante due à Artin et Tate.

La section 6.4 est essentiellement un long exemple géométrique, dont l'objectif est d'illustrer comment les différents outils algébriques rassemblés jusqu'ici nous permettent d'analyser une question assez concrète et naturelle : on fixe une variété affine V' , et on cherche à déterminer l'anneau des fonctions algébriques sur la variété V obtenue par *pincement* d'un ensemble fini donné de points (fermés) de V' ; puis, on explique aussi comment calculer le groupe de Picard de V en termes de celui de V' et des corps résiduels des points pincés.

La section 6.5 fournit quelques renseignements utiles sur les spectres premiers des anneaux noethériens : en particulier, on y montre, par des considérations purement topologiques, la finitude de l'ensemble des idéaux premiers *minimaux* de tout anneau noethérien A (voir l'exercice 6.109), et on caractérise les parties constructibles de $\text{Spec } A$ en termes de leurs intersections avec les parties fermées irréductibles (proposition 6.113). Ce critère intervient -- après réduction préalable au cas d'un homomorphisme d'anneaux noethériens -- dans la preuve de l'important théorème 6.115 de Chevalley. On conclut avec une première application de ce théorème : pour tout homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ plat et de présentation finie, l'application $\text{Spec } f$ est ouverte.

6.1. Extensions entières d'anneaux. On démarre avec la généralisation suivante de la définition 1.62(i) :

Définition 6.1. Soient B un anneau, $A \subset B$ un sous-anneau. Un élément $x \in B$ est *entier sur* A , s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$(*) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Exemple 6.2. (i) Un rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$. En effet, écrivons $x = r/s$, avec $r, s \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(r, s) = 1$. Si x satisfait une équation $(*)$ comme ci-dessus, avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, après multiplication par s^n on trouve

$$r^n + s \cdot (a_1 r^{n-1} + \dots + a_n s^{n-1}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{Z}$$

donc s divise r^n , et alors $s \in \{1, -1\}$, d'où l'assertion.

(ii) Plus généralement, si A est un anneau factoriel, et si K est son corps des fractions, l'argument de (i) ci-dessus s'adapte aisément pour montrer qu'un élément de K est entier sur A si et seulement s'il est dans A .

Proposition 6.3. Soient B un anneau, $A \subset B$ un sous-anneau, et $x \in B$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) x est entier sur A .
- (b) $A[x] \subset B$ est un A -module de type fini.
- (c) $A[x] \subset C \subset B$ pour un sous-anneau C de B qui est un A -module de type fini.
- (d) Il existe un $A[x]$ -module fidèle M qui est un A -module de type fini, par restriction des scalaires (voir la définition 1.13).

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Par hypothèse, on a une équation $(*)$ comme dans la définition 6.1, d'où $x^n \in M := A + Ax + \dots + Ax^{n-1}$. Montrons, par récurrence sur k que $x^k \in M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On le sait déjà pour $k \leq n$. Si $k > n$, et $x^{k-1} \in M$, on a $x^{k-1} = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$, pour certains $b_0, \dots, b_{n-1} \in A$, donc $x^k = b_0 x + \dots + b_{n-1} x^n \in M + Ax^n = M$. Par suite, $M = A[x]$, d'où (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) est trivial.

(c) $\Rightarrow$ (d) : On choisit $M := C$. En effet, C est fidèle, car si $y \in \text{Ann}_{A[x]}(C)$, on a $y \cdot 1 = 0$, d'où $y = 0$.

(d) $\Rightarrow$ (a) : On définit l'application A -linéaire $f : M \rightarrow M$ par $f(m) := x \cdot m$ pour tout $m \in M$. Par la proposition 3.47 on a une équation de la forme

$$f^n + a_1 \cdot f^{n-1} + \dots + a_n \cdot \text{Id}_M = 0 \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in A.$$

Cela veut dire que $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \text{Ann}_{A[x]}(M) = 0$, d'où (a). $\square$

Corollaire 6.4. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, et $x_1, \dots, x_n \in B$ entiers sur A . Le sous-anneau $A[x_1, \dots, x_n] \subset B$ est un A -module de type fini.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n : le cas $n = 1$ est fourni par la proposition 6.3. Supposons que $n > 1$, et que le A -module $C := A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ soit de type fini ; donc on peut choisir un système fini $\{y_1, \dots, y_k\}$ de générateurs pour cet A -module. Or, évidemment x_n est aussi entier sur C , donc il existe aussi un système fini $\{z_1, \dots, z_l\}$ d'éléments de $C[x_n]$ tel que $C[x_n] = Cz_1 + \cdots + Cz_l$. Le A -module Cz_i est engendré par $\{z_i y_1, \dots, z_i y_k\}$, donc le système $\{z_i y_j \mid i \leq l, j \leq k\}$ engendre le A -module $A[x_1, \dots, x_n]$. $\square$

Corollaire 6.5. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux. La partie

$$C := \{x \in B \mid x \text{ est entier sur } A\}$$

est un sous-anneau de B contenant A , appelé la fermeture intégrale de A dans B .

Démonstration. En effet, si $x, y \in C$, le corollaire 6.4 nous dit que $A[x, y]$ est un A -module de type fini qui contient $x + y$ et xy ; ces derniers sont alors aussi entiers sur A , par la proposition 6.3. $\square$

Définition 6.6. (i) Avec la notation du corollaire 6.5, si $A = C$ on dit que A est *intégralement fermé* dans B ; si $C = B$, on dit que B est *entier* sur A .

(ii) Si A est intègre, on appelle *normalisation* de A la fermeture intégrale A' de A dans son corps des fractions ; si $A = A'$, on dit que A est *intégralement clos*.

(iii) On dit qu'un anneau A est *normal*, si $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau intègre et intégralement clos, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

(iv) On dit qu'un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'anneaux est *fini*, si $B_{[f]}$ est un A -module de type fini, et dans ce cas on dit aussi que B est une *A -algèbre finie*.

Avec cette terminologie, on peut résumer ainsi le corollaire 6.4 : si $A \subset B$ est une inclusion d'anneaux, les deux conditions suivantes sont équivalentes : (a) B est une A -algèbre finie, et (b) B est une A -algèbre de type fini et entière sur A . Aussi, au vu de l'exemple 6.2(ii), tout anneau factoriel est intégralement clos.

Exemple 6.7. On a vu que $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont des anneaux factoriels (problème 1.37(i,ii)), et en particulier, ils sont intégralement clos (exemple 6.2(ii)) ; évidemment ils sont aussi entiers sur $\mathbb{Z}$, donc ils sont les fermetures intégrales de $\mathbb{Z}$ dans les corps $\mathbb{Q}(i)$ et respectivement $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

Exercice 6.8. (i) Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier *sans facteurs carrés*, i.e. $d = \pm p_1 \cdots p_k$, le produit de nombres premiers $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$ distincts. Déterminer la fermeture intégrale A_d de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(ii) Montrer que A_{-3} , A_{-7} et A_{-11} sont des anneaux euclidiens.

Corollaire 6.9. Soient $A \subset B \subset C$ des inclusions d'anneaux, telles que B est entier sur A et C est entier sur B . Alors C est entier sur A .

Démonstration. Soit $x \in C$; on a une équation de la forme $x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ avec $b_1, \dots, b_n \in B$, donc x est déjà entier sur le sous-anneau $B' := A[b_1, \dots, b_n] \subset B$. Par suite $B'[x]$ est un B' -module de type fini ; d'autre part, B' est un A -module de type fini, par le corollaire 6.4. On déduit aisément que $B'[x]$ est un A -module de type fini, et cela montre que x est entier sur A . $\square$

Corollaire 6.10. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, et C la fermeture intégrale de A dans B . Alors C est intégralement fermé dans B .

Démonstration. Si $x \in B$ est entier sur C , il est aussi entier sur A , par le corollaire précédent ; donc $x \in C$. $\square$

Exercice 6.11. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux avec B entier sur A .

- (i) Soit aussi $I \subset B$ un idéal ; montrer que B/I est entier sur $A/(I \cap A)$.
- (ii) Soit $S \subset A$ une partie. Montrer que $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$.

Problème 6.12. Soient A un anneau intègre, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $f \in A[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme non nul. Evidemment il existe une partie finie $S \subset \mathbb{N}^n$ telle que

$$f = \sum_{\nu \in S} a_\nu T^\nu \quad \text{avec } a_\nu \in A \setminus \{0\} \text{ et } T^\nu := T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n} \quad \forall \nu := (\nu_1, \dots, \nu_n) \in S.$$

(i) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $S \subset \{0, 1, \dots, N-1\}^n$. On considère l'automorphisme de A -algèbre $\phi : A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\sim} A[T_1, \dots, T_n]$ tel que

$$\phi(T_i) := \begin{cases} T_i + T_n^{N^i} & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ T_n & \text{pour } i = n. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ et un polynôme $g \in A_b[T_1, \dots, T_n]$ unitaire par rapport à l'indéterminée T_n , tels que $\phi(f) = b \cdot g$.

(ii) (Lemme de normalisation de Noether) Soient K un corps et A une K -algèbre de type fini. Dédurre de (i) qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme injectif et fini $\psi : K[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$ de K -algèbres.

Proposition 6.13. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, et C la fermeture intégrale de A dans B . Soit aussi $S \subset A$ une partie multiplicative. Alors $S^{-1}C$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans $S^{-1}B$.

Démonstration. Au vu de l'exercice 6.11(ii), on sait déjà que $S^{-1}C$ est un sous-anneau de la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans $S^{-1}B$. De l'autre côté, soit $b/s \in S^{-1}B$ entier sur $S^{-1}A$; donc on a une identité dans $S^{-1}B$ de la forme

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = 0$$

pour certains $a_1/s_1, \dots, a_n/s_n \in S^{-1}A$. On pose $t := s_1 \cdots s_n$; après multiplication par t^n on obtient une nouvelle identité de la forme

$$\left(\frac{bt}{1}\right)^n + \frac{a'_1}{1} \cdot \left(\frac{bt}{1}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a'_n}{1} = 0$$

toujours dans $S^{-1}B$, avec $a'_1, \dots, a'_n \in A$. Donc, il existe $u \in S$ tel que

$$u \cdot ((bt)^n + a'_1 \cdot (bt)^{n-1} + \cdots + a'_n) = 0 \quad \text{dans } B.$$

Si l'on multiplie cette identité par u^{n-1} on obtient

$$(ubt)^n + a''_1 \cdot (ubt)^{n-1} + \cdots + a''_n = 0 \quad \text{dans } B$$

avec $a''_1, \dots, a''_n \in A$, d'où $ubt \in C$ et donc $b/s = (ubt)/(ust) \in S^{-1}C$. $\square$

Proposition 6.14. Soit A un anneau intègre. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est intégralement clos.
- (b) $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.
- (c) $A_{\mathfrak{m}}$ est intégralement clos, pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) par la proposition 6.13, et (b) $\Rightarrow$ (c) est trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Soit C la fermeture intégrale de A dans son corps des fractions. Alors A est intégralement clos $\Leftrightarrow$ l'inclusion $j : A \rightarrow C$ est surjective $\Leftrightarrow j_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$ est surjective pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A \Leftrightarrow A_{\mathfrak{m}}$ est intégralement clos pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ (cette dernière équivalence découle encore de la proposition 6.13). $\square$

Exercice 6.15. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux. Montrer que B est entier sur A si et seulement si $B_{\mathfrak{m}}$ est entier sur $A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.

Problème 6.16. Soient A un anneau, et $P \in A[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$.

(i) Montrer qu'il existe une A -algèbre finie A' dont le morphisme structurel $A \rightarrow A'$ est injectif, et telle que P soit *scindé* dans $A'[X]$:

$$P = (X - a_1) \cdots (X - a_d) \quad \text{avec } a_1, \dots, a_d \in A'.$$

(ii) Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, $C \subset B$ la fermeture intégrale de A dans B , et $P, Q \in B[X]$ unitaires tels que $P \cdot Q \in C[X]$. Montrer que $P, Q \in C[X]$.

(iii) Dédurre de (ii) que $C[X]$ est la fermeture intégrale de $A[X]$ dans $B[X]$.

(iv) Soit A intègre. Montrer que A est intégralement clos si et seulement si $A[X]$ est intégralement clos.

6.1.1. *Going up et going down de Cohen-Seidenberg.* On va maintenant s'intéresser aux propriétés topologiques des applications continues $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ associées aux inclusions entières d'anneaux. Le point de départ est :

Proposition 6.17. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, avec B intègre et entier sur A . Alors A est un corps si et seulement si B est un corps.

Démonstration. Si A est un corps, et si $x \in B \setminus \{0\}$, on a une identité (*) comme dans la définition 6.1 ; on choisit une telle équation de degré minimal, et on remarque que dans ce cas $a_n \neq 0$, car sinon on aurait $x \cdot (x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) = 0$, et comme B est intègre et $x \neq 0$, on obtiendrait une autre équation pour x de degré $n-1$, une contradiction. Par suite $x^{-1} = -a_n^{-1} \cdot (x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in B$, donc B est un corps.

Réciproquement, si B est un corps et si $a \in A \setminus \{0\}$, on a $a^{-1} \in B$, donc il existe une identité de la forme $a^{-n} + a_1 \cdot a^{-n+1} + \cdots + a_n = 0$ avec $a_1, \dots, a_n \in A$, d'où $a^{-1} = -(a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1}) \in A$, donc A est un corps. $\square$

Corollaire 6.18. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, avec B entier sur A .

(i) Soit aussi $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$. Alors on a $\mathfrak{q} \in \text{Max } B \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap A \in \text{Max } A$.

(ii) Soient $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \text{Spec } B$ avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. Alors on a $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$.

Démonstration. (i) découle aussitôt de la proposition 6.17 (et de l'exercice 6.11(i)).

(ii) : On peut supposer que $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$. D'après l'exercice 6.11(ii), $B_{\mathfrak{p}}$ est entier sur $A_{\mathfrak{p}}$ (notation du §3.4.2), et $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ sont identifiés à deux éléments de $\text{Spec } B_{\mathfrak{p}}$ (proposition 3.31). Quitte à remplacer A et B respectivement par $A_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{p}}$, on peut alors supposer que $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$. Dans ce cas, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ sont maximaux, par (i), et comme ils sont contenus l'un dans l'autre, ils doivent coïncider. $\square$

Théorème 6.19. (du "going up") Soit $i : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux, avec B entier sur A . Alors $\text{Spec}(i) : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est *spécialisante* (définition 4.61(ii)).

Démonstration. Soient $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers de A , et $\mathfrak{q}_1 \in \text{Spec } B$ tel que $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$; on doit exhiber $\mathfrak{q}_2 \in \text{Spec } B$ tel que

$$\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2.$$

L'inclusion $i : A \rightarrow B$ induit une inclusion entière $\bar{i} : A/\mathfrak{p}_1 \rightarrow B/\mathfrak{q}_1$, et on obtient les diagrammes commutatifs suivants d'anneaux et d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_A} & A/\mathfrak{p}_1 \\ i \downarrow & & \downarrow \bar{i} \\ B & \xrightarrow{\pi_B} & B/\mathfrak{q}_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } B/\mathfrak{q}_1 & \xrightarrow{\text{Spec } \pi_B} & \text{Spec } B \\ \text{Spec}(\bar{i}) \downarrow & & \downarrow \text{Spec}(i) \\ \text{Spec } A/\mathfrak{p}_1 & \xrightarrow{\text{Spec } \pi_A} & \text{Spec } A. \end{array}$$

On sait que $\text{Spec } \pi_B$ identifie $\text{Spec } B/\mathfrak{q}_1$ avec $V(\mathfrak{q}_1) \subset \text{Spec } B$ et $\text{Spec } \pi_A$ identifie $\text{Spec } A/\mathfrak{p}_1$ avec $V(\mathfrak{p}_1) \subset \text{Spec } A$. Quitte à remplacer A par $A/\mathfrak{p}_1$ et B par $B/\mathfrak{q}_1$, on peut alors supposer que $\mathfrak{q}_1 = 0$. Dans cette situation, il suffit de montrer la surjectivité de $\text{Spec}(i)$, i.e. que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ il existe $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ avec $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Soit donc $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$;

l'anneau $B_{\mathfrak{p}}$ est entier sur $A_{\mathfrak{p}}$, et les localisations $j_A : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, $j_B : B \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ induisent un diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} B_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\mathrm{Spec} j_B} & \mathrm{Spec} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\mathrm{Spec} j_A} & \mathrm{Spec} A. \end{array}$$

De plus, $\mathfrak{p}$ est dans l'image de $\mathrm{Spec} j_A$ (voir la proposition 3.31); quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$ et B par $B_{\mathfrak{p}}$, on peut alors supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit un anneau local. Comme $A \neq 0$, on a $B \neq 0$, d'où $\mathrm{Max} B \neq \emptyset$ (par le théorème 1.34); si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Max} B$, l'idéal $\mathfrak{q} \cap A$ est maximal dans A (corollaire 6.18(i)), donc il coïncide avec $\mathfrak{p}$. $\square$

Corollaire 6.20. *Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, avec B entier sur A . Alors :*

- (i) *L'application induite $\phi : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$ est fermée et surjective.*
- (ii) *La topologie de $\mathrm{Spec} A$ coïncide avec la topologie induite par $\mathrm{Spec} B$ via ϕ .*
- (iii) *$\dim A = \dim B$.*
- (iv) *Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$, l'espace topologique $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ (avec la topologie induite par l'inclusion dans $\mathrm{Spec} B$) est compact, non vide, et totalement disconnexe.*
- (v) *Si en outre B est une A -algèbre finie, alors $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est un espace topologique fini et discret, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$.*

Démonstration. (i) : On sait déjà que l'application ϕ est continue et compacte (remarque 4.59(iii)), donc ϕ est fermée (théorème 6.19 et proposition 4.69(i)). En outre, l'image de ϕ est dense (exercice 3.37(i)) et fermée, donc coïncide avec $\mathrm{Spec} A$. L'assertion (ii) découle de (i), du théorème 6.19 et de la proposition 4.69(ii).

(iii) : Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min} A$; d'après l'exercice 3.37(i), il existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$ avec $\phi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, et d'après le théorème 6.19 et l'exercice 4.70(ii) on a $\dim V(\mathfrak{q}) \geq \dim V(\mathfrak{p})$, d'où $\dim B \geq \dim A$. De l'autre côté, soit $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de B ; d'après le corollaire 6.18(ii), la chaîne induite $\phi(\mathfrak{q}_0) \subset \dots \subset \phi(\mathfrak{q}_n)$ est encore strictement croissante, d'où $\dim B \leq \dim A$.

(iv) : Soit $C := B \otimes_A k(\mathfrak{p})$; d'un côté, la discussion du §3.4.2 identifie naturellement $\mathrm{Spec}(C)$ avec $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$, et en particulier, ce dernier est un espace spectral non vide; de l'autre côté, le corollaire 6.18(ii) nous dit que $\dim(\phi^{-1}(\mathfrak{p})) = 0$. L'assertion découle alors du problème 4.77(i).

(v) : Sous ces hypothèses, C est une $k(\mathfrak{p})$ -algèbre finie. Or, si $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ sont des idéaux maximaux distincts de C , le lemme chinois nous dit que l'application naturelle $C \rightarrow \prod_{i=1}^r k(\mathfrak{m}_i)$ est surjective; mais chaque corps résiduel $k(\mathfrak{m}_i)$ est une extension finie de $k(\mathfrak{p})$; par suite $\dim_{k(\mathfrak{p})} C \geq r$, autrement dit, la dimension du $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel C est une borne supérieure pour la cardinalité de $\mathrm{Spec} C$. $\square$

Exemple 6.21. Soient $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ distincts, et posons

$$A := \mathbb{C}[X] \quad B := A[Y]/(Y^2 - \prod_{i=0}^n (X - z_i)).$$

Evidemment la classe y de Y dans B est entière sur A , donc B est entier sur A . On a une identification naturelle $\mathrm{Max} A \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, et le corollaire 6.18(i) nous dit que l'application $\mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$ se restreint en une application $\phi : \mathrm{Max} B \rightarrow \mathrm{Max} A$. On voit aussi que $B = A + Ay$, donc $\dim_{k(\mathfrak{p})} B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \leq 2$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$. Au vu du corollaire 6.20(v) on conclut que chaque fibre de ϕ contient au plus deux points, *i.e.* $\mathrm{Max} B$ s'interprète géométriquement comme un revêtement de degré 2 de la droite affine. Si $z \in \mathbb{C}$, l'idéal maximal $\mathfrak{p}_z$ correspondant de A est engendré par $X - z$, donc $B \otimes_A k(\mathfrak{p}_z)$ est (isomorphe à) la $\mathbb{C}$ -algèbre $C_z := \mathbb{C}[Y]/(Y^2 - \prod_{i=0}^n (z - z_i))$; pour $z \in \{z_0, \dots, z_n\}$ on obtient $C_z = \mathbb{C}[Y]/(Y^2)$ et $\mathrm{Max} C_z$ a cardinalité égal à 1. Pour les autres valeurs de z , on obtient

$$C_z = \mathbb{C}[Y]/(Y^2 - a) = \mathbb{C}[Y]/(Y - a^{1/2}) \times \mathbb{C}[Y]/(Y + a^{1/2}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

avec $a := (z - z_0) \cdots (z - z_n)$; la fibre de ϕ sur z contient donc deux points.

Exercice 6.22. Soit $A \subset B$ une inclusion entière d'anneaux. Montrer :

- (i) $\mathcal{J}(A) = A \cap \mathcal{J}(B)$ (notation de la définition 1.48(i)).
- (ii) Si de plus $(A, \mathfrak{m})$ est local, $\mathcal{J}(B) = \text{rad}(\mathfrak{m}B)$.

Remarque 6.23. (i) Plus généralement, on dit qu'un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'anneaux est *entier*, ou que B est une A -algèbre *entière*, si B est entier sur $C := f(A)$. Donc, un homomorphisme entier f est la composition d'une surjection $p : A \rightarrow C$ et d'une inclusion entière $C \subset B$; de même, $\phi := \text{Spec } f$ se factorise :

$$\text{Spec } B \xrightarrow{\psi} \text{Spec } C \xrightarrow{\text{Spec}(p)} \text{Spec } A.$$

On vient de voir que ψ est une application fermée; mais il en est de même pour $\text{Spec}(p)$, car cette dernière identifie $\text{Spec } C$ avec la partie fermée $V(\text{Ker } p) \subset \text{Spec } A$. Donc, *si f est un homomorphisme entier d'anneaux, l'application $\text{Spec } f$ est fermée.*

- (ii) En outre, pour toute partie fermée irréductible $Z \subset \text{Spec } B$, on a :

$$\dim Z = \dim \phi(Z).$$

En effet, si $\mathfrak{q}$ est le point générique de Z , alors $\mathfrak{p} := \phi(\mathfrak{q})$ est le point générique de $\phi(Z)$, et f induit un homomorphisme injectif et entier $\bar{f} : A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$; or, la restriction $Z \rightarrow \phi(Z)$ de ϕ s'identifie naturellement avec l'application $\text{Spec}(\bar{f}) : \text{Spec } B/\mathfrak{q} \rightarrow \text{Spec } A/\mathfrak{p}$, donc l'assertion découle du corollaire 6.20(iii).

Exercice 6.24. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes entiers d'anneaux, et A' une A -algèbre.

- (i) Montrer que $g \circ f : A \rightarrow C$ est un homomorphisme entier.
- (ii) Montrer que $A' \otimes_A f : A' \rightarrow A' \otimes_A B$ est un homomorphisme entier.

Exercice 6.25. (Anneaux d'invariants) Soient B un anneau, G un groupe fini d'automorphismes de B . Le sous-anneau des G -invariants de B est

$$B^G := \{x \in B \mid \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in G\}.$$

- (i) Montrer que l'inclusion $j : B^G \rightarrow B$ est un homomorphisme entier d'anneaux.
- (ii) L'action de G sur B induit une G -action sur $\text{Spec } B$: à savoir, on associe à tout $\sigma \in G$ l'homéomorphisme $\text{Spec } \sigma : \text{Spec } B \xrightarrow{\sim} \text{Spec } B : \mathfrak{q} \mapsto \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$. Evidemment pour tout $\sigma \in G$ on a un diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \xrightarrow{\text{Spec } \sigma} & \text{Spec } B \\ & \searrow \text{Spec } j & \swarrow \text{Spec } j \\ & \text{Spec } B^G & \end{array}$$

et en particulier les fibres de $\text{Spec } j$ sont stables sous l'action de G . Montrer que G agit transitivement sur $(\text{Spec } j)^{-1}(\mathfrak{p})$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B^G$.

(iii) Soient $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, et $\mathfrak{p} := B^G \cap \mathfrak{q}$; on pose $G_{\mathfrak{q}} := \{\sigma \in G \mid \sigma^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$. Tout $\sigma \in G_{\mathfrak{q}}$ induit un automorphisme σ' de la $B^G/\mathfrak{p}$ -algèbre $B/\mathfrak{q}$, qui se prolonge en un unique $k(\mathfrak{p})$ -automorphisme $\bar{\sigma}$ du corps $k(\mathfrak{q})$. On obtient ainsi un homomorphisme naturel du groupe $G_{\mathfrak{q}}$ vers le groupe des $k(\mathfrak{p})$ -automorphismes de $k(\mathfrak{q})$:

$$(*) \quad G_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p})) \quad \sigma \mapsto \bar{\sigma}.$$

Montrer que $k(\mathfrak{q})$ est une extension normale de $k(\mathfrak{p})$, et que $(*)$ est une surjection.

Lemme 6.26. Soit $j : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux intègres, avec B entier sur A . Si A est intégralement clos, et si $K_B := \text{Frac}(B)$ est une extension purement inséparable de $K_A := \text{Frac}(A)$, l'application $\text{Spec } j$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Au vu du corollaire 6.20(ii), il suffit de montrer que $\text{Spec } j$ est injective, i.e. que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ la fibre $F := \text{Spec } B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ contient un seul point. On sait déjà que F est totalement disconnexe (corollaire 6.20(iv)), donc si $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in F$ sont deux points distincts, il existe des parties ouvertes $U, U' \subset F$ avec $F = U \cup U'$, $U \cap U' = \emptyset$, $\mathfrak{q} \in U$ et $\mathfrak{q}' \in U'$. Par l'exercice 3.66(ii), on trouve des idempotents $x, x' \in B \otimes_A k(\mathfrak{p}) = (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{p}}$ tels que $D(x) = U$, $D(x') = U'$, et $xx' = 0$. Or, soit $p > 0$ la caractéristique de K_A et K_B , et disons que $x = \bar{y}/s$ avec $\bar{y}$ la classe d'un élément $y \in B$ et $s \in A \setminus \mathfrak{p}$; il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $y^q \in K_A \cap B = A$ avec $q := p^n$, d'où $x^q = \bar{y}^q/s^q \in k(\mathfrak{p})$. Mais $x^q = x$ car x est idempotent, et de même pour x' , donc $x, x' \in k(\mathfrak{p})$. Par suite, soit $x = 0$, soit $x' = 0$, ce qui est absurde, car $D(x), D(x') \neq \emptyset$. $\square$

Exercice 6.27. (i) Soient A un anneau intègre et intégralement clos, B la fermeture intégrale de A dans une extension algébrique normale E de $K := \text{Frac } A$, et $j : A \rightarrow B$ l'inclusion. Le groupe G des K -automorphismes de E agit sur la A -algèbre B , donc aussi sur $\text{Spec } B$, comme dans l'exercice 6.25(ii). Montrer que G agit transitivement sur $(\text{Spec } j)^{-1}(\mathfrak{p})$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

(ii) Soient $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ et $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$; on pose $G_{\mathfrak{q}} := \{\sigma \in G \mid \sigma^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$. Comme dans l'exercice 6.25(iii), tout $\sigma \in G_{\mathfrak{q}}$ induit un $k(\mathfrak{p})$ -automorphisme $\bar{\sigma}$ du corps $k(\mathfrak{q})$, d'où un homomorphisme de groupes

$$(*) \quad G_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p})) \quad \sigma \mapsto \bar{\sigma}.$$

Montrer que $k(\mathfrak{q})$ est une extension normale de $k(\mathfrak{p})$, et que $(*)$ est une surjection.

Théorème 6.28. (du “going down”) Soit $j : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux intègres, avec B entier sur A , et A intégralement clos. Alors :

- (i) $\text{Spec } j$ est une application ouverte.
- (ii) En particulier, $\text{Spec } j$ est générissante.

Démonstration. (i) : Soient E une extension algébrique normale de $K := \text{Frac}(A)$ contenant $\text{Frac}(B)$, et G le groupe des K -automorphismes de E ; soient en outre C la fermeture intégrale de A dans E , et $i : B \rightarrow C$ l'inclusion. Or, soient $\phi := \text{Spec}(j)$, et $U \subset Y := \text{Spec } B$ une partie ouverte; puisque $\psi := \text{Spec}(i)$ est surjective (corollaire 6.20(i)), on a $\psi(\psi^{-1}U) = U$, donc il suffit de montrer que $\phi \circ \psi(\psi^{-1}U)$ est une partie ouverte de $X := \text{Spec } A$. Ainsi, quitte à remplacer B par C , on peut supposer que B soit la fermeture intégrale de A dans E . Or, tout $g \in G$ induit par restriction un automorphisme g_B de B ; posons $\rho_g := \text{Spec}(g_B) : Y \xrightarrow{\sim} Y$ pour tout tel g . D'après l'exercice 6.27(i), on a $\phi^{-1}(\phi U) = \bigcup_{g \in G} \rho_g(U)$, et évidemment $\rho_g(U)$ est une partie ouverte de Y , pour tout $g \in G$. Par suite, $\phi^{-1}(X \setminus \phi U) = Y \setminus \phi^{-1}(\phi U)$ est une partie fermée de Y , et comme ϕ est fermée et surjective, on conclut que $X \setminus \phi U$ est une partie fermée de X , d'où l'assertion.

(ii) : Cela découle aussitôt de (i) et de la proposition 4.69(iii). $\square$

Remarque 6.29. Le théorème 6.28 devient faux si A n'est pas intégralement clos : voir l'exemple 6.96.

6.1.2. *Descente finie.* Le dernier thème de cette section est l'étude des propriétés des modules et des anneaux qui *descendent par un homomorphisme fini*. On a déjà rencontré dans le problème 3.83 le prototype de ces résultats : il s'agissait là plutôt de descendre des propriétés des modules, telles que la platitude ou la finitude, par les homomorphismes $f : A \rightarrow B$ d'anneaux fidèlement plats; en l'absence d'hypothèse de platitude sur f , les mêmes questions deviennent pourtant beaucoup plus ardues, et l'analogie que l'on établira ici est un théorème profond tiré de l'article fondamental [35]. Le point clef est la proposition assez technique suivante, qui nous servira aussi plus tard dans la preuve du théorème 6.71 :

Proposition 6.30. *Soient A un anneau, M un A -module fidèle de type fini, I un A -module injectif, et $\phi : J \rightarrow I$ l'inclusion d'un sous-module. Alors l'application induite $\text{Hom}_A(M, \phi) : \text{Hom}_A(M, J) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I)$ admet un inverse à gauche si et seulement si ϕ admet un inverse à gauche.*

Démonstration. Evidemment, si ϕ admet un inverse à gauche $\psi : I \rightarrow J$, l'application $\text{Hom}_A(M, \psi)$ est inverse à gauche de $\text{Hom}_A(M, \phi)$. Supposons donc que $\text{Hom}_A(M, \phi)$ admet un inverse à gauche $\tau : \text{Hom}_A(M, I) \rightarrow \text{Hom}_A(M, J)$; par le théorème 4.31 et l'exercice 4.25(v.a) le A -module J admet une enveloppe injective $\phi' : J \rightarrow E$ et ϕ se factorise à travers ϕ' et une injection A -linéaire $\beta : E \rightarrow I$. Par l'injectivité de E , l'application β admet un inverse à gauche, donc on est ramené à montrer que ϕ' admet un inverse à gauche, et d'autre part $\text{Hom}_A(M, \phi')$ admet l'inverse à gauche $\tau \circ \text{Hom}_A(M, \beta)$. On peut alors supposer du départ que $\phi : J \rightarrow I$ soit une enveloppe injective de J . Soit maintenant $\alpha : A^n \rightarrow M$ une surjection A -linéaire; on considère le diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, J) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, \phi)} & \text{Hom}_A(M, I) \\ \text{Hom}_A(\alpha, J) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(\alpha, I) \\ J^n \simeq \text{Hom}_A(A^n, J) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(A^n, \phi)} & \text{Hom}_A(A^n, I) \simeq I^n. \end{array}$$

Affirmation 6.31. L'application $\text{Hom}_A(M, \phi)$ est une extension essentielle.

Preuve : D'après l'exercice 4.25(iii), la ligne horizontale en bas est une enveloppe injective de J^n . D'autre part, les applications $\text{Hom}_A(\alpha, I)$ et $\text{Hom}_A(\alpha, J)$ sont évidemment injectives, et identifient $\text{Hom}_A(M, J)$ et $\text{Hom}_A(M, I)$ avec des sous-modules de J^n et respectivement I^n ; de plus, sous ces identifications on voit aussitôt que :

$$\text{Hom}_A(M, J) = J^n \cap \text{Hom}_A(M, I).$$

Soit $N \subset \text{Hom}_A(M, I)$ un sous-module; il vient : $N' := N \cap \text{Hom}_A(M, J) = N \cap J^n$. Donc, $N' = 0$ si et seulement si $N = 0$, comme souhaité. $\diamond$

Il est clair qu'une extension essentielle admet un inverse à gauche si et seulement si elle est bijective; on voit donc que $\text{Hom}_A(M, \phi)$ est un isomorphisme.

Soient ensuite $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de M , et $\delta : A \rightarrow M^n$ l'application telle que $a \mapsto (ax_1, \dots, ax_n)$ pour tout $a \in A$; comme M est fidèle, évidemment δ est injective, donc $\text{Hom}_A(\delta, I)$ est surjective, car I est injectif. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_A(M, J)^n & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_A(M^n, J) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\delta, J)} & \text{Hom}_A(A, J) \simeq J \\ \text{Hom}_A(M, \phi)^n \downarrow & & \text{Hom}_A(M^n, \phi) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(A, \phi) \simeq \phi \\ \text{Hom}_A(M, J)^n & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_A(M^n, I) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\delta, I)} & \text{Hom}_A(A, I) \simeq I \end{array}$$

montre alors que ϕ est aussi surjective, i.e. $J = I$, d'où la proposition. $\square$

Théorème 6.32. *Soient $A \rightarrow B$ un homomorphisme fini et injectif d'anneaux, P un A -module. Alors P est plat si et seulement si $B \otimes_A P$ est un B -module plat.*

Démonstration. Evidemment on peut supposer que $B \otimes_A P$ soit un B -module plat, et on va montrer que P est un A -module plat. Soit $\Sigma := (0 \rightarrow Q \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} P \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de A -modules dont le terme L est un A -module libre. Soit $Q' \subset B \otimes_A L$ l'image de $B \otimes_A u$. D'après le problème 4.24(ii.a), la suite de B -modules

$$\Sigma_B := (0 \rightarrow Q' \rightarrow B \otimes_A L \xrightarrow{B \otimes_A v} B \otimes_A P \rightarrow 0)$$

est universellement exacte, et avec le problème 4.24(i), le dual de Pontryagin Σ_B^* de Σ_B est alors une suite exacte scindée de B -modules, i.e. $(B \otimes_A v)^* : (B \otimes_A P)^* \rightarrow (B \otimes_A L)^*$

admet un inverse à gauche. D'autre part, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (B \otimes_A P)^* & \xrightarrow{(B \otimes_A v)^*} & (B \otimes_A L)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_A(B, P^*) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(B, v^*)} & \mathrm{Hom}_A(B, L^*) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes A -linéaires de l'exercice 3.19. Donc, l'application A -linéaire $\mathrm{Hom}_A(B, v^*)$ admet un inverse à gauche. Mais d'un côté, L^* est un A -module injectif, d'après le problème 4.23(i), et de l'autre côté, B est évidemment un A -module fidèle de type fini ; compte tenu de la proposition 6.30, il s'ensuit que v^* admet un inverse à gauche, *i.e.* la duale de Pontryagin Σ^* de la suite Σ est scindée. Si l'on invoque à nouveau le problème 4.24(i), on conclut que Σ est universellement exacte, et alors P est plat, par le problème 4.24(ii.b). $\square$

Exercice 6.33. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme fini et injectif d'anneaux, M un A -module. Montrer les assertions suivantes :

- (i) $M = 0$ si et seulement si $B \otimes_A M = 0$.
- (ii) M est de type fini (resp. projectif de type fini) si et seulement si le B -module $B \otimes_A M$ est de type fini (resp. projectif de type fini).

6.2. Homomorphismes quasi-finis et “Main Theorem” de Zariski. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme fini d'anneaux ; on a vu dans la section précédente que les fibres de $\mathrm{Spec} f$ sont discrètes. Cependant, cette condition ne caractérise pas les homomorphismes finis, car par exemple elle est partagée aussi par toute localisation. Plus généralement, si f est fini, la composition de f avec une localisation $B \rightarrow S^{-1}B$ est rarement finie, mais vérifie encore cette condition. Toutefois, on va voir que ces exemples sont en fait typiques des homomorphismes à fibres topologiques discrètes ; pour cela, il convient d'introduire la notion plus générale suivante :

Définition 6.34. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini ; considérons un point $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$, et son image $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec} A$.

- (i) On dit que f est *quasi-fini au point* $\mathfrak{q}$ si $\mathfrak{q}$ est un point *isolé* de la fibre $(\mathrm{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p})$, *i.e.* si la partie $\{\mathfrak{q}\}$ est ouverte et fermée dans $(\mathrm{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p})$.
- (ii) On dit que f est *quasi-fini* s'il est quasi-fini en tout point de $\mathrm{Spec} B$, *i.e.* si les fibres de $\mathrm{Spec} f$ sont des espaces topologiques discrets.

Exercice 6.35. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme quasi-fini d'anneaux. Montrer que $\dim B \leq \dim A$.

Avec la notation de la définition 6.34, le résultat principal de cette section montrera que le lieu des $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$ tels que f soit quasi-fini au point $\mathfrak{q}$ est une partie ouverte de $\mathrm{Spec} B$. Si en outre f est quasi-fini, on verra qu'il existe une factorisation $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B$ de l'homomorphisme f , telle que g soit un homomorphisme *fini*, et avec $\mathrm{Spec} h : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} C$ une *immersion ouverte*, *i.e.* $\mathrm{Spec} h$ induit un isomorphisme du schéma $\mathrm{Spec} B$ avec un sous-schéma ouvert de $\mathrm{Spec} C$. On va démarrer avec quelques observations préliminaires sur les homomorphismes quasi-finis :

Proposition 6.36. Soient K un corps, B une K -algèbre de type fini, et $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$ tel que B soit quasi-finie au point $\mathfrak{q}$. On a :

- (i) Il existe une B -algèbre C et un isomorphisme de B -algèbres $B \xrightarrow{\sim} C \times B_{\mathfrak{q}}$.
- (ii) La localisation $B_{\mathfrak{q}}$ est une K -algèbre finie.

Démonstration. (i) : Le spectre de K contient un seul point $\mathfrak{p}_0 := 0$, donc la fibre de l'application induite $\mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} K$ au-dessus de $\mathfrak{p}_0$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathrm{Spec} B$; par hypothèse, la partie $\{\mathfrak{q}\}$ est alors ouverte et fermée dans $\mathrm{Spec} B$, et par suite l'exercice 3.66(iii) fournit une décomposition $B \xrightarrow{\sim} C \times D$ de l'anneau B , telle que l'image

de l'application induite $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ (resp. $\text{Spec } D \rightarrow \text{Spec } B$) soit $\text{Spec } B \setminus \{\mathfrak{q}\}$ (resp. $\{\mathfrak{q}\}$). Rappelons d'autre part que l'image de $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}}$ dans $\text{Spec } B$ est l'ensemble des générisations de $\mathfrak{q}$; mais comme ce dernier est un point isolé, il vient $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q}\}$, et alors $\text{Spec } C_{\mathfrak{q}} = (\text{Spec } C) \cap \text{Spec } B_{\mathfrak{q}} = \emptyset$, donc $C_{\mathfrak{q}} = 0$ (théorème 1.34), et on déduit un isomorphisme $B_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} D_{\mathfrak{q}}$. Mais $\mathfrak{q}$ s'identifie aussi avec l'unique idéal premier de D , donc $D_{\mathfrak{q}} = D$, d'où l'assertion.

(ii) : D'après (i), la K -algèbre $B_{\mathfrak{q}}$ est de type fini et $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}\}$; par le problème 6.12(ii), il existe alors $d \in \mathbb{N}$ et une suite $x_1, \dots, x_d \in B_{\mathfrak{q}}$ d'éléments algébriquement indépendants sur K , telle que l'inclusion $K[x_1, \dots, x_d] \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ soit un homomorphisme fini. Au vu du corollaire 6.20(i), $\text{Spec } K[x_1, \dots, x_d]$ contient alors un seul point, et cela n'est possible que si $d = 0$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 6.37. En fait, la condition (ii) de la proposition 6.36 est nécessaire et suffisante pour que la K -algèbre B soit quasi-finie au point $\mathfrak{q}$; voir l'exercice 6.107.

Corollaire 6.38. *Un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ de type fini est quasi-finie si et seulement si $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ est une $k(\mathfrak{p})$ -algèbre finie pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.*

Démonstration. Comme $\text{Spec } k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ s'identifie naturellement avec $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$, il est clair que la condition suffit pour que f soit quasi-finie (corollaire 6.20(v)). Réciproquement, si f est quasi-finie, l'homomorphisme induit $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ est quasi-finie, et en particulier $\text{Spec } k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ est un espace topologique discret et compact, donc fini. Soient alors $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ les points de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$; au vu de la proposition 6.36, on déduit une décomposition $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \simeq (k(\mathfrak{p}) \otimes_A B_{\mathfrak{q}_1}) \times \dots \times (k(\mathfrak{p}) \otimes_A B_{\mathfrak{q}_n})$ dont les facteurs sont des $k(\mathfrak{p})$ -algèbres finies, donc de même pour $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$. $\square$

Remarque 6.39. La preuve du corollaire 6.38 montre en particulier que si $K \rightarrow E$ est une extension de corps qui est un homomorphisme de type fini, alors E est une extension finie de K . Cet énoncé est le point clef de la preuve du Nullstellensatz, et on en fournira plus tard une deuxième démonstration ne s'appuyant pas sur le lemme de normalisation de Noether (voir la proposition 6.78).

Corollaire 6.40. *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, A' une A -algèbre, $B' := A' \otimes_A B$ et $f' : A' \rightarrow B'$, $g : B \rightarrow B'$ les homomorphismes naturels. Soit aussi $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B'$ et $\mathfrak{q} := g^{-1}(\mathfrak{q}') \in \text{Spec } B$. On a :*

- (i) *Si f est quasi-finie au point $\mathfrak{q}$, alors f' est quasi-finie au point $\mathfrak{q}'$.*
- (ii) *En particulier, si f est quasi-finie, il en est de même pour f' .*

Démonstration. (i) : On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B' & \xrightarrow{\text{Spec } g} & \text{Spec } B \\ \text{Spec } f' \downarrow & & \downarrow \text{Spec } f \\ \text{Spec } A' & \longrightarrow & \text{Spec } A. \end{array}$$

Soient $\mathfrak{p}' := f'^{-1}(\mathfrak{q}') \in \text{Spec } A'$, et $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } A$; soient aussi $B(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ et $B'(\mathfrak{p}') := k(\mathfrak{p}') \otimes_{A'} B'$, et notons par $i : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}')$ l'extension de corps résiduels; d'après la remarque 3.71(ii), la restriction

$$\text{Spec } B'(\mathfrak{p}') \xrightarrow{\sim} (\text{Spec } f')^{-1}(\mathfrak{p}') \rightarrow (\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } B(\mathfrak{p})$$

de $\text{Spec } g$ est l'application continue induite par l'homomorphisme d'anneaux

$$h : B(\mathfrak{p}) \xrightarrow{i \otimes_A B} k(\mathfrak{p}') \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B'(\mathfrak{p}').$$

D'autre part, si f est quasi-finie en $\mathfrak{q}$, par définition $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : k(\mathfrak{p}) \rightarrow B(\mathfrak{p})$ est quasi-finie au point $\mathfrak{q} \cdot B(\mathfrak{p})$, qui correspond à $\mathfrak{q}$ suivant l'identification naturelle de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$ avec $\text{Spec } B(\mathfrak{p})$. La proposition 6.36 nous dit alors que $D := B(\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$ est une $k(\mathfrak{p})$ -algèbre finie, et nous donne un isomorphisme $B(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} C \times D$ de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres, qui identifie

$\text{Spec } B(\mathfrak{p})$ avec la réunion disjointe $(\text{Spec } C') \sqcup (\text{Spec } D)$, et en particulier le point $\mathfrak{q}$ de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$ est identifié avec l'unique point de la partie ouverte et fermée $\text{Spec } D$. De plus, les isomorphismes

$$k(\mathfrak{p}') \otimes_A B \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} (k(\mathfrak{p}) \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} (k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} C) \times (k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} D)$$

identifient h au produit des homomorphismes naturels $C \rightarrow k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} C$ et $D \rightarrow k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} D$. En résumé, on conclut que $(\text{Spec } h)^{-1}(\mathfrak{q})$ s'identifie à la partie ouverte et fermée $\text{Spec } k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} D$ de $(\text{Spec } f')^{-1}(\mathfrak{p}')$. On est alors ramené à montrer que $\mathfrak{q}'$ est un point isolé dans $\text{Spec } k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} D$; mais cela est clair, car $k(\mathfrak{p}') \otimes_{k(\mathfrak{p})} D$ est une $k(\mathfrak{p}')$ -algèbre finie, et donc son spectre est un espace topologique discret et fini (corollaire 6.20(v)). L'assertion (ii) suit aussitôt de (i). $\square$

Exercice 6.41. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } C$, et $\mathfrak{p} := g^{-1}(\mathfrak{q})$. Montrer que si f est quasi-fini au point $\mathfrak{p}$ et si g est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$, alors $g \circ f$ est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$. En particulier, si f et g sont quasi-finis, $g \circ f$ est quasi-fini.

Problème 6.42. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, et $h \in B \setminus \mathfrak{q}$. Soit $g : A \rightarrow B_h$ la composition de f avec la localisation $B \rightarrow B_h$. Montrer que g est quasi-fini en $\mathfrak{q}B_h$ si et seulement si f est quasi-fini en $\mathfrak{q}$.

Exercice 6.43. Soient A un anneau factoriel et $a, b \in A \setminus \{0\}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. On pose $x := a/b$ et $B := A[x] \subset \text{Frac } A$; soient $f : A \rightarrow B$ l'inclusion, et $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ un idéal premier. Montrer que f n'est pas quasi-fini au point $\mathfrak{q} \Leftrightarrow a, b \in \mathfrak{q}$.

Le “Main Theorem” de Zariski nous dira que si l'homomorphisme $f : A \rightarrow B$ est quasi-fini au point $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, alors la fermeture intégrale B' de $f(A)$ dans B est “isomorphe à B dans un voisinage de $\mathfrak{q}$ ”, i.e. il existe $h \in B' \setminus \mathfrak{q}$ tel que l'inclusion $B' \rightarrow B$ induit un isomorphisme $B'_h \xrightarrow{\sim} B_h$. La preuve est assez longue et délicate; la première étape est le cas d'une extension *monogène* d'anneaux :

Lemme 6.44. Soient $f : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux avec A intégralement clos dans B , et $x \in B$ avec $B = A[x]$. Soit aussi $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ et $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Alors f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$ si et seulement s'il induit un isomorphisme $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$.

Démonstration. Si f induit un isomorphisme $A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$, l'homomorphisme naturel $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_A B_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme à son tour. D'autre part, on a un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres $B(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})[T]/J$, pour un idéal $J \subset k(\mathfrak{p})[T]$. Noter que l'on ne peut pas avoir $J = 0$, car dans ce cas $k(\mathfrak{p}) \simeq B(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ serait une localisation de $k(\mathfrak{p})[T]$. Par suite $B(\mathfrak{p})$ est une $k(\mathfrak{p})$ -algèbre finie, et en particulier f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$.

Réciproquement, supposons que f soit quasi-fini au point $\mathfrak{q}$; par définition, cela veut dire que l'homomorphisme induit $k(\mathfrak{p}) \rightarrow B(\mathfrak{p})$ est quasi-fini au point $\mathfrak{q} \cdot B(\mathfrak{p})$. Par suite $J \neq 0$, donc il existe $P(T) := a_k T^k + \dots + a_0 \in A[T]$ et $i \in \{0, \dots, k\}$ tels que $P(x) = 0$ et $a_i \notin \mathfrak{p}$. Choisissons un tel $P(T)$ avec k minimal.

Affirmation 6.45. Soient $R \subset S$ une inclusion d'anneaux, $s \in S$ et $P(T) := a_k T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \dots + a_0 \in R[T]$ tel que $P(s) = 0$. Alors $a_k s$ est entier sur R .

Preuve : Soit $Q(T) := T^k + \sum_{j=1}^k a_{k-j} a_k^{-j-1} T^{k-j}$; on a $a_k^{k-1} P(T) = Q(a_k T)$, donc $Q(a_k s) = a_k^{k-1} P(s) = 0$, d'où l'assertion. $\diamond$

D'après l'observation 6.45, l'élément $a_k x$ est entier sur A , donc $a_k x \in A$. Or, si $a_k \in \mathfrak{p}$, posons $a'_{k-1} := a_k x + a_{k-1}$; il vient $a'_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_0 = 0$. Mais $a_k x \in A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, donc $a_{k-1} \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $a'_{k-1} \in \mathfrak{p}$; en particulier, au moins un des éléments $a'_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0$ n'est pas dans $\mathfrak{p}$. Cela contredit la minimalité de k , d'où $a_k \notin \mathfrak{p}$, et alors $x \in A_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme. $\square$

La preuve dans le cas général s'effectuera par réduction préalable au cas de la composition d'une extension monogène avec une extension finie ; observons d'abord :

Lemme 6.46. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, $x, b \in B$ et $P(T) := a_k T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \dots + a_0 \in A[T]$ tel que $P(x) \cdot b \in A[x] \subset B$. On suppose A intégralement clos dans B , et B entier sur $A[x]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_k^n b \in A[x]$.

Démonstration. Remarquons d'abord :

Affirmation 6.47. Avec la notation du lemme, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $a^m b$ soit entier sur $A[ax] \subset B$ pour tout $a \in A$ et tout $m \geq l$.

Preuve : Par hypothèse, b vérifie une identité de la forme

$$b^d + q_{d-1}(x) \cdot b^{d-1} + \dots + q_0(x) = 0 \quad \text{avec} \quad q_0(T), \dots, q_{d-1}(T) \in A[T].$$

Soit $l := \max(\deg_T q_0, \dots, \deg_T q_{d-1})$. Pour $i = 0, \dots, d-1$ on trouve aisément $r_i(T) \in A[T]$ tel que $r_i(aT) = a^l \cdot q_i(T)$ (les détails sont laissés au lecteur) ; ainsi $a^l b^d + r_{d-1}(ax) \cdot b^{d-1} + \dots + r_0(ax) = 0$, et il suffit d'invoquer l'observation 6.45. $\square$

Définissons $Q(T) \in A[T]$ comme dans la preuve de l'observation 6.45 ; il vient $a_k^{k-1} P(x) \cdot b = Q(a_k x) \cdot b \in A[x]$. Disons donc que $Q(a_k x) \cdot b = R(x)$ pour un polynôme $R(T) := c_n T^n + \dots + c_0 \in A[T]$, et on pose de manière analogue $S(T) := \sum_{j=0}^n c_{n-j} a_k^j T^{n-j}$; il vient $Q(a_k x) \cdot a_k^n b = S(a_k x)$. On peut supposer que $n \geq l$, l'entier fourni par l'observation 6.47, et alors $a_k^n b$ est même entier sur $A[a_k x]$.

Quitte à remplacer x par $a_k x$, b par $a_k^n b$ et B par $A[a_k x, a_k^n b]$, on peut alors supposer que P soit unitaire, et dans ce cas on doit montrer que $b \in A[x]$.

Disons donc que $P(x) \cdot b = U(x)$ pour un polynôme $U(T) \in A[T]$; comme $P(T)$ est maintenant unitaire, on peut effectuer la division euclidienne de U par P : on obtient $V, W \in A[T]$ tels que $U = PV + W$ et $\deg_T W < \deg_T P$. Il vient $P(x) \cdot (b - V(x)) = W(x)$, et il suffit de montrer que $b - V(x) \in A[x]$. On peut alors remplacer b par $b - V(x)$ et U par W , et supposer que $\deg_T U < \deg_T P$.

Dans cette situation, l'identité $P(x) - b^{-1}U(x) = 0$ dans la localisation $B[b^{-1}]$ montre que x est entier sur l'anneau $A[b^{-1}] \subset B[b^{-1}]$. D'autre part, b est entier sur $A[x]$; par suite b est entier sur $A[b^{-1}]$ (corollaire 6.9). Autrement dit, on a une identité de la forme $b^d + \sum_{j=0}^{d-1} (a_j / b^{n_j}) \cdot b^j = 0$ dans $B[b^{-1}]$ pour certains $a_0, \dots, a_{d-1} \in A$ et $n_0, \dots, n_{d-1} \in \mathbb{N}$. Cela veut dire que $b^{d+N} + \sum_{j=0}^{d-1} a_j b^{j-n_j+N} = 0$ dans B , pour quelque entier $N \geq n_0, \dots, n_{d-1}$. Cela montre que b est entier sur A , d'où $b \in A$, car A est intégralement clos dans B . $\square$

Définition 6.48. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif d'anneaux. La partie

$$\mathfrak{f}_{B/A} := \{x \in A \mid xB \subset f(A)\}$$

est un idéal de A , appelé le *conducteur* de f .

Remarque 6.49. (i) Le conducteur de f est aussi un idéal de B : en effet, si $x \in \mathfrak{f}_{B/A}$ et $y \in B$ on a $xyB \subset xB \subset A$, d'où en particulier $xy = xy \cdot 1 \in A$ et donc $xy \in \mathfrak{f}_{B/A}$.

(ii) Soient $\text{rad}_A(\mathfrak{f}_{B/A}) \subset A$ et $\text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A}) \subset B$ les idéaux radicaux de $\mathfrak{f}_{B/A}$ dans A et B respectivement ; on voit aussitôt que $A \cap \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A}) = \text{rad}_A(\mathfrak{f}_{B/A})$.

Lemme 6.50. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux injectif et fini, et $h \in A$. Alors f induit un isomorphisme $f_h : A_h \xrightarrow{\sim} B_h \Leftrightarrow h \in \text{rad}(\mathfrak{f}_{B/A})$.

Démonstration. Soit $M := \text{Coker } f$; on a $\mathfrak{f}_{B/A} = \text{Ann}_A M$, d'où $V(\mathfrak{f}_{B/A}) = \text{Supp } M$ d'après la remarque 3.58(ii). Compte tenu de la remarque 3.58(iii), il s'ensuit que f_h est un isomorphisme $\Leftrightarrow M_h = 0 \Leftrightarrow \text{Supp}_{A_h} M_h = \emptyset \Leftrightarrow V(\mathfrak{f}_{B/A}) \cap \text{Spec } A_h = \emptyset \Leftrightarrow V(\mathfrak{f}_{B/A}) \subset V(Ah) \Leftrightarrow h \in \text{rad}(\mathfrak{f}_{B/A})$. $\square$

Proposition 6.51. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, $x, b \in B$ et $P(T) := a_k T^k + \dots + a_0 \in A[T]$ tel que $P(x) \cdot b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$ (notation de la remarque 6.49(ii)). On suppose que A soit intégralement clos dans B , et que B soit fini sur $A[x]$. Alors on a $a_i b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$ pour $i = 0, \dots, k$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . L'assertion est triviale si $k = 0$. Soit donc $k > 0$, et on suppose que pour tout $R(T) := a'_{k-1} T^{k-1} + \dots + a'_0 \in A[T]$ tel que $R(x) \cdot b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$, on ait $a'_i b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$ pour $i = 0, \dots, k-1$. Par hypothèse, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)^m \cdot b^m \in \mathfrak{f}_{B/A[x]}$. On pose $Q(T) := P(T)^m$; noter que le coefficient de $Q(T)$ en degré km est a_k^m . Soit aussi $y_1, \dots, y_d \in B$ un système fini de générateurs du $A[x]$ -module B ; il vient $Q(x) \cdot b^m y_i \in A[x]$ pour $i = 1, \dots, d$. D'après le lemme 6.46, pour tout $i = 1, \dots, d$ il existe alors $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $a_k^{n_i m} b^m y_i \in A[x]$; avec $n := \max(1, n_1, \dots, n_d)$ il vient $a_k^{nm} b^m B \subset A[x]$, i.e. $a_k^{nm} b^m \in \mathfrak{f}_{B/A[x]}$. Comme $\mathfrak{f}_{B/A[x]}$ est un idéal de B (remarque 6.49(i)), on déduit $(a_k b)^{nm} \in \mathfrak{f}_{B/A[x]}$ et donc $a_k b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$. Soit $R(T) := P(T) - a_k T^k$; par suite $R(x) \cdot b = P(x) \cdot b - a_k b x^k \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$, et par hypothèse de récurrence on conclut que $a_i b \in \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[x]})$ pour $i = 0, \dots, k-1$. $\square$

Dans la situation de la proposition 6.51, soit $J := \text{rad}_B(\mathfrak{f}_{B/A[X]})$ et posons $A' := A/(J \cap A)$, $B' := B/J$; soit aussi $\bar{x} \in B'$ l'image de x . On déduit en particulier que le seul polynôme $P(T) \in A'[T]$ tel que $P(\bar{x}) = 0$ est le polynôme nul; si A' et B' étaient intègres, cela reviendrait à dire que l'élément $\bar{x}$ du corps $\text{Frac}(B')$ est transcendant sur $\text{Frac}(A')$. On est ainsi amené à la définition suivante :

Définition 6.52. Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux. On dit qu'un élément $x \in B$ est *transcendant sur A* s'il satisfait la condition suivante. Pour tout $P(T) := a_k T^k + \dots + a_0 \in A[T]$ et tout $b \in B$ avec $P(x)b = 0$, on a $a_i b = 0$ pour $i = 0, \dots, k$.

Donc, avec la notation ci-dessus, dans l'extension d'anneaux $A' \subset B'$, l'élément $\bar{x}$ est transcendant sur A' . Remarquons ensuite :

Lemme 6.53. Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux réduits, et $x \in B$. Alors x est transcendant sur $A \Leftrightarrow$ pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{q} \subset B$, la classe $\bar{x} \in B/\mathfrak{q}$ de x est transcendante sur $A/(A \cap \mathfrak{q})$.

Démonstration. Noter d'abord que $B_{\mathfrak{q}}$ est un anneau réduit (exercice 3.38) et $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q} B_{\mathfrak{q}}\}$ car $\mathfrak{q}$ est minimal (exemple 3.32(iii)); par suite $\mathfrak{q} B_{\mathfrak{q}} = 0$ et $B_{\mathfrak{q}}$ est un corps. Or, soient $b \in B$ et $P(T) := a_k T^k + \dots + a_0 \in A[T]$ tels que $P(x) \cdot b \in \mathfrak{q}$; on déduit que $P(x) \cdot b = 0$ dans $B_{\mathfrak{q}}$. Donc il existe $b' \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que $P(x) \cdot b b' = 0$ dans B ; si x est transcendant sur A , cela entraîne que $a_i b b' = 0$ pour $i = 0, \dots, k$. Soient $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_k, \bar{b}, \bar{b}' \in B/\mathfrak{q}$ les images de $a_0, \dots, a_k, b, b'$; comme $\bar{b}' \neq 0$, il vient $\bar{a}_i \bar{b} = 0$ pour $i = 0, \dots, k$, et par suite $\bar{x}$ est transcendant sur $A/(A \cap \mathfrak{q})$.

Réciproquement, soient $P(T) := \sum_{i=0}^k a_k T^k \in A[T]$ et $b \in B$ avec $P(x) \cdot b = 0$. Soit $\mathfrak{q} \subset B$ un idéal premier minimal; si $b \notin \mathfrak{q}$, on a $P(\bar{x}) = 0$ dans $B/\mathfrak{q}$, et si $\bar{x}$ est transcendant sur $A/(A \cap \mathfrak{q})$, on voit que $a_0, \dots, a_k \in A \cap \mathfrak{q}$. On conclut que $a_0 b, \dots, a_k b \in \mathfrak{q}$ pour tout tel $\mathfrak{q}$. Mais B est réduit, donc l'intersection des premiers minimaux de B est 0; il s'ensuit aussitôt que x est transcendant sur A . $\square$

Proposition 6.54. Soient $f : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux réduits, et $x \in B$ un élément transcendant sur A , tel que B soit une extension finie de $A[x]$. Alors f n'est quasi-fini en aucun point de $\text{Spec } B$.

Démonstration. Supposons que f soit quasi-fini au point $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$; choisissons un idéal premier minimal $\mathfrak{q}'$ de B contenu dans $\mathfrak{q}$, et posons $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}' := A \cap \mathfrak{q}'$. D'après le corollaire 6.40(i), l'homomorphisme induit $f' : A/\mathfrak{p}' \rightarrow B/\mathfrak{p}' B$ serait alors quasi-fini au point $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}' B \in \text{Spec } B/\mathfrak{p}' B$; de même, la projection $p : B/\mathfrak{p}' B \rightarrow B/\mathfrak{q}'$ est un

homomorphisme fini, donc $p \circ f' : A/\mathfrak{p}' \rightarrow B/\mathfrak{q}'$ serait quasi-fini au point $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B/\mathfrak{q}'$ (exercice 6.41). Mais par le lemme 6.53, l'image $\bar{x} \in B/\mathfrak{q}'$ de x est transcendante sur $A/\mathfrak{p}'$; ainsi on est ramené à montrer la proposition pour l'homomorphisme $p \circ f'$, et on peut supposer du départ que A et B soient intègres.

Soit maintenant A' la fermeture intégrale de A dans $\text{Frac}(A)$; notons $j : A \rightarrow A'$ l'inclusion, et B' le sous-anneau de $\text{Frac}(B)$ engendré par A' et B . L'inclusion $A'[x] \subset B'$ est encore une extension finie, et x est transcendant sur A' . L'inclusion $f' : A' \rightarrow B'$ est la composition de $A' \otimes_A f : A' \rightarrow A' \otimes_A B$ et d'un homomorphisme surjectif $p : A' \otimes_A B \rightarrow B'$, et on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } B' & \xrightarrow{\text{Spec}(p)} & \text{Spec } A' \otimes_A B & \xrightarrow{\text{Spec}(j \otimes_A B)} & \text{Spec } B \\ & \searrow \text{Spec}(f') & \downarrow \text{Spec}(A' \otimes_A f) & & \downarrow \text{Spec}(f) \\ & & \text{Spec } A' & \xrightarrow{\text{Spec}(j)} & \text{Spec } A \end{array}$$

L'homomorphisme $p \circ (j \otimes_A B)$ est l'inclusion $B \rightarrow B'$, une extension entière; donc $\text{Spec}(j \otimes_A B) \circ \text{Spec}(p) : \text{Spec } B' \rightarrow \text{Spec } B$ est une surjection (corollaire 6.20(i)). Soit alors $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B'$ avec $B \cap \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$, et posons $\mathfrak{q}'' := p^{-1}(\mathfrak{q}')$, de sorte que $(j \otimes_A B)^{-1}(\mathfrak{q}'') = \mathfrak{q}$. Si f était quasi-fini au point $\mathfrak{q}$, l'homomorphisme $A' \otimes_A f$ serait quasi-fini au point $\mathfrak{q}''$ (corollaire 6.40(i)), et f' serait quasi-fini au point $\mathfrak{q}'$ (exercice 6.41). On est ainsi ramené à montrer la proposition pour l'homomorphisme f' , et on peut supposer du départ que A soit intégralement clos (et B intègre).

Noter que $A[x]$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes $A[T]$, car x est transcendant sur A ; comme A est intégralement clos, il en est alors de même pour $A[x]$ (problème 6.16(iv)). L'extension de corps résiduels $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{q})$ est finie, car l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : k(\mathfrak{p}) \rightarrow B(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ est quasi-fini au point $\mathfrak{q} \cdot B(\mathfrak{p})$ (proposition 6.36(ii)). Soit aussi $\mathfrak{p}' := A[x] \cap \mathfrak{q} \in \text{Spec } A[x]$; on a $k(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{p}') \subset k(\mathfrak{q})$, donc $k(\mathfrak{p}')$ est aussi une extension finie de $k(\mathfrak{p})$. En particulier, l'inclusion $\mathfrak{p}A[x] \subset \mathfrak{p}'$ est stricte, car sinon on aurait $k(\mathfrak{p}') \simeq k(\mathfrak{p})(T)$, une extension transcendante de $k(\mathfrak{p})$. Par le théorème 6.28, on trouve alors une générisation stricte $\mathfrak{q}'$ de $\mathfrak{q}$ dans $\text{Spec } B$, avec $A[x] \cap \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}A[x]$; en particulier, $\mathfrak{q}' \in (\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$, et donc $\mathfrak{q}$ n'est pas un point isolé de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$, contradiction. $\square$

Théorème 6.55. ("Main Theorem" de Zariski) *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, $B' \subset B$ la fermeture intégrale de $f(A)$ dans B , et $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ tel que f soit quasi-fini au point $\mathfrak{q}$. Soit aussi $\mathfrak{q}' := B' \cap \mathfrak{q}$. Alors l'inclusion $g : B' \rightarrow B$ induit un isomorphisme $g_{\mathfrak{q}'} : B'_{\mathfrak{q}'} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q})$. Par hypothèse, $\mathfrak{q}$ est isolé dans $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$; donc $\mathfrak{q}$ est aussi isolé dans la partie $(\text{Spec } g)^{-1}(\mathfrak{q}')$ de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$, i.e. g est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$. On peut alors remplacer A par B' , et supposer du départ que f soit injectif et A intégralement clos dans B . Dans cette situation, il faut montrer que f induit un isomorphisme $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$.

Par hypothèse, il existe une suite finie $x_1, \dots, x_n \in B$ telle que B soit fini sur son sous-anneau $A[x_1, \dots, x_n]$, et on raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, on a $A = B$, et l'assertion est triviale. Supposons ensuite que $n = 1$, donc B est une $A[x_1]$ -algèbre finie, et on pose $J := \text{rad}_B(f_{B/A[x_1]})$ (notation de la remarque 6.49(ii)).

Affirmation 6.56. $\mathfrak{q} \notin V(J)$.

Preuve : Supposons par l'absurde que $\mathfrak{q} \in V(J)$, et posons $I := A \cap J$. On factorise l'inclusion $f' : A' := A/I \rightarrow B/J$ comme la composition de $A' \otimes_A f : A' \rightarrow B/IB$ et de la surjection $B/IB \rightarrow B/J$. Cette dernière est un homomorphisme fini, et $A' \otimes_A f$ est quasi-fini au point $\mathfrak{q} \cdot (B/IB)$ (corollaire 6.40(i)); donc f' est quasi-fini au point $\mathfrak{q}/J$

(exercice 6.41). D'autre part, soit $\bar{x}_1 \in B/J$ l'image de x_1 ; alors B/J est une $A'[\bar{x}_1]$ -algèbre finie, et B/J est réduit. Par la proposition 6.54, il s'ensuit que $\bar{x}_1$ n'est pas transcendant sur A' . Cela contredit la proposition 6.51. $\diamond$

Par l'observation 6.56, il existe $h \in \mathfrak{f}_{B/A[x_1]} \setminus \mathfrak{q}$; d'après le lemme 6.50(i), l'inclusion $j : A[x_1] \rightarrow B$ induit alors un isomorphisme $j_h : A[x_1]_h \xrightarrow{\sim} B_h$. Soit $\mathfrak{p}' := A[x_1] \cap \mathfrak{q}$; donc $h \notin \mathfrak{p}'$. Par le problème 6.42, l'homomorphisme $A \rightarrow B_h$ induit par f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}B_h$, donc l'inclusion $i : A \rightarrow A[x_1]$ induit un homomorphisme $A \rightarrow A[x_1]_h$ quasi-fini au point $\mathfrak{p}'A[x_1]_h$, et par suite i est quasi-fini au point $\mathfrak{p}'$, toujours grâce au problème 6.42. Le lemme 6.44 nous dit alors que i induit un isomorphisme $i_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A[x_1]_{\mathfrak{p}}$. En particulier, $h \in A[x_1]_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}A[x_1]_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc h est inversible dans $A[x_1]_{\mathfrak{p}}$, et j_h induit un isomorphisme $j_{\mathfrak{p}} : A[x_1]_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$. La composition $j_{\mathfrak{p}} \circ i_{\mathfrak{p}}$ est l'isomorphisme $f_{\mathfrak{p}}$.

Ensuite, soit $n > 1$, et supposons que le théorème soit déjà connu pour toute A -algèbre finie sur une A -sous-algèbre engendrée par $n-1$ éléments. Notons par C la fermeture intégrale de $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ dans B , et $\mathfrak{r} := C \cap \mathfrak{q}$. Donc C est intégralement clos dans B , et B est une $C[x_n]$ -algèbre finie; l'inclusion $l : C \rightarrow B$ est la composition de l'homomorphisme $C \otimes_A f : C \rightarrow C \otimes_A B$ et de la surjection naturelle $p : C \otimes_A B \rightarrow B$. Cette dernière est un homomorphisme fini, et $C \otimes_A f$ est quasi-fini au point $p^{-1}(\mathfrak{q})$ (corollaire 6.40(i)), donc l est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$ (exercice 6.41); par le cas précédent, l induit alors un isomorphisme $l_{\mathfrak{r}} : C_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{r}}$. Soient $b_1, \dots, b_d \in B$ tels que $A[b_1, \dots, b_d] = B$; on trouve alors $c_1, \dots, c_d \in C$ et $s_1, \dots, s_d \in C \setminus \mathfrak{r}$ tels que $b_i/1 = c_i/s_i$ dans $B_{\mathfrak{r}}$ pour $i = 1, \dots, d$. Cela veut dire que pour $i = 1, \dots, d$ il existe $s'_i \in C \setminus \mathfrak{r}$ tel que $s_i s'_i b_i = s'_i c_i$ dans B . Soient $s := s_1 s'_1 \cdots s_d s'_d$ et $C' := A[x_1, \dots, x_{n-1}, c_1, \dots, c_d, s] \subset B$; soit aussi $\mathfrak{r}' := C' \cap \mathfrak{q}$. On déduit aisément que l'inclusion $j' : C' \rightarrow B$ induit encore un isomorphisme $j'_s : C'_s \xrightarrow{\sim} B_s$. Noter que C' est une extension finie de $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ (corollaire 6.4). De plus, l'homomorphisme $A \rightarrow B_s$ induit par f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}B_s$, par le problème 6.42, donc l'inclusion $i' : A \rightarrow C'$ induit un homomorphisme $A \rightarrow C'_s$ qui est quasi-fini au point $\mathfrak{r}'C'_s$, et finalement i' est quasi-fini au point $\mathfrak{r}'$, encore grâce au problème 6.42. Par hypothèse de récurrence, i' induit alors un isomorphisme $i'_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} C'_{\mathfrak{p}}$. En particulier, $s \in C'_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}C'_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc s est inversible dans $C'_{\mathfrak{p}}$ et j'_s induit un isomorphisme $j'_{\mathfrak{p}} : C'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{p}}$. La composition $j'_{\mathfrak{p}} \circ i'_{\mathfrak{p}}$ est l'isomorphisme $f_{\mathfrak{p}}$ souhaité. $\square$

Corollaire 6.57. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, et $B' \subset B$ la fermeture intégrale de $f(A)$ dans B . On a :

- (i) La partie $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid f \text{ est quasi-fini en } \mathfrak{q}\}$ est ouverte dans $\text{Spec } B$.
- (ii) Si f est quasi-fini, le morphisme induit de schémas $\phi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B'$ identifie $\text{Spec } B$ avec un sous-schéma ouvert de $\text{Spec } B'$.

Démonstration. (i) : Soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ tel que f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$; on doit exhiber un voisinage U de $\mathfrak{q}$ dans $\text{Spec } B$ tel que f soit quasi-fini en tout point de U . Par le théorème 6.55, l'inclusion $g : B' \rightarrow B$ induit un isomorphisme $g_{\mathfrak{q}} : B'_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}$ de A -algèbres. Soit $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de la A -algèbre B ; on trouve alors $y_1, \dots, y_n \in B'$ et $s_1, \dots, s_n \in B' \setminus \mathfrak{q}$ avec $g_{\mathfrak{q}}(y_i/s_i) = x_i/1$ pour $i = 1, \dots, n$. Posons $s := s_1 \cdots s_n$, et soit $B'' := A[y_1, \dots, y_n, s] \subset B'$; on déduit aisément que les inclusions $B'' \rightarrow B' \rightarrow B$ induisent des isomorphismes $B''_s \xrightarrow{\sim} B'_s \xrightarrow{\sim} B_s$. Mais par construction, B'' est une A -algèbre finie, donc B''_s est une A -algèbre quasi-finie, et de même pour B_s . Au vu du problème 6.42, il s'ensuit que f est quasi-fini en tout point de $\text{Spec } B_s = D(s)$, d'où l'assertion.

(ii) : Si f est quasi-fini, la preuve de (i) montre que pour tout point $\mathfrak{q}$ de $\text{Spec } B$ il existe $s \in B' \setminus \mathfrak{q}$ tel que l'inclusion $B' \rightarrow B$ induit un isomorphisme de schémas

$$(\phi^{-1}D(s), (\mathcal{O}_{\text{Spec } B})|_{\phi^{-1}D(s)}) = \text{Spec } B_s \xrightarrow{\sim} (D(s), (\mathcal{O}_{\text{Spec } B'})|_{D(s)}) = \text{Spec } B'_s.$$

L'assertion s'ensuit aussitôt. $\square$

Exercice 6.58. Soit $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux quasi-fini. Exhiber une A -sous-algèbre finie $C \subset B$ telle que le morphisme de schémas $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } C$ induit par l'inclusion $C \rightarrow B$ identifie $\text{Spec } B$ avec un sous-schéma ouvert de $\text{Spec } C$.

Problème 6.59. Soit $\underline{f} := (f, f^b) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de schémas ; on dit que $\underline{f}$ est *fermé* si l'application $f : X \rightarrow Y$ est fermée. On dit que $\underline{f}$ est *universellement fermé* si pour tout $\underline{Y}$ -schéma $\underline{Y}'$ le morphisme $\underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{f} : \underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{X} \rightarrow \underline{Y}'$ est fermé.

(i) Montrer que $\underline{f}$ est universellement fermé si et seulement si, pour tout $\underline{Y}$ -schéma affine $\underline{Y}'$, le morphisme induit $\underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{f}$ est fermé.

(ii) Soient $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ et $\underline{g} : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ deux morphismes de schémas ; montrer que si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont fermés (resp. universellement fermés), il en est de même pour $\underline{g} \circ \underline{f}$.

(iii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux ; montrer que $\text{Spec } f$ est universellement fermé si et seulement si B est une A -algèbre entière.

6.3. Anneaux noethériens. Dans cette section on démontrera deux théorèmes parmi les plus importants de ce cours, qui ont déjà été mentionnés dans les leçons précédentes : le théorème de la base, et le Nullstellensatz, deux résultats majeurs, dus à Hilbert. On démarre avec la définition suivante :

Définition 6.60. (i) Soient A un anneau et M un A -module. On dit que M est *noethérien* si toute suite ascendante de sous-modules de M :

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

est *stationnaire*, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_m = M_n$ pour tout $m \geq n$.

(ii) On dit que A est un *anneau noethérien* si le A -module A est noethérien.

Remarque 6.61. (i) Un A -module M est noethérien si et seulement si tout sous-module de M est de type fini. En effet, si $N \subset M$ est un sous-module qui n'est pas de type fini, on peut évidemment trouver une suite ascendante non stationnaire $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ de sous-modules de N , donc M n'est pas noethérien. Réciproquement, si tout sous-modules de M est de type fini, soit $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ une suite ascendante de sous-modules de M ; par hypothèse, $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ est de type fini, et si $x_1, \dots, x_k$ est un système fini de générateurs de N , évidemment on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_1, \dots, x_k \in M_n$, d'où $M_m = M_n$ pour tout $m \geq n$.

(ii) Munissons l'ensemble $\mathcal{F}$ des sous-modules de M de l'ordre partiel $\leq$ induit par l'inclusion de sous-modules ; avec la terminologie de l'exercice 1.33, on voit que M est noethérien $\Leftrightarrow (\mathcal{F}^{\text{op}}, \leq^{\text{op}})$ est (partiellement) bien ordonné, et cela équivaut aussi à la condition suivante : toute partie non vide de $\mathcal{F}$ a un élément maximal.

(iii) Par exemple, $\mathbb{Z}$ est noethérien, et si K est un corps, $K[X]$ est noethérien : en effet, on sait que ces anneaux sont principaux, donc l'assertion découle de (i).

(iv) Si A est un anneau noethérien, tout quotient et toute localisation de A est un anneau noethérien : pour les quotients cela découle de la bijection canonique du lemme 1.7, et pour les localisations, l'assertion suit aussitôt du lemme 3.30(i).

Problème 6.62. (Théorème de Cohen) (i) Soient A un anneau, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des idéaux de A qui ne sont pas de type fini ; on munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel défini par l'inclusion d'idéaux. Montrer que tout élément maximal de $\mathcal{F}$ est un idéal premier.

(ii) Dédurre de (i) que A est noethérien $\Leftrightarrow$ tout idéal premier de A est de type fini.

Exercice 6.63. (i) Montrer que l'anneau $\mathcal{C}([0, 1])$ n'est pas noethérien.

(ii) Pour tout $\rho \in \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\} \cup \{+\infty\}$, soit $\mathbb{D}(\rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$. Montrer que l'anneau $\mathcal{H}(\rho)$ des fonctions holomorphes $\mathbb{D}(\rho) \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas noethérien.

(iii) Noter que $\mathcal{H}(\rho) \subset \mathcal{H}(\rho')$ si $\rho \geq \rho'$; on pose alors

$$\overline{\mathcal{H}}(\rho) := \bigcup_{\rho' > \rho} \mathcal{H}(\rho').$$

Montrer que pour tout réel $\rho > 0$, l'anneau $\overline{\mathcal{H}}(\rho)$ est principal (donc noethérien).

Proposition 6.64. *Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini. Alors, tout sous-module de M est aussi de type fini.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre de générateurs n de M . Si $n = 1$, on a $M \simeq A/I$ pour un idéal $I \subset A$, et les A -sous-modules de A/I sont de la forme J/I , pour $J \subset A$ un idéal qui contient I ; dans ce cas, l'assertion découle donc de la remarque 6.61(i). Soient $n > 1$, et $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs de M ; on pose $M' := Ax_1 + \dots + Ax_{n-1} \subset M$, et $M'' := M/M'$. Soit maintenant $N \subset M$ un sous-module, et posons $N' := N \cap M'$, $N'' := N/N'$. Evidemment, N' est un sous-module de M' , et on voit aisément que la projection $\pi : M \rightarrow M''$ induit une identification de N'' avec $\pi(N) \subset M''$. Or, M' est engendré par un système de $n - 1$ éléments, et M'' est un A -module cyclique; par hypothèse de récurrence, on déduit que N' et N'' sont des A -modules de type fini. Soient $y_1, \dots, y_k$ un système de générateurs de N' , et $y_{k+1}, \dots, y_t \in N$ des éléments dont les classes dans N'' forment un système de générateurs; on voit aisément que $y_1, \dots, y_t$ est un système de générateurs pour N , d'où la proposition. $\square$

Théorème 6.65. (Théorème de la base) *Si A est un anneau noethérien, toute A -algèbre de type fini est un anneau noethérien.*

Démonstration. Soit $B = A[X_1, \dots, X_n]/I$; si $A_n := A[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, il en est de même pour B , d'après la remarque 6.61(iv), donc il suffit de montrer que A_n est noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais comme $A_n = A_{n-1}[X_n]$, une simple récurrence sur n nous ramène à vérifier que si A est noethérien, il en est de même pour $A[X]$. Soit alors $0 \neq I \subset A[X]$ un idéal; par la remarque 6.61(i), il suffit de montrer que I est de type fini. Pour cela, notons $J \subset A$ l'ensemble des coefficients principaux des polynômes $P(X) \in I$ (le coefficient principal du polynôme nul est 0). On remarque que J est un idéal de A : en effet, si $a \in J$ et $b \in A$, il existe un polynôme $P(X) \in I$ de la forme $aX^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$ (pour certains $a_1, \dots, a_n \in A$), et si $ab \neq 0$, le coefficient principal de $b \cdot P \in I$ est ab , donc $ab \in J$; de même, si $a' \in J$ est le coefficient principal de $Q(X) \in I$, on peut écrire $Q = a'X^m + a'_1X^{m-1} + \dots + a'_m$ pour certains $a'_1, \dots, a'_m \in A$, et on voit que si $a + a' \neq 0$, le coefficient principal de $X^mP + X^nQ$ est $a + a'$, donc $a + a' \in J$. Par la remarque 6.61(i), l'idéal J est donc de type fini, et soit $a_1, \dots, a_k$ un système de générateurs de J ; pour chaque $i = 1, \dots, k$ on choisit $P_i \in I$ avec coefficient principal a_i . On pose aussi $d_i := \deg P_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$, et $d := \max(d_1, \dots, d_k)$.

Affirmation 6.66. Si $P \in I$ et si $\deg P \geq d$, il existe $Q_1, \dots, Q_k \in A[X]$ tels que

$$\deg(P - (P_1Q_1 + \dots + P_kQ_k)) < d.$$

Preuve : Il suffit de montrer, par récurrence sur $f := \deg P$, que si $f \geq d$, il existe $Q_1, \dots, Q_k \in A[X]$ tels que $\deg(P - \sum_{i=1}^k P_iQ_i) < f$. Or, si $a \in J$ est le coefficient principal de P , il existe $b_1, \dots, b_k \in A$ tels que $a = \sum_{i=1}^k a_i b_i$; d'où $\deg(P - \sum_{i=1}^k b_i X^{f-d_i} P_i) < f$. (Ici, on pose $\deg(0) := -1$). $\diamond$

Soient $M := A + AX + AX^2 + \dots + AX^{d-1}$ et $I' := I \cap M$; évidemment M est un A -module de type fini, et I' est un A -sous-module de M , donc I' est un A -module de type fini, par la proposition 6.64. Soit $R_1, \dots, R_s$ un système de générateurs pour I' ; avec l'observation 6.66 on déduit aisément que $P_1, \dots, P_k, R_1, \dots, R_s$ est un système de générateurs pour I . $\square$

Exercice 6.67. On dit qu'un schéma $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ est *localement noethérien*, si tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert affine $U \subset X$ tel que $\mathcal{O}_X(U)$ soit un anneau noethérien; si en outre X est compact, on dit que $\underline{X}$ est *noethérien*. Montrer que :

(i) Tout sous-schéma ouvert et tout sous-schéma fermé d'un schéma localement noethérien est localement noethérien.

(ii) Plus généralement, si $\underline{X}$ est un schéma localement noethérien (resp. noethérien) et si $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est un morphisme de schémas localement de type fini (resp. de type fini), alors $\underline{Y}$ est localement noethérien (resp. noethérien).

(iii) Un anneau A est noethérien $\Leftrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) := \text{Spec } A$ est un schéma noethérien $\Leftrightarrow \mathcal{O}_Y(U)$ est un anneau noethérien, pour toute partie ouverte affine U de Y .

Exemple 6.68. Comme application, on va expliquer une solution alternative pour le problème 3.53(i.b) : on considère un anneau $A \neq 0$, et une injection A -linéaire $f : A^n \rightarrow A^m$, et il s'agit de montrer que $n \leq m$. Or, si $n > m$, on voit que l'image de f est un A -sous-module de A^m de la forme $A^m \oplus A^{n-m}$, avec $A^{n-m} \neq 0$. On conclut alors avec le lemme suivant, qui redemontre aussi le problème 3.53(ii) :

Lemme 6.69. Soient A un anneau, M un A -module de type fini, $N \subset M$ un sous-module non nul. Alors, M/N ne contient aucun sous-module isomorphe à M .

Démonstration. Soient, par l'absurde, $N' \subset M$ un sous-module avec $N \subset N'$, et $h : M \xrightarrow{\sim} N'/N$ un isomorphisme. Disons que $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$; pour $i = 1, \dots, n$ soit $y_i \in N'$ tel que $h(x_i) = y_i + N$, et prenons $y_{n+1} \in N \setminus \{0\}$. Posons $N'' := Ay_1 + \cdots + Ay_{n+1} \subset N'$, de sorte que l'image de h est contenue dans $(N'' + N)/N$, i.e. $N'' + N = N'$, d'où un isomorphisme A -linéaire $M \xrightarrow{\sim} N'/N \xrightarrow{\sim} N''/(N \cap N'')$ (remarque 1.14(v)), et noter que $N \cap N'' \neq 0$. Ainsi, quitte à remplacer N et N' par $N \cap N''$ et N'' , on peut supposer que $N' = Ay_1 + \cdots + Ay_{n+1}$. Soit $\mathcal{F} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ l'ensemble des $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de type fini de A ; évidemment $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, et $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant, pour l'ordre induit par l'inclusion. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soient $M_\lambda := A_\lambda x_1 + \cdots + A_\lambda x_n \subset M$ et $N'_\lambda := A_\lambda y_1 + \cdots + A_\lambda y_{n+1} \subset N'$. Comme $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $N'_\lambda \subset M_\lambda$. D'autre part, par construction h induit par restriction un isomorphisme A_λ -linéaire $h_\lambda : M_\lambda \xrightarrow{\sim} (N'_\lambda + N)/N \xrightarrow{\sim} N'_\lambda/(N'_\lambda \cap N)$, et noter que $N'_\lambda \cap N \neq 0$. Ainsi, quitte à remplacer A par A_λ , on peut supposer que A soit noethérien (théorème 6.65). On va exhiber par récurrence deux suites de sous-modules $(N_k \mid k \in \mathbb{N})$ et $(N'_k \mid k \in \mathbb{N})$ telles que :

$$N_k \subset N_{k+1} \subset N'_{k+1} \subset N'_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$ un isomorphisme $h_k : M \xrightarrow{\sim} N'_k/N_k$. Pour cela, on pose $N_0 := N$, $N'_0 := N'$ et $h_0 := h$. Si N_k, N'_k et h_k ont déjà été exhibés, soient $N_{k+1} \subset N'_{k+1}$ les sous-modules de M avec $h_k(N) = N_{k+1}/N_k$ et $h_k(N') = N'_{k+1}/N_k$. Il vient un isomorphisme A -linéaire $l : N'/N \xrightarrow{\sim} N'_{k+1}/N_{k+1}$ et on pose $h_{k+1} := l \circ h$. On a $N_k \subsetneq N_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, car $N \neq 0$; cela contredit la proposition 6.64. $\square$

Exercice 6.70. (i) Soit A un anneau noethérien. Montrer les assertions suivantes :

- (a) Tout A -module (resp. toute A -algèbre) de type fini est de présentation finie.
- (b) Tout A -module plat de type fini est projectif.
- (c) Tout produit (fini ou infini) de A -modules plats est plat.

(ii) (Critère de Bass) Soit A un anneau. Montrer que A est noethérien si et seulement si toute somme directe (finie ou infinie) de A -modules injectifs est injective.

On trouvera dans le problème 7.12 une caractérisation complète des modules injectifs sur les anneaux noethériens. L'application suivante du critère de l'exercice 6.70(ii) est due indépendamment à Eakin [19] et à Nagata [59]; notre preuve suit l'argument trouvé deux ans plus tard par D.Eisenbud [20], et indépendamment par Gruson et Raynaud [35, Partie II, Cor.1.2.5].

Théorème 6.71. Soit $A \rightarrow B$ un homomorphisme fini et injectif d'anneaux. Alors A est noethérien si et seulement si B est noethérien.

Démonstration. D'après le théorème 6.65, on peut supposer que B soit noethérien, et on doit montrer qu'il en est de même pour A . Or, soient I et J le produit direct et respectivement la somme directe d'une famille arbitraire $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules injectifs; la

remarque 4.2(iv) nous dit que I est un A -module injectif, et comme B est un A -module fini, on voit aisément que l'application naturelle

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Hom}_A(B, I_\lambda) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(B, J)$$

est un isomorphisme de A -modules. D'autre part, $\operatorname{Hom}_A(B, I_\lambda)$ est un B -module injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$ (exemple 4.7); par l'exercice 6.70(ii), $\operatorname{Hom}_A(B, J)$ est alors un B -module injectif, donc l'inclusion $J \rightarrow I$ induit une application injective $\operatorname{Hom}_A(B, J) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(B, I)$ qui admet un inverse à gauche. La proposition 6.30 nous assure alors que l'inclusion $J \rightarrow I$ admet un inverse à gauche, *i.e.* J est un facteur direct de I , et il est donc injectif, toujours par la remarque 4.2(iv). Pour conclure, il suffit maintenant d'invoquer l'exercice 6.70(ii). $\square$

Remarque 6.72. Plusieurs variantes et généralisations du théorème 6.71 ont été étudiées : l'article [25] en donne une version où B peut être non commutatif, et [24] montre que l'on peut remplacer B par un A -module fidèle de type fini M tel que IM soit de type fini pour tout idéal $I \subset A$; dans cette même direction, [43] et [60] démontrent un énoncé joignant le théorème 6.71 avec le théorème de Cohen qui fait l'objet du problème 6.62. Le problème suivant, proposé par O.Gabber, unifie la plupart de ces résultats, ainsi que le théorème principal de l'article très récent [46].

Problème 6.73. Soient A un anneau, et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie épaisse de $A\text{-Mod}$ (voir le problème 2.108). On dira qu'un A -module M est *de type $\mathcal{C}$ -fini*, s'il existe un sous-module $M' \subset M$ de type fini tel que $M/M' \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$. On dira en outre que M est *$\mathcal{C}$ -noethérien*, si tout sous-module de M est de type $\mathcal{C}$ -fini. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules; alors :
 - (a) Si M' et M'' sont de type $\mathcal{C}$ -fini, il en est de même pour M .
 - (b) Si M est de type $\mathcal{C}$ -fini, il en est de même pour M'' .
 - (c) M est $\mathcal{C}$ -noethérien si et seulement s'il en est de même pour M' et M'' .
- (ii) Si A est $\mathcal{C}$ -noethérien, alors tout A -module de type $\mathcal{C}$ -fini est $\mathcal{C}$ -noethérien.
- (iii) Supposons que $\mathfrak{p}M$ soit de type $\mathcal{C}$ -fini pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. On a :
 - (a) Si M est de type $\mathcal{C}$ -fini, alors M est $\mathcal{C}$ -noethérien.
 - (b) Si M est de type fini et si $\operatorname{Ann}_A(M)$ est $\mathcal{C}$ -noethérien, A est $\mathcal{C}$ -noethérien.
- (iv) Avec (iii), retrouver le théorème de Cohen (problème 6.62) et le théorème de Eakin-Nagata 6.71. Pour une autre application, voir l'exercice 12.40(v).

Proposition 6.74. Soient $A \subset B \subset C$ trois anneaux. On suppose que A soit noethérien, que C soit une A -algèbre de type fini, et que C soit entier sur B . Alors, B est une A -algèbre de type fini.

Démonstration. Soit $c_1, \dots, c_k$ un système de générateurs de l' A -algèbre C . Par hypothèse, on a des équations de la forme :

$$c_i^{n_i} + b_{i1}c_i^{n_i-1} + \dots + b_{in_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

avec $b_{ij} \in B$ pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n_i$. Ainsi, C est entier et de type fini sur $D := A[b_{ij} \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i]$, donc il est un D -module de type fini (corollaire 6.4). Mais D est noethérien (théorème 6.65), et on a $D \subset B \subset C$; par suite B est un D -module de type fini (proposition 6.64), d'où l'assertion. $\square$

La proposition 6.74 sera la clef pour notre preuve du Nullstellensatz, mais plus généralement elle s'avère être un critère de finitude très versatile : les exercices qui suivent sont autant d'illustrations de son efficacité.

Exercice 6.75. Soient A un anneau $\mathbb{N}$ -gradué, et M un A -module $\mathbb{Z}$ -gradué.

- (i) Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
 - (a) A est noethérien.
 - (b) A_0 est noethérien et A est une A_0 -algèbre de type fini.

(ii) Montrer que si A est noethérien, et si M est de type fini, alors M_n est un A_0 -module de type fini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $A^{(d)} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_{nd}$. On voit aisément que $A^{(d)}$ est un sous-anneau de A . Montrer que si A est noethérien, il en est de même pour $A^{(d)}$.

Exercice 6.76. Soient A un anneau noethérien, B une A -algèbre de type fini, G un groupe fini qui agit sur B par automorphismes de A -algèbres.

(i) Montrer que B^G est une A -algèbre de type fini (voir l'exercice 6.25).

(ii) Par exemple, soient $n > 1$ un entier, K un corps qui contient une racine primitive n -ième de l'unité ζ_n . On rappelle que le groupe diédral D_{2n} est engendré par deux éléments σ et τ soumis aux relations :

$$\sigma^n = 1_G = \tau^2 \quad \tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} = \sigma^{-1}.$$

On fait agir sur $B := K[X, Y]$ le groupe D_{2n} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(X) &:= \zeta_n \cdot X & \sigma(Y) &:= \zeta_n^{-1} \cdot Y \\ \tau(X) &:= Y & \tau(Y) &:= X. \end{aligned}$$

Déterminer générateurs et relations pour les K -algèbres $B^{(\sigma)}$ et $B^{D_{2n}}$.

Voici une autre application de la proposition 6.74 qui est très utile pour construire des anneaux avec des propriétés géométriques intéressantes :

Exercice 6.77. (Equaliseurs) Soient A un anneau, B et C deux A -algèbres, et

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : B \rightarrow C$$

des homomorphismes de A -algèbres. L'égaliseur de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ est le sous-anneau

$$E := \{b \in B \mid \phi_1(b) = \phi_2(b) = \dots = \phi_n(b)\} \subset B.$$

(i) On suppose que A soit noethérien, B une A -algèbre de type fini, et C entier sur A . Montrer que E est une A -algèbre de type fini et que B est entier sur E .

(ii) Noter que C est muni d'une structure naturelle de E -algèbre, via la restriction $\phi'_i : E \rightarrow C$ de l'application ϕ_i (qui est évidemment indépendante de l'indice i). Soit E' une E -algèbre plate. Montrer que l'égaliseur de

$$\phi_1 \otimes_E E', \dots, \phi_n \otimes_E E' : B \otimes_E E' \rightarrow C \otimes_E E'$$

est E' (ce dernier s'identifie naturellement à un sous-anneau de $B \otimes_E E'$, car l'application naturelle $E' \xrightarrow{\sim} E \otimes_E E' \rightarrow B \otimes_E E'$ est injective).

Proposition 6.78. Soient K un corps, et A une K -algèbre de type fini.

(i) Si A est un corps, A est une extension (algébrique) finie de K .

(ii) (Nullstellensatz) $k(\mathfrak{m})$ est une extension finie de K , pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.

Démonstration. (i) : Soit $x_1, \dots, x_k$ un système de générateurs pour la K -algèbre A . Supposons par l'absurde, que A ne soit pas une extension algébrique de K ; quitte à permuter les éléments x_i , on peut supposer que $x_1, \dots, x_r$ soient algébriquement indépendants sur K (avec $r \geq 1$), et que A soit algébrique sur le corps des fractions F de $K[x_1, \dots, x_r]$. La proposition 6.74 s'applique aux inclusions $K \subset F \subset A$, et on trouve que F est une K -algèbre de type fini. Soit donc $P_1/Q_1, \dots, P_l/Q_l$ un système de générateurs pour la K -algèbre F (avec $P_i, Q_i \in K[x_1, \dots, x_r]$ pour $i = 1, \dots, l$). On peut trouver $G \in K[x_1, \dots, x_r]$ irréductible qui ne divise pas les polynômes $Q_1, \dots, Q_l$: en effet, si $\deg Q_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, l$, on peut prendre $G := x_1$, et sinon, on prendra pour G un facteur irréductible de $Q_1 \cdots Q_l + 1$. Mais on voit aisément que $1/G$ n'appartient pas à la K -algèbre engendrée par $P_1/Q_1, \dots, P_l/Q_l$, car $K[x_1, \dots, x_r]$ est un anneau factoriel (problème 1.39(iii)). Contradiction.

(ii) : On applique (i) à la K -algèbre de type fini $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$. □

Remarque 6.79. En particulier, si K est un corps algébriquement clos et A une K -algèbre de type fini, le corps résiduel $k(\mathfrak{m})$ de tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ est isomorphe à K ; i.e. la composition du morphisme structurel $j : K \rightarrow A$ et de la projection $\pi : A \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est un isomorphisme $\omega : K \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{m})$. Par exemple, si $A = K[T_1, \dots, T_n]$ est une K -algèbre de polynômes, pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $a_i \in K$ tel que $\pi(T_i) = \omega(a_i)$, d'où $\pi(T_i - a_i) = 0$, et on déduit que $\mathfrak{m}$ est engendré par $(T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$. Aussi, pour tout $f \in K[T_1, \dots, T_n]$ on a $\pi(f) = \omega(f(a_1, \dots, a_n))$, donc $f \in \mathfrak{m}$ si et seulement si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ainsi on retrouve la bijection naturelle

$$K^n \xrightarrow{\sim} \text{Max } K[T_1, \dots, T_n] \quad \underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \mapsto \mathfrak{m}_{\underline{a}}$$

qui avait été annoncée dès la première leçon (voir §1.3.1).

Corollaire 6.80. Soient K un corps, $\phi : A \rightarrow B$ un homomorphisme de K -algèbres de type fini. Alors $\text{Spec } \phi$ se restreint en une application $\text{Max } \phi : \text{Max } B \rightarrow \text{Max } A$.

Démonstration. L'assertion avait déjà été montrée -- comme application du Nullstellensatz -- dans l'exercice 1.47(i) (du moins, pour A et B des K -algèbres de polynômes, mais on peut se ramener aisément à ce cas). Voici une preuve alternative : soit $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$, et on pose $\mathfrak{p} := \phi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec } A$; on obtient des injections

$$K \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{m}.$$

Mais $B/\mathfrak{m}$ est une extension finie de K , par le Nullstellensatz, donc $A/\mathfrak{p}$ est aussi un corps (voir la proposition 6.17); d'où, $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$. $\square$

Corollaire 6.81. Soient K un corps algébriquement clos, $n \in \mathbb{N}$, et I un idéal de $R := K[T_1, \dots, T_n]$. Posons

$$Z(I) := \{\underline{x} \in K^n \mid f(\underline{x}) = 0 \ \forall f \in I\} \quad J := \{g \in R \mid g(\underline{x}) = 0 \ \forall \underline{x} \in Z(I)\}.$$

Alors, $J = \text{rad}(I)$.

Démonstration. Evidemment $\text{rad}(I) \subset J$. Soit $f \in R \setminus \text{rad}(I)$; par le corollaire 1.53, il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ tel que $I \subset \mathfrak{p}$ et $f \notin \mathfrak{p}$. On pose $A := R/\mathfrak{p}$ et $B := A_f$; on remarque que si $\bar{f} \in A$ est la classe de f , on a $B = A[1/\bar{f}]$, donc B est une A -algèbre de type fini. Compte tenu du corollaire 6.80, on déduit les inclusions

$$\text{Max } B \subset \text{Max } A \subset \text{Max } R/I \xrightarrow{\sim} Z(I)$$

où la dernière bijection suit de la remarque 6.79 et du lemme 1.7. En outre, $B \neq 0$, d'où $\text{Max } B \neq \emptyset$; soit donc $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$, et $\underline{x} \in Z(I)$ le point correspondant de K^n . Il vient $\bar{f} \notin \mathfrak{m}$, d'où $f(\underline{x}) \neq 0$, et finalement, $f \notin J$. $\square$

Problème 6.82. (i) Soient K un corps, A une K -algèbre intègre de type fini. Montrer que $\text{ht}(\mathfrak{m}) = \text{tr.deg}(\text{Frac}(A)/K)$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$.

(ii) Soient $K \subset E$ une extension de corps, et A une K -algèbre de type fini. Montrer que $\dim A = \dim E \otimes_K A$.

Exercice 6.83. (i) Soit K un corps algébriquement clos. Déterminer l'idéal I des polynômes $P(X, Y) \in K[X, Y]$ qui s'annulent sur la réunion des axes coordonnés du plan K^2 , i.e. sur l'ensemble algébrique $\{(a, 0) \mid a \in K\} \cup \{(0, a) \mid a \in K\}$.

(ii) Déterminer l'idéal I' des polynômes $P(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$ qui s'annulent sur la réunion des axes coordonnés de K^3 , i.e. sur l'ensemble algébrique

$$\{(a, 0, 0) \mid a \in K\} \cup \{(0, a, 0) \mid a \in K\} \cup \{(0, 0, a) \mid a \in K\}.$$

(iii) Déterminer l'idéal I'' des polynômes $P(X, Y, Z, W) \in K[X, Y, Z, W]$ qui s'annulent sur la réunion de deux plans transversaux de K^4 :

$$\{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in K\} \cup \{(0, 0, a, b) \mid a, b \in K\}.$$

Exercice 6.84. Soit $K \subset K'$ une extension de corps, avec K algébriquement clos ; soient A et B deux K -algèbres de type fini avec un isomorphisme de K' -algèbres $K' \otimes_K A \xrightarrow{\sim} K' \otimes_K B$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de K -algèbres $A \xrightarrow{\sim} B$.

Problème 6.85. Soient K un corps, R une K -algèbre finie. Pour tout $x \in R$, la multiplication $\mu_x : R \rightarrow R : y \mapsto xy$ est une application K -linéaire, et on dénote $\mathrm{tr}_{R/K}(x)$ la trace de cette application. La *trace de R sur K* est la forme K -bilinéaire

$$\mathrm{Tr}_{R/K} : R \times R \rightarrow K \quad (a, b) \mapsto \mathrm{tr}_{A/K}(ab).$$

(i) Montrer que si F est une extension finie et séparable de K , la forme bilinéaire $\mathrm{Tr}_{F/K}$ est non dégénérée. (On pourra utiliser l'exercice 3.67).

(ii) Soient maintenant A un anneau intègre et intégralement clos, K son corps des fractions, F une extension finie et séparable de K , et B la fermeture intégrale de A dans F . On a $F = K \otimes_A B$, par la proposition 6.13, donc on peut trouver une base $b_1, \dots, b_n$ du K -espace vectoriel F formée d'éléments de B . Montrer que

$$B \subset \{x \in F \mid \mathrm{Tr}_{F/K}(x, b_i) \in A \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

(iii) Dans la situation de (ii), supposons de plus, que A soit noethérien. Dédurre que B est une A -algèbre finie. En particulier, B est noethérien.

Exercice 6.86. Soient K un corps, A une K -algèbre de type fini. Montrer que

$$\mathcal{J}(A) = \mathcal{N}(A)$$

(notation de la définition 1.48(i)).

6.4. Variétés normales et normalisation. Rappelons qu'un ensemble algébrique V de $\mathbb{C}^n$ est une partie de la forme $V(I)$, pour un idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, et comme déjà annoncé au §1.3.1, le théorème de la base nous dit que $V(I)$ est le lieu des zéros communs d'un nombre fini de polynômes. D'autre part, le Nullstellensatz nous dit que l'idéal des polynômes qui s'annulent sur $V(I)$ est le radical de I . Les propriétés algébriques de l'anneau quotient $A_V := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathrm{rad}(I)$ traduisent des propriétés géométriques de l'ensemble associé V : par exemple, on a déjà remarqué que V est irréductible si et seulement si le radical de I est un idéal premier, autrement dit, si et seulement si A_V est un anneau intègre. Si A_V est aussi intégralement clos, on dit que V est une *sous-variété normale* de $\mathbb{C}^n$. Quelle sorte de propriétés géométriques caractérisent les sous-variétés normales ? On verra une réponse plus détaillée à cette question dans la section 7.4, mais seulement pour le cas des variétés de dimension un, donc pour les courbes algébriques de $\mathbb{C}^n$; brièvement, si V est une courbe normale, la sous-variété analytique complexe V de $\mathbb{C}^n$ est non singulière. Pour le cas d'un ensemble algébrique de dimension arbitraire, la normalité est une condition un peu plus difficile à saisir, et les variétés normales occupent une position intermédiaire, car elles peuvent présenter des singularités, mais partagent néanmoins plusieurs propriétés des variétés non singulières, et le lieu des leurs points singuliers a codimension au moins 2. Un avantage des variétés normales est leur relative accessibilité et abondance : à savoir, si V est un sous-ensemble algébrique irréductible arbitraire, il existe toujours une partie non vide et ouverte (dans la topologie de Zariski) $U \subset V$, et une application algébrique surjective $\phi : V' \rightarrow V$ d'une variété normale V' , correspondante à une extension finie d'anneaux $A_V \rightarrow A_{V'}$, et telle que la restriction $\phi^{-1}U \rightarrow U$ soit bijective. De plus, ces propriétés caractérisent (V', ϕ) à isomorphisme unique près, et les fibres $\phi^{-1}(x)$ sont des ensembles finis pour tout $x \in V$: on dit que V' est une *normalisation* de V . Tout cela est conséquence du lemme suivant :

Lemme 6.87. Soient K un corps, A une K -algèbre intègre de type fini.

(i) La normalisation A' de A est une A -algèbre finie.

(ii) En outre, il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $A[a^{-1}] = A'[a^{-1}]$.

Démonstration. (i) : Le lemme de normalisation de Noether (voir le problème 6.12(ii)) fournit des éléments $x_1, \dots, x_d \in A$ algébriquement indépendants sur K , tels que A soit entier sur $A_0 := K[x_1, \dots, x_d]$. Evidemment A' est aussi la fermeture intégrale de A_0 dans $F := \text{Frac } A$ (corollaire 6.9) ; donc il suffit de montrer l'assertion plus générale suivante :

Affirmation 6.88. Soient E_0 une extension finie du corps $F_0 := \text{Frac } A_0$, et B_0 la fermeture intégrale de A_0 dans E . Alors B_0 est une A_0 -algèbre finie.

Preuve : Soient aussi E_1 la fermeture normale de E_0 sur F_0 (dans une clôture algébrique fixé de E_0), et B_1 la fermeture intégrale de A_0 dans E_1 ; alors E_1 est encore une extension finie de F_0 (remarque 1.87(ii)), et puisque A_0 est un anneau noëtherien, il suffit de vérifier que B_1 est une A_0 -algèbre finie (proposition 6.64). Ainsi, on peut supposer que E_0 soit une extension normale de F_0 , de sorte que l'on a une tour d'extensions de corps $F_0 \subset F_1 \subset E_0$ avec E_0 séparable sur F_1 et F_1 purement inséparable sur F_0 (théorème 1.91 et corollaire 1.93(i)). Si la fermeture intégrale A_1 de A_0 dans F_1 est une A_0 -algèbre finie, alors en particulier A_1 est un anneau noëtherien intégralement clos, et par suite B_0 est une A_1 -algèbre finie (problème 6.85(iii)), donc aussi une A_0 -algèbre finie. Donc, on peut supposer que E_0 soit une extension purement inséparable de F_0 . Noter aussi que A_0 est intégralement clos (problème 6.16(iv)) ; par suite, si $E_0 = F_0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, la caractéristique de K est $p > 0$, et il existe $a_1, \dots, a_r \in K$ et $e \in \mathbb{N}$ tels que

$$E_0 \subset L := K(a_1^{1/p^e}, \dots, a_r^{1/p^e}, x_1^{1/p^e}, \dots, x_d^{1/p^e}).$$

Mais $K' := K(a_1^{1/p^e}, \dots, a_r^{1/p^e})$ est une extension finie de K (de degré $\leq p^{er}$), et la fermeture intégrale de A_0 dans $L = K'(x_1^{1/p^e}, \dots, x_d^{1/p^e})$ coïncide avec la fermeture intégrale de $K'[x_1, \dots, x_d]$ dans L , qui est évidemment $A_L := K'[x_1^{1/p^e}, \dots, x_d^{1/p^e}]$, une A_0 -algèbre finie. Ainsi, $B_0 \subset A_L$, et on conclut avec la proposition 6.64. $\diamond$

(ii) : Soit $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs du A -module A' ; pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $a_i, b_i \in A$ tels que $x_i = b_i/a_i$. Soit $a := a_1 \cdots a_n$; il vient $x_1, \dots, x_n \in A[a^{-1}]$ et donc $A[a^{-1}] = A'[a^{-1}]$, comme souhaité. $\square$

On peut maintenant construire la normalisation V' de V : le lemme 6.87(i) nous dit que la normalisation A' de notre anneau A est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, donc le Nullstellensatz nous permet de décrire V et V' comme les spectres maximaux respectivement de A et A' , et la normalisation $\phi : V' \rightarrow V$ sera l'application $\text{Max } f : \text{Max } A' \rightarrow \text{Max } A$ induite par l'inclusion $f : A \rightarrow A'$. Les propriétés requises pour ϕ se vérifient aisément : d'abord, les fibres $\phi^{-1}(x)$ sont des parties finies, en vertu du corollaire 6.20(v) ; et avec $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $A[a^{-1}] = A'[a^{-1}]$, on voit que $U := \text{Max } A[a^{-1}]$ est une partie ouverte non vide de V telle que la restriction $\phi^{-1}U \rightarrow U$ soit bijective. Si l'on souhaite une description plus concrète de ϕ , on peut procéder comme suit :

- on détermine un système de générateurs $y_1, \dots, y_m$ de la $\mathbb{C}$ -algèbre A' , de telle façon à obtenir un homomorphisme surjectif de $\mathbb{C}$ -algèbres :

$$\pi : \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow A' \quad Y_i \mapsto y_i.$$

En vertu du Nullstellensatz, cela nous permet de représenter $\text{Max } A'$ comme un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^m$.

- Rappelons que A est aussi un quotient de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, et pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $a_i \in A$ la classe de X_i ; donc a_i est aussi un élément de A' , et on choisira $P_i \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ qui relève $a_i \in A'$, i.e. avec $\pi(P_i) = a_i$.

- Ensuite, on considère l'application de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\psi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m] \quad X_i \mapsto P_i.$$

Cela donne un diagramme commutatif d'homomorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m] \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

d'où, un diagramme de spectre maximaux :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\phi} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^m & \xrightarrow{\text{Max } \psi} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

qui montre bien que ϕ est la restriction à V' d'une application algébrique définie sur $\mathbb{C}^m$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$: plus précisément, d'après l'exercice 1.47, il s'agit de l'application

$$\text{Max } \psi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \quad z := (z_1, \dots, z_m) \mapsto (P_1(z), \dots, P_n(z)).$$

Toutefois, $\text{Max } \psi$ dépend de la présentation de A' comme quotient d'une $\mathbb{C}$ -algèbre de polynômes, ainsi que des choix des polynômes P_i : seulement $\text{Max } f$ est intrinsèque.

Exercice 6.89. Compléter la discussion ci-dessus de la façon suivante :

(i) Préciser la propriété d'unicité : soient A un anneau intègre, et A' sa normalisation ; si $f : A \rightarrow A''$ est une autre A -algèbre intègre et intégralement close et s'il existe un élément $b \in A$ tel que f induit un isomorphisme $A[b^{-1}] \xrightarrow{\sim} A''[b^{-1}]$, alors montrer qu'il existe un isomorphisme unique de A -algèbres $A' \xrightarrow{\sim} A''$.

(ii) Soient A et A' comme dans (i), et K un corps tel que A soit une K -algèbre de type fini ; on a vu qu'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $A[a^{-1}] = A'[a^{-1}]$. On pose

$$U_{\text{nor}} := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid A_{\mathfrak{p}} \text{ est intégralement clos}\}.$$

Montrer que U_{nor} contient la partie ouverte $\text{Spec } A[a^{-1}]$ de $\text{Spec } A$. Montrer aussi que U_{nor} est une partie ouverte (non vide) de $\text{Spec } A$.

Montrons aussi comment généraliser les considérations précédentes aux schémas ; pour cela, il est naturel d'introduire la notion suivante :

Définition 6.90. On dit qu'un schéma $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ est *normal* si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau normal pour tout $x \in X$.

Remarque 6.91. Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma normal et intègre ; alors, pour toute partie ouverte affine $U \subset X$, l'anneau $A := \mathcal{O}_X(U)$ est intègre et intégralement clos. En effet, le schéma $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$ est intègre, d'après la remarque 5.73(ii,iii) ; l'assertion découle alors de la remarque 5.73(i) et de la proposition 6.14.

Problème 6.92. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma intègre, et $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\underline{X}$ -schémas $(f, f^\flat) : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ tels que $\underline{Y}$ soit intègre et normal et que l'image de f soit une partie dense de X . Montrer que :

- (i) $\mathcal{C}$ a un objet final $\underline{h} : \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{X}$. On appelle $(\underline{X}^\nu, \underline{h})$ la *normalisation de $\underline{X}$* .
- (ii) Si en outre $\underline{X}$ est affine, soient $A := \mathcal{O}_X(X)$ et A^ν la normalisation de A ; alors $\underline{X}^\nu = \text{Spec } A^\nu$, et $\underline{h}$ est induit par l'inclusion $A \rightarrow A^\nu$.
- (iii) Dans la situation de (i), $\underline{h}$ est un morphisme compact et séparé.

Dans la pratique, les problèmes de décider si un ensemble algébrique irréductible soit normal (*i.e.* si un anneau intègre donné soit algébriquement clos), ou de déterminer sa normalisation, ou la partie ouverte U_{nor} de l'exercice 6.89(ii), peuvent être assez difficiles : dans notre cours on verra des critères maniables pour le cas des courbes (§7.3.1), mais le cas des variétés de dimension > 1 demande des méthodes plus sophistiquées. Donc, il peut être intéressant de renverser la question : étant donnée une variété normale V' , on pourrait essayer de produire des ensembles algébriques irréductibles non normaux, dont

la normalisation soit V' ; on aura ainsi un échantillon de normalisations, prêt à l'emploi, pour vérifier des conjectures, ou construire éventuellement des contre-exemples utiles.

• Essayons par exemple de trouver V tel que le complémentaire de U_{nor} dans V soit un unique point $P \in V$. Dans ce cas, la fibre $\phi^{-1}(P)$ de la normalisation $\phi : V' \rightarrow V$ sera une partie finie $\{Q_1, \dots, Q_n\} \subset V'$. Avec un langage imagé, on pourrait dire que la normalisation *pince* $Q_1, \dots, Q_n$ sur le point P . On arrive donc à la question : étant donné un ensemble fini $\{Q_1, \dots, Q_n\} \subset V'$, peut-on obtenir un nouveau ensemble algébrique si l'on pince les Q_i sur un seul point, tout en laissant inaltérés les autres points de V' ? Pour mieux formaliser notre question, considérons d'abord l'ensemble quotient

$$W := V' / \sim$$

par la relation d'équivalence qui pince les points $Q_1, \dots, Q_n$: i.e. pour tous $X, Y \in V'$ tels que $X \sim Y$, on a soit $X = Y$, soit $X, Y \in \{Q_1, \dots, Q_n\}$. On dénote $\psi : V' \rightarrow W$ la projection canonique qui envoie tout élément de V' sur sa classe d'équivalence, et on munit W de la topologie quotient induite par V' via ψ , de sorte que ψ devient une application continue d'espaces topologiques. On cherche maintenant un ensemble algébrique V irréductible muni d'une bijection ensembliste $\omega : W \xrightarrow{\sim} V$, et tel que la composition $\phi := \omega \circ \psi : V' \rightarrow V$ soit une application de normalisation. Cette dernière condition veut dire que si $V' = \text{Max } A'$ et $V = \text{Max } A$ pour deux $\mathbb{C}$ -algèbres A, A' intègres et de type fini, il existe un homomorphisme entier de $\mathbb{C}$ -algèbres $f : A \rightarrow A'$ tel que $\phi = \text{Max } f$. On remarque que si un tel ω existe, la topologie de V coïncide avec la topologie induite par V' via ϕ (voir le corollaire 6.20(ii)), donc ω est même un homéomorphisme.

• Or, A' est l'anneau des fonctions algébriques définies sur V' à valeurs complexes, et A serait de même l'anneau des fonctions algébriques sur V ; de plus, f s'identifierait naturellement à l'application qui associe à toute fonction algébrique $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ la composition $h \circ \phi : V' \rightarrow \mathbb{C}$. Mais évidemment, toute fonction de la forme $h \circ \phi$ est constante sur l'ensemble $\{Q_1, \dots, Q_n\}$; réciproquement, toute fonction algébrique constante sur cette partie devrait provenir d'une fonction algébrique de V . On voit donc que le candidat naturel est le sous-anneau de A'

$$A := \{h \in A' \mid h(Q_i) = h(Q_j) \ \forall i, j = 1, \dots, n\}.$$

Or, pour tout $i = 1, \dots, n$ on a un homomorphisme d'anneaux

$$\varepsilon_i : A' \rightarrow \mathbb{C} \quad h \mapsto h(Q_i)$$

et A est précisément l'égaliseur de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$: l'exercice 6.77(i) nous dit alors que A est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, et de plus A' est une A -algèbre entière. Pour conclure, il ne reste qu'à vérifier que l'application $\phi : \text{Max } A' \rightarrow \text{Max } A$ induite par l'inclusion $f : A \rightarrow A'$ identifie $\text{Max } A$ avec le quotient W de $\text{Max } A'$.

6.4.1. Pincement d'un ensemble fini de points géométriques. Pour cela, considérons plus généralement un corps K arbitraire, une K -algèbre de type fini A' , et un ensemble fini $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\} \subset \text{Max } A'$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique fixée de K ; par le Nullstellensatz, pour chaque $i = 1, \dots, n$ il existe un homomorphisme de K -algèbres $\overline{\varepsilon}_i : k(\mathfrak{m}_i) \rightarrow \overline{K}$, et on dénote $\varepsilon_i : A' \rightarrow \overline{K}$ la composition de $\overline{\varepsilon}_i$ avec la projection canonique $\pi'_i : A' \rightarrow k(\mathfrak{m}_i)$. Si A est l'égaliseur des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, on vient d'observer que l'inclusion $f : A \rightarrow A'$ est un homomorphisme fini, et on va voir plus précisément, que $\text{Spec } f$ identifie $\text{Spec } A$ avec le quotient $(\text{Spec } A') / \sim$, pour la relation d'équivalence $\sim$ sur $\text{Spec } A'$ qui pince sur un seul point les idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$. D'abord, on a $\mathfrak{m}_i = \text{Ker } \varepsilon_i$, et donc

$$f^{-1}(\mathfrak{m}_i) = A \cap \text{Ker } \varepsilon_i = A \cap \text{Ker } \varepsilon_j = f^{-1}(\mathfrak{m}_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

de sorte que $\text{Spec } f$ envoie $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ sur le même point $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Ensuite, montrons que $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\}$. On raisonne par l'absurde : soit alors

$$\mathfrak{p} \in \text{Spec } A' \setminus \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\} \quad \text{tel que} \quad \text{Spec } f(\mathfrak{p}) = A \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{m}.$$

Comme les $\mathfrak{m}_i$ sont maximaux, le lemme 1.55 fournit $h \in (\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i) \setminus \mathfrak{p}$. Cela veut dire que $\varepsilon_i(h) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, donc $h \in A$; mais par construction on a $h \in \mathfrak{m}$ et $h \notin A \cap \mathfrak{p}$, contradiction. On voit ainsi que $\text{Spec } f$ se restreint en une application

$$U' := \text{Spec } A' \setminus \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\} \rightarrow U := \text{Spec } A \setminus \{\mathfrak{m}\}$$

qui est surjective, par le corollaire 6.20, et on va vérifier plus précisément que $\text{Spec } f$ induit par restriction un *isomorphisme de sous-schémas ouverts* :

$$U' \times_{\text{Spec } A'} (\text{Spec } A', \mathcal{O}_{\text{Spec } A'}) \xrightarrow{\sim} U \times_{\text{Spec } A} (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}).$$

Pour cela, soit $h \in A$ tel que la partie ouverte $D(h) = \text{Spec } A_h$ de $\text{Spec } A$ est contenue dans U , de sorte que $(\text{Spec } f)^{-1}(D(h)) = \text{Spec } A'_h \subset U'$; il suffira alors de montrer que la restriction $\text{Spec } A'_h \rightarrow \text{Spec } A_h$ de $\text{Spec } f$ est un isomorphisme de schémas, *i.e.* que f induit un isomorphisme $f_h : A_h \xrightarrow{\sim} A'_h$. Or, A_h est une A -algèbre plate (remarque 3.74(i)), donc elle est l'égaliseur des homomorphismes

$$\varepsilon_1 \otimes_A A_h, \dots, \varepsilon_n \otimes_A A_h : A' \otimes_A A_h \rightarrow \overline{K} \otimes_A A_h$$

par l'exercice 6.77(ii). D'autre part, $\overline{K} \otimes_A A_h$ est la localisation de $\overline{K}$ par la partie multiplicative engendrée par l'image de h dans $\overline{K}$ (voir la discussion au §3.4.2); mais $\varepsilon_1(h) = \dots = \varepsilon_n(h) = 0$, car $D(h)$ ne contient pas le point $\mathfrak{m}$ de $\text{Spec } A$. Autrement dit, $\overline{K} \otimes_A A_h$ est la localisation dans laquelle 0 devient inversible : *i.e.* $\overline{K} \otimes_A A_h = 0$. En particulier, les homomorphismes $\varepsilon_i \otimes_A A_h$ sont tous trivialement égaux, et donc leur égaliseur est $A' \otimes_A A_h = A'_h$; on conclut que $A_h = A'_h$, CQFD.

Remarque 6.93. Dans la situation générale du §6.4.1, la construction de A ne dépend pas seulement des points $\mathfrak{m}_i$, mais aussi du choix des inclusions $\overline{\varepsilon}_i$ des leurs corps résiduels respectifs dans $\overline{K}$. La donnée d'un point $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et d'une inclusion de $k(\mathfrak{p})$ dans un corps algébriquement clos est appelée parfois un *point géométrique* de $\text{Spec } A$. Notre construction représente alors le sous-foncteur du foncteur $\mathbf{h}_{(A')^{\text{op}}} : (K - \text{Alg})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (notation de la section 2.1), associant à toute K -algèbre B l'ensemble des homomorphismes $B \rightarrow A'$ de K -algèbres qui égalisent les points géométriques $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Si $K = \overline{K}$, ce sous-foncteur coïncide avec le sous-foncteur de $\mathbf{h}_{(A')^{\text{op}}}$ qui associe à toute K -algèbre B l'ensemble des homomorphismes $f : B \rightarrow A'$ de K -algèbres tels que $(\text{Spec } f)(\mathfrak{m}_1) = \dots = (\text{Spec } f)(\mathfrak{m}_n)$. (Exercice!)

Exercice 6.94. On va illustrer la discussion ci-dessus par un exemple assez simple : on considère la droite affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ (dont les points sont en bijection avec l'ensemble $\mathbb{C}$), et on va décrire explicitement la variété V obtenue par pincement des points $-1, 0, 1$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. D'abord, si T est une coordonnée sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, l'anneau des fonctions algébriques définies sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ est la $\mathbb{C}$ -algèbre de polynômes $\mathbb{C}[T]$, et les points $-1, 0, 1$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ correspondent aux idéaux maximaux de $\mathbb{C}[T]$ engendrés respectivement par $T+1, T$ et $T-1$. Soit $B \subset \mathbb{C}[T]$ l'anneau des fonctions algébriques sur V , *i.e.* l'égaliseur des trois homomorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\varepsilon_a : \mathbb{C}[T] \rightarrow \mathbb{C} \quad P \mapsto P(a) \quad \text{avec } a = -1, 0, 1.$$

(i) Montrer que B est la $\mathbb{C}$ -sous-algèbre de $\mathbb{C}[T]$ engendrée par $X := T^3 - T$, $Y := TX$ et $Z := T^2X$.

(ii) Soit C la $\mathbb{C}$ -sous-algèbre de B engendrée par X . Montrer que B est un C -module libre de rang 3, dont $\{1, Y, Z\}$ est une base.

(iii) Dédire de (ii) une présentation de la $\mathbb{C}$ -algèbre B par générateurs et relations.

Remarque 6.95. (i) L'exercice 6.77 permet d'effectuer des pincements bien plus généraux : le lecteur est encouragé à manufacturer ses propres exemples. Pour une étude systématique des pincements sur les schémas, signalons l'article [23] de D.Ferrand.

(ii) L'ensemble algébrique V construit dans l'exercice 6.94 peut être visualisé comme une courbe avec un double nœud, et la description explicite de l'algèbre B associée nous

a montré que V est un sous-ensemble algébrique de $\text{Max } \mathbb{C}[X, Y, Z]$, i.e. il est réalisable “concrètement” comme une courbe plongée dans l’espace $\mathbb{C}^3$. On pourrait se demander si V soit plongeable déjà dans $\mathbb{C}^2$, le cas échéant V serait une *courbe plane*. Cela revient à se demander s’il existe une présentation différente de B comme quotient de la $\mathbb{C}$ -algèbre de polynômes à deux indéterminées $\mathbb{C}[X, Y]$. Toutefois, notons que si B est un quotient de $\mathbb{C}[X, Y]$, tout idéal maximal de B est engendré par au plus deux éléments, car il est l’image dans B d’un idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$, et ce dernier est engendré par un couple $(X - a, Y - b)$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Donc, si l’on trouve $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$ qui n’admet aucun système de générateurs de cardinalité ≤ 2 , on sera sûr que V n’est pas une courbe plane ; pour cela, il suffira d’exhiber un idéal maximal $\mathfrak{m}$ avec $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 2$. Or, la présentation de B fournie par la solution de l’exercice 6.94 est de la forme $\mathbb{C}[X, Y, Z]/I$, pour un idéal I engendré par trois polynômes P_1, P_2, P_3 et on voit que si $\mathfrak{n} \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$ est l’idéal engendré par (X, Y, Z) , on a $P_1, P_2, P_3 \in \mathfrak{n}^2$. Soit $\mathfrak{m} \subset B$ l’image de $\mathfrak{n}$; par suite

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}/(I + \mathfrak{n}^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = 3.$$

On conclut que la courbe V ne peut pas être plongée dans $\mathbb{C}^2$.

(iii) Plus généralement, si K est un corps algébriquement clos, et si B est une K -algèbre de type fini, l’argument de (ii) montre que :

- La quantité $e := \max(\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \mid \mathfrak{m} \in \text{Max } B)$ est toujours $< +\infty$, car il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que B soit un quotient de $K[X_1, \dots, X_n]$, et le Nullstellensatz nous dit que tout idéal maximal de $K[X_1, \dots, X_n]$ est engendré par un système de la forme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, d’où $e \leq n$.
- En outre, $\text{Max } B$ ne peut pas être plongé dans K^{e-1} .

Exemple 6.96. Comme application, on va exhiber un contre-exemple montrant que dans le théorème 6.28 du “going down” on ne peut pas ôter l’hypothèse que A soit intégralement clos. Pour cela, soient $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ le plan affine complexe, et V la variété obtenue par pincement de deux points distincts $P, Q \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$; montrons que la projection $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow V$ n’est pas générissante. En termes algébriques, $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ correspond au spectre premier de $B := \mathbb{C}[T, S]$ et P, Q sont deux idéaux maximaux de B ; l’anneau A des fonctions algébriques sur V est alors l’égaliseur des projections $\pi_P, \pi_Q : B \rightarrow \mathbb{C}$ sur les corps résiduels de ces points ($k(P), k(Q)$ étant naturellement identifiés au corps $\mathbb{C}$). Or, soit $D \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ une droite affine avec $P \in D$ et $Q \notin D$; la droite D correspond à une partie fermée irréductible de $\text{Spec } B$, et notons η_D son point générique ; P est une spécialisation de η_D dans $\text{Spec } B$, donc $\phi(P)$ est une spécialisation de $\phi(\eta_D)$ dans $\text{Spec } A$. On a $\phi(Q) = \phi(P)$, mais il n’existe aucune générissation η' de Q dans $\text{Spec } B$ avec $\phi(\eta') = \phi(\eta_D)$, car ϕ induit une bijection $(\text{Spec } B) \setminus \{P, Q\} \xrightarrow{\sim} (\text{Spec } A) \setminus \{\phi(P)\}$, et η_D n’est pas une générissation de Q .

6.4.2. Le groupe de Picard d’un pincement. On va maintenant essayer de décrire les modules projectifs sur un ensemble algébrique V obtenu par pincement de points d’un autre ensemble algébrique V' , en termes des modules projectifs sur V' . On reprend la situation du §6.4.1 ; si $\pi : A \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est la projection canonique, on peut résumer la construction de A par un diagramme commutatif d’anneaux :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ k(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{g} & C := k(\mathfrak{m}_1) \times \cdots \times k(\mathfrak{m}_n) \end{array}$$

où π' est le produit des projections $\pi'_1, \dots, \pi'_n$; ce diagramme est *cartésien*, i.e. il identifie A avec le produit fibré $A' \times_C k(\mathfrak{m})$. On sait aussi qu’un A -module projectif P correspond à un module quasi-cohérent $\mathcal{P}$ localement libre sur $\text{Spec } A$ (théorème 4.103), et le A' -module projectif $A' \otimes_A P$ correspond à l’image inverse de $\mathcal{P}$ via le morphisme $\text{Spec } f : \text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$. Réciproquement, un A -module projectif devrait s’obtenir à partir de

la donnée d'un A' -module projectif P' , par *pincement des fibres* $P'(\mathbf{m}_1), \dots, P'(\mathbf{m}_n)$ du module quasi-cohérent $\mathcal{P}'$ associé avec P' .

• Pour aborder cette question, il convient d'étudier au préalable une situation plus générale, que l'on retrouvera aussi plus tard, dans la section 10.5 : considérons un diagramme *cartésien* d'anneaux :

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{f_2} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_3 \end{array}$$

tel que g_2 soit *surjectif*. Noter que π' est surjectif, par le lemme chinois, donc le diagramme $(*)$ vérifie cette condition. Il vient une suite exacte de A_0 -modules :

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\beta} A_3 \rightarrow 0$$

avec $\alpha(a) := (f_1(a), f_2(a))$ pour tout $a \in A_0$ et $\beta(a, b) := g_1(a) - g_2(b)$ pour tous $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Or, si P est un A_0 -module *plat* arbitraire, posons $P_i := A_i \otimes_{A_0} P$ pour $i = 1, 2, 3$; on déduit une suite exacte de A_0 -modules :

$$\Sigma \otimes_{A_0} P \quad : \quad 0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha \otimes_{A_0} P} P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\beta \otimes_{A_0} P} P_3 \rightarrow 0$$

d'où un diagramme *cartésien* de A_0 -modules :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f_2 \otimes_{A_0} P} & P_2 \\ f_1 \otimes_{A_0} P \downarrow & & \downarrow g_2 \otimes_{A_0} P \\ P_1 & \xrightarrow{g_1 \otimes_{A_0} P} & P_3 \end{array}$$

qui nous permet de récupérer P , à isomorphisme de A -modules près, à partir de la donnée de P_1 , P_2 et des homomorphismes $g_1 \otimes_{A_0} P$ et $g_2 \otimes_{A_0} P$.

On va alors considérer la catégorie $\mathcal{D}$ dont les objets sont les données (M_1, M_2, ξ) composées d'un A_1 -module M_1 , un A_2 -module M_2 , et un isomorphisme de A_3 -modules $\xi : A_3 \otimes_{A_1} M_1 \xrightarrow{\sim} A_3 \otimes_{A_2} M_2$. Les morphismes $(M_1, M_2, \xi) \rightarrow (M'_1, M'_2, \xi')$ de $\mathcal{D}$ sont les couples (τ_1, τ_2) formés d'une application A_1 -linéaire $\tau_1 : M_1 \rightarrow M'_1$ et une application A_2 -linéaire $\tau_2 : M_2 \rightarrow M'_2$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_3 \otimes_{A_1} M_1 & \xrightarrow{A_3 \otimes_{A_1} \tau_1} & A_3 \otimes_{A_1} M'_1 \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi' \\ A_3 \otimes_{A_2} M_2 & \xrightarrow{A_3 \otimes_{A_2} \tau_2} & A_3 \otimes_{A_2} M'_2 \end{array}$$

avec composition de morphismes donnée par $(\tau_1, \tau_2) \circ (\tau'_1, \tau'_2) := (\tau_1 \circ \tau'_1, \tau_2 \circ \tau'_2)$. Noter que pour tout A -module Q on a un isomorphisme canonique

$$\xi_Q : A_3 \otimes_{A_1} (A_1 \otimes_{A_0} Q) \xrightarrow{\sim} A_3 \otimes_{A_0} Q \xrightarrow{\sim} A_3 \otimes_{A_2} (A_2 \otimes_{A_0} Q)$$

tel que $\xi_Q(1_{[g_1]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q)) := 1_{[g_2]} \otimes (1_{[f_2]} \otimes q)$ pour tout $q \in Q$ (voir la remarque 3.15) d'où un foncteur bien défini :

$$F : A_0 - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{D} \quad Q \mapsto (A_1 \otimes_{A_0} Q, A_2 \otimes_{A_0} Q, \xi_Q)$$

qui associe à toute application A -linéaire $\phi : Q \rightarrow Q'$ le couple

$$F\phi := (A_1 \otimes_{A_0} \phi, A_2 \otimes_{A_0} \phi) : FQ \rightarrow FQ'.$$

D'autre part, on a aussi un foncteur que l'on pourrait appeler *de pincement*

$$G : \mathcal{D} \rightarrow A_0 - \text{Mod} \quad (M_1, M_2, \xi) \mapsto M_1 \times_{M_3} M_2 := \{(x, y) \in M_1 \oplus M_2 \mid \xi(1 \otimes x) = 1 \otimes y\}$$

qui associe à tout morphisme $(\tau_1, \tau_2) : (M_1, M_2, \xi) \rightarrow (M'_1, M'_2, \xi')$ de $\mathcal{D}$ la restriction $G(\tau_1, \tau_2) : G(M_1, M_2, \xi) \rightarrow G(M'_1, M'_2, \xi')$ de $\tau_1 \oplus \tau_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M'_1 \oplus M'_2$. On voit aisément que tout A -module Q induit une application A_0 -linéaire

$$\eta_Q : Q \rightarrow GF(Q) \quad q \mapsto (\alpha \otimes_{A_0} Q)(q) = (1_{[f_1]} \otimes q, 1_{[f_2]} \otimes q)$$

et on vient de remarquer que η_Q est bijectif si Q est plat. Pour Q quelconque, la suite $\Sigma \otimes_{A_0} Q$ est exacte à droite, donc η_Q est au moins surjectif. De plus, une simple inspection montre que l'association $Q \mapsto \eta_Q$ définit une transformation naturelle

$$\eta : \mathbf{1}_{A_0\text{-Mod}} \rightarrow G \circ F.$$

Lemme 6.97. Avec la notation ci-dessus, on a :

- (i) La transformation η est l'unité d'une adjonction pour le couple (F, G) .
- (ii) La coïunité ε de cette adjonction est un isomorphisme de foncteurs.

Démonstration. (i) : On va exhiber une coïunité $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$, et on vérifiera les identités triangulaires pour le couple (η, ε) (voir le problème 2.13(ii,iii)). Soit donc (M_1, M_2, ξ) un objet de $\mathcal{D}$; on pose $Q := G(M_1, M_2, \xi) \subset M_1 \oplus M_2$. Les projections $Q \rightarrow M_1$ et $Q \rightarrow M_2$ sont A_0 -linéaires, donc elles induisent une application A_1 -linéaire $\tau_1 : A_1 \otimes_{A_0} Q \rightarrow M_1$ et respectivement A_2 -linéaire $\tau_2 : A_2 \otimes_{A_0} Q \rightarrow M_2$; explicitement :

$$\tau_1(1_{[f_1]} \otimes (x, y)) = x \quad \text{et} \quad \tau_2(1_{[f_2]} \otimes (x, y)) = y \quad \forall (x, y) \in Q.$$

Montrons que $(\tau_1, \tau_2) : FQ \rightarrow (M_1, M_2, \xi)$ est un morphisme de $\mathcal{D}$; cela revient à vérifier la commutativité du diagramme :

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} A_3 \otimes_{A_1} (A_1 \otimes_{A_0} Q) & \xrightarrow{A_3 \otimes_{A_1} \tau_1} & A_3 \otimes_{A_1} M_1 \\ \xi_Q \downarrow & & \downarrow \xi \\ A_3 \otimes_{A_2} (A_2 \otimes_{A_0} Q) & \xrightarrow{A_3 \otimes_{A_2} \tau_2} & A_3 \otimes_{A_2} M_2. \end{array}$$

Mais pour tout $q := (x, y) \in Q$ on a :

$$\begin{aligned} \xi \circ (A_3 \otimes_{A_1} \tau_1)(1_{[g_1]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q)) &= \xi(1_{[g_1]} \otimes x) \\ (A_3 \otimes_{A_2} \tau_2) \circ \xi_Q(1_{[g_1]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q)) &= (A_3 \otimes_{A_2} \tau_2)(1_{[g_2]} \otimes (1_{[f_2]} \otimes q)) = 1_{[g_2]} \otimes y \end{aligned}$$

et par définition $\xi(1_{[g_1]} \otimes x) = 1_{[g_2]} \otimes y$, d'où l'assertion. De même, on voit aussitôt que l'association $(M_1, M_2, \xi) \mapsto (\tau_1, \tau_2)$ définit la transformation naturelle ε souhaitée : les détails sont confiés au lecteur. Il reste à montrer les identités triangulaires :

$$G(\varepsilon_{(M_1, M_2, \xi)}) \circ \eta_{G(M_1, M_2, \xi)} = \mathbf{1}_{G(M_1, M_2, \xi)} \quad \varepsilon_{FQ} \circ F(\eta_Q) = \mathbf{1}_{FQ}$$

pour tout A -module Q et tout objet (M_1, M_2, ξ) de $\mathcal{D}$. Mais par inspection directe on trouve que la composition de $\eta_{G(M_1, M_2, \xi)}$ et $G(\varepsilon_{(M_1, M_2, \xi)})$ est donnée par :

$$(x, y) \mapsto (1_{[f_1]} \otimes (x, y), 1_{[f_2]} \otimes (x, y)) \mapsto (x, y) \quad \forall (x, y) \in G(M_1, M_2, \xi).$$

De même, $F(\eta_Q)$ est donné par le couple d'applications telles que :

$$1_{[f_1]} \otimes q \mapsto 1_{[f_1]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q, 1_{[f_2]} \otimes q) \quad \text{et} \quad 1_{[f_2]} \otimes q \mapsto 1_{[f_2]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q, 1_{[f_2]} \otimes q)$$

et ε_{FQ} est donné par le couple d'applications telles que :

$$1_{[f_1]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q, 1_{[f_2]} \otimes q) \mapsto 1_{[f_1]} \otimes q \quad \text{et} \quad 1_{[f_2]} \otimes (1_{[f_1]} \otimes q, 1_{[f_2]} \otimes q) \mapsto 1_{[f_2]} \otimes q$$

pour tout $q \in Q$. La preuve est achevée.

(ii) : Soient (M_1, M_2, ξ) un objet de $\mathcal{D}$ et $Q := G(M_1, M_2, \xi)$; on pose $(\tau_1, \tau_2) := \varepsilon_{(M_1, M_2, \xi)}$. On a déjà remarqué que η_Q est surjectif ; mais les identités triangulaires impliquent aussi que η_Q est injectif, donc η_Q est un isomorphisme. Ainsi la suite horizontale

en haut du diagramme commutatif suivant est exacte courte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\alpha \otimes_{A_0} Q} & (A_1 \otimes_{A_0} Q) \oplus (A_2 \otimes_{A_0} Q) & \xrightarrow{\beta \otimes_{A_0} Q} & A_3 \otimes_{A_0} Q & \longrightarrow 0 \\
 & \parallel & & \tau_1 \oplus \tau_2 \downarrow & & \downarrow A_3 \otimes_{A_2} \tau_2 & \\
 0 \longrightarrow & Q & \longrightarrow & M_1 \oplus M_2 & \longrightarrow & A_3 \otimes_{A_2} M_2 & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

et de même pour la ligne horizontale en bas, par construction de Q . Par le lemme du serpent, on déduit des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Ker}(\tau_1) \oplus \operatorname{Ker}(\tau_2) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(A_3 \otimes_{A_2} \tau_2) \\
 \operatorname{Coker}(\tau_1) \oplus \operatorname{Coker}(\tau_2) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(A_3 \otimes_{A_2} \tau_2).
 \end{aligned}$$

Mais l'application $\operatorname{Coker}(\tau_2) \rightarrow \operatorname{Coker}(A_3 \otimes_{A_2} \tau_2) \xrightarrow{\sim} A_3 \otimes_{A_2} \operatorname{Coker}(\tau_2)$ est induite par la surjection $A_2 \rightarrow A_3$, et elle est ainsi surjective à son tour. On a donc $\operatorname{Coker}(\tau_1) = 0$. De même, l'application $\operatorname{Ker}(\tau_2) \rightarrow \operatorname{Ker}(A_3 \otimes_{A_2} \tau_2)$ est la composition des surjections $\operatorname{Ker}(\tau_2) \rightarrow A_3 \otimes_{A_2} \operatorname{Ker}(\tau_2) \rightarrow \operatorname{Ker}(A_3 \otimes_{A_2} \tau_2)$, d'où $\operatorname{Ker}(\tau_1) = 0$. Cela montre que τ_1 est un isomorphisme, donc de même pour $A_3 \otimes_{A_2} \tau_2$, compte tenu du diagramme (**). Si l'on applique l'exercice 2.104 au diagramme commutatif ci-dessus, on conclut que $\tau_1 \oplus \tau_2$ est un isomorphisme, et cela achève la preuve. $\square$

Considérons maintenant les sous-catégories pleines de $A - \operatorname{Mod}$ et $\mathcal{D}$ notées :

$$A_0 - \operatorname{Modplat} \quad \mathcal{D}_{\text{plat}} \quad \mathcal{D}_{\text{ptf}}$$

dont les objets sont les A_0 -modules plats, les données (M_1, M_2, ξ) telles que M_i est un A_i -module plat pour $i = 1, 2$, et respectivement les données (M_1, M_2, ξ) telles que M_i est un A_i -module projectif de type fini pour $i = 1, 2$. Evidemment, si Q est un A_0 -module plat (resp. projectif de type fini), FQ est un objet de $\mathcal{D}_{\text{plat}}$ (resp. de $\mathcal{D}_{\text{ptf}}$), donc F induit par restriction des foncteurs (notation de la remarque 4.106(iv))

$$F_{\text{plat}} : A_0 - \operatorname{Modplat} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{plat}} \quad F_{\text{ptf}} : A_0 - \operatorname{Modptf} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ptf}}.$$

Proposition 6.98. *Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

- (a) f_2 est un homomorphisme d'anneaux fidèlement plat.
- (b) f_2 est un homomorphisme d'anneaux injectif et fini.

Alors F_{plat} et F_{ptf} sont des équivalences, et la restriction $G_{\text{plat}} : \mathcal{D}_{\text{plat}} \rightarrow A_0 - \operatorname{Modplat}$ (resp. $G_{\text{ptf}} : \mathcal{D}_{\text{ptf}} \rightarrow A_0 - \operatorname{Modptf}$) de G est une quasi-inverse de F_{plat} (resp. de F_{ptf}).

Démonstration. Soient (M_1, M_2, ξ) un objet de $\mathcal{D}_{\text{plat}}$ (resp. de $\mathcal{D}_{\text{ptf}}$), et $Q := G(M_1, M_2, \xi)$; par le lemme 6.97(ii), il s'ensuit que FQ est isomorphe à (M_1, M_2, ξ) , et en particulier $A_2 \otimes_{A_0} Q$ est un A_2 -module plat (resp. projectif de type fini). Or, si (b) est vérifiée, le théorème 6.32 (resp. l'exercice 6.33(ii)) entraîne que Q est plat (resp. projectif de type fini); si (a) est vérifiée, on peut invoquer le problème 3.83(ii.b) et l'exercice 4.102(iii) pour aboutir à la même conclusion. Cela montre que G_{plat} (resp. G_{ptf}) est adjoint à droite de F_{plat} (resp. de F_{ptf}), et évidemment l'unité η et la coïté ε exhibées lors de la preuve du lemme 6.97 fournissent, par restriction, une unité η_{plat} et une coïté $\varepsilon_{\text{plat}}$ pour une adjonction entre F_{plat} et G_{plat} . Mais on sait que η_Q est bijectif si Q est plat, i.e. η_{plat} est un isomorphisme de foncteurs, et de même pour $\varepsilon_{\text{plat}}$, par le lemme 6.97(ii). *A fortiori*, l'unité et la coïté de l'adjonction entre F_{ptf} et G_{ptf} sont des isomorphismes. Pour achever la preuve, il suffit alors d'invoquer le problème 1.131(i). $\square$

Remarque 6.99. (i) On verra plus tard, par des méthodes homologiques, que les conditions (a),(b) de la proposition 6.98 sont superflues : voir la proposition 10.62.

(ii) Il est évident que -- du moins sous les hypothèses de la proposition 6.98, mais en fait plus généralement -- le foncteur F_{ptf} induit à son tour, par restriction, une équivalence entre la sous-catégorie pleine de $A_0 - \operatorname{Modptf}$ dont les objets sont les A_0 -modules

inversibles, et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_{\text{ptf}}$ dont les objets sont les données (M_1, M_2, ξ) telles que M_i est un A_i -module inversible pour $i = 1, 2$.

Revenons maintenant au diagramme $(*)$ du début du §6.4.2 : rappelons que l'homomorphisme f est injectif et fini, et tout $k(\mathfrak{m})$ -module est trivialement libre, car $k(\mathfrak{m})$ est un corps ; avec la remarque 6.99(ii) on déduit un isomorphisme naturel entre $\text{Pic } A$ et le groupe des classes d'isomorphisme $[V, Q', \xi]$ des données (V, Q', ξ) composés d'un A' -module inversible Q' , un $k(\mathfrak{m})$ -espace vectoriel V (nécessairement de dimension 1), et un isomorphisme C -linéaire $\xi : C \otimes_{k(\mathfrak{m})} V \xrightarrow{\sim} C \otimes_{A'} Q'$; sous cette identification, l'inclusion $f : A \rightarrow A'$ induit l'homomorphisme de groupes :

$$\text{Pic}(f) : \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } A' \quad [V, Q', \xi] \mapsto [Q']$$

(où $[Q']$ dénote la classe d'isomorphisme de Q'). En particulier, on voit que $\text{Pic}(f)$ est surjectif : en effet, pour tout A' -module inversible Q' , on a $C \otimes_{A'} Q' = Q'(\mathfrak{m}_1) \oplus \cdots \oplus Q'(\mathfrak{m}_n)$, et chaque facteur $Q'(\mathfrak{m}_i)$ est un $k(\mathfrak{m}_i)$ -espace vectoriel de dimension 1 ; si l'on fixe un élément non nul $x_i \in Q'(\mathfrak{m}_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, n$, on obtient alors une donnée $[k(\mathfrak{m}), Q', \xi]$, où $\xi : C \otimes_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{m}) = C \xrightarrow{\sim} C \otimes_{A'} Q'$ est l'isomorphisme C -linéaire tel que $1 \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Ensuite, le noyau de $\text{Pic}(f)$ est constitué des classes $[k(\mathfrak{m}), A', \xi]$, où $\xi : C \otimes_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{m}) = C \xrightarrow{\sim} C' \otimes_{A'} A' = C$ s'identifie naturellement à un élément inversible de C ; autrement dit, on a un homomorphisme de groupes $\psi : C^\times \rightarrow \text{Ker}(\text{Pic } f)$ surjectif. Pour déterminer son noyau, soit $(\omega, \tau) : (k(\mathfrak{m}), A', \xi_1) \xrightarrow{\sim} (k(\mathfrak{m}), A', \xi_2)$ un isomorphisme ; donc $\omega \in A'^\times$, $\tau \in k(\mathfrak{m})^\times$, et le diagramme suivant d'isomorphismes C -linéaires commute :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\pi'(\omega)} & C \\ \xi_1 \downarrow & & \downarrow \xi_2 \\ C & \xrightarrow{g(\tau)} & C. \end{array}$$

Cela veut dire que $\xi_1/\xi_2 = \pi'(\omega)/g(\tau)$, et donc $\text{Ker } \psi = H := \pi'(A'^\times) \cdot g(k(\mathfrak{m})^\times)$. On peut résumer cette analyse par la suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow H \rightarrow k(\mathfrak{m}_1)^\times \oplus \cdots \oplus k(\mathfrak{m}_n)^\times \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } A' \rightarrow 0.$$

Exemple 6.100. (i) Revenons à la courbe à double nœud de l'exercice 6.94 : on a $A \subset A' = \mathbb{C}[T]$ et on pince trois points $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ de $\text{Max } A'$, dont les corps résiduels sont évidemment isomorphes à $\mathbb{C}$, et de même pour le corps résiduel du point $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ image commune des $\mathfrak{m}_i$. On a aussi $(A')^\times = \mathbb{C}^\times$, et $\text{Pic } A' = 0$, car A' est factoriel (théorème 4.120). On conclut que dans ce cas $H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$ et l'application $H \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^3$ est l'inclusion diagonale : $x \mapsto (x, x, x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}^\times$. Finalement, on obtient un isomorphisme naturel :

$$\text{Pic } A \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\times)^2.$$

(ii) Prenons $A' := \mathbb{Q}[T]$, et soit $p \in \mathbb{Z}$ un premier arbitraire ; on considère les idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ de A' engendrés respectivement par $T^2 - p$ et $T^3 - p$ (i.e. les classes de $p^{1/2}$ et $p^{1/3}$, sous l'identification naturelle de $\text{Max } A'$ avec l'ensemble des orbites galoisiennes d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$: voir l'exercice 1.46(iii)). Soient $A := \{P(T) \in A' \mid P(p^{1/2}) = P(p^{1/3})\} \subset A'$ la $\mathbb{Q}$ -sous-algèbre dont le spectre donne le pincement de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$, et $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{m}_1 = A \cap \mathfrak{m}_2$. Noter que

$$\mathbb{Q} \subset k(\mathfrak{m}) \subset k(\mathfrak{m}_1) \cap k(\mathfrak{m}_2) = \mathbb{Q}(p^{1/2}) \cap \mathbb{Q}(p^{1/3})$$

d'où $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{Q}$. On a aussi $(A')^\times = \mathbb{Q}^\times$ et $\text{Pic } A' = 0$. Donc $H \simeq \mathbb{Q}^\times$ avec l'inclusion diagonale dans $\mathbb{Q}(p^{1/2})^\times \oplus \mathbb{Q}(p^{1/3})^\times$, et on trouve :

$$\text{Pic } A \simeq \frac{\mathbb{Q}(p^{1/2})^\times \oplus \mathbb{Q}(p^{1/3})^\times}{\{(q, q) \mid q \in \mathbb{Q}^\times\}}.$$

(iii) Gardons la notation de (ii), et soit $\mathfrak{m}'_0 \in V' := \text{Max } A'$ l'idéal engendré par T ; on pose $\mathfrak{m}_0 := A \cap \mathfrak{m}'_0 \in V := \text{Max } A$, et on veut maintenant déterminer le groupe de Picard de la variété $U := V \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$, partie ouverte de V . Pour cela, on pose $B' := A'[T^{-1}]$, on remarque que $U' := V' \setminus \{\mathfrak{m}'_0\} = D(T) = \text{Max } B'$, et on considère la $\mathbb{Q}$ -sous-algèbre $B \subset B'$ dont le spectre donne le pincement de $\mathfrak{m}_1 B'$ et $\mathfrak{m}_2 B'$. Donc $\text{Max } B$ est le quotient de U' qui identifie ces points, et ce dernier est homéomorphe à U . Or, on a encore $\text{Pic } B' = 0$, car B' est factoriel (lemme 4.118(ii)), et évidemment $k(\mathfrak{m}_i) = k(\mathfrak{m}_i B')$ pour $i = 1, 2$. D'autre part, $(B')^\times = \mathbb{Q}^\times \cdot \{T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et l'image de T dans $\mathbb{Q}(p^{1/2}) \times \mathbb{Q}(p^{1/3})$ est $(p^{1/2}, p^{1/3})$. On conclut que maintenant H est le sous-groupe engendré par les éléments (q, q) avec $q \in \mathbb{Q}^\times$ et par $(p^{1/2}, p^{1/3})$, et donc :

$$\text{Pic } B \simeq \frac{\mathbb{Q}(p^{1/2})^\times \oplus \mathbb{Q}(p^{1/3})^\times}{\{(p^{n/2}q, p^{n/3}q) \mid q \in \mathbb{Q}^\times, n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Exercice 6.101. Avec la notation de l'exemple 6.100(ii,iii), noter que $A = A' \cap B$. Montrer que l'inclusion $j: A \rightarrow B$ est un homomorphisme plat d'anneaux, mais n'est pas une localisation, et $\text{Spec}(j)$ identifie $\text{Spec } B$ avec une partie ouverte de $\text{Spec } A$.

6.5. Platitude générique et théorème de Chevalley. Le premier théorème de cette section est un résultat très général dû à Grothendieck; ni son énoncé, ni sa preuve -- dont le seul ingrédient non trivial est le lemme de normalisation de Noether -- ont recours aux techniques noéthériennes développées dans cette leçon.

Théorème 6.102. (Platitude générique) *Soient A un anneau intègre, B une A -algèbre de type fini, M un B -module de type fini. Alors il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que M_f soit un A_f -module libre.*

Démonstration. La première observation est :

Affirmation 6.103. On peut supposer que M soit un B -module cyclique.

Preuve : En effet, pour un B -module M de type fini arbitraire on peut trouver une suite finie de B -sous-modules $M_0 := 0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k := M$ telle que $N_i := M_{i+1}/M_i$ soit cyclique pour tout $i = 0, \dots, k-1$. Supposons alors que pour $i = 0, \dots, k-1$ il existe $f_i \in A \setminus \{0\}$ tel que $(N_i)_{f_i}$ soit un A_{f_i} -module libre; on pose $f := f_0 \dots f_{k-1}$. Montrons par récurrence sur $i = 0, \dots, k$ que $(M_i)_f$ est un A_f -module libre. L'assertion est triviale pour $i = 0$. Soit donc $i > 0$, et supposons que $(M_{i-1})_f$ soit un A_f -module libre; la suite exacte courte de A_f -modules

$$0 \rightarrow (M_{i-1})_f \rightarrow (M_i)_f \rightarrow (N_{i-1})_f \rightarrow 0$$

est scindée, car $(N_{i-1})_f$ est libre, donc $(M_i)_f \simeq (M_{i-1})_f \oplus (N_{i-1})_f$ est libre. $\diamond$

Par hypothèse, il existe un homomorphisme surjectif $B' := A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$ de A -algèbres pour quelque $n \in \mathbb{N}$, et par restriction des scalaires, M est aussi un B' -module de type fini. On peut alors supposer du départ que $B = A[T_1, \dots, T_n]$, et on raisonnera par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on a $B = A$, et au vu de l'observation 6.103, on peut supposer que $M = A/I$, pour quelque idéal $I \subset A$. Si $I = 0$, évidemment M est libre. Sinon, soit $f \in I \setminus \{0\}$; on a $M_f = 0$, qui est trivialement un A_f -module libre, d'où le théorème, dans ce cas.

Ensuite, soit $n > 0$, et supposons que le théorème soit déjà connu pour tout anneau intègre A et tout $A[T_1, \dots, T_{n-1}]$ -module de type fini. On peut supposer que $M = B/J$ pour un idéal $J \subset B$. Si $J = 0$, il suffit d'observer que B est un A -module libre (avec pour base les monômes unitaires); sinon, soient $P \in J \setminus \{0\}$ et $C := B/(P)$. Evidemment, M est un C -module de type fini. D'après le problème 6.12(i), on trouve un automorphisme ϕ de la A -algèbre B et $g \in A \setminus \{0\}$ tels que :

(a) $\phi(T_n) = T_n$

(b) $Q := g^{-1}\phi(P) \in B_g$ est un polynôme unitaire par rapport à l'indéterminée T_n .

Posons $S_i := \phi^{-1}(T_i)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et $C_0 := A_g[S_1, \dots, S_{n-1}] \subset B_g$; par suite $Q(S_1, \dots, S_{n-1}, T_n) = 0$ dans la localisation C_g , *i.e.* C_g est une C_0 -algèbre finie, donc M_g est un C_0 -module de type fini (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Par hypothèse de récurrence, il existe alors $h \in A \setminus \{0\}$ tel que $(M_g)_h$ soit un $(A_g)_h$ -module libre, et l'assertion du théorème suit avec $f := gh$. $\square$

Exercice 6.104. Dans la situation du théorème 6.102, montrer qu'il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que B_f est une A_f -algèbre de présentation finie et M_f est un B_f -module de présentation finie.

Notre prochain théorème est dû à Chevalley; à nouveau, il s'agit d'un résultat très général, valable sans aucune condition de noethérianité, mais dont la preuve procèdera, toutefois, par réduction au cas des anneaux noethériens. Notre discussion sera aussi l'occasion de regarder un peu de plus près la topologie des spectres des anneaux noethériens. En effet, on va démarrer avec la définition suivante :

Définition 6.105. Soit T un espace topologique. On dit que T est *noethérien* si toute suite décroissante de parties fermées de T :

$$Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$$

est *stationnaire*, *i.e.* il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Z_m = Z_n$ pour tout $m \geq n$.

Remarque 6.106. (i) Il est évident que le spectre $\text{Spec } A$ de tout anneau noethérien A est un espace topologique noethérien.

(ii) Soit $\mathcal{F} \neq \emptyset$ un ensemble de parties fermées d'un espace topologique noethérien T . On munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel induit par l'inclusion; évidemment, toute partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{F}$ est également stationnaire, *i.e.* possède un élément minimal. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors des éléments minimaux.

(iii) On voit aussitôt que tout sous-espace d'un espace noethérien est noethérien.

(iv) Evidemment, un espace topologique T est noethérien si et seulement si toute suite croissante $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ de parties ouvertes de T est stationnaire.

(v) En particulier, tout espace topologique noethérien T est compact. Au vu de (iii), il s'ensuit que toute partie ouverte de T est compacte. Réciproquement, un espace topologique dont toutes les parties ouvertes sont compactes est noethérien.

(vi) Soit T un espace topologique spectral et noethérien. Il suit de (v) que toute partie ouverte et toute partie fermée de T est constructible.

Exercice 6.107. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ et $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } A$. Montrer que f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$ si et seulement si $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ est une $k(\mathfrak{p})$ -algèbre finie.

L'observation élémentaire suivante est à la base de la *méthode de récurrence noethérienne* :

Lemme 6.108. Soient T un espace topologique noethérien, $\mathbf{P}$ une propriété des parties fermées de T , vérifiant la condition suivante :

— Si $Z \subset T$ est une partie fermée et si l'on a $\mathbf{P}(Z')$ pour toute partie fermée Z' strictement contenue dans Z , alors $\mathbf{P}(Z)$ est vraie.

Alors $\mathbf{P}(Z)$ est vraie pour toute partie fermée Z de T .

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées Z de T telles que $\mathbf{P}(Z)$ soit fausse. Si $\mathcal{F}$ était non vide, il aurait un élément minimal Z (remarque 6.106(ii)); d'où, $\mathbf{P}(Z')$ serait vraie pour toute partie fermée Z' strictement contenue dans Z . Mais par hypothèse, cela entraîne que $\mathbf{P}(Z)$ soit vraie, contradiction. $\square$

Exercice 6.109. (Composantes irréductibles) Soient T un espace topologique, Z une partie fermée irréductible de T , et $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées irréductibles de T contenant Z , muni de la relation d'ordre induite par l'inclusion.

(i) Montrer que $\mathcal{F}$ admet des éléments maximaux. Les parties fermées irréductibles maximales de T sont appelées les *composantes irréductibles* de T . Donc, toute partie fermée irréductible de T est contenue dans une composante irréductible.

(ii) Montrer que tout espace topologique noethérien n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

(iii) Dédurre de (ii) que si T est un espace topologique spectral et noethérien, $\text{Max } T$ est une partie finie de T . En particulier, *tout anneau noethérien n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux*.

(iv) Montrer qu'un espace spectral T est noethérien si et seulement si toute partie fermée irréductible de T est constructible. Noter que cet énoncé est un analogue topologique du problème 6.62(ii).

Exercice 6.110. (i) Soit A un anneau tel que $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Montrer que A est réduit.

(ii) Soit A un anneau dont l'ensemble $\text{Min } A$ des idéaux premiers minimaux est fini, et tel que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau intègre pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Montrer que les projections $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \in \text{Min } A$ induisent un isomorphisme :

$$A \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} A/\mathfrak{p}.$$

Lemme 6.111. Soient X un espace spectral, $X' \subset X$ une partie constructible, que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans X . Soit $X'' \subset X'$ une partie ; alors X'' est constructible dans X' si et seulement si elle est constructible dans X .

Démonstration. Supposons d'abord que X'' soit constructible dans X' , et écrivons $X'' = \bigcup_{i=1}^n (U_i \setminus U'_i)$ avec U_i, U'_i des parties ouvertes et compactes de X' pour tout $i = 1, \dots, n$. Evidemment il suffit de montrer que chaque terme $U_i \setminus U'_i$ est constructible dans X , donc on peut supposer que $X'' = U \setminus U'$ avec U, U' ouverts et compacts dans X' . On a $U = V \cap X'$ et $U' = V' \cap X'$ pour des parties ouvertes V et V' de X , et comme X est spectral, V est la réunion d'une famille $(V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de parties ouvertes et compactes ; mais la compacité de U implique qu'il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $U = W \cap X'$ avec $W := (\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda)$, et quitte à remplacer V par W on peut alors supposer que la partie V soit compacte. De même on se ramène au cas où V' est compacte. On a finalement $X'' = X' \cap (V \setminus V')$, qui est une partie constructible de X , par la remarque 4.51(ii,iii).

Réciproquement, soit X'' constructible dans X , et montrons que X'' est aussi constructible dans X' ; en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène au cas où $X'' = U \setminus U'$ avec U, U' ouverts et compacts dans X . On va montrer plus généralement :

Affirmation 6.112. Si U est une partie ouverte et compacte de X , alors $U \cap X'$ est une partie ouverte et compacte de X' .

Preuve : Ecrivons $X' = \bigcup_{i=1}^n X'_i$ où $X'_i = V_i \setminus V'_i$ pour $i = 1, \dots, n$, avec des parties V_i, V'_i ouvertes et compactes de X . Il suffit de montrer que $U \cap X'_i$ est compact dans X'_i pour $i = 1, \dots, n$, donc on est ramené au cas où $X' = V \setminus V'$ pour des parties V, V' ouvertes et compactes de X . Or, V est un espace spectral (pour la topologie induite par X), et $V \cap U$ et $V \cap V'$ sont deux parties ouvertes et compactes de V (remarque 4.51(i)) ; par suite $X' = V \setminus (V \cap V')$ est constructible dans V , et quitte à remplacer X et U respectivement par V et $V \cap U$, on peut ainsi supposer que X' soit fermée dans X . Si maintenant $U \cap X'$ est la réunion d'une famille $(V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de parties ouvertes de X' , pour tout $\lambda \in \Lambda$ on trouve une partie ouverte U_λ de X avec $V_\lambda = U_\lambda \cap X'$, et il vient $U = (U \setminus X') \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap U_\lambda)$; par la compacité de U , il existe alors une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ avec $U = (U \setminus X') \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} (U \cap U_\lambda)$, d'où finalement $U \cap X' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda$, ce qui montre que $U \cap X'$ est compact dans X' . $\diamond$

Or, on a $X'' = (X' \cap U) \setminus (X' \cap U')$ qui est bien une partie constructible de X' , au vu de l'observation 6.112. $\square$

Proposition 6.113. Soient T un espace topologique spectral et noethérien, $S \subset T$ une partie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) S est constructible.
- (b) Pour tout sous-espace fermé irréductible Z de T , soit l'adhérence de $S \cap Z$ a intérieur vide dans Z , soit $S \cap Z$ contient une partie ouverte non vide de Z .

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : écrivons $S = \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap Z_i)$ pour des parties ouvertes U_i et fermées Z_i non vides de T ; si S contient le point générique z de Z , on a $z \in Z_i$ pour quelque $i \in \{1, \dots, n\}$. Par suite $Z \subset Z_i$, d'où $U_i \cap Z \subset S \cap Z$. Si $z \notin S$, noter que Z est spectral et noethérien, et $S \cap Z$ est évidemment une partie constructible dans Z dont l'adhérence $\overline{S \cap Z}$ dans Z ne contient pas z (corollaire 4.67(i)) ; donc $\overline{S \cap Z}$ est une partie fermée strictement contenue dans Z . Si $U \subset \overline{S \cap Z}$ est une partie ouverte de Z , on a $Z = \overline{S \cap Z} \cup (Z \setminus U)$, d'où $Z = Z \setminus U$, car Z est irréductible ; cela montre que $U = \emptyset$, comme souhaité.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit $\mathbf{P}(Z)$ la propriété : “ Z est une partie fermée de T et $S \cap Z$ est constructible dans T ”. Soit maintenant Z une partie fermée de T et supposons que $\mathbf{P}(Z')$ soit vraie pour toute partie fermée Z' de T strictement contenue dans Z . Supposons d'abord que Z soit réductible ; comme Z est noethérien (remarque 6.106(iii)), il est la réunion finie de ses composantes irréductibles $Z_1, \dots, Z_n$ (exercice 6.109(ii)), et par hypothèse on a $\mathbf{P}(Z_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Par suite $S \cap Z = (S \cap Z_1) \cup \dots \cup (S \cap Z_n)$ est constructible dans T , i.e. $\mathbf{P}(Z)$ est vraie.

Supposons ensuite que Z soit irréductible ; si l'adhérence $\overline{S \cap Z}$ de $S \cap Z$ a intérieur vide dans Z , alors $\mathbf{P}(\overline{S \cap Z})$ est vraie par hypothèse, donc $S \cap Z = S \cap \overline{S \cap Z}$ est constructible dans T , i.e. $\mathbf{P}(Z)$ est vraie. En dernier lieu, si $S \cap Z$ contient une partie ouverte $U \neq \emptyset$ de Z , on a $S \cap Z = U \cup (S \cap (Z \setminus U))$; mais U est constructible dans Z et Z est constructible dans T (remarque 6.106(v,vi)), donc U est constructible dans T (lemme 6.111), et par hypothèse $\mathbf{P}(Z \setminus U)$ est vraie, donc $S \cap (Z \setminus U)$ est constructible dans T . Ainsi, $S \cap Z$ est constructible dans T . Par récurrence noethérienne (lemme 6.108) $\mathbf{P}(T)$ est alors vraie, CQFD. $\square$

Corollaire 6.114. Soient T un espace topologique spectral et noethérien, $S \subset T$ une partie constructible, $S' \subset T$ une autre partie, et $t \in T$. On a :

- (i) S est un voisinage de t dans $T \Leftrightarrow$ pour tout sous-espace fermé irréductible Z de T contenant t , la partie $Z \cap S$ est dense dans Z .
- (ii) S' est ouverte dans $T \Leftrightarrow$ pour tout sous-espace fermé irréductible Z de T rencontrant S' , la partie $Z \cap S'$ contient une partie ouverte non vide de Z .

Démonstration. (i) : Evidemment la condition est nécessaire. Pour la réciproque, soit $\mathbf{P}(Z)$ la propriété : “ Z est une partie fermée de T , et soit $t \notin Z$, soit $Z \cap S$ est un voisinage de t dans Z ”. Soit maintenant Z une partie fermée de T telle que $\mathbf{P}(Z')$ est vraie pour toute partie fermée Z' de T strictement contenue dans Z . Supposons d'abord que Z soit réductible ; comme Z est noethérien (remarque 6.106(iii)), il est la réunion finie de ses composantes irréductibles $Z_1, \dots, Z_n$ (exercice 6.109(ii)), et par hypothèse on a $\mathbf{P}(Z_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Si $t \notin Z$, on a $\mathbf{P}(Z)$; sinon, on peut supposer que $t \in (Z_1 \cap \dots \cap Z_k) \setminus (Z_{k+1} \cup \dots \cup Z_n)$ pour quelque $k \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour $i = 1, \dots, k$ on trouve une partie ouverte U_i de T telle que $t \in U_i$ et $Z \cap U_i \subset Z_i \cap S$. Ainsi, $U := (U_1 \cap \dots \cap U_k) \setminus (Z_{k+1} \cup \dots \cup Z_n)$ est une partie ouverte de T telle que $t \in U$ et $Z \cap U \subset Z \cap S$, donc $\mathbf{P}(Z)$ est vraie dans ce cas. Supposons ensuite que Z soit irréductible ; par hypothèse, $Z \cap S$ est alors dense dans Z , et donc elle contient une partie ouverte V non vide de Z , d'après la proposition 6.113. Si $t \in V$, il vient $\mathbf{P}(Z)$. Sinon, $t \in Z' := Z \setminus V$, et par hypothèse $\mathbf{P}(Z')$ est vraie, donc il existe une partie ouverte U' de T avec $t \in U'$ et $Z' \cap U' \subset Z' \cap S$; par suite, $Z \cap U' = (Z' \cap U') \cup (V \cap U') \subset Z \cap S$, et $\mathbf{P}(Z)$ est encore vraie. Par récurrence noethérienne (lemme 6.108) on conclut que $\mathbf{P}(T)$ est vraie, et la preuve est achevée.

(ii) : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si la condition est vérifiée, S' est constructible, par la proposition 6.113. D'après (i), la partie S' est alors un voisinage de chacun de ses points, d'où l'assertion. $\square$

Théorème 6.115. (Chevalley) *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, et $S \subset \operatorname{Spec} B$ une partie constructible. Alors $(\operatorname{Spec} f)(S)$ est une partie constructible de $\operatorname{Spec} A$.*

Démonstration. On se ramène aisément au cas où $S = U \setminus U'$ avec $U, U' \subset \operatorname{Spec} B$ deux parties ouvertes et compactes. On a alors $U = D(b_1) \cup \dots \cup D(b_n)$ pour certains $b_1, \dots, b_n \in B$, d'où $S = (D(b_1) \setminus U') \cup \dots \cup (D(b_n) \setminus U')$, et on est ramené ultérieurement au cas où $U = D(b) = \operatorname{Spec} B[b^{-1}]$ pour quelque $b \in B$. Mais $B[b^{-1}] = B[X]/(bX - 1)$ est une A -algèbre de présentation finie, et S est aussi une partie constructible de $\operatorname{Spec} B[b^{-1}]$, donc on peut remplacer B par $B[b^{-1}]$ et supposer du départ que S soit une partie fermée constructible de $\operatorname{Spec} B$. Cela veut dire que $S = (\operatorname{Spec} B) \setminus (D(b'_1) \cup \dots \cup D(b'_m))$ pour une suite $b'_\bullet := (b'_1, \dots, b'_m)$ d'éléments de B ; si $J \subset B$ est l'idéal engendré par la suite $b_\bullet$, on a alors $S = V(J) = \operatorname{Spec} B/J$, et comme B/J est encore une A -algèbre de présentation finie, on peut remplacer B par B/J , et on est ainsi ramené au cas où $S = \operatorname{Spec} B$. Écrivons

$$B = A[X_1, \dots, X_k]/(P_1, \dots, P_r) \quad \text{pour certains } P_1, \dots, P_r \in A[X_1, \dots, X_k].$$

Soit maintenant $A_0 \subset A$ la $\mathbb{Z}$ -sous-algèbre engendrée par les coefficients des polynômes $P_1, \dots, P_r$, et posons $B_0 := A_0[X_1, \dots, X_k]/(P_1, \dots, P_r)$; on déduit un homomorphisme $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ et un isomorphisme de A -algèbres $A \otimes_{A_0} B_0 \xrightarrow{\sim} B$. Soient T_0 et T les images de $\operatorname{Spec} f_0$ et $\operatorname{Spec} f$. Considérons le diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{Spec} B_0 \\ \operatorname{Spec} f \downarrow & & \downarrow \operatorname{Spec} f_0 \\ \operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\pi_0} & \operatorname{Spec} A_0 \end{array}$$

où π_0 est induit par l'inclusion $i : A_0 \rightarrow A$ et π est induit par $B_0 \otimes_{A_0} i : B_0 \rightarrow B$. Par l'exercice 3.72 on a $T = \pi_0^{-1}(T_0)$. Au vu de la remarque 4.59, il suffit alors de montrer que T_0 est une partie constructible de $\operatorname{Spec} A_0$. On peut donc remplacer A et B par A_0 et B_0 , et supposer que A soit une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini; en particulier, A est noethérienne (théorème 6.65), et $\operatorname{Spec} A$ est un espace spectral noethérien.

On applique le critère de la proposition 6.113. Pour cela, soient $Z \subset \operatorname{Spec} A$ une partie fermée irréductible, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ son point générique, $g := A/\mathfrak{p} \otimes_A f : A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{p}B$ l'homomorphisme induit, et $T' \subset \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ l'image de $\operatorname{Spec} g$. Au vu des identifications naturelles de Z et $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(Z)$ avec $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ et $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B$, on doit donc montrer que soit l'adhérence de T' dans $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ a intérieur vide, soit T' contient une partie ouverte non vide de $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$. Mais d'après le théorème 6.102, il existe $h \in A/\mathfrak{p}$ non nul tel que $(B/\mathfrak{p}B)_h$ est un $(A/\mathfrak{p})_h$ -module libre. Si $(B/\mathfrak{p}B)_h = 0$, la partie T' est contenue dans la partie fermée $V(h)$, qui a intérieur vide dans Z , car ce dernier est irréductible. Sinon, il existe un ensemble $\Lambda \neq \emptyset$ et un isomorphisme $(A/\mathfrak{p})_h$ -linéaire $(B/\mathfrak{p}B)_h \simeq (A/\mathfrak{p})^{(\Lambda)}$; il vient :

$$k(\mathfrak{q}) \otimes_A B \simeq k(\mathfrak{q}) \otimes_{A/\mathfrak{p}} (B/\mathfrak{p}B)_h \simeq k(\mathfrak{q})^{(\Lambda)} \neq 0 \quad \forall \mathfrak{q} \in D(h) \subset Z$$

d'où $(\operatorname{Spec} g)^{-1}(\mathfrak{q}) = \operatorname{Spec} k(\mathfrak{q}) \otimes_A B \neq \emptyset$ pour tout $\mathfrak{q} \in D(h)$, et en particulier $\emptyset \neq D(h) \subset T'$; la preuve est achevée. $\square$

Corollaire 6.116. *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, M un B -module de type fini tel que $M_{[f]}$ soit un A -module plat avec $\operatorname{Supp}_B M = \operatorname{Spec} B$. Alors on a :*

- (i) *L'application $\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ est ouverte.*
- (ii) *En particulier, si f est plat, $\operatorname{Spec} f$ est une application ouverte.*

Démonstration. Soit $U \subset \operatorname{Spec} B$ une partie ouverte; on doit montrer que la partie $V := (\operatorname{Spec} f)(U)$ est ouverte dans $\operatorname{Spec} A$, et on est ramené aisément au cas où U est une partie compacte, donc constructible, de $\operatorname{Spec} B$. Par le théorème de Chevalley, V est alors constructible dans $\operatorname{Spec} A$, et d'après le corollaire 4.67(ii) il suffit de montrer que tout point de $\operatorname{Spec} A$ générissant un point de V est aussi dans V . Mais cela est clair, car $\operatorname{Spec} f$ est générissante (théorème 3.84), et car U contient toutes les générisations de ses points. $\square$

Problème 6.117. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, et $b \in B$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, soit $b(\mathfrak{p}) := b \otimes 1 \in B \otimes_A k(\mathfrak{p})$, et notons par $\Sigma_b \subset \operatorname{Spec} A$ la partie des $\mathfrak{p}$ tels que $b(\mathfrak{p})$ n'est pas nilpotent. Montrer que Σ_b est constructible dans $\operatorname{Spec} A$, et même ouverte, si f est aussi plat.

(ii) Soit f comme dans (i), et notons par Σ' (resp. Σ'') l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tels que la fibre $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p})$ soit un espace topologique réductible (resp. disconnexe) pour la topologie induite par l'inclusion dans $\operatorname{Spec} B$. Montrer que Σ' et Σ'' sont des parties ind-constructibles de $\operatorname{Spec} A$.

(iii) En particulier, si $\operatorname{Spec} A$ est irréductible (e.g. si A est intègre), et si la fibre générique $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p}_0)$ au-dessus de l'unique point maximal $\mathfrak{p}_0$ de $\operatorname{Spec} A$ est réductible (resp. disconnexe), alors il existe une partie ouverte non vide $U \subset \operatorname{Spec} A$ telle que $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p})$ est réductible (resp. disconnexe) pour tout $\mathfrak{p} \in U$.

(iv) Soient K un corps, et A une K -algèbre de type fini. Montrer que $\operatorname{Max} A$ est une partie dense dans la topologie constructible de $\operatorname{Spec} A$.

(v) Dédurre de (ii) et (iv) l'assertion suivante. Soient K et A comme dans (iv), et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini tel que $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{m})$ est irréductible (resp. connexe, resp. connexe et non vide) pour tout $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$; alors $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p})$ est irréductible (resp. connexe, resp. connexe et non vide) pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Remarque 6.118. Dans la situation du problème 6.117(ii), les parties Σ' et Σ'' ne sont pas forcément constructibles. Par exemple, soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$ l'unique homomorphisme d'anneaux. Alors $\Sigma' = \Sigma''$ est l'ensemble des premiers $p\mathbb{Z} \neq 0$ tels que $p \neq 2$ et 2 est un carré modulo p ; par la réciprocity quadratique, cette condition est vérifiée si et seulement si $p \equiv 1, 7 \pmod{8}$. Par le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, il s'ensuit que Σ' et $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \setminus \Sigma'$ sont deux ensembles infinis, donc ni l'un ni l'autre ne sont des parties constructibles.

Problème 6.119. (i) Gardons les hypothèses et la notation du problème 6.117(i), et soit $\Omega_b \subset \operatorname{Spec} A$ la partie des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que $b(\mathfrak{p}) \neq 0$. Montrer que Ω_b est constructible dans $\operatorname{Spec} A$, et même ouverte, si f est aussi plat.

(ii) Soient $K \subset E$ une extension de corps, et A une K -algèbre géométriquement intègre, i.e. telle que $K' \otimes_K A$ est intègre pour toute extension algébrique K' de K . Montrer que la E -algèbre $E \otimes_K A$ est géométriquement intègre.

(iii) Soient K un corps parfait (voir la définition 1.72(ii)), et $f : K \rightarrow A$ une K -algèbre. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(a) A est intègre et $f(K)$ est algébriquement fermé dans $\operatorname{Frac}(A)$.

(b) A est une K -algèbre géométriquement intègre.

(iv) Soit K un corps; montrer que si A et B sont deux K -algèbres géométriquement intègres, il en est de même pour la K -algèbre $A \otimes_K B$.

(v) Soient K un corps parfait, et A, B deux K -algèbres réduites. Montrer que $A \otimes_K B$ est réduit.

Problème 6.120. (Semi-continuité de la dimension des fibres) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de type fini, et

$$\phi := \operatorname{Spec}(f) : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A.$$

Pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, soit $Z_{\mathfrak{q}}$ la réunion des composantes irréductibles de $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{q})) = \text{Spec } k(f^{-1}\mathfrak{q}) \otimes_A B$ contenant $\mathfrak{q}$; noter que $k(f^{-1}\mathfrak{q}) \otimes_A B$ est une $k(f^{-1}\mathfrak{q})$ -algèbre de type fini, donc $Z_{\mathfrak{q}}$ est une partie fermée de $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{q}))$ (exercice 6.109(iii)), que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion $Z_{\mathfrak{q}} \rightarrow \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{q}))$. Posons :

$$\dim_{\mathfrak{q}}(B/A) := \dim Z_{\mathfrak{q}} \quad \forall \mathfrak{q} \in \text{Spec } B.$$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ avec $\dim_{\mathfrak{q}}(B/A) = n$, montrer qu'il existe $h \in B \setminus \mathfrak{q}$ et un homomorphisme quasi-fini $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B_h$ de A -algèbres.

(ii) Dédurre de (i) que la partie $U_n(B/A) := \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \dim_{\mathfrak{q}}(B/A) \leq n\}$ est ouverte dans $\text{Spec } B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Voir aussi l'exercice 11.86.)

6.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 6.8, partie (i) : Tout élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est de la forme $z = r + s\sqrt{d}$ avec $r, s \in \mathbb{Q}$, et le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ admet l'automorphisme

$$\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \quad r + s\sqrt{d} \mapsto r - s\sqrt{d}.$$

Si $z \in A_d$, on voit aisément que $\sigma(z) \in A_d$, donc $z + \sigma(z) = 2r$ et $z \cdot \sigma(z) = r^2 - s^2d$ sont des entiers. On a alors $r = a/2$ avec $a \in \mathbb{Z}$; écrivons $s = n/c$ avec $n, c \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(n, c) = 1$. Par suite $4c^2|a^2c^2 - 4n^2d$, d'où $c^2|4d$, et comme d est sans facteurs carrés, il vient $c|4$, et $c \neq 4$, car 4 ne divise pas d ; i.e. $c \in \{1, 2\}$ et $s = b/2$ avec $b \in \mathbb{Z}$. Avec cette notation, on voit que $4|a^2 - b^2d$. Distinguons plusieurs cas :

- Si $2|d$: dans ce cas on déduit aisément que $a, b \in 2\mathbb{Z}$, et donc $A_d = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
- Si $d \equiv 3 \pmod{4}$: dans ce cas aussi on voit que $a, b \in 2\mathbb{Z}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), d'où à nouveau $A_d = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
- Si $d \equiv 1 \pmod{4}$: dans ce cas a et b peuvent être impairs, mais $a - b \in 2\mathbb{Z}$; il s'ensuit aisément que $A_d = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{d})/2]$.

Partie (ii) : On adapte la solution du problème 1.37(ii) : pour $n = 3, 7, 11$ on considère l'application

$$\|\cdot\| : A_{-n} \rightarrow \mathbb{N} \quad z := a + ib\sqrt{n} \mapsto z \cdot \bar{z} := a^2 + nb^2.$$

Soient maintenant $z := a + ib\sqrt{n}$ et $u := c + id\sqrt{n}$ deux éléments non nuls de A_{-n} ; il suffit d'exhiber $q, r \in A_{-n}$ tels que $z = uq + r$ et $\|r\| < \|u\|$.

• Pour cela, supposons d'abord que $d = 0$, donc $u = c$ est dans $A_{-n} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ et comme $2a, 2b \in \mathbb{Z}$, on trouve $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$2a = q_1c + r_1 \quad 2b = q_2c + r_2 \quad -\frac{|c|}{2} \leq |r_1|, |r_2| \leq \frac{|c|}{2}$$

où $|\cdot|$ dénote la valeur absolue usuelle des nombres réels. Avec $q := (q_1 + iq_2\sqrt{n})/2$ et $r := (r_1 + ir_2\sqrt{n})/2$, on a bien $z = uq + r$ et

$$r \cdot \bar{r} = (r_1^2 + nr_2^2)/4 \leq (1 + n) \cdot \|c\|/16 < \|c\|.$$

Si $q_1 \equiv q_2 \pmod{2}$, on a aussi $q, r \in A_{-n}$, comme souhaité. Si $q_1 \not\equiv q_2 \pmod{2}$, on modifie q_1 : on choisit $q'_1 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$|q_1 - q'_1| = 1 \quad \text{et} \quad r'_1 := 2a - q'_1c \in [-|c|, |c|].$$

Avec $q' := (q'_1 + iq_2\sqrt{n})/2$ et $r' := (r'_1 + ir_2\sqrt{n})/2$ on a encore $z = uq' + r'$ et

$$r' \cdot \bar{r}' = (r_1'^2 + nr_2^2)/4 \leq (4 + n) \cdot \|c\|/16 < \|c\|.$$

Comme $q'_1 \equiv q_2 \pmod{2}$, on a $q', r' \in A_{-n}$, et la preuve est achevée dans ce cas.

• En dernier lieu, le cas d'un u général se ramène au cas précédent, comme dans la solution du problème 1.37(ii).

Exercice 6.11 : La partie (i) est évidente.

Partie (ii) : On peut supposer que S soit une partie multiplicative de A , donc tout $x \in S^{-1}B$ est une fraction $x = b/s$ avec $b \in B$, $s \in S$; par hypothèse, on a une identité

dans B de la forme $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in A$. Par suite $x^n + (a_1/s) \cdot x^{n-1} + \dots + a_n/s^n = 0$ dans $S^{-1}B$, d'où l'assertion.

Problème 6.12, partie (i) : Pour tout $h \in A[T_1, \dots, T_n]$ notons $\deg_{T_n}(h)$ le degré de h par rapport à l'indéterminée T_n (i.e. le degré de h , vu comme élément de la B -algèbre de polynômes $B[T_n]$, où $B := A[T_1, \dots, T_{n-1}]$) ; évidemment

$$\phi(a_\nu T^\nu) = a_\nu (T_1 + T_n^N)^{\nu_1} \cdot (T_2 + T_n^{N^2})^{\nu_2} \cdots (T_{n-1} + T_n^{N^{n-1}})^{\nu_{n-1}} \cdot T_n^{\nu_n}$$

d'où $\deg_{T_n} \phi(a_\nu T^\nu) = d(\nu) := \nu_n + N\nu_1 + N^2\nu_2 + \dots + N^{n-1}\nu_{n-1}$, et plus précisément on a $\deg_{T_n}(\phi(a_\nu T^\nu) - a_\nu T_n^{d(\nu)}) < d(\nu)$. Comme $S \subset \{0, \dots, N-1\}^n$, on voit aisément que l'application

$$S \rightarrow \mathbb{N} \quad \nu \mapsto d(\nu)$$

est injective, et si $\mu \in S$ est l'unique exposant tel que $d(\mu) = \max(d(\nu) \mid \nu \in S)$, il vient $\deg_{T_n}(\phi(f) - a_\mu T_n^{d(\mu)}) < d(\mu)$; l'assertion est alors vérifiée avec $b := a_\mu$.

Partie (ii) : Soit $y_1, \dots, y_n$ un système de générateurs de la K -algèbre A , de sorte que l'on a un homomorphisme surjectif $\pi : K[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$ de K -algèbres avec $\pi(T_i) = y_i$ pour $i = 1, \dots, n$; on raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$ l'assertion est triviale, donc soit $n > 0$. Si $\text{Ker}(\pi) = 0$, on peut prendre $\psi := \pi$. Sinon, soit $f \in \text{Ker}(\pi)$; on définit l'automorphisme ϕ de $K[T_1, \dots, T_n]$ comme dans (i), de sorte que $\phi(f) = b \cdot g(T_1, \dots, T_n)$, où $b \in K \setminus \{0\}$, et $g \in K[T_1, \dots, T_n]$ est unitaire par rapport à l'indéterminée T_n . On pose $y'_i := y_i - y_n^{N^i}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et $B := K[y'_1, \dots, y'_{n-1}] \subset A$, de sorte que

$$g(y'_1, \dots, y'_{n-1}, y_n) = 0$$

et noter que $A = B[y_n]$, en particulier, A est une B -algèbre finie. En outre, la K -algèbre B est engendrée par un système de $n-1$ éléments ; par hypothèse de récurrence, on trouve alors $d \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme injectif et fini $\psi' : K[X_1, \dots, X_d] \rightarrow B$ de K -algèbres. Compte tenu du corollaire 6.9, on peut alors prendre pour ψ la composition de ψ' avec l'inclusion $B \rightarrow A$.

Exercice 6.15 : Si B est entier sur A , d'après l'exercice 6.11(ii), la localisation $B_{\mathfrak{m}}$ est entière sur $A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Réciproquement, soit $C \subset B$ la fermeture intégrale de A dans B ; d'après la proposition 6.13, le sous-anneau $C_{\mathfrak{m}}$ est la fermeture intégrale de $A_{\mathfrak{m}}$ dans $B_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Or, si $C_{\mathfrak{m}} = B_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, il vient $C = B$ (proposition 3.55), i.e. B est entier sur A .

Problème 6.16, partie (i) : On raisonne par récurrence sur d . Si $d = 1$, on prend $A' = A$. Soit donc $d > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau A et tout polynôme unitaire de $A[X]$ de degré $d-1$. On pose $A'' := A[T]/(P(T))$, et soit $a_1 \in A''$ la classe de T ; évidemment $P(a_1) = 0$, donc P admet une factorisation $P = (X - a_1) \cdot Q$ pour un polynôme unitaire $Q \in A''[X]$ de degré $d-1$. Noter aussi que A'' est une A -algèbre finie dont le morphisme structurel $A \rightarrow A''$ est injectif. Par hypothèse de récurrence, il existe une A'' -algèbre finie A' dont le morphisme structurel $A'' \rightarrow A'$ est injectif, et tel que Q admet une factorisation

$$Q = \prod_{i=1}^{d-1} (X - a_{i+1}) \quad \text{avec } a_2, \dots, a_d \in A'.$$

Evidemment A' est une A -algèbre finie et P admet la factorisation souhaitée dans $A'[X]$.

Partie (ii) : Avec (i), on trouve une B -algèbre finie B' dont le morphisme structurel $B \rightarrow B'$ est injectif, et telle que P et Q admettent des factorisations $P = \prod_{i=1}^d (X - b_i)$, $Q = \prod_{i=1}^{d'} (X - b'_i)$ avec $b_1, \dots, b_d, b'_1, \dots, b'_{d'} \in B'$. Comme $P \cdot Q \in C[X]$, il s'ensuit que tous les b_i et b'_i sont entiers sur C , donc de même pour les coefficients de P et Q (qui sont les polynômes symétriques élémentaires des suites $b_\bullet, b'_\bullet$). Mais C est intégralement clos dans B (corollaire 6.10), d'où l'assertion.

Partie (iii) : Soit $P \in B[X]$ un polynôme qui est entier sur $A[X]$; cela veut dire que l'on a $Q_1, \dots, Q_n \in A[X]$ tels que $P^n + Q_1 P^{n-1} + \dots + Q_n = 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$ avec $r > \deg P, \deg Q_1, \dots, \deg Q_n$, et on pose $R := P - X^r$; il vient

$$R^n + S_1 R^{n-1} + \dots + S_n = 0 \quad \text{avec } S_i := \binom{n}{i} X^{ri} + \sum_{k=1}^i \binom{n-k}{i-k} X^{r(i-k)} Q_k \quad \forall i \leq n.$$

Soient $T := -R$ et $U := R^{n-1} + S_1 R^{n-2} + \dots + S_{n-1}$; évidemment $TU = S_n = X^{rn} + X^{r(n-1)} Q_1 + \dots + Q_n$, et noter que T et S_n sont unitaires, donc de même pour U . Mais $S_n \in A[X]$, d'où $T, U \in C[X]$, grâce à (ii), et finalement $P \in C[X]$.

Partie (iv) : Soit $K := \text{Frac } A$; si $A[X]$ est intégralement clos et si $t \in K$ est entier sur A , on a $t \in K \cap A[X] = A$, donc A est intégralement clos. Réciproquement, soient A intégralement clos, et $t \in K(X) = \text{Frac } A[X]$; si t est entier sur $A[X]$, il est en particulier entier sur $K[X]$, d'où $t \in K[X]$, car $K[X]$ est factoriel (exemple 6.2(ii)). Mais d'après (iii), $A[X]$ est intégralement clos dans $K[X]$, d'où l'assertion.

Exercice 6.22, partie (i) : Par définition, $A \cap \mathcal{J}(B) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max } B} (A \cap \mathfrak{m})$. Or, si $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$, on sait que $A \cap \mathfrak{m} \in \text{Max } A$ (corollaire 6.18(i)). De plus, les corollaires 6.18(i) et 6.20(i) nous montrent que pour tout $\mathfrak{n} \in \text{Max } A$ il existe $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$ tel que $\mathfrak{n} = A \cap \mathfrak{m}$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (ii) : L'idéal $\text{rad}(\mathfrak{m}B)$ est l'intersection des $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ contenant $\mathfrak{m}B$ (corollaire 1.53); mais pour $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ on a $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \text{Max } B$ (corollaire 6.18(ii)), d'où l'assertion.

Exercice 6.24, partie (i) : Par hypothèse, B (resp. C) est entier sur son sous-anneau $f(A) \simeq A/\text{Ker } f$ (resp. sur $g(B) \simeq B/\text{Ker } g$), et d'après l'exercice 6.11(i), l'anneau $g(B)$ est entier sur $g \circ f(A) \simeq f(A)/(f(A) \cap \text{Ker } g)$. Par le corollaire 6.9, on déduit que C est entier sur $g \circ f(A)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soient $(b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système de générateurs de la A -algèbre B , et C (resp. C') l'image de A dans B (resp. de A' dans $A' \otimes_A B$); alors $(1 \otimes b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système de générateurs de la A' -algèbre $A' \otimes_A B$, et par le corollaire 6.5 il suffit de montrer que $1 \otimes b_\lambda$ est entier sur A' pour tout $\lambda \in \Lambda$. Pour cela, soit $P_\lambda \in C[X]$ un polynôme unitaire tel que $P_\lambda(b_\lambda) = 0$, et notons par $\overline{P}_\lambda$ l'image de P_λ dans $C'[X]$; on voit aisément que $\overline{P}_\lambda(1 \otimes b_\lambda) = 0$, d'où l'assertion.

Exercice 6.25, partie (i) : On prolonge l'action de G à la B^G -algèbre $B[T]$ en posant : $\sigma(\sum_{i=0}^n b_i T^i) := \sum_{i=0}^n \sigma(b_i) \cdot T^i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $b_0, \dots, b_n \in B$ et tout $\sigma \in G$. On voit aisément que l'action ainsi définie de chaque σ est un automorphisme de l'anneau $B[T]$. Or, soit $b \in B$; on pose

$$P := \prod_{\sigma \in G} (T - \sigma(b)) \in B[T]$$

et on remarque que $P(b) = 0$ et $P \in B[T]^G = B^G[T]$. Donc, b est entier sur B^G .

Partie (ii) : Soient $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B^G$ et $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in (\text{Spec } j)^{-1}(\mathfrak{p})$, et supposons par l'absurde que $\mathfrak{q}'$ ne soit pas dans l'orbite de $\mathfrak{q}$ sous l'action de G . Compte tenu du corollaire 6.18(ii), cela veut dire que $\mathfrak{q} \not\subseteq \sigma(\mathfrak{q}')$ pour tout $\sigma \in G$. Par la proposition 1.58 il existe $x \in \mathfrak{q} \setminus \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{q}')$, et on pose $y := \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$; évidemment $y \in B^G \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Mais alors $y \in \mathfrak{q}'$, et donc $\sigma(x) \in \mathfrak{q}'$ pour quelque $\sigma \in G$, contradiction.

Partie (iii) : Pour tout $\sigma \in G$, l'application $\sigma_{\mathfrak{p}} := (B^G)_{\mathfrak{p}} \otimes_{B^G} \sigma$ est un automorphisme de la $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ -algèbre $B_{\mathfrak{p}}$, et le système $(\sigma_{\mathfrak{p}} \mid \sigma \in G)$ définit une action de G sur la $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ -algèbre $B_{\mathfrak{p}}$. Noter que B^G est le noyau de l'application B^G -linéaire

$$\phi : B \rightarrow B^{|G|} \quad b \mapsto (b - \sigma(b) \mid \sigma \in G).$$

De même, $(B_{\mathfrak{p}})^G$ est le noyau de l'application correspondante $\phi_{\mathfrak{p}} : B_{\mathfrak{p}} \rightarrow (B_{\mathfrak{p}})^{|G|}$; il vient $(B_{\mathfrak{p}})^G = \text{Ker}(\phi_{\mathfrak{p}}) = (\text{Ker } \phi)_{\mathfrak{p}} = (B^G)_{\mathfrak{p}}$, donc on notera cet anneau simplement $B_{\mathfrak{p}}^G$. De plus, par construction, la localisation $B \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ est G -équivariante pour ces actions de

G , donc de même pour l'inclusion induite $\text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } B$, et on voit aisément que $G_{\mathfrak{q}} = G_{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}}$; on peut alors remplacer B par $B_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{q}$ par $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$, et supposer du départ que $\mathfrak{p}$ soit un idéal maximal de B^G ; au vu de (i) et du corollaire 6.18(i) il s'ensuit que $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de B , et en particulier la projection $\pi : B \rightarrow k(\mathfrak{q})$ est surjective. Montrons que $k(\mathfrak{q})$ est une extension normale de $k(\mathfrak{p})$: en effet, soit $\bar{x} \in k(\mathfrak{q})$ la classe de $x \in B$; on a vu que x est racine du polynôme $P_x := \prod_{\sigma \in G} (T - \sigma(x)) \in B^G[T]$, donc $\bar{x}$ est racine de l'image $\bar{P}_x \in k(\mathfrak{p})[T]$ de P_x , et ce dernier est scindé dans $k(\mathfrak{q})[T]$, d'où l'assertion.

Il reste à voir que $(*)$ est surjectif. Pour cela, soit $k(\mathfrak{q})_s$ la fermeture séparable de $k(\mathfrak{p})$ dans $k(\mathfrak{q})$. On vient de voir que tout élément de $k(\mathfrak{q})$ est racine d'un polynôme non nul de degré $|G|$ à coefficients dans $k(\mathfrak{p})$; par le problème 1.83(iii), le degré de toute sous-extension finie de $k(\mathfrak{q})_s$ est alors borné par $|G|$, i.e. $k(\mathfrak{q})_s$ est une extension finie de $k(\mathfrak{p})$ (de degré $\leq |G|$). Soit alors $x \in B$ dont la classe $\bar{x} \in k(\mathfrak{q})$ est un élément primitif de l'extension finie séparable $k(\mathfrak{q})_s$ de $k(\mathfrak{p})$, i.e. $k(\mathfrak{q})_s = k(\mathfrak{p})[\bar{x}]$; par le lemme chinois il existe $y \in B$ dont la classe $\bar{y} \in k(\mathfrak{q})$ coïncide avec $\bar{x}$, et tel que $y \in \sigma(\mathfrak{q})$ pour tout $\sigma \in G \setminus G_{\mathfrak{q}}$ (noter que $\sigma(\mathfrak{q})$ est un idéal maximal de B pour tout $\sigma \in G$). Or, soit τ un $k(\mathfrak{p})$ -automorphisme de $k(\mathfrak{q})$, et définissons le polynôme $\bar{P}_y$ comme ci-dessus; comme $\bar{x}$ est racine de $\bar{P}_y$, il en est de même pour $\tau(\bar{x})$, i.e. $\tau(\bar{x}) = \pi(\sigma(y))$ pour quelque $\sigma \in G$. Mais par construction on a $\pi(\sigma(y)) = 0$ pour tout $\sigma \in G \setminus G_{\mathfrak{q}}$, alors que $\tau(\bar{x}) \neq 0$; donc $\tau(\bar{x}) = \bar{\sigma}(y) = \bar{\sigma}(\bar{x})$ pour quelque $\sigma \in G_{\mathfrak{q}}$. Comme $\bar{x}$ engendre la $k(\mathfrak{p})$ -algèbre $k(\mathfrak{q})_s$, on conclut que les restrictions de τ et $\bar{\sigma}$ coïncident sur $k(\mathfrak{q})_s$; en dernier lieu, comme $k(\mathfrak{q})$ est une extension purement inséparable de $k(\mathfrak{q})_s$, on voit que $\tau = \bar{\sigma}$, comme souhaité.

Exercice 6.27, partie (i) : Soit d'abord E une extension finie de K , et on pose $L := E^G$ et $C := B^G$; comme $L = \text{Frac } C$ est une extension purement inséparable de K , le lemme 6.26 nous ramène à montrer la même assertion pour l'inclusion $C \rightarrow B$, et pour celle-ci il suffit d'invoquer l'exercice 6.25(ii). Dans le cas général, soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-extensions finies et normales de K contenues dans E , et pour tout $F \in \mathcal{F}$ soit G_F le groupe des K -automorphismes de F , et $j_F : A \rightarrow B_F := B \cap F$ l'inclusion. On a un isomorphisme naturel de groupes :

$$G \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} G_F$$

ainsi qu'une bijection naturelle (voir le problème 2.51(ii)) :

$$(\text{Spec } j)^{-1}(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} (\text{Spec } j_F)^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Soit $\mathfrak{q} \in (\text{Spec } j)^{-1}(\mathfrak{p})$ (corollaire 6.20(i)); par le cas précédent on a une surjection

$$\omega_F : G_F \rightarrow (\text{Spec } j_F)^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \sigma \mapsto \sigma(\mathfrak{q} \cap B_F) \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

On voit aisément que $(\omega_F \mid F \in \mathcal{F})$ est un morphisme de systèmes indexés

$$(G_F \mid F \in \mathcal{F}) \rightarrow ((\text{Spec } j_F)^{-1}(\mathfrak{p}) \mid F \in \mathcal{F}).$$

L'assertion suit maintenant de la remarque 2.33(ii).

Partie (ii) : On considère d'abord le cas où $[E : K] < +\infty$, et on définit L, C comme ci-dessus; soit de plus $\mathfrak{p}_C := C \cap \mathfrak{q}$. Par l'exercice 6.25(iii), $k(\mathfrak{q})$ est une extension normale de $k(\mathfrak{p}_C)$, et l'homomorphisme de groupe $G_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p}_C))$ est surjectif; d'autre part, comme L est une extension purement inséparable de K , il est clair que $k(\mathfrak{p}_C)$ est une extension purement inséparable de $k(\mathfrak{p})$, et $\text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p})) = \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p}_C))$, donc $k(\mathfrak{q})$ est une extension normale de $k(\mathfrak{p})$, et $(*)$ est bien surjectif. Dans le cas général, définissons la famille $\mathcal{F}$ comme ci-dessus, et posons

$$\mathfrak{q}_F := \mathfrak{q} \cap F \quad \text{et} \quad G_{F, \mathfrak{q}} := \{\sigma \in G_F \mid \sigma^{-1}(\mathfrak{q}_F) = \mathfrak{q}_F\} \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

On des isomorphismes de groupes naturels :

$$G_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} G_{F, \mathfrak{q}} \quad \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} \text{Gal}(k(\mathfrak{q}_F)/k(\mathfrak{p}))$$

et un homomorphisme surjectif de groupes $G_{F, \mathfrak{q}} \rightarrow \text{Gal}(k(\mathfrak{q}_F)/k(\mathfrak{p}))$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour conclure, il suffit alors d'invoquer à nouveau la remarque 2.33(ii).

Exercice 6.33, partie (i) : On peut supposer que $B \otimes_A M = 0$; par le théorème 6.32 on sait déjà que M est plat. Par le théorème de Govorov-Lazard 3.86, M est alors la colimite d'un système filtrant $(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules libres de rang fini, et pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, notons par $\phi_{\lambda\mu} : L_\lambda \rightarrow L_\mu$ l'application A -linéaire de transition. Comme le foncteur $B \otimes_A -$ commute avec toute colimite, il s'ensuit que la colimite du système induite $(B \otimes_A L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est 0. Par inspection de la construction des colimites filtrantes (exercice 2.31(iii)), on voit alors que pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$ tel que $B \otimes_A \phi_{\lambda\mu} : B \otimes_A L_\lambda \rightarrow B \otimes_A L_\mu$ soit l'application nulle; d'autre part, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_\lambda & \xrightarrow{\phi_{\lambda\mu}} & L_\mu \\ f \otimes_A L_\lambda \downarrow & & \downarrow f \otimes_A L_\mu \\ B \otimes_A L_\lambda & \xrightarrow{B \otimes_A \phi_{\lambda\mu}} & B \otimes_A L_\mu \end{array}$$

dont les flèches verticales sont injectives, car f est injectif. On conclut que $\phi_{\lambda\mu} = 0$, et compte tenu de l'exercice 2.31(iii), cela achève de montrer que $M = 0$.

Partie (ii) : Soit $B \otimes_A M$ de type fini; au vu de (i), on peut raisonner comme dans la solution du problème 3.83(ii.b) pour montrer que M est de type fini. Ensuite, si $B \otimes_A M$ est projectif de type fini, les cas précédents nous disent déjà que M est plat de type fini. Soit alors L un A -module libre de type fini avec une surjection A -linéaire $\phi : L \rightarrow M$; d'après le problème 4.24(ii.a), la suite $0 \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ est universellement exacte. En particulier, $B \otimes_A \text{Ker } \phi$ est le noyau de $B \otimes_A \phi$. Mais $B \otimes_A M$ est un B -module de présentation finie (lemme 4.99(ii)), donc $B \otimes_A \text{Ker } \phi$ est un B -module de type fini (exercice 2.110(iv)). Par ce qui précède, $\text{Ker } \phi$ est alors de type fini; ainsi M est de présentation finie, donc projectif (corollaire 4.100(ii)). L'assertion réciproque est un cas particulier de l'exercice 4.102(ii).

Exercice 6.35 : Soit $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de B , et posons $\phi := \text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$; puisque chaque $\mathfrak{q}_i$ est isolé dans la fibre $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{q}_i))$, la chaîne induite $\phi(\mathfrak{q}_0) \subset \cdots \subset \phi(\mathfrak{q}_n)$ est encore strictement croissante, d'où l'assertion.

Exercice 6.41 : Par hypothèse, $\mathfrak{p}$ est isolé dans la fibre $F := (\text{Spec } f)^{-1}(f^{-1}\mathfrak{p})$, donc $(\text{Spec } g)^{-1}(\mathfrak{p})$ est ouverte et fermée dans $F' := (\text{Spec } g)^{-1}(F) = (\text{Spec } g \circ f)^{-1}(f^{-1}\mathfrak{p})$. Mais $\mathfrak{q}$ est isolé dans $(\text{Spec } g)^{-1}(\mathfrak{p})$, donc aussi dans F' .

Problème 6.42 : Soit $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q})$; l'assertion pour f est ramenée aussitôt à l'assertion correspondante pour l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : k(\mathfrak{p}) \rightarrow B(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ et le point $\mathfrak{q}B(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } B(\mathfrak{p})$. On peut ainsi supposer du départ que A soit un corps, et dans ce cas on doit montrer que $\mathfrak{q}$ est isolé dans $\text{Spec } B$ si et seulement si $\mathfrak{q}B_h$ est isolé dans $\text{Spec } B_h$. Or, si $\mathfrak{q}$ isolé dans $\text{Spec } B$, évidemment $\mathfrak{q}B_h$ est isolé dans $\text{Spec } B_h$, car ce dernier s'identifie à une partie ouverte de $\text{Spec } B$. Réciproquement, si $\mathfrak{q}B_h$ est isolé dans $\text{Spec } B_h$, la localisation $B_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre finie (proposition 6.36(ii)), donc de même pour $k(\mathfrak{q}) = B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$. Les injections $A \rightarrow B/\mathfrak{q} \rightarrow k(\mathfrak{q})$ montrent alors que $B/\mathfrak{q}$ est à son tour une A -algèbre finie et intègre, donc elle est un corps (proposition 6.17); i.e. $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de B , et donc $\{\mathfrak{q}\}$ est une partie fermée de $\text{Spec } B$. Mais $\{\mathfrak{q}B_h\}$ est aussi

une partie ouverte de $\text{Spec } B_h$, donc $\{\mathfrak{q}\}$ est une partie ouverte de $\text{Spec } B$, d'où l'assertion.

Exercice 6.43 : Soient $K := \text{Frac } A$, et $\pi : A[T] \rightarrow B$ l'homomorphisme surjectif de A -algèbres tel que $\pi(T) = x$; évidemment $bT - a \in \text{Ker } \pi$. Soit $P(T) \in \text{Ker } \pi$; cela veut dire que $P(x) = 0$, et donc il existe un polynôme $Q(T) \in K[T]$ tel que $Q(T) \cdot (bT - a) = P(T)$. Mais $bT - a$ est un polynôme primitif, car $\text{pgcd}(a, b) = 1$ (voir le problème 1.39); en raisonnant comme dans la solution du problème 1.39, on déduit que $Q(T) \in A[T]$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Cela montre que $bT - a$ engendre l'idéal $\text{Ker } \pi$, i.e. π induit un isomorphisme de A -algèbres

$$(*) \quad A[T]/(bT - a) \xrightarrow{\sim} B.$$

Soit maintenant $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, et on pose $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$; si $b \notin \mathfrak{q}$, la classe $\bar{b}$ de b dans $k(\mathfrak{p})$ est un élément inversible, et compte tenu de $(*)$ on a un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres : $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})[T]/(T - \bar{a}/\bar{b}) \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})$, donc $\mathfrak{q}$ est l'unique élément de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$. Supposons ensuite que $b \in \mathfrak{q}$; si $a \notin \mathfrak{q}$, la classe $\bar{a}$ de a dans $k(\mathfrak{p})$ est inversible, d'où : $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})[T]/(\bar{a}) = 0$, et $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$, contradiction. En dernier lieu, si $a, b \in \mathfrak{q}$, on déduit un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres : $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})[T]$, et on sait qu'aucun point de $\text{Spec } k(\mathfrak{p})[T]$ n'est isolé.

Exercice 6.58 : La preuve du corollaire 6.57 montre que pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ il existe une A -sous-algèbre finie $B' \subset B$ et $s \in B' \setminus \mathfrak{q}$ tel que $B'_s = B_s$. Par compacité de $\text{Spec } B$, on trouve alors une partie finie $\{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n\} \subset \text{Spec } B$ et des A -sous-algèbres finies correspondantes $B'_1, \dots, B'_n \subset B$ avec éléments $s_i \in B'_i \setminus \mathfrak{q}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, tels que $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_n) = \text{Spec } B$. Soit $C \subset B$ la A -sous-algèbre engendrée par $B'_1 \cup \dots \cup B'_n$; on voit aisément que C est une A -algèbre finie; de plus, les inclusions $B'_i \subset C \subset B$ induisent des homomorphismes injectifs d'anneaux $B'_{s_i} \rightarrow C_{s_i} \rightarrow B_{s_i}$ pour $i = 1, \dots, n$, dont la composition est un isomorphisme. Cela veut dire que $C_{s_i} = B_{s_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. L'assertion suit aussitôt.

Problème 6.59, partie (i) : La condition est trivialement nécessaire. Réciproquement, si la condition est vérifiée, soient $\underline{Y}' := (Y', \mathcal{O}_{Y'})$ un $\underline{Y}$ -schéma arbitraire, $\underline{X}' := (X', \mathcal{O}_{X'}) := \underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{X}$, et $\underline{f}' := (f', f^b) := \underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{f} : \underline{X}' \rightarrow \underline{Y}'$; fixons un recouvrement $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de Y' formé de parties ouvertes affines, et soient

$$\underline{U}_\lambda := U_\lambda \times_{Y'} \underline{Y}' \quad V_\lambda := f'^{-1}U_\lambda \quad \underline{f}'_\lambda := \underline{U}_\lambda \times_{\underline{Y}} \underline{f}' \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Par hypothèse, chaque $\underline{f}'_\lambda$ est fermé, et d'autre part $\underline{f}'_\lambda$ s'identifie à la restriction de $\underline{f}'$ au sous-schéma ouvert $V_\lambda \times_{X'} \underline{X}'$ (observation 5.77); en vertu de l'exercice 1.21(iii), $\underline{f}'$ est alors fermé, comme souhaité.

Partie (ii) : Il est clair que si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont fermés, il en est de même pour $\underline{g} \circ \underline{f}$. Ensuite, soient $\underline{f}$ et $\underline{g}$ universellement fermés, et $\underline{Z}' \rightarrow \underline{Z}$ un troisième morphisme de schémas; posons $\underline{Y}' := \underline{Z}' \times_{\underline{Z}} \underline{Y}$. D'un côté, $(\underline{Z}' \times_{\underline{Z}} \underline{g}) \circ (\underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{f})$ est fermé, et de l'autre côté $\underline{Y}' \times_{\underline{Y}} \underline{f}$ s'identifie naturellement avec $\underline{Z}' \times_{\underline{Z}} \underline{f}$, d'après la remarque 2.24(i); mais $(\underline{Z}' \times_{\underline{Z}} \underline{g}) \circ (\underline{Z}' \times_{\underline{Z}} \underline{f}) = \underline{Z}' \times_{\underline{Z}} (\underline{g} \circ \underline{f})$ (remarque 2.24(ii)), d'où l'assertion.

Partie (iii) : Si B est une A -algèbre entière, $C \otimes_A g : C \rightarrow C \otimes_A B$ est un homomorphisme entier, pour toute A -algèbre C (exercice 6.24(ii)), donc $\text{Spec}(C \otimes_A g)$ est fermé (remarque 6.23(i)); au vu de (i), $\text{Spec } g$ est alors universellement fermé.

Réciproquement, soit $\text{Spec } g$ universellement fermée, posons $\bar{A} := g(A)$, et notons par $p : A \rightarrow \bar{A}$ la surjection naturelle et $h : \bar{A} \rightarrow B$ l'inclusion; pour toute A -algèbre C on a $\text{Spec}(C \otimes_A g) = \text{Spec}(C \otimes_A p) \circ \text{Spec}(C \otimes_A h)$, et noter que $C \otimes_A p$ est surjective, donc $\text{Spec}(C \otimes_A p)$ est une immersion fermée. Par suite, $\text{Spec}(C \otimes_A h)$ est fermée pour tout tel C , et évidemment il suffit de montrer que B est une $\bar{A}$ -algèbre entière; quitte à remplacer g par h , on peut alors supposer que g soit injective. Or, soit $b \in B$, et posons

$C := A[b^{-1}] \subset B[b^{-1}]$ et $I := Cb^{-1}$; l'inclusion $j : C \rightarrow B[b^{-1}]$ est la composition de $C \otimes_A g : C \rightarrow C \otimes_A B$ avec la surjection naturelle $q : C \otimes_A B \rightarrow B[b^{-1}]$, et $\text{Spec}(q)$ est fermée, donc de même pour $\text{Spec}(j) = \text{Spec}(C \otimes_A g) \circ \text{Spec}(q)$. D'autre part, l'image de $\text{Spec}(j)$ est dense dans $\text{Spec } B[b^{-1}]$ (exercice 3.37(i)), donc $\text{Spec}(j)$ est surjective, et alors il en est de même pour sa restriction $V(IB[b^{-1}]) \rightarrow V(I)$. Mais évidemment $V(IB[b^{-1}]) = \emptyset$, donc $V(I) = \emptyset$, i.e. $I = C$. Cela revient à dire qu'il existe un polynôme $P := a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in A[X]$ tel que $b^{-1}P(b^{-1}) = 1$ dans $B[b^{-1}]$, i.e. $b^{n+1} = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n$ dans $B[b^{-1}]$, et finalement $b^{n+1+m} = a_0b^m + \dots + a_nb^{n+m}$ dans B , pour quelque $m \in \mathbb{N}$. Cela achève de vérifier que b est entier sur A , CQFD

Problème 6.62, partie (i) : Soit $I \in \mathcal{F}$ un élément maximal; évidemment $I \neq A$, donc il suffit de montrer que si $a, b \in A \setminus I$, alors $ab \notin I$. Supposons par l'absurde que $ab \in I$; on pose $J := I + Aa$ et $J' := \{x \in A \mid ax \in I\}$. On voit aisément que J' est un idéal de A contenant I , et comme $b \in J' \setminus I$, il s'ensuit que $J' \notin \mathcal{F}$, par maximalité de I ; de même $a \in J \setminus I$, d'où $J \notin \mathcal{F}$. Soit alors $b_\bullet := (b_1, \dots, b_n)$ (resp. $b'_\bullet := (b'_1, \dots, b'_m)$) un système fini de générateurs de J (resp. de J'); pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $c_i \in I$ et $d_i \in A$ tels que $b_i = c_i + ad_i$. Or, soit $x \in I$; il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Posons $y := \sum_{i=1}^n x_i d_i$; il vient $x = ay + \sum_{i=1}^n x_i c_i$. En particulier $ay \in I$, i.e. $y \in J'$, donc il existe $y_1, \dots, y_m \in A$ tels que $y = \sum_{j=1}^m y_j b'_j$, et finalement $x = \sum_{i=1}^n x_i c_i + \sum_{j=1}^m y_j ab'_j$. Cela montre que le système fini $c_1, \dots, c_n, ab'_1, \dots, ab'_m$ engendre I , contradiction.

Partie (ii) : Compte tenu de (i), il suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ est non vide, il admet des éléments maximaux. Cependant, soit $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$ avec $\Lambda \neq \emptyset$, et posons $I := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$; on voit aisément que $I \in \mathcal{F}$. Pour conclure, il suffit alors d'invoquer le lemme de Zorn.

Exercice 6.63, partie (i) : Pour tout entier $n > 0$, soit $I_n \subset \mathcal{C}([0, 1])$ l'idéal engendré par la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = t^{1/n}$ pour tout $t \in [0, 1]$; évidemment $I_n \subset I_{n+1}$ pour tout $n > 0$. Supposons que $I_n = I_{n+1}$ pour quelque $n > 0$; alors il existe une fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f_{n+1} = g \cdot f_n$, et en particulier $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f_{n+1}(t)/f_n(t)$. Mais cette limite est $+\infty$, contradiction.

Partie (ii) : On considère d'abord l'anneau $\mathcal{H}(+\infty)$ des fonctions holomorphes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Pour cela, remarquons que la fonction holomorphe entière $z \mapsto \sin(\pi z)$ a un zéro simple en tout entier; par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $z \mapsto \sin(\pi z) \cdot \prod_{k=0}^n (z - k)^{-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f_n(k) \neq 0$ pour $k = 0, \dots, n$ et $f_n(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$, et évidemment $f_n = (z - n - 1) \cdot f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $I_n \subset \mathcal{H}(+\infty)$ l'idéal engendré par f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; il vient $I_n \subset I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $I_n = I_{n+1}$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction holomorphe entière g avec $f_{n+1} = g \cdot f_n$; mais $f_{n+1}/f_n = (z - n - 1)^{-1}$ sur la partie ouverte $\mathbb{C} \setminus \{n+1\}$, contradiction.

Ensuite, pour tout $\rho \in]0, +\infty[$ on a un isomorphisme d'anneaux évident :

$$\mathcal{H}(\rho) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(1) \quad f(z) \mapsto f(z\rho)$$

donc il suffit de montrer que $\mathcal{H}(1)$ n'est pas noethérien. Pour cela, on remarque que l'application $z \mapsto h(z) := \sin(\pi/(z-1))$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(1)$ et a un zéro simple en tout point de l'ensemble $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$; par suite l'application $z \mapsto h \cdot \prod_{k=0}^n (z - \frac{n}{n+1})^{-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe f_n sur $\mathbb{D}(1)$, et $f_n = (z - \frac{n}{n+1}) \cdot f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors raisonner comme dans le cas précédent pour déduire une suite dénombrable strictement croissante d'idéaux de $\mathcal{H}(1)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (iii) : En raisonnant comme dans la partie (ii), on est ramené aisément au cas où $\rho = 1$, et on pose $\overline{\mathbb{D}}(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Pour tout $f \in \overline{\mathcal{H}}(1) \setminus \{0\}$, l'ensemble

$\mathcal{Z}(f) := \{z \in \overline{\mathbb{D}}(1) \mid f(z) = 0\}$ est fini, car il est une partie discrète de l'espace topologique compact $\overline{\mathbb{D}}(1)$. Pour tout $w \in \mathcal{Z}(f)$, soit $n(w) \in \mathbb{N}$ l'ordre de zéro de f en w ; par suite l'application $z \mapsto f(z) \cdot \prod_{w \in \mathcal{Z}(f)} (z - w)^{-n(w)}$ se prolonge en une fonction holomorphe $g : \overline{\mathbb{D}}(\rho') \rightarrow \mathbb{C}$ pour quelque $\rho' > 1$ avec $\mathcal{Z}(g) = \emptyset$. Quitte à remplacer ρ' par un nombre réel dans $]1, \rho'[,$ on peut même supposer que g soit inversible dans $\mathcal{H}(\rho')$, et donc aussi dans $\overline{\mathcal{H}}(1)$. Cela achève de montrer que tout élément de $\overline{\mathcal{H}}(1)$ est le produit d'un polynôme de $\mathbb{C}[z]$ et d'un élément inversible de $\overline{\mathcal{H}}(1)$. Or soit I un idéal de $\overline{\mathcal{H}}(1)$; l'idéal $J := I \cap \mathbb{C}[z]$ de $\mathbb{C}[z]$ est principal, et par ce qui précède on a $I = J \cdot \overline{\mathcal{H}}(1)$ d'où l'assertion.

Exercice 6.67, partie (i) : Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma localement noethérien, $U \subset X$ une partie ouverte, et $x \in U$; par hypothèse, x admet un voisinage ouvert affine $V \subset X$ tel que $A := \mathcal{O}_X(V)$ soit un anneau noethérien, alors $\underline{V} := V \times_X \underline{X}$ s'identifie avec $\text{Spec } A$, et évidemment il suffit de montrer que $(U \cap V) \times_V \underline{V}$ est un schéma localement noethérien. Ainsi, quitte à remplacer $\underline{X}$ et U par $\underline{V}$ et $U \cap V$, on peut supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau noethérien A . Dans ce cas, pour tout $x \in U$ il existe $f \in A$ tel que $x \in U' := D(f) \subset U$, et $\mathcal{O}_X(U') = A_f$ est noethérien (remarque 6.61(iv)), d'où l'assertion.

Ensuite, soient $\underline{Z} := (Z, \mathcal{O}_Z)$ un sous-schéma fermé de $\underline{X}$, et $U \subset X$ une partie ouverte affine telle que $\mathcal{O}_X(U)$ soit noethérien; alors $U \times_Z \underline{Z}$ est un sous-schéma fermé de $U \times_X \underline{X}$ (observation 5.84), et il suffit de montrer qu'il est noethérien. On peut ainsi supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau noethérien A , d'où $\underline{Z} = \text{Spec } A/I$ pour un idéal $I \subset A$, donc l'assertion découle de la remarque 6.61(iv).

Partie (ii) : Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ localement noethérien, $f : \underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \underline{X}$ localement de type fini, $y \in Y$, et $x := f(y)$. Par hypothèse, x admet un voisinage ouvert affine $U \subset X$ tel que $\mathcal{O}_X(U)$ soit noethérien, et il suffit de vérifier que $\underline{Y}_U := f^{-1}U \times_Y \underline{Y}$ est localement noethérien; en outre la restriction $\underline{Y}_U \rightarrow \underline{U} := U \times_X \underline{X}$ de f est encore localement de type fini (lemme 5.81(i)). Quitte à remplacer $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ par $\underline{U}$ et $\underline{Y}_U$, on peut alors supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau A noethérien. Soit ensuite $V \subset Y$ un voisinage ouvert affine de y ; évidemment le morphisme d'inclusion $j : \underline{V} := V \times_Y \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$ est localement de type fini, donc de même pour la composition $g := f \circ j : \underline{V} \rightarrow \underline{X}$ (exercice 5.82(i)). Quitte à remplacer $\underline{Y}$ par $\underline{V}$, on peut alors supposer que $\underline{Y} = \text{Spec } B$ pour une A -algèbre B , donc g est de type fini (remarque 4.59(iii)), par suite B est une A -algèbre de type fini (exercice 5.80(i)), et l'assertion découle alors du théorème 6.65.

Partie (iii) : Evidemment, si A est noethérien, le schéma $(Y, \mathcal{O}_Y) := \text{Spec } A$ est noethérien. Réciproquement, soit Y noethérien; ainsi, tout $y \in Y$ admet un voisinage ouvert affine $U \subset Y$ tel que $A_U := \mathcal{O}_Y(U)$ soit noethérien. Prenons $f \in A$ tel que $y \in D(f) \subset U$; d'après le lemme 5.31(ii) et la remarque 5.49(i), le morphisme structural $A \rightarrow A_U$ induit un isomorphisme $A_f \xrightarrow{\sim} (A_U)_f$, et $(A_U)_f$ est noethérien (remarque 6.61(iv)). Puisque Y est compact, on trouve alors une partie finie $S \subset A$ avec $Y = \bigcup_{s \in S} D(s)$ et telle que la localisation A_s soit noethérienne, pour tout $s \in S$. Or, soit $I \subset A$ un idéal; par hypothèse, pour tout $s \in S$ l'idéal $I_s \subset A_s$ est de type fini, donc il existe une partie finie $\Sigma_s \subset I$ dont l'image dans A_s engendre I_s . Soit $I' \subset I$ l'idéal de A engendré par $\bigcup_{s \in S} \Sigma_s$; au vu de la remarque 6.61(i), il suffit de montrer que $I = I'$. Mais, par hypothèse, pour tout $\mathfrak{p} \in Y$ il existe $s \in S$ tel que $\mathfrak{p} \in D(s)$, et donc $A_{\mathfrak{p}}$ est une localisation de A_s ; par suite $I_{\mathfrak{p}}$ est engendré par l'image de Σ_s dans $A_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $I'_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in Y$, et on conclut avec la proposition 3.55. Ensuite, si $\mathcal{O}_Y(U)$ est noethérien pour toute partie affine $U \subset Y$, alors en particulier $A = \mathcal{O}_Y(Y)$ est noethérien. Pour vérifier la réciproque, par ce qui précède il suffit de montrer que si A est noethérien, alors $(U, \mathcal{O}_{Y|U})$ est localement noethérien, pour toute partie ouverte affine $U \subset Y$; mais cela découle de (i).

Exercice 6.70, partie (i.a) : Soit M un A -module de type fini, disons engendré par n éléments, et $\phi : A^n \rightarrow M$ une application A -linéaire surjective. Par la proposition 6.64,

le noyau de ϕ est un A -module de type fini, donc M est de présentation finie. De même, si B est une A -algèbre de type fini, soit $\psi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ un homomorphisme surjectif de A -algèbres; par le théorème 6.65, le noyau de ψ est un idéal de type fini, donc B est de présentation finie.

Partie (i.b) : Compte tenu de (i.a), il suffit d'invoquer le corollaire 4.100(ii).

Partie (i.c) : Soient P le produit d'une petite famille $(P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules plats, et $\pi_\lambda : P \rightarrow P_\lambda$ la projection canonique, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit aussi $I \subset A$ un idéal; grâce à (i) on sait que I est un A -module de présentation finie; pour tout A -module M , notons par $\phi_{I,M} : M \otimes_A I \rightarrow M$ l'application telle que $m \otimes a \mapsto am$. D'après l'exercice 3.17(ii), on a un isomorphisme de A -modules

$$\omega : P \otimes_A I \xrightarrow{\sim} Q := \prod_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda \otimes_A I)$$

dont la composition avec la projection canonique $Q \rightarrow P_\lambda \otimes_A I$ coïncide avec $\pi_\lambda \otimes_A I$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il s'ensuit aisément que $\phi_{I,P} \circ \omega^{-1} : Q \rightarrow P$ coïncide avec $\prod_{\lambda \in \Lambda} \phi_{I,P_\lambda}$. Comme P_λ est plat, ϕ_{I,P_λ} est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc de même pour $\phi_{I,P}$, et l'assertion suit alors de la proposition 3.78.

Partie (ii) : D'après la remarque 4.2(iv), pour tout anneau A , le produit d'une petite famille de A -modules injectifs est injectifs, donc la somme directe J d'une famille arbitraire de A -modules injectifs $(J_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est la limite directe du système filtrant des A -modules injectifs $(J_{\Lambda'} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} J_\lambda \mid \Lambda' \subset \Lambda)$, indexé par les parties finies Λ' de Λ ; pour chaque telle partie Λ' , notons par $j_{\Lambda'} : J_{\Lambda'} \rightarrow J$ l'inclusion naturelle. Si maintenant A est noethérien, compte tenu de (i) et de l'exercice 3.17(ii), pour tout idéal $I \subset A$ on a un isomorphisme de A -modules

$$Q' := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Lambda' \subset \Lambda}} \text{Hom}_A(I, J_{\Lambda'}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(I, J)$$

dont la composition avec l'application naturelle $\text{Hom}_A(I, J_{\Lambda'}) \rightarrow Q'$ coïncide avec l'application $\text{Hom}_A(I, j_{\Lambda'})$; i.e. pour toute application A -linéaire $\psi : I \rightarrow J$ il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ et une application A -linéaire $\psi' : I \rightarrow J_{\Lambda'}$ telle que $\psi = j_{\Lambda'} \circ \psi'$. Par suite ψ' se prolonge en une application $\psi'' : A \rightarrow J_{\Lambda'}$ et $j_{\Lambda'} \circ \psi'' : A \rightarrow I$ prolonge ψ . Par le critère de Baer (exemple 4.21(i)), cela montre que J est injectif.

Réciproquement, si la condition est vérifiée, soit $I_0 \subset I_1 \subset \dots$ une suite croissante d'idéaux de A , et $I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit un A -module injectif J_n et un homomorphisme $\phi_n : I \rightarrow J_n$ de A -modules avec $\text{Ker } \phi_n = I_n$ (voir le §4.1.4). Par hypothèse, $J := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} J_n$ est un A -module injectif, et l'association $a \mapsto (\phi_n(a) \mid n \in \mathbb{N})$ pour tout $a \in I$ définit un homomorphisme de A -modules $\phi : I \rightarrow J$. Soit $\psi : A \rightarrow J$ un prolongement A -linéaire de ϕ ; évidemment il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(1) \in \bigoplus_{n=0}^k J_n$, et il s'ensuit aisément que $\phi_n(I) = 0$ pour tout $n > k$, i.e. $I = I_k$. Cela achève de montrer que A est noethérien.

Problème 6.73, partie (i.a) : Par hypothèse, il existe des sous-modules de type fini $N' \subset M'$, $N'' \subset M''$ tels que $M'/N', M''/N'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; prenons un sous-module de type fini $N \subset M$ dont l'image dans M'' coïncide avec N'' . Il vient une suite exacte $0 \rightarrow (N + N') \cap M' \rightarrow N + N' \rightarrow N'' \rightarrow 0$ de A -modules, et noter que $(N + N') \cap M' = N' + (N \cap M')$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Par le lemme du serpent (proposition 2.106), on déduit la suite exacte :

$$0 \rightarrow M'/(N' + (N \cap M')) \rightarrow M/(N + N') \rightarrow M''/N'' \rightarrow 0.$$

Mais $M'/(N' + (N \cap M'))$ est un quotient de M'/N' , donc il est un objet de $\mathcal{C}$, et alors il en est de même pour $M/(N + N')$, d'où l'assertion.

Partie (i.b) : Par hypothèse, il existe un sous-module de type fini $N \subset M$ tel que $M/N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; soit $N'' \subset M''$ l'image de N . Evidemment M''/N'' est un quotient de M/N , donc il est un objet de $\mathcal{C}$, d'où l'assertion.

Partie (i.c) : Si M est $\mathcal{C}$ -noethérien, évidemment il en est de même pour M' ; ensuite, si $N'' \subset M''$ est un sous-module, par hypothèse l'image réciproque N de N'' dans M est de type $\mathcal{C}$ -fini, donc de même pour N'' , d'après (i.b), et cela montre que M'' est $\mathcal{C}$ -noethérien. Réciproquement, soient M' et M'' $\mathcal{C}$ -noethériens, $N \subset M$ un sous-module, et $N'' \subset M''$ l'image de N ; il vient une suite exacte de sous-modules $0 \rightarrow M' \cap N \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, et par hypothèse $M' \cap N$ et N'' sont de type $\mathcal{C}$ -fini, donc de même pour N , d'après (i.a). Cela montre que M est $\mathcal{C}$ -noethérien.

Partie (ii) : Soient M un A -module de type $\mathcal{C}$ -fini, et $M' \subset M$ un A -module de type fini tel que $M/M' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; on voit aisément que M/M' est $\mathcal{C}$ -noethérien, et au vu de (i.c) on est ainsi ramené à vérifier qu'il en est de même pour M' . Mais il existe $n \in \mathbb{N}$ et une surjection A -linéaire $A^n \rightarrow M'$; toujours avec (i.c), il suffit alors de montrer que A^n est $\mathcal{C}$ -noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$, et cela se démontre aisément par récurrence sur n , encore avec (i.c).

Partie (iii.a) : Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-modules de M qui ne sont pas de type $\mathcal{C}$ -fini, muni de l'ordre partiel induit par l'inclusion de sous-modules. Montrons d'abord que si $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie de $\mathcal{F}$ non vide et totalement ordonnée, alors $N := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \in \mathcal{F}$. En effet, soit par l'absurd $N' \subset N$ un sous-module de type fini avec $N/N' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; alors il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $N' \subset N_\lambda$, donc N_λ/N' est un sous-module de N/N' , et par suite $N_\lambda/N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, contradiction. Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F}$ admet un élément maximal $N \subset M$, par le lemme de Zorn (lemme 1.32).

Montrons ensuite que $\mathfrak{p} := \text{Ann}_A(M/N)$ est un idéal premier de A , et que $\mathfrak{p} = \text{Ann}_A(x)$ pour tout $x \in (M/N) \setminus \{0\}$; noter que $M/N \neq 0$, car M est de type $\mathcal{C}$ -fini, donc $\mathfrak{p} \neq A$, et l'assertion revient alors à dire que tout $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ est M/N -régulier. Or, soit $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, et posons $N' := \{x \in M \mid ax \in N\}$; on a $N \subset N'$, et on doit vérifier que $N' = N$. Mais si $N \subsetneq N'$, alors N' est de type $\mathcal{C}$ -fini, par maximalité de N ; par suite $aN' = aM \cap N$ est aussi de type $\mathcal{C}$ -fini (car il est un quotient de N'). D'autre part, $N \subsetneq aM + N$, car $a \notin \mathfrak{p}$, donc $aM + N$ est de type $\mathcal{C}$ -fini, et alors il en est de même pour $(aM + N)/aM = N/(aM \cap N)$ (remarque 1.14(v)). Au vu de (i.a), on conclut que N est de type $\mathcal{C}$ -fini, contradiction.

Or, puisque M est de type $\mathcal{C}$ -fini, il existe $x \in M \setminus N$, et $N + Ax$ est de type $\mathcal{C}$ -fini, par maximalité de N ; par suite, il en est de même pour $(N + Ax)/Ax = N/(N \cap Ax)$. Mais par ce qui précède, $N \cap Ax = \mathfrak{p}x \subset \mathfrak{p}M \subset N$, donc aussi $N/\mathfrak{p}M$ est de type $\mathcal{C}$ -fini ; d'autre part, par hypothèse $\mathfrak{p}M$ est de type $\mathcal{C}$ -fini, ainsi finalement il en est de même pour N , d'après (i.a), contradiction. Cela montre que $\mathcal{F} = \emptyset$, CQFD.

Partie (iii.b) : Soient $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de M , et

$$\phi : A \rightarrow M^n \quad \text{telle que} \quad a \mapsto (ax_1, \dots, ax_n) \quad \forall a \in A.$$

D'après (iii.a) et (i.c), M^n est $\mathcal{C}$ -noethérien, donc de même pour $\text{Im}(\phi) = A/\text{Ker}(\phi)$, toujours d'après (i.c), et noter que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ann}_A(M)$. L'assertion découle alors de (i.c), au vu de la suite exacte $0 \rightarrow \text{Ann}_A(M) \rightarrow A \rightarrow \text{Im}(\phi) \rightarrow 0$.

Partie (iv) : On prend pour $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ avec $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{0\}$; alors les A -modules de type $\mathcal{C}$ -fini (resp. $\mathcal{C}$ -noethériens) sont les A -modules de type fini (resp. noethériens). Or, si $A \rightarrow B$ est un homomorphisme fini et injectif d'anneaux, et si B est noethérien, évidemment $\mathfrak{p}B$ est un B -module de type fini pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, donc aussi un A -module de type fini ; d'après (iii.b), A est alors noethérien. Si l'on fait $A = B$, et si l'on suppose seulement que tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ soit de type fini, le même raisonnement redonne le théorème de Cohen.

Exercice 6.75, partie (i) : Evidemment (b) $\Rightarrow$ (a), par le théorème 6.65.

De plus, (a) implique que A_0 est noethérien, car $A_0 = A/A_+$ (notation du §1.1.6). Il reste à montrer que si A est noethérien, A est une A_0 -algèbre de type fini. En effet, soit $S := \{x_1, \dots, x_t\}$ un système fini de générateurs de l'idéal A_+ (voir la remarque 6.61(i)). On peut écrire chaque x_i sous la forme $x_i = x_{i1} + \dots + x_{i k_i}$ avec x_{ij} homogène de degré

> 0 pour tous $i = 1, \dots, t$ et $j = 1, \dots, k_i$; quitte à remplacer S par $\bigcup_{i=1}^t \{x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\}$ on peut donc supposer que x_i soit homogène de degré $d_i > 0$, pour tout $i = 1, \dots, t$. On va montrer que $A = B := A_0[x_1, \dots, x_t]$. Pour cela, il suffit de vérifier que $A_k \subset B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 0$, l'assertion est triviale; soit maintenant $y \in A_k$ pour un entier $k > 0$, et on suppose que $A_i \subset B$ pour tout $i < k$. Par hypothèse, on a une identité de la forme $y = \sum_{i=1}^t a_i \cdot x_i$ pour certains $a_1, \dots, a_t \in A$. Pour tout $i = 1, \dots, t$, soit $a'_i \in A_{k-d_i}$ la composante de degré $k - d_i$ de a_i (si $k - d_i < 0$, on pose $a'_i := 0$); on voit aisément que $y = \sum_{i=1}^t a'_i \cdot x_i$, et par hypothèse de récurrence on a $a'_i \in B$ pour tout $i = 1, \dots, t$. D'où $y \in B$, CQFD.

Partie (ii) : Soit $A = A_0[x_1, \dots, x_t]$ comme ci-dessus, de sorte que x_i est homogène de degré $d_i > 0$, pour tout $i = 1, \dots, t$. Soit aussi $m_1, \dots, m_s$ un système de générateurs de M ; en raisonnant comme dans la preuve de (i), on peut supposer que m_i soit homogène de degré $e_i \in \mathbb{Z}$, pour tout $i = 1, \dots, s$. On voit aisément que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le A_0 -module M_n est engendré par le système

$$\{x_1^{r_1} \cdots x_t^{r_t} m_j \mid j = 1, \dots, s, e_j + r_1 d_1 + \cdots + r_t d_t = n\}.$$

Partie (iii) : L'anneau A est de type fini sur son sous-anneau A_0 , et ce dernier est noethérien, par la partie (i). De plus, si $a \in A$ est homogène de degré k , on a $a^d \in A_{kd} \subset A^{(d)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$; comme la A_0 -algèbre A est engendrée par ses éléments homogènes, on déduit que A est entier sur $A^{(d)}$. Il suffit maintenant d'invoquer la proposition 6.74 pour conclure.

Exercice 6.76, partie (i) : Cela suit aussitôt de l'exercice 6.25(i) et la proposition 6.74.

Partie (ii) : Evidemment, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ le monôme $X^i Y^j$ est un vecteur propre pour l'action de σ , de valeur propre ζ_n^{i-j} . Par suite $K[X, Y]^{(\sigma)}$ est le K -espace vectoriel engendré par le système

$$(X^i Y^j \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ tels que } i - j \in n\mathbb{Z})$$

et on voit aisément que ce dernier est la K -sous-algèbre de $K[X, Y]$ engendrée par

$$Z := XY \quad T := X^n \quad S := Y^n.$$

Au vu de la relation $TS = Z^n$ on déduit un homomorphisme surjectif de K -algèbres

$$f : R := K[S, T, Z]/(ST - Z^n) \rightarrow R' := K[X, Y]^{(\sigma)}.$$

On remarque que R est intègre, car $K[S, T, Z]$ est factoriel (voir le problème 1.39(ii)) et le polynôme $ST - Z^n$ est irréductible. On va montrer l'injectivité de f . Pour cela, noter que l'application naturelle $R_0 := K[S, T] \rightarrow R$ est injective, donc on peut voir l'algèbre de polynômes R_0 comme un sous-anneau de R ; de plus, la restriction de f à R_0 est injective, et son image est le sous-anneau $K[X^n, Y^n]$ de R' . Soit maintenant E_0 le corps des fractions de R_0 ; on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_0 \otimes_{R_0} R & \xrightarrow{g} & E_0 \otimes_{R_0} R' \end{array}$$

avec $g := E_0 \otimes_{R_0} f$ et dont les flèches verticales sont les applications naturelles. Comme R et R' sont intègres, on voit aisément que les flèches verticales sont injectives, et en particulier $E_0 \otimes_{R_0} R' \neq 0$; d'autre part, $E_0 \otimes_{R_0} R$ est le corps $E_0[Z]/(Z^n - ST)$, donc g est aussi forcément injective, d'où l'assertion. Cela achève la construction d'une présentation de $K[X, Y]^{(\sigma)}$ par générateurs et relations.

Ensuite, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \geq j$ soit $V_{ij} \subset K[X, Y]$ le K -sous-espace vectoriel engendré par le système $(X^i Y^j, X^j Y^i)$; évidemment $K[X, Y] = \bigoplus_{i \geq j} V_{ij}$, et chaque V_{ij}

est stable par l'action de D_{2n} sur $K[X, Y]$. On a :

$$V_{ij}^{D_{2n}} = \begin{cases} K \cdot (X^i Y^j + X^j Y^i) & \text{si } i - j \in n\mathbb{N} \setminus \{0\} \\ K \cdot X^i Y^j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i - j \notin n\mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $K[X, Y]^{D_{2n}}$ est le K -sous-espace vectoriel de base

$$X^j Y^j \quad X^i Y^j + X^j Y^i \quad \forall i > j \geq 0 \text{ tels que } i - j \in n\mathbb{N}.$$

On remarque que si $i - j = kn \geq 0$, on a $X^i Y^j + X^j Y^i = X^j Y^j \cdot (X^{kn} + Y^{kn})$. De l'autre côté, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ soit $[r]$ le plus grand entier $\leq r$; on a l'identité :

$$(X^n + Y^n)^k = X^{kn} + Y^{kn} + \sum_{i=1}^{[k/2]} \binom{k}{i} \cdot \frac{1}{[(2i+k)/k]} \cdot X^{in} Y^{in} \cdot (X^{(k-2i)n} + Y^{(k-2i)n}).$$

Par récurrence sur k on déduit que $K[X, Y]^{D_{2n}}$ est la K -sous-algèbre engendrée par $S := XY$ et $T := X^n + Y^n$, d'où un homomorphisme surjectif de K -algèbres

$$h : K[S, T] \rightarrow K[X, Y]^{D_{2n}}.$$

Pour conclure, montrons que h est injective. On raisonne par l'absurde : soit $P := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} S^i T^j \in K[S, T]$ un polynôme non nul de degré minimal dans le noyau de h ; donc $P(XY, X^n + Y^n) = 0$ dans $K[X, Y]$. Si l'on prend $X = 0$, on obtient $0 = P(0, Y^n) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{0j} Y^{jn}$, d'où $a_{0j} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par suite S divise P , donc $S^{-1} \cdot P \in \text{Ker } h$, et cela contredit la minimalité du degré de P .

Exercice 6.77, partie (i) : Remarquons d'abord que E est bien une A -sous-algèbre de B : en effet, soit $\psi : A \rightarrow B$ le morphisme structurel de B ; pour tout $a \in A$ on a $\phi_1(\psi(a)) = \phi_2(\psi(a)) = \dots = \phi_n(\psi(a))$ (car les ϕ_i sont des homomorphismes de A -algèbres), d'où $\psi(a) \in E$. Au vu de la proposition 6.74, il suffit alors de montrer que B est entier sur E . Soit donc $b \in B$; on pose $c_i := \phi_i(b) \in C$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Par hypothèse, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ il existe un polynôme unitaire $P_i(X) \in A[X]$ tel que $P_i(c_i) = 0$ dans C ; soit $P(X) := \prod_{i=1}^n P_i(X)$. Comme ϕ_j est un homomorphisme de A -algèbres, on a

$$\phi_j(P(b)) = \prod_{i=1}^n \phi_j(P_i(b)) = \prod_{i=1}^n P_i(c_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Donc, $P(b) \in E$; alors $Q(X) := P(X) - P(b)$ est un polynôme unitaire de $E[X]$ avec $Q(b) = 0$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : On considère l'homomorphisme de E -modules

$$\Phi : B \rightarrow C^{n-1} \quad b \mapsto (\phi_i(b) - \phi_1(b) \mid i = 2, \dots, n).$$

Evidemment $E = \text{Ker } \Phi$, et l'égaliseur de $\phi_1 \otimes_E E', \dots, \phi_n \otimes_E E'$ est le noyau de $\Phi \otimes_E E' : B \otimes_E E' \rightarrow (C \otimes_E E')^{n-1}$. Mais $\text{Ker}(\Phi \otimes_E E') = E \otimes_E E' = E'$, car E' est une E -algèbre plate.

Problème 6.82, partie (i) : Vérifions d'abord que $d := \text{tr.deg}(\text{Frac}(A)/K) \leq \text{ht}(\mathfrak{m})$: en effet, d'après le problème 6.12(ii), il existe un homomorphisme injectif et fini de K -algèbres $f : K[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$, et $\mathfrak{m}' := f^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Max } K[X_1, \dots, X_d]$ (corollaire 6.80); d'après le théorème 6.28(ii) et le problème 6.16(iv)), $\text{Spec}(f)$ est générissante, donc $\text{ht}(\mathfrak{m}) \geq \text{ht}(\mathfrak{m}')$ (exercice 4.70(i)); on est ainsi ramené à vérifier l'assertion pour $A = K[X_1, \dots, X_d]$. On raisonne par récurrence sur d : le cas $d = 0$ est trivial; soit donc $d > 0$, et supposons que l'inégalité souhaitée soit déjà connue pour tout corps E , et tout idéal maximal de $E[T_1, \dots, T_{d-1}]$. D'après le corollaire 6.80, on a $\mathfrak{n} := K[T_d] \cap \mathfrak{m} \in \text{Max } K[T_d]$, et $\mathfrak{n}A$ est un idéal premier de A , car on a un isomorphisme de K -algèbres $A/\mathfrak{n}A \xrightarrow{\sim} B := E[T_1, \dots, T_{d-1}]$, avec $E := k(\mathfrak{n})$. En outre, $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\mathfrak{n}A \in \text{Max } B$; par

hypothèse de récurrence, il existe alors une chaîne strictement croissante $0 \subset \bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_{d-2} \subset \bar{\mathfrak{m}}$ d'idéaux premiers de B . Soit aussi $\pi : A \rightarrow B$ la projection ; il vient une suite strictement croissante d'idéaux premiers

$$0 \subset \mathfrak{n}A \subset \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{d-2}) \subset \mathfrak{m} \quad \text{dans } \text{Spec } A$$

d'où $\text{ht}(\mathfrak{m}) \geq d$. Ensuite, soient $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ deux idéaux premiers de A , et d' (resp. d'') le degré de transcendance de $k(\mathfrak{p})$ sur K (resp. de $k(\mathfrak{q})$ sur K) ; afin de montrer que $d \geq \text{ht}(\mathfrak{m})$, il suffit de vérifier que $d' > d''$. Or, l'exercice 1.102, appliqué à la projection naturelle $\pi : A/\mathfrak{p} \rightarrow A/\mathfrak{q}$, donne $d' \geq d''$, avec égalité si et seulement si π est bijectif. Mais évidemment π n'est pas bijectif, d'où l'inégalité stricte souhaitée.

Partie (ii) : D'après le 6.12(ii), il existe $d \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme injectif et fini $f : K[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$; on a $\dim K[X_1, \dots, X_d] = d$ d'après (i), donc $\dim A = d$ (corollaire 6.20(iii)). Puisque l'inclusion $K \rightarrow E$ est un homomorphisme plat d'anneaux, l'homomorphisme $E \otimes_K f : E[X_1, \dots, X_d] \rightarrow E \otimes_K A$ est encore injectif et fini, donc on a de même $\dim E \otimes_K A = \dim E[X_1, \dots, X_d] = d$.

Exercice 6.83, partie (i) : D'abord, soit $P(X, Y) \in R := K[X, Y]$ un polynôme qui s'annule sur l'axe $\{(a, 0) \mid a \in K\}$; si le degré total de P est n , on peut écrire $P(X, Y) = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} X^i Y^j$ pour certains coefficients $b_{ij} \in K$, et la condition $P(a, 0) = 0$ pour tout $a \in K$ se traduit par les identités

$$(*) \quad \sum_{i=0}^n b_{i0} a^i = 0 \quad \forall a \in K.$$

Or, K est algébriquement clos, en particulier il est infini, donc $(*)$ implique que $b_{i0} = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Cela veut dire que Y divise P . Réciproquement, il est évident que si Y divise P , alors P s'annule sur A_1 . De même, P s'annule sur $\{(0, a) \mid a \in K\}$ si et seulement si X divise P . Donc $I = XR \cap YR = XYR$.

Partie (ii) : Soit d'abord $P(X, Y, Z) \in R' := K[X, Y, Z]$ un polynôme qui s'annule sur l'axe $A_1 := \{(a, 0, 0) \mid a \in K\}$; si $P = \sum_{i,j,k=0}^n b_{ijk} X^i Y^j Z^k$, il vient $\sum_{i=0}^n b_{i00} a^i = 0$ pour tout $a \in K$, d'où $b_{i00} = 0$ pour $i = 0, \dots, n$, et donc P est un élément de $J'_1 := YR' + ZR'$. Réciproquement, tout élément de J'_1 s'annule sur A_1 , i.e. J'_1 est l'idéal des polynômes qui s'annulent sur A_1 . De même, $J'_2 := XR' + ZR'$ et $J'_3 := XR' + YR'$ sont les idéaux des polynômes qui s'annulent respectivement sur $A_2 := \{(0, a, 0) \mid a \in K\}$ et sur $A_3 := \{(0, 0, a) \mid a \in K\}$; il vient :

$$I' = J'_1 \cap J'_2 \cap J'_3 = J' := XYR' + XZR' + YZR'.$$

En effet, pour vérifier la dernière identité, soit $P \in I'$; comme $P(0, 0, 0) = 0$, on peut écrire $P = XP_1(X) + YP_2(Y) + ZP_3(Z) + Q_1(X, Y, Z)$ pour certains $P_1 \in K[X]$, $P_2 \in K[Y]$, $P_3 \in K[Z]$ et $Q_1 \in J'$. Mais on a $P(a, 0, 0) = 0$, d'où $aP_1(a) = 0$ pour tout $a \in K$, et donc $P_1 = 0$. De même, $P_2 = P_3 = 0$, d'où $P \in J'$.

Partie (iii) : Comme ci-dessus, on voit que l'idéal des polynômes de $R'' := K[X, Y, Z, W]$ qui s'annulent sur $\{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in K\}$ (resp. sur $\{(0, 0, a, b) \mid a, b \in K\}$) est $J''_1 := ZR'' + WR''$ (resp. $J''_2 := XR'' + YR''$), donc le même argument montre que

$$I'' = J''_1 \cap J''_2 = XZR'' + YZR'' + XWR'' + YWR''.$$

Exercice 6.84 : Evidemment K' est la limite directe du système filtrant de ses K -sous-algèbres de type fini ; d'après le problème 3.69(v), il existe alors une K -sous-algèbre de type fini $C \subset K'$ avec un isomorphisme de C -algèbres $\phi : C \otimes_K A \xrightarrow{\sim} C \otimes_K B$. Soit $\mathfrak{m} \subset C$ un idéal maximal arbitraire ; comme C est une K -algèbre de type fini, le corps résiduel $k(\mathfrak{m})$ est algébrique sur K , par le Nullstellensatz, donc $k(\mathfrak{m}) = K$, car K est algébriquement clos. On déduit un isomorphisme $k(\mathfrak{m}) \otimes_C \phi : A \xrightarrow{\sim} B$ de K -algèbres, comme souhaité.

Problème 6.85, partie (i) : Plus généralement, pour tout corps k et tout k -espace vectoriel V de dimension finie, soit

$$\mathrm{tr}_{V/k} : \mathrm{End}_k(V) \rightarrow k$$

l'application qui associe à tout k -endomorphisme de V sa trace. Si le corps k' est une extension arbitraire de k , on a un diagramme commutatif d'applications k' -linéaires

$$\begin{array}{ccc} k' \otimes_k \mathrm{End}_k(V) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{End}_{k'}(k' \otimes_k V) \\ & \searrow \scriptstyle k' \otimes_k \mathrm{tr}_{V/k} & \swarrow \scriptstyle \mathrm{tr}_{k' \otimes_k V/k'} \\ & k' & \end{array}$$

où ω est l'isomorphisme tel que $x \otimes \phi \mapsto x \cdot (k' \otimes_k \phi)$ pour tous $x \in k'$ et $\phi : V \rightarrow V$ (voir l'exercice 4.110(ii)). Soit maintenant E la clôture Galoisienne de F (dans une clôture algébrique fixée de F). On déduit aisément qu'il suffit de montrer que la forme bilinéaire $\mathrm{Tr}_{E \otimes_K F/E}$ est non dégénérée. D'autre part, l'exercice 3.67 fournit un isomorphisme de E -algèbres $E \otimes_K F \xrightarrow{\sim} E^n$, avec $n := \dim_K F$. Cela veut dire qu'il existe des idempotents $e_1, \dots, e_n \in E \otimes_K F$ tels que $e_i \cdot e_j = 0$ pour tout $i \neq j$, et $e_1 + \dots + e_n = 1$. La matrice de $\mathrm{Tr}_{E \otimes_K F/E}$ par rapport à la base $e_1, \dots, e_n$ est la matrice diagonale Id_n de taille $n \times n$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : La trace d'un endomorphisme ϕ d'un K -espace vectoriel V est une combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire des valeurs propres de ϕ , i.e. des racines du polynôme minimal $\mu_\phi(X) \in K[X]$ de ϕ . Or, si $P(\phi) = 0$ pour un polynôme unitaire $P(X) \in A[X]$, d'un côté on sait que toute racine de P est entière sur A , et de l'autre côté, μ_ϕ divise P ; on conclut que toute racine de μ_ϕ est entière sur A , et par conséquent il en est de même pour la trace de ϕ . Mais $\mathrm{tr}_{V/K}(\phi) \in K$, et comme A est intégralement fermé, on voit que $\mathrm{tr}_{V/K}(\phi) \in A$. Maintenant, si $x \in B$, on a $b_i x \in B$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où $\mathrm{Tr}_{F/K}(x, b_i) = \mathrm{tr}_{F/K}(x b_i) \in A$, par ce qui précède.

Partie (iii) : Soit $\tau_{F/K} : F \rightarrow F^* := \mathrm{Hom}_K(F, K)$ l'application K -linéaire correspondante à $\mathrm{Tr}_{F/K}$, suivant la bijection naturelle de la remarque 3.2(ii); notons aussi que $M := Ab_1 + \dots + Ab_n$, est un A -module libre de rang n avec $K \otimes_A M = F$. La partie (ii) montre que $B \subset \tau_{F/K}^{-1}(M^*)$ avec $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A) \subset F^*$. Or, M^* est aussi un A -module libre de rang n ; comme A est noethérien, et comme $\tau_{F/K}$ est un isomorphisme en vertu de (i), on déduit que B est un A -module de type fini (voir la proposition 6.64), d'où l'assertion.

Exercice 6.86 : On suppose d'abord que K soit algébriquement clos. Disons que $A = K[X_1, \dots, X_n]/I$ pour un entier n et un idéal I de $B := K[X_1, \dots, X_n]$. Soit $J \subset B$ l'intersection des idéaux maximaux de B qui contiennent I ; évidemment, $\mathcal{J}(A) = J/I$; d'autre part, $J = \mathrm{rad}(I)$, par le corollaire 6.81, d'où $J/I = \mathcal{N}(A)$, comme souhaité. Dans le cas général, soit K' une clôture algébrique de K , et on pose $A' := K' \otimes_K A$; l'application naturelle $A \rightarrow A'$ est injective, car A est une K -algèbre plate (comme toute K -algèbre), et l'inclusion $K \subset K'$ est évidemment entière, donc de même pour l'inclusion $A \subset A'$ (corollaire 6.5); compte tenu du cas précédent et de l'exercice 6.22(i), on trouve $\mathcal{J}(A) = A \cap \mathcal{J}(A') = A \cap \mathcal{N}(A') = \mathcal{N}(A)$.

Exercice 6.89, partie (i) : Les hypothèses sur A'' impliquent que f induit un isomorphisme $g : F \xrightarrow{\sim} F''$ du corps des fractions de A sur celui de A'' ; or, par définition on a $A' \subset F$, et $g(A')$ est un sous-anneau de F' intégralement clos et entier sur $g(A)$; comme $g(A) \subset A''$, on voit donc que $g(A') = A''$, i.e. g se restreint en un isomorphisme $h : A' \xrightarrow{\sim} A''$ de A -algèbres. Réciproquement, un tel isomorphisme h de A -algèbres se prolonge en un isomorphisme du corps des fractions de A' sur F'' ; mais le corps des fractions de A' est F , donc ce prolongement doit coïncider avec l'homomorphisme g , et on voit que h est forcément la restriction de g .

Partie (ii) : Grâce à la proposition 6.13 on voit que U_{nor} est la partie des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que l'application $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A'_{\mathfrak{p}}$ soit bijective. Or, si $\mathfrak{p} \in D(a) = \text{Spec } A[a^{-1}]$, on a $A_{\mathfrak{p}} = A[a^{-1}]_{\mathfrak{p}}$ et $A'[a^{-1}]_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}}$, d'où $D(a) \subset U_{\text{nor}}$. De plus, soit $M := A'/A$; le lemme 6.87 implique que M est un A -module de type fini, et évidemment $\mathfrak{p} \in U_{\text{nor}} \Leftrightarrow M_{\mathfrak{p}} = 0$. Autrement dit, U_{nor} est le complémentaire du support de M , et il est donc une partie ouverte, par la remarque 3.58(ii).

Problème 6.92, partie (i) : Montrons d'abord :

Lemme 6.121. *Soient $h : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{X}$ une normalisation de $\underline{X}$, et $U \subset X$ une partie ouverte ; posons $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$ et $\underline{U}^{\nu} := \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^{\nu}$. Alors la projection $\underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{U}$ est une normalisation de $\underline{U}$.*

Démonstration. En raisonnant comme dans la remarque 6.91, on voit que $\underline{U}$ et $\underline{U}^{\nu}$ sont des schémas intègres, et $\underline{U}^{\nu}$ est normal ; en outre U est une partie dense de X , car X est irréductible, et de même, l'espace U^{ν} sous-jacent à $\underline{U}^{\nu}$ est dense dans l'espace sous-jacent à $\underline{X}^{\nu}$. Par suite l'image de U^{ν} est dense dans X (exercice 1.21(iv)), donc aussi dans U . Or, soit $\underline{f} := (f, f^b) : \underline{Y} \rightarrow \underline{U}$ un morphisme de schémas, avec $\underline{Y}$ intègre et normal, et tel que l'image de f soit dense dans U ; alors la composition $\underline{g} : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ de $\underline{f}$ avec le morphisme naturel $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$ a image dense dans X , et par hypothèse il se factorise donc à travers un unique morphisme de $\underline{X}$ -schémas $\underline{g}^{\nu} : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}^{\nu}$. Par suite, $\underline{f}$ se factorise à travers un unique morphisme $\underline{Y} \rightarrow \underline{U}^{\nu}$ de $\underline{U}$ -schémas, d'où l'assertion. $\square$

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un recouvrement de X tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe une normalisation $h_U : \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{U} := U \times_X \underline{X}$; d'après le lemme 6.121, pour tous $U, V \in \mathcal{U}$, les restrictions $h_U|_{U \cap V} : \underline{U \cap V} \times_{\underline{U}} \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{U \cap V}$ et $h_V|_{U \cap V} : \underline{U \cap V} \times_{\underline{V}} \underline{V}^{\nu} \rightarrow \underline{U \cap V}$ sont des normalisations, donc il existe un unique isomorphisme de $\underline{U \cap V}$ -schémas $\omega^{UV} : \underline{U \cap V} \times_{\underline{U}} \underline{U}^{\nu} \xrightarrow{\sim} \underline{U \cap V} \times_{\underline{V}} \underline{V}^{\nu}$. En raisonnant comme dans la preuve du théorème 5.97, on vérifie alors que le système $(\underline{U}^{\nu}, \omega^{UV} | U, V \in \mathcal{U})$ est une donnée de recollement, et on dénote par $\underline{X}^{\nu}$ le recollement de la famille $(\underline{U}^{\nu} | U \in \mathcal{U})$ suivant les isomorphismes $\omega^{\bullet\bullet}$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. Soit aussi $(i_U : \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{X}^{\nu} | U \in \mathcal{U})$ le co-cône universel correspondant ; par la propriété universelle du recollement, il existe un unique morphisme $h : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{X}$ tel que $h \circ i_U : \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{X}$ soit la composition de h_U avec le morphisme naturel $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$. Comme chaque i_U identifie $\underline{U}^{\nu}$ avec un sous-schéma ouvert de $\underline{X}^{\nu}$, il est clair que ce dernier est un schéma réduit et normal ; son espace sous-jacent est en outre irréductible, d'après l'exercice 1.22, et son image dans X est évidemment une partie dense. Ainsi, h est un objet de $\mathcal{C}$, et en raisonnant comme dans la preuve de l'observation 5.85, on voit aisément qu'il s'agit d'une normalisation de $\underline{X}$. On est ainsi ramené au cas où $\underline{X}$ est affine, disons $\underline{X} = \text{Spec } A$, pour un anneau intègre A ; soient A^{ν} la normalisation de A , et $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme de schémas, avec $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ intègre et normal, et tel que l'image de Y soit une partie dense de X . On doit vérifier que f se factorise à travers un unique morphisme de $\underline{X}$ -schémas $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}^{\nu} := \text{Spec } A^{\nu}$. Supposons d'abord que $\underline{Y}$ soit affine, disons $\underline{Y} = \text{Spec } B$ pour un anneau intègre et intégralement clos B (remarque 6.91), donc f correspond à un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ qui est injectif, puisque l'image de f est dense dans X (exercice 3.37(ii)). Par suite, ϕ se prolonge en une unique extension $\psi : K \rightarrow E$ des corps de fractions respectifs, et $\psi(A^{\nu})$ est une extension entière de $\phi(A) \subset B$; comme B est intégralement clos, il vient $\psi(A^{\nu}) \subset B$, et la restriction $\lambda : A^{\nu} \rightarrow B$ correspond au morphisme de $\underline{X}$ -schémas g souhaité. Il reste à vérifier l'unicité de g ; soit donc $g' : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}^{\nu}$ un deuxième morphisme de $\underline{X}$ -schémas, correspondant à l'homomorphisme de A -algèbres $\lambda' : A^{\nu} \rightarrow B$; comme A et A^{ν} ont le même corps K de fractions, il vient $K \otimes_A \lambda = K \otimes_A \lambda' : K \rightarrow K \otimes_A B$. Mais la localisation $B \rightarrow K \otimes_A B$ est injective, car B est intègre, donc $\lambda = \lambda'$, et finalement $g = g'$.

Si $\underline{Y}$ n'est pas affine, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de Y formé de parties ouvertes affines. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, noter que $\underline{U} := U \times_Y \underline{Y}$ est un schéma intègre et normal, et que $f(U)$ est une partie dense de X ; la restriction $f|_U : \underline{U} \rightarrow \underline{X}$ est alors un objet de $\mathcal{C}$, et par ce qui précède il existe ainsi un unique morphisme $g^U : \underline{U} \rightarrow \underline{X}^\nu$ de $\underline{X}$ -schémas. Supposons d'abord que f soit séparé; dans ce cas pour tous $U, V \in \mathcal{U}$, le sous-schéma ouvert $\underline{U \cap V} := (U \cap V) \times_Y \underline{Y}$ est encore affine (corollaire 5.95(ii)), et donc les restrictions $g^U|_{\underline{U \cap V}}, g^V|_{\underline{U \cap V}} : \underline{U \cap V} \rightarrow \underline{X}^\nu$ de g^U et g^V doivent coïncider. En raisonnant comme dans la preuve de l'observation 5.85, on voit que le système $g^\bullet := (g^U | U \in \mathcal{U})$ se recolle alors en un unique morphisme $g : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}^\nu$ de $\underline{X}$ -schémas, dont la restriction $g|_U : \underline{U} \rightarrow \underline{X}^\nu$ coïncide avec g^U , pour tout $U \in \mathcal{U}$. En dernier lieu, même si f n'est pas séparé, pour tous $U, V \in \mathcal{U}$ les restrictions $f|_{U \cap V} : \underline{U \cap V} \rightarrow \underline{X}$ sont séparées (remarque 5.88(iii,iv) et exercice 5.93(i)), et par ce qui précède, on déduit à nouveau que $g^U|_{\underline{U \cap V}} = g^V|_{\underline{U \cap V}}$; on peut donc encore recoller $g^\bullet$ en un unique morphisme g comme souhaité, et la preuve est complète.

Partie (ii) : Cela est clair, par inspection de la construction de $\underline{X}^\nu$.

Partie (iii) : Avec les lemmata 6.121 et 5.81(i), et l'exercice 5.89(iii) on se ramène aussitôt au cas où $\underline{X}$ est affine, et dans ce cas l'assertion découle de (ii) et des remarques 4.59(iii) et 5.88(iii).

Exercice 6.94, partie (i) : Soit $P(T) \in B$; par construction on a $P(-1) = P(0) = P(1)$, et si l'on pose $b := P(0)$, on voit que le polynôme $P(T) - b$ s'annule aux points $-1, 0, 1$, donc il est un multiple de $X := (T-1)T(T+1)$. Autrement dit :

$$B = \{b + X \cdot Q(T) \mid b \in \mathbb{C}, Q(T) \in \mathbb{C}[T]\}.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout polynôme $Q(T)$ il existe $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(T) = Q_1(X) + TQ_2(X) + T^2Q_3(X)$. On raisonne par récurrence sur le degré d de $Q(T)$: si $d \leq 2$, l'assertion est évidente (dans ce cas, Q_1, Q_2 et Q_3 sont des constantes). Si $d \geq 3$, on a $Q(T) = X \cdot P_1(T) + P_2(T)$ avec $\deg P_2(T) \leq 2$ et $\deg P_1(T) = d-3$; par récurrence, on peut trouver $R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P_1(T) = R_1(X) + TR_2(X) + T^2R_3(X)$, et si $P_2(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2$, on a l'identité souhaitée avec $Q_1(X) := XR_1(X) + a_0$, $Q_2 := XR_2(X) + a_1$, $Q_3 := XR_3(X) + a_2$.

Partie (ii) : La preuve de (i) montre déjà que tout élément de B s'écrit sous la forme $Q_1(X) + YQ_2(X) + ZQ_3(X)$, et il ne reste qu'à montrer l'unicité de cette écriture. Donc, supposons que $Q_1(X) + YQ_2(X) + ZQ_3(X) = 0$; cela veut dire que

$$Q_1((T-1)T(T+1)) = -TXQ_2(X) - T^2XQ_3(X) \quad \text{avec } X = (T-1)T(T+1).$$

Mais le degré de $Q_1((T-1)T(T+1))$ par rapport à l'indéterminée T est évidemment divisible par 3; d'autre part, si $Q_2 \neq 0$ ou si $Q_3 \neq 0$, le degré de $-TXQ_2(X) - T^2XQ_3(X)$ par rapport à l'indéterminée T n'est pas divisible par 3, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Un calcul direct donne les identités :

$$Y^2 = ZX \quad Z^2 = YX^2 + ZX \quad YZ = X^3 + YX.$$

Cela montre que B est un quotient de la $\mathbb{C}$ -algèbre

$$B' := \mathbb{C}[X, Y, Z] / (Y^2 - ZX, Z^2 - YX^2 - ZX, YZ - X^3 - YX).$$

D'autre part, ces identités impliquent aisément que tout élément de B' est une combinaison $\mathbb{C}[X]$ -linéaire de $1, Y$ et Z ; i.e. on a une surjection $\mathbb{C}[X]$ -linéaire

$$\phi : C^3 \rightarrow B' \quad (Q_1, Q_2, Q_3) \mapsto Q_1 + YQ_2 + ZQ_3.$$

Or, notons $\pi : B' \rightarrow B$ la projection; (ii) nous dit que $\pi \circ \phi : C^3 \rightarrow B$ est une bijection, donc ϕ est aussi injective, et la définition de B' nous donne une présentation de B . En particulier, cela montre que la variété obtenue en recollant les points $-1, 0, 1$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ peut être réalisée par un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^3$: l'intersection d'une quadrique et de

deux hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 6.101 : On a un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} B' & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Spec} A' \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec} B & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(j)} & \mathrm{Spec} A \end{array}$$

dont π et π' sont surjections induisant les topologies de $\mathrm{Spec} A$ et $\mathrm{Spec} B$; de plus ϕ identifie $\mathrm{Spec} B'$ avec la partie ouverte $\mathrm{Spec} A' \setminus \{\mathfrak{m}'_0\}$. Comme π et π' pincement respectivement les couples de points $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$ et $(\mathfrak{m}_1 B', \mathfrak{m}_2 B')$, on voit aisément que $\mathrm{Spec}(j)$ est injective. En outre, soit $U \subset \mathrm{Spec} B$ une partie ouverte affine, et V son image dans $\mathrm{Spec} A$; alors $\pi'^{-1}U$ est une partie ouverte affine de $\mathrm{Spec} B$, et son image dans $\mathrm{Spec} A'$ est $\pi^{-1}V$ (exercice 5.78), donc $\pi^{-1}V$ est une partie ouverte de $\mathrm{Spec} A'$, et par suite V est une partie ouverte de $\mathrm{Spec} A$. Cela achève de montrer que $\mathrm{Spec}(j)$ identifie $\mathrm{Spec} B$ avec la partie ouverte $\mathrm{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$. Supposons maintenant par l'absurde, que $B = S^{-1}A$ pour une partie $S \subset A$, et soit $s \in S$; on peut supposer que $s \notin A^\times$, et par suite le seul idéal premier de A contenant s est $\mathfrak{m}_0$ (proposition 3.31), et donc le seul idéal premier de $A' = \mathbb{Q}[T]$ contenant s est $\mathfrak{m}'_0$. Cela veut dire que $s = qT^n$ pour quelque $q \in \mathbb{Q}^\times$ et un entier $n > 0$; mais on voit aisément que A ne contient aucun élément de cette forme, contradiction.

Compte tenu de la proposition 3.77, pour vérifier que B est une A -algèbre plate il suffit d'exhiber des éléments $a_1, a_2 \in A$ avec $D(a_1) \cup D(a_2) = \mathrm{Spec} A$ et tels que les homomorphismes induits $j_i : A[a_i^{-1}] \rightarrow B[a_i^{-1}]$ pour $i = 1, 2$ soient plats. Pour cela, prenons $a_1 := (T^2 - p)(T^3 - p)$ et $a_2 := a_1 - p^2$. Comme $\mathfrak{m} \notin D(a_1)$, on a $A[a_1^{-1}] = A'[a_1^{-1}]$ et $B[a_1^{-1}] = B'[a_1^{-1}]$ (voir §6.4.1); mais $B'[a_1^{-1}]$ est une $A'[a_1^{-1}]$ -algèbre plate, donc j_1 est plat. Ensuite, notons que $a_2 = T^2(T^3 - pT - p)$, donc $A'[a_2^{-1}] = B'[a_2^{-1}]$; d'autre part, comme $A = B \cap A'$, on a $A[a_2^{-1}] = B[a_2^{-1}] \cap A'[a_2^{-1}] = B[a_2^{-1}]$, et donc j_2 est un isomorphisme.

Exercice 6.104 : Par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$, un idéal $I \subset A[X_1, \dots, X_n]$, et un isomorphisme de A -algèbres $B \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n]/I$. Posons $K := \mathrm{Frac}(A)$. L'idéal $K \otimes_A I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ est de type fini (théorème 6.65), donc il existe un sous-idéal $I_0 \subset I$ de type fini de $A[X_1, \dots, X_n]$ avec $K \otimes_A I_0 = K \otimes_A I$, et la A -algèbre $B_0 := A[X_1, \dots, X_n]/I_0$ est de présentation finie. Par le théorème de platitude générique, il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que $B_{0,f}$ soit un A_f -module libre; d'autre part, par construction on a une surjection de A -algèbres $\phi : B_0 \rightarrow B$, et $K \otimes_A \phi$ est un isomorphisme. Alors $\phi_f : B_{0,f} \rightarrow B_f$ est surjective et son noyau est un A -sous-module de torsion de $B_{0,f}$; mais A_f est intègre et $B_{0,f}$ est un A_f -module libre, en particulier il est sans torsion. Donc $\mathrm{Ker} \phi_f = 0$, i.e. ϕ_f est un isomorphisme, et B_f est ainsi une A_f -algèbre de présentation finie. De même, choisissons un isomorphisme de B -modules $M \xrightarrow{\sim} B^n/N$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$ et un B -sous-module $N \subset B^n$; la K -algèbre $B_K := K \otimes_A B$ est de type fini, en particulier elle est noethérienne, donc il existe un B -sous-module $N_0 \subset N$ de type fini tel que $K \otimes_A N_0 = K \otimes_A N$, et on pose $M_0 := B^n/N_0$. Par le théorème de platitude générique, il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que $M_{0,f}$ soit un A_f -module libre, et en raisonnant comme ci-dessus, on voit aisément que la surjection $\psi : M_0 \rightarrow M$ induit un isomorphisme $\psi_f : M_{0,f} \xrightarrow{\sim} M_f$ de B_f -modules, donc M_f est un B_f -module de présentation finie.

Exercice 6.107 : On est ramené aussitôt à l'assertion correspondante pour l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \otimes_A f : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$, donc on peut supposer du départ que A soit un corps, et dans ce cas il faut montrer que f est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$ si et seulement si

$B_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre finie. La nécessité de la condition suit de la proposition 6.36. Réciproquement, si $B_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre finie, on voit comme dans le solution du problème 6.42 que $\mathfrak{q}$ est un point fermé de $\text{Spec } B$. De plus, l'espace $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}}$ est discret (corollaire 6.20(v)); mais ce dernier est l'ensemble des générisations de $\mathfrak{q}$ dans $\text{Spec } B$, donc $\mathfrak{q}$ est l'unique point de $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{q}$ n'admet aucune générisation stricte dans $\text{Spec } B$. D'autre part, B est un anneau noethérien (théorème 6.65), donc $\text{Spec } B$ est un espace noethérien, et alors la partie fermée $\{\mathfrak{q}\}$ est constructible dans $\text{Spec } B$ (remarque 6.106(vi)). Au vu du corollaire 4.67(ii), la partie $\{\mathfrak{q}\}$ est ainsi ouverte dans $\text{Spec } B$, i.e. $\mathfrak{q}$ est un point isolé.

Exercice 6.109, partie (i) : Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une partie totalement ordonnée non vide; on pose $W := \bigcup_{S \in \mathcal{G}} S$ et on munit W de la topologie induite par l'inclusion dans T . Montrons d'abord que W est un espace topologique irréductible. Pour cela, soient par l'absurde $W_0, W_1 \subset W$ deux parties fermées telles que $W_0, W_1 \neq W$ et $W = W_0 \cup W_1$. On a donc $w_0 \in W_0 \setminus W_1$ et $w_1 \in W_1 \setminus W_0$, et on trouve $S_0, S_1 \in \mathcal{G}$ tels que $w_i \in S_i$ pour $i = 0, 1$. Mais on a $S_i = (S_i \cap W_0) \cup (S_i \cap W_1)$, et comme S_i est irréductible, il vient $S_i \subset W_i$ et $S_i \not\subset W_{1-i}$ pour $i = 0, 1$. Quitte à échanger les indices, on peut supposer que $S_0 \subset S_1$, d'où $S_0 \subset W_1$, contradiction.

Ensuite, montrons que l'adhérence $\overline{W}$ de W dans T est une partie fermée irréductible de T . En effet, soient $X, X' \subset T$ deux parties fermées telles que $\overline{W} = X \cup X'$; il vient $W = (W \cap X) \cup (W \cap X')$, et par ce qui précède, on peut alors supposer que $W = W \cap X$. Par suite $\overline{W} = \overline{W \cap X} \subset \overline{W} \cap X$, i.e. $\overline{W} = X$, d'où l'assertion.

Cela achève de montrer que $\overline{W} \in \mathcal{F}$; par le lemme de Zorn, on déduit que $\mathcal{F}$ admet des éléments maximaux, comme souhaité.

Partie (ii) : Soit $\mathbf{P}(Z)$ la propriété : “ Z est une partie fermée de T qui n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles”. Soit maintenant $Z \neq \emptyset$ une partie fermée quelconque, et on suppose que $\mathbf{P}(Z')$ est vraie pour toute partie fermée Z' de T strictement contenue dans Z . Si Z est irréductible, trivialement $\mathbf{P}(Z)$ est vraie; sinon, on a une décomposition $Z = Z' \cup Z''$ pour deux parties fermées Z', Z'' de T strictement contenues dans Z . Mais dans ce cas, on voit aisément que l'ensemble des composantes irréductibles de Z est contenu dans la réunion des ensembles des composantes irréductibles de Z' et de Z'' ; en particulier, $\mathbf{P}(Z')$ et $\mathbf{P}(Z'')$ entraînent $\mathbf{P}(Z)$. Par récurrence noethérienne (lemme 6.108), $\mathbf{P}(Z)$ est vraie pour toute partie fermée Z de T ; en particulier, $\mathbf{P}(T)$ est vraie, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Les composantes irréductibles d'un espace spectral T sont les adhérences des parties $\{t\}$ pour $t \in \text{Max } T$; l'assertion donc découle aussitôt de (ii).

Partie (iv) : La condition est nécessaire, d'après la remarque 6.106(vi). Réciproquement, si la condition est vérifiée, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non constructibles de T , partiellement ordonnée par l'inclusion. Si $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{F}$, montrons que $Z := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \in \mathcal{F}$: car sinon, $T \setminus Z$ serait une partie ouverte compacte de T , et comme $T \setminus Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T \setminus Z_\lambda$, on aurait alors $T \setminus Z = T \setminus Z_\lambda$ pour quelque $\lambda \in \Lambda$, i.e. Z_λ serait constructible, contradiction. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors un élément minimal Z_0 , s'il est non vide. Vérifions qu'un tel Z_0 est irréductible : car sinon, Z_0 serait la réunion de deux parties fermées $Z'_0, Z''_0 \subsetneq Z_0$; par minimalité de Z_0 , les parties Z'_0 et Z''_0 seraient alors constructibles, donc de même pour Z_0 , contradiction. Mais par hypothèse, toute partie fermée irréductible de T est constructible; ainsi $\mathcal{F}$ doit être vide, donc T est noethérien.

Exercice 6.110, partie (i) : On a $\mathcal{N}(A_{\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A)_{\mathfrak{m}}$ (exercice 3.38), et par hypothèse $\mathcal{N}(A_{\mathfrak{m}}) = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$; d'où $\mathcal{N}(A) = 0$ (proposition 3.54).

Partie (ii) : On a $\text{Spec } A = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min } A} V(\mathfrak{p})$. Montrons que $V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{p}') = \emptyset$ pour tout couple d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$. En effet, si $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{p}')$, l'anneau $A_{\mathfrak{q}}$

aurait au moins deux idéaux premiers minimaux, à savoir $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ et $\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{q}}$; mais par hypothèse $A_{\mathfrak{q}}$ est intègre, donc son unique idéal premier minimal est l'idéal 0, contradiction. Comme $\text{Min } A$ est un ensemble fini, il s'ensuit que $V(\mathfrak{p})$ est une partie ouverte et fermée de $\text{Spec } A$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Min } A$, et on a une décomposition : $A \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Min } A} B^{(\mathfrak{p})}$ telle que l'image de l'application induite $\text{Spec } B^{(\mathfrak{p})} \rightarrow \text{Spec } A$ est $V(\mathfrak{p})$ pour chaque $\mathfrak{p} \in \text{Min } A$ (voir l'exercice 3.66(iii)); en particulier, chaque $B^{(\mathfrak{p})}$ a un unique idéal premier minimal, dont l'image dans $\text{Spec } A$ est $\mathfrak{p}$. Noter aussi que A est réduit, par (i); il s'ensuit aisément que $B^{(\mathfrak{q})}$ est réduit, et donc son unique idéal premier minimal est l'idéal 0. On conclut que le noyau de la projection $A \rightarrow B^{(\mathfrak{p})}$ est $\mathfrak{p}$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Min } A$, d'où l'assertion.

Problème 6.117, partie (i) : Soit $\phi := \text{Spec } f$; noter que $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \cap D(b) = D(b(\mathfrak{p}))$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. D'autre part, $D(b(\mathfrak{p})) = \emptyset$ si et seulement si $b(\mathfrak{p})$ est nilpotent dans $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$; on conclut que $\Sigma_b = \phi(D(b))$, et il suffit alors d'invoquer le théorème de Chevalley 6.115 et son corollaire 6.116(ii).

Partie (ii) : Soit C un anneau tel que $\text{Spec } C$ est un espace topologique réductible; alors il existe des idéaux $I, I' \subset C$ avec $\text{Spec } C = V(I) \cup V(I')$ et $V(I), V(I')$ strictement contenus dans $\text{Spec } C$. Cela veut dire que $I \cap I' \subset \mathcal{N}(C)$, le nilradical de C , et $I, I' \not\subset \mathcal{N}(C)$. Donc, il existe $c \in I, c' \in I'$ tels que $c, c' \notin \mathcal{N}(C)$ et $cc' \in \mathcal{N}(C)$. Réciproquement, si $c, c' \in C$ vérifient ces deux conditions, alors $\text{Spec } C = V(Cc) \cup V(Cc')$ et $V(Cc), V(Cc')$ sont strictement contenus dans $\text{Spec } C$, donc ce dernier est réductible. Or, soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; il s'ensuit que la fibre $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est réductible $\Leftrightarrow$ il existe $\bar{b}/s, \bar{b}'/s' \in B \otimes_A k(\mathfrak{p}) = (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{p}}$ non nilpotents, tels que $\bar{b}\bar{b}'/(ss')$ soit nilpotent $\Leftrightarrow$ il existe $b, b' \in B$ dont les classes $\bar{b}/1, \bar{b}'/1 \in (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{p}}$ ne sont pas des éléments nilpotents, et tels que $bb'/1$ le soit. On conclut aisément que :

$$\Sigma' = \bigcup_{b, b' \in B} (\Sigma_b \cap \Sigma_{b'}) \setminus \Sigma_{bb'}$$

et cette partie est alors ind-constructible, compte tenu de la partie (i).

Ensuite, d'après l'exercice 3.66(iii), si $\text{Spec } C$ est disconnexe, il existe des anneaux $C', C'' \neq 0$ et un isomorphisme $C \xrightarrow{\sim} C' \times C''$; l'élément $(1, 0) \in C' \times C''$ correspond alors à un idempotent $x \in C$ tel que $x, 1-x \neq 0$. De l'autre côté, si $c \in C$ est un élément tel que $c, 1-c \notin \mathcal{N}(C)$ et $c \cdot (1-c) \in \mathcal{N}(C)$, on voit que $\text{Spec } C = V(Cc) \cup V(C(1-c))$ et $V(Cc), V(C(1-c)) \neq \emptyset$, et évidemment $V(Cc) \cap V(C(1-c)) = \emptyset$. Dans notre situation, C est de la forme $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ pour quelque $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, donc c s'écrit sous la forme b/a pour certains $b \in B$ et $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, et alors $1-c = (a-b)/a$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on conclut que

$$\Sigma'' = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B} (\Sigma_b \cap \Sigma_{a-b}) \setminus \Sigma_{b(a-b)}.$$

Partie (iii) : D'après (ii), le complémentaire Ω' (resp. Ω'') de Σ' (resp. Σ'') dans $\text{Spec } A$ est une partie pro-constructible; son adhérence $\bar{\Omega}'$ (resp. $\bar{\Omega}''$) est alors l'ensemble des spécialisations des points de Ω' (resp. de Ω''), par le corollaire 4.67(i). Par hypothèse, $\mathfrak{p}_0 \notin \Omega'$ (resp. $\mathfrak{p}_0 \notin \Omega''$), d'où $\mathfrak{p}_0 \notin \bar{\Omega}'$ (resp. $\mathfrak{p}_0 \notin \bar{\Omega}''$); en particulier le complémentaire de $\bar{\Omega}'$ (resp. de $\bar{\Omega}''$) est la partie ouverte non vide souhaitée.

Partie (iv) : Il suffit de montrer que $\text{Max } A$ rencontre toute partie constructible non vide $T \subset \text{Spec } A$, et on est aussitôt ramené au cas où $T = U \cap Z$ pour une partie ouverte U et une partie fermée Z de $\text{Spec } A$. On a alors $U = D(a_1) \cup \dots \cup D(a_n)$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in A$, et il suffit de montrer que $\text{Max } A$ rencontre $D(a_i) \cap Z$ pour au moins un indice $i \leq n$. Mais l'inclusion $D(a) = \text{Spec } A[a^{-1}] \rightarrow \text{Spec } A$ envoie $\text{Max } A[a^{-1}]$ dans $\text{Max } A$ (corollaire 6.80), donc on peut remplacer A par la K -algèbre de type fini $A[a^{-1}]$, et supposer que $T \neq \emptyset$ soit une partie fermée de $\text{Spec } A$, i.e. $T = \text{Spec } A/I$ pour un idéal $I \neq A$. On conclut avec le corollaire 1.35(i).

Partie (v) : Noter que $\Delta := \operatorname{Spec}(A) \setminus \Sigma_1 = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid (\operatorname{Spec} f)^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset\}$. D'après (i), (ii) et l'exercice 6.70(i), les parties $\Sigma' \cup \Delta$, Σ'' et $\Sigma'' \cup \Delta$ sont ouvertes pour la topologie constructible de $\operatorname{Spec} A$, et par hypothèse on a $\operatorname{Max} A \cap (\Sigma' \cup \Delta) = \emptyset$ (resp. $\operatorname{Max} A \cap \Sigma'' = \emptyset$, resp. $\operatorname{Max} A \cap (\Sigma'' \cup \Delta)$); au vu de (iv), il vient $\Sigma' \cup \Delta = \emptyset$ (resp. $\Sigma'' = \emptyset$, resp. $\Sigma'' \cup \Delta = \emptyset$), CQFD.

Problème 6.119, partie (i) : Disons que $B = A[X_1, \dots, X_k]/(P_1, \dots, P_r)$ pour certains $P_1, \dots, P_r \in A[X_1, \dots, X_k]$, et que b soit la classe d'un polynôme $Q \in A[X_1, \dots, X_k]$. Soit alors $A_0 \subset A$ le sous-anneau engendré par les coefficients de $P_1, \dots, P_r, Q$, posons $B_0 := A_0[X_1, \dots, X_k]/(P_1, \dots, P_r)$, et soit $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ le morphisme structurel de l' A_0 -algèbre B_0 . Soit aussi $b_0 \in B_0$ la classe de Q , et on considère la partie $\Omega_{b_0} \subset \operatorname{Spec} A_0$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}_0$ tels que $b_0(\mathfrak{p}_0) := b_0 \otimes 1 \neq 0$ dans $B_0 \otimes_{A_0} k(\mathfrak{p}_0)$. Or, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, soit $\mathfrak{p}_0 := A_0 \cap \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_0$; on a un isomorphisme naturel de $k(\mathfrak{p})$ -algèbres :

$$B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} B_0 \otimes_{A_0} k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} (B_0 \otimes_{A_0} k(\mathfrak{p}_0)) \otimes_{k(\mathfrak{p}_0)} k(\mathfrak{p}).$$

En particulier, les homomorphismes naturels $i : A_0 \rightarrow A$, $B_0 \rightarrow B$, $k(\mathfrak{p}_0) \rightarrow k(\mathfrak{p})$ induisent un homomorphisme injectif d'anneaux $B_0 \otimes_{A_0} k(\mathfrak{p}_0) \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ qui envoie $b_0(\mathfrak{p}_0)$ sur $b(\mathfrak{p})$. Cela montre que $\Omega_b = (\operatorname{Spec} i)^{-1}(\Omega_{b_0})$, et on est ainsi ramené à montrer que Ω_{b_0} est constructible dans $\operatorname{Spec} A_0$. On peut donc remplacer A et B par A_0 et B_0 , et supposer du départ que A soit noethérien. On applique le critère de la proposition 6.113 : soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; il faut montrer que si l'adhérence de $V(\mathfrak{p}) \cap \Omega_b$ n'a pas intérieur vide dans $V(\mathfrak{p})$, alors $V(\mathfrak{p}) \cap \Omega_b$ contient une partie ouverte non vide de $V(\mathfrak{p})$. Posons $\overline{A} := A/\mathfrak{p}$ et $\overline{B} := \overline{A} \otimes_A B$, et soient $\overline{b} \in \overline{B}$ l'image de b , et $\Omega_{\overline{b}} \subset \operatorname{Spec} \overline{A}$ la partie des idéaux premiers $\overline{\mathfrak{p}}$ tels que $\overline{b} \otimes 1 \neq 0$ dans $\overline{B} \otimes_{\overline{A}} k(\overline{\mathfrak{p}})$; évidemment l'inclusion naturelle $\operatorname{Spec} \overline{A} \rightarrow \operatorname{Spec} A$ identifie $V(\mathfrak{p}) \cap \Omega_b$ avec $\Omega_{\overline{b}}$. Quitte à remplacer A et B par $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on peut ainsi supposer que A soit intègre, et on est ramené à montrer que si Ω_b est une partie dense de $\operatorname{Spec} A$, alors Ω_b contient une partie ouverte non vide de $\operatorname{Spec} A$. Or, d'après le théorème de platitude générique, il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $B[a^{-1}]$ soit un $A[a^{-1}]$ -module libre. Soit $b' \in B[a^{-1}]$ l'image de b , et $\Omega_{b'} \subset \operatorname{Spec} A[a^{-1}]$ la partie des idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset A[a^{-1}]$ tels que $b' \otimes 1 \neq 0$ dans $B[a^{-1}] \otimes_{A[a^{-1}]} k(\mathfrak{p})$; évidemment l'inclusion naturelle $\operatorname{Spec} A[a^{-1}] \rightarrow \operatorname{Spec} A$ identifie $\Omega_{b'}$ avec $\Omega_b \cap D(a)$. Quitte à remplacer A et B par $A[a^{-1}]$ et $B[a^{-1}]$, on peut alors supposer que B soit un A -module libre. Dans ce cas, on trouve aisément une décomposition $B = L \oplus L'$ pour deux A -modules libres L et L' , avec L de rang fini et $Ab \subset L$; en invoquant à nouveau le théorème de platitude générique, on trouve de plus $a \in A$ tel que $(L/Ab) \otimes_A A[a^{-1}]$ soit un $A[a^{-1}]$ -module libre, et donc de même pour $(B/Ab) \otimes_A A[a^{-1}] = ((L/Ab) \otimes_A A[a^{-1}]) \oplus (L' \otimes_A A[a^{-1}])$. Quitte à remplacer A et B par $A[a^{-1}]$ et $B[a^{-1}]$, on peut donc supposer aussi que B/Ab soit un A -module libre, et on déduit un isomorphisme de A -modules

$$B \xrightarrow{\sim} Ab \oplus (B/Ab).$$

En particulier, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ on a $b \otimes 1 = 0$ dans $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ si et seulement si $(Ab) \otimes_A k(\mathfrak{p}) = 0$. Autrement dit, $\Omega_b = \operatorname{Supp}_A(Ab)$ est une partie fermée dense de $\operatorname{Spec} A$ (remarque 3.58(ii)), i.e. $\Omega_b = \operatorname{Spec} A$, et cela achève la preuve.

En dernier lieu, supposons que f soit un homomorphisme plat, et pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ on pose $b(\mathfrak{p}) := b \otimes 1 \in B \otimes_A A/\mathfrak{p}$; pour $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ deux idéaux premiers de A , on a les homomorphismes d'anneaux naturels :

$$B \otimes_A A/\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A A/\mathfrak{p} \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \quad b(\mathfrak{q}) \mapsto b(\mathfrak{p}) \mapsto b(\mathfrak{p}).$$

En particulier, $b(\mathfrak{p}) \neq 0 \Rightarrow b(\mathfrak{q}) \neq 0$. De plus, par la platitude de B , l'homomorphisme naturel $B \otimes_A A/\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{q})$ est injectif, d'où : $b(\mathfrak{q}) \neq 0 \Rightarrow b(\mathfrak{q}) \neq 0$. Cela montre que $\mathfrak{p} \in \Omega_b \Rightarrow \mathfrak{q} \in \Omega_b$, i.e. la partie constructible Ω_b contient toutes les générations de ses points, et elle est alors ouverte, d'après le corollaire 4.67(ii).

Partie (iii) : Montrons que (a) $\Rightarrow$ (b); pour cela, soient F le corps des fractions de A , et $K \subset E$ une extension algébrique de corps; noter que l'inclusion $A \rightarrow F$ induit une injection $E \otimes_K A \rightarrow E \otimes_K F$. Donc il suffit de vérifier que $E \otimes_K F$ est intègre, et on peut ainsi supposer du départ que A soit un corps; on peut aussi identifier K avec un sous-corps de A via l'homomorphisme structurel $K \rightarrow A$, et on fixe une clôture algébrique $\bar{A}$ de A . Ensuite, E est la colimite du système filtrant $(E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses sous-corps qui sont extensions finies de K ; donc, $E \otimes_K A$ est la colimite du système induit de K -algèbres $(E_\lambda \otimes_K A \mid \lambda \in \Lambda)$ (exercice 3.14), et il suffit de montrer que chaque $E_\lambda \otimes_K A$ est intègre. Ainsi, on peut supposer que E soit une extension finie de K , et comme E est séparable sur K , on trouve $\alpha \in E$ tel que $E = K[\alpha]$ (problème 1.83(iii)); de plus, on peut choisir un homomorphisme (injectif) de K -algèbres $E \rightarrow \bar{A}$ (théorème 1.71(ii)), et ainsi identifier E avec un sous-corps de $\bar{A}$ contenant K . Or, soit $h : E \otimes_K A \rightarrow \bar{A}$ l'homomorphisme de K -algèbres tel que $h(x \otimes a) := xa$ pour tous $x \in E$ et $a \in A$; l'image de h est l'extension finie $A[\alpha]$ de A , et il suffit de montrer que h est injectif. Mais $\dim_A E \otimes_K A = d := \dim_K E$, et f est A -linéaire; on est alors ramené à vérifier que $d' := \dim_A A[\alpha] = d$. Soit $P \in A[X]$ le polynôme minimal de α sur A ; il est de degré d' et ses coefficients sont algébriques sur K , car ils sont des polynômes symétriques des racines de P , et car α est algébrique sur K . Mais par hypothèse, K est algébriquement fermé dans A , donc $P \in K[X]$ est aussi le polynôme minimal de α sur K ; le degré de P est alors d , comme souhaité.

Réciproquement, montrons que (b) $\Rightarrow$ (a). Soit $\alpha \in A$ un élément entier sur l'image du corps K , de sorte que A contient l'extension finie $F := K[\alpha]$ de K . Soit E la clôture Galoisienne de F sur K dans une clôture algébrique de K ; l'inclusion $F \rightarrow A$ induit une injection $E \otimes_K F \rightarrow E \otimes_K A$, donc par hypothèse $E \otimes_K F$ est intègre. Compte tenu de l'exercice 3.67, le stabilisateur de α dans le groupe de Galois $G := \text{Gal}(E/K)$ est alors G , i.e. $\alpha \in K$, comme souhaité.

Partie (iv) : Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K ; on doit vérifier que la $\bar{K}$ -algèbre $C' := \bar{K} \otimes_K (A \otimes_K B)$ est intègre; mais par hypothèse, $A' := \bar{K} \otimes_K A$ et $B' := \bar{K} \otimes_K B$ sont intègres, et on a un isomorphisme de $\bar{K}$ -algèbres $C' \xrightarrow{\sim} A' \otimes_{\bar{K}} B'$ (exercice 3.63(i)). Ainsi, quitte à remplacer K, A et B par $\bar{K}, A'$ et B' , on peut supposer que K soit algébriquement clos, et il suffit de montrer que $C := A \otimes_K B$ est intègre.

Or, soient $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(B_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ les systèmes filtrants des K -sous-algèbres de type fini de A et respectivement B ; évidemment chaque A_λ et $B_{\lambda'}$ est encore géométriquement intègre, et d'après l'exercice 3.14, la K -algèbre C est la limite directe du système filtrant $(A_\lambda \otimes_K B_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$. Si $A_\lambda \otimes_K B_{\lambda'}$ est intègre pour tout $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$, il s'ensuit aisément que C est intègre. On est ainsi ramené au cas où A et B sont des K -algèbres de type fini; en particulier, A et B sont noethériens, et l'homomorphisme naturel $f : A \rightarrow C$ est de présentation finie (exercice 6.70(i.a)). Or, soit $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$; d'après le Nullstellensatz, l'homomorphisme induit $K \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est un isomorphisme, ainsi $k(\mathfrak{m}) \otimes_K B \xrightarrow{\sim} B$ est intègre, donc $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{m})$ est irréductible pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. D'après le problème 6.117(v), il s'ensuit que $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$ est irréductible pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Soit $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ le point générique unique de $\text{Spec } A$, et $\mathfrak{q}_0$ le point générique unique de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}_0)$. On remarque que f est un homomorphisme plat d'anneaux, donc $\text{Spec } f$ est générissante (théorème 3.84(ii)). Soit alors $\mathfrak{q} \in \text{Spec } C$; le point $\mathfrak{p} := (\text{Spec } f)(\mathfrak{q})$ est une spécialisation de $\mathfrak{p}_0$, donc $\mathfrak{q}$ admet une généralisation $\mathfrak{q}' \in (\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}_0)$, et $\mathfrak{q}'$ est à son tour une spécialisation de $\mathfrak{q}_0$. Cela montre que tout point de $\text{Spec } C$ est une spécialisation de $\mathfrak{q}_0$, i.e. $\text{Spec } C$ est irréductible, et $\mathfrak{q}_0$ est l'unique idéal premier minimal de C . Donc $\mathfrak{q}_0$ est aussi le nilradical de C , et pour conclure il suffit de montrer que C n'a aucun élément nilpotent non nul (théorème 1.50(ii)). Soit alors $x \in C$ nilpotent; avec la notation de (i), pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ l'élément $x(\mathfrak{m}) \in C \otimes_A k(\mathfrak{m})$ est nilpotent, et puisque on vient de voir que $C \otimes_A k(\mathfrak{m})$ est intègre, il vient $x(\mathfrak{m}) = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Autrement dit, $\Omega_x \cap \text{Max } A = \emptyset$, et

comme $\text{Max } A$ est une partie dense dans la topologie constructible de $\text{Spec } A$ (problème 6.117(iv)), la partie constructible Ω_x doit ainsi être vide. En particulier, $x(\mathfrak{p}_0) = 0$; mais l'homomorphisme naturel $C \rightarrow C \otimes_A k(\mathfrak{p}_0) \xrightarrow{\sim} B \otimes_K k(\mathfrak{p}_0)$ est injectif, car B est une K -algèbre plate et car l'homomorphisme naturel $A \rightarrow k(\mathfrak{p}_0)$ est l'inclusion de A dans son corps des fractions. D'où, finalement $x = 0$, CQFD.

Partie (ii) : Soient $\overline{E}$ une clôture algébrique de E , et $\overline{K}$ la clôture algébrique de K contenue dans $\overline{E}$; les exercices 3.61 et 3.63(ii) fournissent des isomorphismes naturels $\overline{E} \otimes_E (E \otimes_K A) \xrightarrow{\sim} \overline{E} \otimes_K A \xrightarrow{\sim} \overline{E} \otimes_{\overline{K}} (\overline{K} \otimes_K A)$ de $\overline{E}$ -algèbres, et par hypothèse $\overline{K} \otimes_K A$ est intègre. Donc $\overline{E}$ et $\overline{K} \otimes_K A$ sont trivialement deux $\overline{K}$ -algèbres géométriquement intègres, et l'assertion découle alors de (iv).

Partie (v) : En raisonnant comme dans (iv), on se ramène au cas où A et B sont des K -algèbres réduites et de type fini; alors $S := \text{Min } A$ et $T := \text{Min } B$ sont des ensembles finis (exercice 6.109(iii)), et les homomorphismes naturels

$$A \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in S} A/\mathfrak{p} \quad B \rightarrow \prod_{\mathfrak{q} \in T} B/\mathfrak{q}$$

sont injectifs, donc de même pour l'homomorphisme induit

$$A \otimes_K B \rightarrow \prod_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in S \times T} A/\mathfrak{p} \otimes_K B/\mathfrak{q}.$$

On est ainsi ramené à montrer que tout facteur $A/\mathfrak{p} \otimes_K B/\mathfrak{q}$ est réduit, et cela nous ramène au cas où A et B sont des K -algèbres intègres de type fini. Dans ce cas, si K est algébriquement clos, l'assertion découle de (iv). Pour le cas général, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K ; il suffit de vérifier que $\overline{K} \otimes_K (A \otimes_K B) = (\overline{K} \otimes_K A) \otimes_{\overline{K}} (\overline{K} \otimes_K B)$ est réduit, et compte tenu du cas précédent, on est ainsi ramené à montrer que $\overline{K} \otimes_K A$ est réduit, pour toute K -algèbre intègre A . Ensuite, en raisonnant comme dans la solution de (iii), on se ramène à vérifier que $K[\alpha] \otimes_K A$ est réduit pour tout $\alpha \in \overline{K}$, et puisque l'inclusion $A \rightarrow E := \text{Frac}(A)$ induit une injection $K[\alpha] \otimes_K A \rightarrow K[\alpha] \otimes_K E$, on peut en outre supposer que A soit un corps. Dans cette situation, soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal de α sur K , de sorte que $K[\alpha] \otimes_K A = A[X]/(P)$; comme K est parfait, on a $\text{pgcd}(P, P') = 1$ (exercice 1.73), et en particulier, P est un produit $P = P_1 \cdots P_k$ de polynômes unitaires irréductibles *distincts* de $A[X]$. Par le lemme chinois 1.60, il vient $A[X]/(P) = \prod_{i=1}^k A[X]/(P_i)$ et chaque facteur $A[X]/(P_i)$ est une extension finie de A , d'où l'assertion.

Problème 6.120, partie (i) : Posons $\mathfrak{p} := f^{-1}\mathfrak{q}$, $k := k(\mathfrak{p})$, et soit $i : B \rightarrow \overline{B} := k \otimes_A B$ l'homomorphisme d'anneaux avec $i(b) := 1 \otimes b$ pour tout $b \in B$; d'après l'exercice 6.109(iii), $\text{Spec } \overline{B}$ a un nombre fini de composantes irréductibles $Z_1, \dots, Z_s$, et on peut supposer que $Z_{\mathfrak{q}} = Z_1 \cap \cdots \cap Z_r$ et $\mathfrak{q} \notin Z'_{\mathfrak{q}} := Z_{r+1} \cup \cdots \cup Z_s$ pour quelque $r \in \{1, \dots, s\}$; ainsi $Z_{\mathfrak{q}}$ et $Z'_{\mathfrak{q}}$ sont deux parties fermées de $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{q})) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. En outre, la topologie de $\text{Spec } \overline{B}$ est induite par $\text{Spec}(i) : \text{Spec } \overline{B} \rightarrow \text{Spec } B$, donc il existe $b \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que :

$$\mathfrak{q} \in U := D(b) \cap \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spec } \overline{B}[b^{-1}] \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \setminus Z'_{\mathfrak{q}}.$$

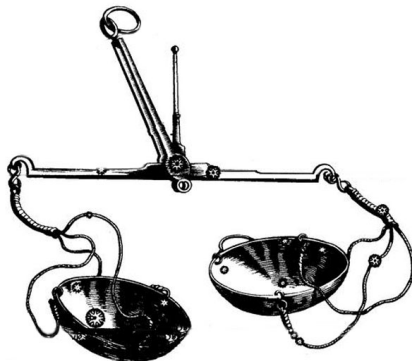
Munissons chaque $Z_1, \dots, Z_r$ de sa structure de sous-schéma fermé réduit de $\text{Spec } \overline{B}$, de sorte que $Z_i = \text{Spec } \overline{B}/\mathfrak{r}_i$ avec un idéal premier $\mathfrak{r}_i \subset \overline{B}_i$, pour tout $i = 1, \dots, r$. On a alors $U \cap Z_i = \text{Spec } (\overline{B}/\mathfrak{r}_i)[b^{-1}]$, et compte tenu du problème 6.82(i) il vient $\dim U \cap Z_i = \dim Z_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$; d'autre part :

$$\dim Z_{\mathfrak{q}} = \max(\dim Z_i \mid i = 1, \dots, r) \quad \text{et} \quad \dim U = \max(\dim U \cap Z_i \mid i = 1, \dots, r)$$

donc finalement $\dim U = n$. Soient $f' : A \rightarrow B[b^{-1}]$ la composition de B avec la localisation $B \rightarrow B[b^{-1}]$, de sorte que $\phi' := \text{Spec}(f') : \text{Spec } B[b^{-1}] \rightarrow \text{Spec } A$ s'identifie naturellement avec la restriction de ϕ à la partie ouverte $D(b) \subset \text{Spec } B$, et par suite $\phi'^{-1}(\mathfrak{p})$ s'identifie naturellement avec U . Quitte à remplacer B par $B[b^{-1}]$, on peut alors supposer que $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = Z_{\mathfrak{q}}$ et en particulier, $\dim \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = n$.

D'après le problème 6.12(ii) il existe $d \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme injectif et fini $\bar{g} : k[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \bar{B}$ de k -algèbres; par suite $\dim k[T_1, \dots, T_d] = \dim \bar{B} = n$, i.e. $d = n$ (corollaire 6.20(iii) et problème 6.82(i)). Chaque $\bar{g}(T_i)$ est une fraction $\bar{b}_i/s$ avec $\bar{b}_i \in B/\mathfrak{p}B$ et $s \in (A/\mathfrak{p}) \setminus \{0\}$; quitte à remplacer B par $B[s^{-1}]$, on peut ainsi supposer que $\bar{g}(T_i) \in B/\mathfrak{p}B$ pour $i = 1, \dots, n$. On trouve alors un homomorphisme de A -algèbres $g : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$ avec $k \otimes_A g = \bar{g}$. Par construction, g est quasi-fini au point $\mathfrak{q}$; d'après le corollaire 6.57(i), il existe alors $h \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que la composition de g avec la localisation $B \rightarrow B_h$ soit quasi-finie.

Partie (ii) : Soient $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ avec $\dim_{\mathfrak{q}}(B/A) = n$, et $h \in B \setminus \mathfrak{q}$ comme dans (i), de sorte que l'on a un homomorphisme quasi-fini $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B_h$ de A -algèbres. Rappelons que $\operatorname{Spec} B_h$ s'identifie naturellement avec la partie ouverte $D(h) \subset \operatorname{Spec} B$; d'autre part, en raisonnant comme dans la preuve de (i), on voit que $\dim_{\mathfrak{q}'}(B_h/A) = \dim_{\mathfrak{q}'}(B/A)$ pour tout $\mathfrak{q}' \in D(h)$. Quitte à remplacer B par B_h , on peut ainsi supposer que l'on a un homomorphisme quasi-fini $g : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$ de A -algèbres, et on montrera plus précisément que dans ce cas $U_n = \operatorname{Spec} B$. Car, soient $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p}' := f^{-1}\mathfrak{q}'$, et $k' := k(\mathfrak{p}')$; il vient un homomorphisme quasi-fini $k' \otimes_A g : k'[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k' \otimes_A B$ de k -algèbres, d'où $\dim_{\mathfrak{q}'}(B/A) \leq \dim k' \otimes_A B \leq \dim k'[T_1, \dots, T_n] = n$ (problème 6.82(i) et exercice 6.35).



LES premières deux sections de cette leçon nous fourniront un langage et des instruments efficaces pour explorer la *géographie* des modules sur les anneaux noethériens : d'abord on munira tout tel module M d'un ensemble d'*idéaux premiers associés* ; on montrera que cet ensemble est *fini* si M est de type fini, et dans ce cas les éléments *minimaux* de cet ensemble (sous l'ordre partiel déduit de l'inclusion d'idéaux) nous indiquent précisément le *support* de M , cette partie fermée du spectre de l'anneau sur laquelle M étale son extension. A l'intérieur de ce territoire, les premiers associés non minimaux signalent, d'autre part, des sortes de pics où trouvent leur demeure des sous-modules de M de support plus borné. Cette esquisse est ensuite détaillée davantage avec la *décomposition primaire* de M , qui fait l'objet de la deuxième section, et que l'on mettra à contribution dès la troisième section, dédiée aux *anneaux de Dedekind*, i.e. les anneaux noethériens intègres et intégralement clos de dimension un : elle jouera un rôle crucial pour montrer que tout idéal d'un tel anneau admet une factorisation unique comme produit de puissances d'idéaux premiers. En outre, on emploiera les premiers associés pour énoncer et démontrer une importante caractérisation des anneaux noethériens intègres et intégralement clos de dimension arbitraire (théorème 7.49), ainsi que pour établir les résultats classiques de Matlis concernant la classification des modules injectifs sur les anneaux noethériens : voir le problème 7.12.

En route on aura occasion, d'un côté, de développer les bases de la théorie des *anneaux artiniens*, en particulier le théorème de Akizuki, qui identifie cette classe d'anneaux avec celle des anneaux noethériens de dimension zéro ; de l'autre côté, on touchera brièvement aux *anneaux de valuation discrète*, les premiers exemples d'une classe plus générale d'anneaux que l'on étudiera en détail dans la leçon suivante.

La quatrième section est un interlude algèbro-géométrique : on y montre comment normaliser un schéma intègre noethérien $\underline{X}$ de dimension un par une suite finie d'éclatements de points singuliers, pourvu que le morphisme de normalisation $\underline{X}^\nu \rightarrow \underline{X}$ soit un revêtement (ramifié) *fini*. L'idée est d'abord expliquée pour le cas assez concret d'une courbe cubique nodale, où l'éclatement en question s'interprète à l'aide du faisceau des droites du plan passant par le nœud de la courbe ; le cas général fait l'objet du théorème 7.58, dont la preuve fait intervenir une bonne partie des outils que l'on a développé dans notre cours jusqu'ici. La leçon s'achève avec une dernière section de saveur homologique, consacrée à la construction de la *suite des foncteurs dérivés* (à droite ou à gauche) d'un foncteur additif ; en particulier on introduit les bifoncteurs $\text{Ext}_A^\bullet$ pour les modules sur un anneau A , ainsi que leurs alliés, les foncteurs $\text{Tor}_A^\bullet$, qui interviendront notamment dans la leçon 12, pour la caractérisation homologique des anneaux locaux réguliers (théorème de Serre).

7.1. Idéaux premiers associés à un module. Soient A un anneau, et M, N deux A -modules ; noter que si $\text{Supp}_A M \subset \text{Supp}_A N$, on a $\text{Supp}_A(M \oplus N) = \text{Supp}_A N$. Autrement

dit, le support ne permet pas de distinguer entre les A -modules N et $M \oplus N$; cela suggère qu'afin d'étudier plus en détail la structure d'un module, *il faudrait plutôt considérer l'ensemble des supports de ses sous-modules*. On est ainsi amené à la définition suivante :

Définition 7.1. Soient A un anneau, M un A -module, et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

- (i) On dit que $\mathfrak{p}$ est *associé* à M , s'il existe $m \in M$ tel que $\text{Supp}_A(m) = V(\mathfrak{p})$.
- (ii) L'*assassin* de M est l'ensemble $\text{Ass}_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \text{ est associé à } M\}$.

Remarque 7.2. (i) Soient $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$ et $m \in M$ avec $\text{Supp}_A(m) = V(\mathfrak{p})$. Il vient $V(\mathfrak{p}) = V(\text{Ann}_A(m))$ (remarque 3.58(ii)), d'où $\mathfrak{p} = \text{rad}(\text{Ann}_A(m))$ (corollaire 1.53).

- (ii) Soient M un A -module, $M' \subset M$ un A -sous-module; évidemment on a

$$\text{Ass}_A(M') \subset \text{Ass}_A(M).$$

- (iii) Il est aussi évident que $\text{Ass}_A(M) \subset \text{Supp}_A(M)$ pour tout A -module M .

Exemple 7.3. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k \in \text{Spec } A$ tels que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ pour tous $i \neq j$, donc $V(\mathfrak{p}_j) \not\subseteq V(\mathfrak{p}_i)$ pour $i \neq j$, et on pose $M := A/(\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_k)$. Noter que $\text{Supp}_A M = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_k)$ (remarque 1.56(ii)); on va montrer que $\text{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$.

- (i) Considérons d'abord le cas où

$$(*) \quad \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = A \quad \forall i \neq j.$$

Par le lemme chinois, l'application canonique $\phi : M \rightarrow A/\mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus A/\mathfrak{p}_k$ est un isomorphisme dans ce cas. Remarquons que $(*)$ équivaut à la condition :

$$V(\mathfrak{p}_i) \cap V(\mathfrak{p}_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

donc le support de M est la *réunion disjointe* $V(\mathfrak{p}_1) \sqcup \dots \sqcup V(\mathfrak{p}_k)$. Plus généralement, si M est un A -module de type fini tel que $\text{Supp } M$ est la réunion d'un nombre fini de parties fermées disjointes $Z_1, \dots, Z_k$, l'exercice 3.66 implique que M se décompose comme somme directe de A -modules $M_1, \dots, M_k$ tels que $\text{Supp}_A M_i = Z_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$ (les détails seront laissés en exercice au lecteur).

(ii) Dans le cas général, ϕ est injective, mais pas forcément surjective. Néanmoins, en vertu du lemme 1.55, pour tout $i = 1, \dots, k$ on peut trouver $a_i \in (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j) \setminus \mathfrak{p}_i$. Soit $\bar{a}_i \in M$ la classe de a_i ; on voit que $\phi(\bar{a}_i) = (b_1, \dots, b_k)$, avec $b_j = 0$ pour tout $j \neq i$, et $b_i \neq 0$. Or, comme $A/\mathfrak{p}_i$ est un anneau intègre, $\text{Ann}_A(b) = \mathfrak{p}_i$ pour tout élément $b \neq 0$ de $A/\mathfrak{p}_i$, donc $\text{Supp}_A(\bar{a}_i) = \text{Supp}_A(\phi(\bar{a}_i)) = \text{Supp}_A(b_i) = V(\mathfrak{p}_i)$. Par suite $\text{Ass}_A(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ pour $i = 1, \dots, k$, et $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\} \subset \text{Ass}_A(M)$. L'inclusion opposée suit de la remarque 7.2(ii) et du lemme général suivant :

Lemme 7.4. Soient M, N deux A -modules. On a

$$\text{Ass}_A(M \oplus N) = \text{Ass}_A(M) \cup \text{Ass}_A(N).$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ découle aussitôt de la remarque 7.2(ii). Ensuite, soient $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et $(m, n) \in M \oplus N$ avec $\text{Supp}_A(m, n) = V(\mathfrak{p})$; évidemment on a aussi $V(\mathfrak{p}) = \text{Supp}_A(m) \cup \text{Supp}_A(n)$. Mais $V(\mathfrak{p})$ est irréductible (et les supports de m et n sont des parties fermées de $\text{Spec } A$), donc on a soit $V(\mathfrak{p}) = \text{Supp}_A(m)$, soit $V(\mathfrak{p}) = \text{Supp}_A(n)$; d'où : soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(N)$. $\square$

Remarque 7.5. L'exemple 7.3 illustre quelques points importants qui seront développés ci-dessous :

(i) Premièrement, on peut remarquer que l'ensemble des premiers associés à l' A -module M est *fini*, alors que le support de M sera en général infini; néanmoins, le support de M est complètement déterminé par $\text{Ass}_A(M)$: il n'est rien d'autre que l'adhérence de ce dernier dans $\text{Spec } A$.

(ii) De plus, considérons deux idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ et soient $M := A/\mathfrak{p}$, $N := A/\mathfrak{q}$. Evidemment M et $M \oplus N$ ont le même support $V(\mathfrak{p})$; d'autre part, le lemme 7.4 nous dit que $\text{Ass}_A M = \{\mathfrak{p}\}$ et $\text{Ass}_A(M \oplus N) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$. Donc, du moins pour ces

simples exemples, l'ensemble des premiers associés code le support d'un module M par un invariant plus compact, et en même temps révèle plus fidèlement la structure de M , puisque il détecte la présence d'un sous-module M' dont le support est "caché" car ses composantes irréductibles sont strictement contenues dans celles du support de M (on dit que le support de M' est *immergé* dans celui de M). On verra que ces observations restent valables pour des modules de type fini arbitraires, du moins si A est *noethérien*. Le point de départ est la proposition suivante, analogue à la remarque 3.58(iii) :

Proposition 7.6. *Soient A un anneau noethérien, $S \subset A$ une partie multiplicative, M un A -module. On a :*

$$\text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \text{Ass}_A(M) \cap \text{Spec } S^{-1}A.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M) \cap \text{Spec } S^{-1}A$, et on choisit $m \in M$ dont le support est $V(\mathfrak{p})$; évidemment $S^{-1}(Am) = S^{-1}A \cdot (m/1)$ (où $m/1 \in S^{-1}M$ dénote l'image de m), et la remarque 3.58(iii) nous dit que

$$(*) \quad \text{Supp}_{S^{-1}A}(m/1) = \text{Supp}_A(m) \cap \text{Spec } S^{-1}A = V(S^{-1}\mathfrak{p})$$

donc $S^{-1}\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{S^{-1}A}S^{-1}M$. Réciproquement, soient $m/s \in S^{-1}M$ dont le support est irréductible, et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ tel que $\text{Supp}_{S^{-1}A}(m/s) = V(S^{-1}\mathfrak{p})$; puisque $\text{Supp}_{S^{-1}A}(m/s) = \text{Supp}_{S^{-1}A}(m/1)$, on peut supposer que $s = 1$. Avec $(*)$ on déduit $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(m)$, et puisque $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence de $\mathfrak{p}$ dans $\text{Spec } A$, il vient :

$$V(\mathfrak{p}) \subset \text{Supp}_A(m)$$

car $\text{Supp}_A(m)$ est fermé dans $\text{Spec } A$. Comme A est noethérien, $\mathfrak{p}$ est engendré par un système fini $\{x_1, \dots, x_k\}$; d'après la remarque 7.2(i) il existe alors $N \in \mathbb{N}$ avec

$$x_i^N \cdot \frac{m}{1} = 0 \quad \text{dans } S^{-1}M \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Donc, pour $i = 1, \dots, k$ il existe $u_i \in S$ tel que $u_i x_i^N m = 0$ dans M . On pose $u := u_1 \cdots u_k$, d'où $x_i^N \cdot um = 0$ dans M pour tout $i = 1, \dots, k$, et donc $\text{Supp}_A(um) = V(\text{Ann}_A(um)) \subset V(\mathfrak{p})$. Mais $\text{Supp}_{S^{-1}A}(um/1) = \text{Supp}_{S^{-1}A}(m/1)$, d'où $V(\mathfrak{p}) \subset \text{Supp}_A(um)$. On conclut que $\text{Supp}_A(um) = V(\mathfrak{p})$, et finalement $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$. $\square$

Corollaire 7.7. *Soient A un anneau noethérien, et*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de A -modules. On a :

$$\text{Ass}_A M' \subset \text{Ass}_A M \subset \text{Ass}_A M' \cup \text{Ass}_A M''.$$

Démonstration. La première inclusion a déjà été observée dans la remarque 7.2(ii). Soit maintenant $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$, et on choisit $m \in M$ dont le support est $V(\mathfrak{p})$; il faut montrer que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M' \cup \text{Ass}_A M''$. Pour cela, soit $N := Am$, $N' := M' \cap N$ et $N'' := N/N'$; les applications naturelles $N' \rightarrow M'$ et $N'' \rightarrow M''$ sont injectives, donc (encore par la remarque 7.2(ii)) il suffit de montrer que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A N' \cup \text{Ass}_A N''$. Or, évidemment $\text{Supp}_A N' \subset \text{Supp}_A N = V(\mathfrak{p})$; si $n \in N'$, le support de n est une partie fermée de $V(\mathfrak{p})$, donc il est soit $V(\mathfrak{p})$, soit une partie qui ne contient pas $\mathfrak{p}$. S'il existe $n \in N'$ avec $\text{Supp}_A(n) = V(\mathfrak{p})$, la preuve est achevée ; sinon, il vient $N'_\mathfrak{p} = 0$, et donc la projection $N_\mathfrak{p} \rightarrow N''_\mathfrak{p}$ est un isomorphisme. Dans ce cas, la proposition 7.6 implique que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{A_\mathfrak{p}} N''_\mathfrak{p} = \text{Ass}_A N'' \cap \text{Spec } A_\mathfrak{p}$, d'où le corollaire. $\square$

Or, soit M un A -module *de type fini* ; d'après la remarque 3.58(ii), la partie $Z := \text{Supp}_A(M)$ est fermée dans $\text{Spec } A$, donc Z est un espace spectral, pour la topologie induite par $\text{Spec } A$ (exemple 4.58). En particulier, $\text{Max}(Z) \neq \emptyset$ si $Z \neq \emptyset$, et tout $\mathfrak{p} \in Z$ est *spécialisation d'un point maximal de Z* , i.e. d'un idéal premier *minimal* du support de M (corollaire 4.72(i)). On a l'observation importante suivante :

Corollaire 7.8. Soient A un anneau noethérien, M un A -module. Alors :

- (i) $\text{Ass}_A M \neq \emptyset$ si et seulement si $M \neq 0$.
- (ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$ il existe $m \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \text{Ann}_A(m)$.
- (iii) $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p} = \bigcup_{m \in M \setminus \{0\}} \text{Ann}_A(m)$.
- (iv) $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p} = \bigcap_{m \in M} \text{rad}(\text{Ann}_A(m))$.
- (v) Si en outre M est de type fini, alors :
 - (a) $\text{Max}(\text{Supp}_A M) \subset \text{Ass}_A M \subset \text{Supp}_A M$
 - (b) $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p} = \text{rad}(\text{Ann}_A M)$.

Démonstration. (i) : On fixe $m \in M \setminus \{0\}$, et on pose

$$\mathcal{F}_m := \{\text{Ann}_A(am) \mid a \in A, am \neq 0\}.$$

On remarque que $A \notin \mathcal{F}_m$. Comme A est noethérien, $\mathcal{F}_m$ admet des éléments maximaux, donc soit $I \in \mathcal{F}_m$ maximal. Disons que $I = \text{Ann}_A(cm)$; on sait que $\text{Supp}_A(cm) = V(I)$, donc il suffit de montrer que I est un idéal premier. Or, soient $a, b \in A$ tels que $ab \in I$ et $a \notin I$; cela veut dire que $abcm = 0$ mais $acm \neq 0$, donc $J := \text{Ann}_A(acm) \in \mathcal{F}_m$, $b \in J$, et évidemment $I \subset J$, d'où $I = J$, par la maximalité de I . Par suite $b \in I$, comme souhaité.

(ii) : Soit $x \in M$ tel que $\text{Supp}_A(x) = V(\mathfrak{p})$. Si $x/1 \in M_{\mathfrak{p}}$ est l'image de x , on sait que $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(x/1) = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$ (par la remarque 3.58(iii)). Par le raisonnement précédent avec la famille $\mathcal{F}_{x/1}$ on déduit qu'il existe $a/s \in A_{\mathfrak{p}}$ tel que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \text{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(ax/s)$. Soit $y_1, \dots, y_k$ un système de générateurs de $\mathfrak{p}$; pour tout $i = 1, \dots, k$ il existe alors $u_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $y_i u_i a x = 0$ dans M . On pose $m := u_1 \cdots u_k a x$; évidemment $\mathfrak{p} \subset \text{Ann}_A(m)$. D'autre part, $\text{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(m/1) = \text{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(x/1) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, d'où $\text{Ann}_A(m) \subset \mathfrak{p}$, et on conclut que $\text{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}$.

(iii) : On vient de voir que tout premier associé à M est l'annulateur d'un élément de M ; d'autre part, la preuve de (i) ci-dessus montre que tout idéal de la forme $\text{Ann}_A(m)$ (avec $m \in M$) est contenu dans un premier associé à M , d'où l'assertion.

(v.a) : Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal du support de M . D'après la remarque 3.58(iii) on a $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \cap \text{Supp}_A M = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$, d'où $\text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$, en vertu de (i). Avec la proposition 7.6, on déduit que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$.

(iv) : On se ramène aisément au cas où $M = Ax$ pour quelque $x \in M$. D'après la remarque 3.58(ii), on a alors $V(\text{Ann}_A(x)) = \text{Supp}_A M$, d'où

$$\bigcap_{m \in M} \text{rad}(\text{Ann}_A(m)) = \text{rad}(\text{Ann}_A(x)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)} \mathfrak{p}$$

(corollaire 1.53) ; mais on a déjà observé que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)$ il existe $\mathfrak{q} \in \text{Max}(\text{Supp}_A M)$ avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$; compte tenu de (v.a), on déduit l'assertion.

(v.b) : Cela découle aussitôt de (iv). □

Exercice 7.9. Soient A un anneau noethérien et M, N deux A -modules.

- (i) Montrer que si M est plat, $\text{Ass}_A(M \otimes_A N) \subset (\text{Supp}_A M) \cap \text{Ass}_A N$.
- (ii) Montrer que si M est de type fini, $\text{Ass}_A \text{Hom}_A(M, N) = (\text{Supp}_A M) \cap \text{Ass}_A N$.

Exercice 7.10. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, M un B -module, N un A -module, et $\phi := \text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Montrer que :

$$\text{Ass}_A M_{[f]} = \phi(\text{Ass}_B M).$$

Corollaire 7.11. (Dévissage d'un module de type fini) Soient A un anneau noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini. Il existe une chaîne finie de sous-modules

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

et pour tout $i = 1, \dots, n$ un idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de A tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$.

Démonstration. On construit inductivement une telle suite de la façon suivante. On a $\text{Ass}_A M \neq \emptyset$ grâce au corollaire 7.8(i), donc soit $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}_A M$; par le corollaire 7.8(ii), il existe $x \in M$ tel que $Ax \simeq A/\mathfrak{p}_1$ et on pose $M_1 := Ax$, $M' := M/M_1$. Si $M' = 0$, la

chaîne $0 \subset M_1 = M$ convient. Sinon, on a $\text{Ass}_A M' \neq \emptyset$, et de la même façon on trouve $M'_1 \subset M'$ et $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}_A M'$ tels que $M'_1 \simeq A/\mathfrak{p}_2$; on prend pour $M_2 \subset M$ l'unique sous-module qui contient M_1 et tel que $M_2/M_1 = M'_1$. En procédant ainsi on construit pas par pas une chaîne $0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ qui doit être stationnaire, car A est noethérien et M de type fini, d'où l'assertion. $\square$

Problème 7.12. (Classification de Matlis [54] des modules injectifs sur les anneaux noethériens) Soient A un anneau noethérien, M un A -module, $S \subset A$ une partie.

- (i) Montrer que si M est injectif, $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$ -module injectif.
- (ii) Montrer que si $\phi : M \rightarrow N$ est une extension essentielle de M , alors $S^{-1}\phi : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ est une extension essentielle de $S^{-1}M$.
- (iii) En particulier, si $(E, \phi : M \rightarrow E)$ est une enveloppe injective de M , alors le couple $(S^{-1}E, S^{-1}\phi)$ est une enveloppe injective de $S^{-1}M$ (voir la définition 4.14(ii)).
- (iv) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, fixons une enveloppe injective $\phi_{(\mathfrak{p})} : A/\mathfrak{p} \rightarrow E_A(\mathfrak{p})$ du A -module $A/\mathfrak{p}$. Montrer que $\text{Ass}_A E_A(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.
- (v) Montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ le A -module $E_A(\mathfrak{p})$ est *indécomposable*, i.e. il n'est pas isomorphe à une somme directe de deux A -modules non nuls.
- (vi) Réciproquement, montrer que tout A -module injectif indécomposable non nul est isomorphe à $E_A(\mathfrak{p})$ pour un unique $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.
- (vii) Montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et tout $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, la multiplication scalaire par a sur $E_A(\mathfrak{p})$ est un automorphisme, i.e. $E_A(\mathfrak{p})$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module.
- (viii) Soient $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ deux idéaux premiers de A , et $j : A/\mathfrak{q} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ la localisation. Montrer qu'il existe un isomorphisme $A_{\mathfrak{q}}$ -linéaire

$$\tau : E_A(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\sim} E_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) \quad \text{tel que} \quad \tau \circ \phi_{(\mathfrak{q})} = \phi_{(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})} \circ j.$$

- (ix) Montrer que tout A -module injectif est isomorphe à une somme directe de A -modules injectifs indécomposables.
- (x) Si M est injectif, d'après (v), (vi) et (ix), il existe un système $(\Lambda_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } A)$ d'ensembles, et un isomorphisme A -linéaire

$$\omega : \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} I(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} M \quad \text{avec} \quad I(\mathfrak{p}) := E_A(\mathfrak{p})^{(\Lambda_{\mathfrak{p}})} \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A.$$

Avec cette notation, exhiber un isomorphisme $k(\mathfrak{p})$ -linéaire :

$$k(\mathfrak{p})^{(\Lambda_{\mathfrak{p}})} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A.$$

En particulier, la cardinalité de chaque $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est indépendante de l'isomorphisme ω .

- (xi) Montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ on a $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$ si et seulement si $\Lambda_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$.

7.2. Décomposition primaire. On veut maintenant généraliser l'exemple 7.3 à un module arbitraire de type fini sur un anneau noethérien.

Définition 7.13. Soient A un anneau, M un A -module, $N \subset M$ un A -sous-module.

- (i) Soit aussi $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. On dit que N est $\mathfrak{p}$ -primaire, si

$$\text{Ass}_A(M/N) = \{\mathfrak{p}\}.$$

- (ii) N est *primaire*, s'il est $\mathfrak{q}$ -primaire pour quelque $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$.
- (iii) N est *réductible*, s'il existe des sous-modules $N_1, N_2 \subset M$ tels que

$$N = N_1 \cap N_2 \quad \text{et} \quad N \neq N_1, N_2.$$

- (iv) N est *irréductible*, s'il n'est pas réductible et si $N \subsetneq M$.

Exemple 7.14. (i) On a déjà observé dans l'exemple 7.3(ii) que tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est trivialement un sous-module $\mathfrak{p}$ -primaire de A .

(ii) Si $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, tout idéal I de A avec $\text{rad}(I) = \mathfrak{m}$ est $\mathfrak{m}$ -primaire, car $\text{Supp}_A(A/I) = \{\mathfrak{m}\}$. Mais si le radical de I est un idéal premier $\mathfrak{p}$ non maximal, le sous-module I de A n'est pas forcément $\mathfrak{p}$ -primaire (voir la remarque 7.21(i)).

Proposition 7.15. Soient A un anneau noethérien, M un A -module, et $N \subset M$ un sous-module. On a :

- (i) Si N est irréductible, alors il est primaire.
- (ii) Si M est de type fini, N est intersection finie de sous-modules irréductibles.
- (iii) N est primaire $\Leftrightarrow N \subsetneq M$ et $\bigcap_{x \in M/N} \text{rad}(\text{Ann}_A x) = \bigcup_{x \in M/N \setminus \{0\}} \text{Ann}_A(x)$.

Démonstration. (i) : Soit $N \subsetneq M$ irréductible, et supposons par l'absurde que $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\} \subset \text{Ass}_A(M/N)$. Pour $i = 1, 2$ il existe alors $\overline{m}_i \in M/N$ tel que $\text{Ann}_A(A\overline{m}_i) = \mathfrak{p}_i$ (corollaire 7.8(ii)), donc $A\overline{m}_i \simeq A/\mathfrak{p}_i$. En particulier, pour tout $x \in A\overline{m}_i \setminus \{0\}$ on a $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}_i$; comme $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, il vient $A\overline{m}_1 \cap A\overline{m}_2 = 0$. Soient $m_1, m_2 \in M$ des représentants pour les classes $\overline{m}_1, \overline{m}_2$; on déduit que $(Am_1 + N) \cap (Am_2 + N) = N$, ce qui contredit l'irréductibilité de N .

(ii) : Noter que l'intersection d'une famille vide de sous-modules de M est M ; donc l'assertion est trivialement vérifiée pour $N = M$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-modules de M qui ne sont pas intersections finies de sous-modules irréductibles; comme A est noethérien et M de type fini, $\mathcal{G}$ admet des éléments maximaux, s'il n'est pas vide (proposition 6.64 et remarque 6.61(i,ii)). Soit N un élément maximal de $\mathcal{G}$; en particulier, N n'est pas irréductible, donc disons $N = N_1 \cap N_2$ pour deux sous-modules N_1, N_2 de M qui contiennent strictement N . Par maximalité de N , on a $N_1, N_2 \notin \mathcal{G}$; donc N_1 et N_2 sont intersections finies de sous-modules irréductibles. Mais alors il en est de même pour N , contradiction.

(iii) : Cela découle aussitôt du corollaire 7.8(iii,iv). □

Remarque 7.16. La décomposition fournie par la proposition 7.15(ii) est en général non unique. Par exemple, si A est un corps, M est un A -espace vectoriel, et les A -sous-modules irréductibles de M sont les hyperplans de M . Un A -sous-espace vectoriel de M admet évidemment plusieurs représentations différentes comme intersection d'hyperplans. On peut obtenir des résultats positifs sur l'unicité, si l'on remplace la décomposition en termes de sous-modules irréductibles, par une en termes de sous-modules primaires, du type contemplé dans la définition suivante :

Définition 7.17. Soient A un anneau, et M un A -module. Une *décomposition primaire* de M est la donnée d'une partie finie $S \subset \text{Spec } A$ et une famille $\mathcal{N} := (N_{(\mathfrak{p})} \mid \mathfrak{p} \in S)$ de sous-modules de M tels que :

- $N_{(\mathfrak{p})}$ est $\mathfrak{p}$ -primaire pour tout $\mathfrak{p} \in S$.
- $\bigcap_{\mathfrak{p} \in S} N_{(\mathfrak{p})} = 0$.

Le *support* et la *longueur* de $\mathcal{N}$ sont respectivement la partie S et la cardinalité de S . On dit que $\mathcal{N}$ est *non redondante*, si l'on a $\bigcap_{\mathfrak{q} \in S \setminus \{\mathfrak{p}\}} N_{(\mathfrak{q})} \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in S$.

Théorème 7.18. Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini.

- (i) M admet une décomposition primaire $\mathcal{N}$.
- (ii) Si $\mathcal{N}$ est non redondante, le support de $\mathcal{N}$ est $\text{Ass}_A M$.
- (iii) En particulier, $\text{Ass}_A M$ est une partie finie de $\text{Spec } A$.

Démonstration. (i) : Si $M = 0$, noter que l'intersection d'une famille vide de sous-modules de M est M , donc le théorème est trivialement vérifié avec $\mathcal{N} = \emptyset$. Soit alors $M \neq 0$. Par la proposition 7.15, il existe une décomposition $0 = P_1 \cap \dots \cap P_n$ par des sous-modules irréductibles $P_1, \dots, P_n$ de M , et chaque P_i est $\mathfrak{p}_i$ -primaire, pour quelque $\mathfrak{p}_i \in \text{Spec } A$. Soit $S := \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$; on pose

$$T_{(\mathfrak{p})} := \{1 \leq i \leq n \mid P_i \text{ est } \mathfrak{p}\text{-primaire}\} \quad N_{(\mathfrak{p})} := \bigcap_{i \in T_{(\mathfrak{p})}} P_i \quad \forall \mathfrak{p} \in S.$$

Il suffit de remarquer que $N_{(\mathfrak{p})}$ est $\mathfrak{p}$ -primaire pour tout $\mathfrak{p} \in S$: en effet,

$$M/N_{(\mathfrak{p})} \subset \bigoplus_{i \in T_{(\mathfrak{p})}} M/P_i$$

d'où $\text{Ass}_A(M/N_{(\mathfrak{p})}) \subset \bigcup_{i \in T_{(\mathfrak{p})}} \text{Ass}_A(M/P_i) = \{\mathfrak{p}\}$.

(ii) : Soit S le support de $\mathcal{N}$; comme $M \subset M' := \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} M/N_{(\mathfrak{p})}$, on a

$$\text{Ass}_A M \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in S} \text{Ass}_A M/N_{(\mathfrak{p})} = S.$$

D'autre part, puisque $\mathcal{N}$ n'est pas redondante, pour tout $\mathfrak{p} \in S$ on a

$$N'_{(\mathfrak{p})} := \bigcap_{\mathfrak{q} \in S \setminus \{\mathfrak{p}\}} N_{(\mathfrak{q})} \neq 0$$

donc il existe $x_{\mathfrak{p}} \in N'_{(\mathfrak{p})} \setminus N_{(\mathfrak{p})}$. L'image de $x_{\mathfrak{p}}$ dans M' est l'élément $y := (y_{\mathfrak{q}} \mid \mathfrak{q} \in S)$ avec $y_{\mathfrak{q}} = 0$ pour tout $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, et où $y_{\mathfrak{p}} \neq 0$ est la classe de $x_{\mathfrak{p}}$ dans $M/N_{(\mathfrak{p})}$. Donc, $\text{Ass}_A(Ax_{\mathfrak{p}}) = \text{Ass}_A(Ay) = \text{Ass}_A(Ay_{\mathfrak{p}}) \subset \text{Ass}_A(M/N_{(\mathfrak{p})}) = \{\mathfrak{p}\}$; mais $\text{Ass}_A(Ax_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$, par le corollaire 7.8(i), d'où $\text{Ass}_A(Ax_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$, et cela achève la preuve de (ii). L'assertion (iii) découle aussitôt de (ii). $\square$

Exercice 7.19. Soient A un anneau noethérien, M un A -module non nul de type fini, et $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subset A$ les idéaux premiers associés à M . Montrer qu'il existe une chaîne finie de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ telle que $\text{Ass}_A(M_i/M_{i-1}) = \{\mathfrak{p}_i\}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On déduit du théorème 7.18 que si A est noethérien, le support de toute décomposition primaire d'un A -module de type fini M contient $\text{Ass}_A M$, et toutes les décompositions primaires non redondantes de M ont la même longueur, qui est la cardinalité de $\text{Ass}_A M$. La question de l'unicité de la décomposition est le sujet du corollaire suivant :

Corollaire 7.20. Soient A un anneau noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini, $\mathcal{N} := (N_{(\mathfrak{p})} \mid \mathfrak{p} \in S)$ une décomposition primaire de M . Soit $\mathfrak{p}$ un élément minimal de S , et notons $j_{(\mathfrak{p})} : M \rightarrow M_{\mathfrak{p}}$ l'application de localisation. On a :

$$N_{(\mathfrak{p})} = \text{Ker } j_{(\mathfrak{p})}.$$

En particulier, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$, et la composante $\mathfrak{p}$ -primaire $N_{(\mathfrak{p})}$ est indépendante de la décomposition primaire $\mathcal{N}$.

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{q} \in S$ on a, en vertu de la proposition 7.6 :

$$\begin{aligned} \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}/N_{(\mathfrak{q}),\mathfrak{p}}) &= \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M/N_{(\mathfrak{q})})_{\mathfrak{p}} = \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \cap \text{Ass}_A(M/N_{(\mathfrak{q})}) \\ &= \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \cap \{\mathfrak{q}\} \\ &= \begin{cases} \{\mathfrak{p}\} & \text{si } \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

car $\mathfrak{p}$ est minimal dans l'ensemble S . Au vu du corollaire 7.8(i), il vient $N_{(\mathfrak{q}),\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{q} \in S \setminus \{\mathfrak{p}\}$; d'autre part, évidemment on a

$$0 = \bigcap_{\mathfrak{q} \in S} N_{(\mathfrak{q}),\mathfrak{p}} \quad \text{dans } M_{\mathfrak{p}}$$

et par suite $N_{(\mathfrak{p}),\mathfrak{p}} = 0$, d'où $N_{(\mathfrak{p})} \subset \text{Ker } j_{(\mathfrak{p})}$. Il vient aussi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$, car sinon la décomposition primaire $\mathcal{N}$ serait redondante (par le théorème 7.18(ii)) et on pourrait omettre sa composante $N_{(\mathfrak{p})}$; mais $\bigcap_{\mathfrak{q} \in S \setminus \{\mathfrak{p}\}} N_{(\mathfrak{q}),\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, contradiction.

Il reste donc à montrer que $\text{Ker } j_{(\mathfrak{p})} \subset N_{(\mathfrak{p})}$. Pour cela, soit $x \in M \setminus N_{(\mathfrak{p})}$, et notons $\bar{x} \in M/N_{(\mathfrak{p})}$ la classe de x ; comme $\bar{x} \neq 0$, on a $\text{Ass}_A(A\bar{x}) = \{\mathfrak{p}\} \subset \text{Supp}_A(A\bar{x})$. En particulier, la classe $\bar{x}/1$ de $\bar{x}$ dans $(M/N_{(\mathfrak{p})})_{\mathfrak{p}}$ est non nulle, et *a fortiori*, l'élément $x/1 \in M_{\mathfrak{p}}$ n'est pas nul non plus, i.e. $x \notin \text{Ker } j_{(\mathfrak{p})}$. $\square$

Remarque 7.21. Soient A un anneau noethérien, et M un A -module.

(i) Si M est de type fini, les composantes d'une décomposition primaire non redondante $\mathcal{N}$ de M qui correspondent aux idéaux premiers non minimaux de $\text{Ass}_A M$ ne sont pas indépendantes de $\mathcal{N}$, en général. Par exemple, soient K un corps, $A := K[X, Y]$ et prenons $M := A/I$, où $I \subset A$ est l'idéal engendré par X^2 et XY . On a les décompositions primaires non redondantes de M suivantes :

$$0 = XM \cap N_a \quad \text{avec } N_a := (aX + Y)M \quad \forall a \in K.$$

En effet, $M/XM \simeq A/XA$, donc XM est un sous-module XA -primaire de M , et $M/N_a \simeq A/J$, où $J = X^2A + (aX + Y)A$ est un idéal dont le radical est l'idéal maximal $\mathfrak{m} := XA + YA$, et ainsi M/N_a est $\mathfrak{m}$ -primaire, d'après l'exemple 7.14(ii). On voit aisément que $N_a \neq N_b$ si $a \neq b$ (les détails sont confiés aux soins du lecteur), donc ces décompositions sont toutes différentes. On appelle *idéaux premiers isolés* de M les éléments minimaux de $\text{Ass}_A M$. Les éléments non isolés de $\text{Ass}_A M$ sont appelés les *idéaux premiers immergés* de M . On parle aussi de *composantes isolées* et *composantes immergées* d'une décomposition : cf. la remarque 7.5(ii).

(ii) Prenons $M = A$. Dans ce cas, $\text{Supp}_A M = \text{Spec } A$, et d'autre part on sait que $\text{Ass}_A M$ contient $\text{Max}(\text{Supp}_A M)$, i.e. les idéaux premiers minimaux de A (corollaire 7.8(v.a)). Mais d'après le théorème 7.18(iii), $\text{Ass}_A M$ est un ensemble fini. On retrouve ainsi la finitude du nombre d'idéaux premiers minimaux de A , qui avait été démontrée par voie topologique dans l'exercice 6.109(iii).

(iii) De plus, le corollaire 7.8(iii) pour $M = A$ montre que la réunion des idéaux premiers associés de A est l'ensemble des diviseurs de zéro de A , et si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier minimal, tout élément de $\mathfrak{p}$ est un diviseur de zéro.

(iv) En outre, si A est réduit, le théorème 7.18(ii) entraîne que $\text{Ass}_A(A) = \text{Min } A$, car dans ce cas on a la décomposition primaire non redondante $0 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min } A} \mathfrak{p}$.

Exercice 7.22. Soient A un anneau, et $S \subset A$ la partie des éléments réguliers de A . La localisation $S^{-1}A$ s'appelle l'anneau total des fractions de A . Montrer que si $A \neq 0$ est réduit et noethérien, alors $S^{-1}A$ est un produit fini de corps.

Théorème 7.23. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, M un A -module, N un B -module tel que $N_{[f]}$ soit un A -module plat, et $\phi := \text{Spec } f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Alors on a :

- (i) $\phi(\text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N)) = \{\mathfrak{p}\}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ tel que $N/\mathfrak{p}N \neq 0$.
- (ii) $\text{Ass}_B(N \otimes_A M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N)$.

Démonstration. (i) : $N/\mathfrak{p}N$ est un $A/\mathfrak{p}$ -module plat, car $N_{[f]}$ est un A -module plat ; comme $A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre, tout élément non nul de $A/\mathfrak{p}$ est alors $N/\mathfrak{p}N$ -régulier (exercice 3.75(iii)), i.e. tout élément de $A \setminus \mathfrak{p}$ est $N/\mathfrak{p}N$ -régulier, et il vient aussitôt $\text{Ass}_A(N/\mathfrak{p}N) = \{\mathfrak{p}\}$; l'assertion découle alors de l'exercice 7.10.

(ii) : Soient $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$, et $x \in M$ tel que $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(ii)) ; ainsi, l'application $A \rightarrow M : a \mapsto ax$ se factorise à travers une injection A -linéaire $h : A/\mathfrak{p} \rightarrow M$, et comme $N_{[f]}$ est un A -module plat, $N \otimes_A h : N/\mathfrak{p}N \rightarrow N \otimes_A M$ est une injection B -linéaire, d'où $\text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N) \subset \text{Ass}_B(N \otimes_A M)$. Réciproquement, soit $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(N \otimes_A M)$, et prenons $y \in N \otimes_A M$ tel que $\text{Ass}_B(y) = \mathfrak{q}$. Écrivons $y = \sum_{i=1}^k n_i \otimes m_i$ avec $n_1, \dots, n_k \in N$ et $m_1, \dots, m_k \in M$, et posons $M' := \sum_{i=1}^k Am_i \subset M$. Puisque $N_{[f]}$ est un A -module plat, l'inclusion $i : M' \rightarrow M$ induit une injection B -linéaire $N \otimes_A i : N \otimes_A M' \rightarrow N \otimes_A M$, et $y \in \text{Im}(N \otimes_A i)$, d'où :

$$\text{Ass}_A(M') \subset \text{Ass}_A(M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(N \otimes_A M').$$

Il suffit alors de vérifier que $\text{Ass}_B(N \otimes_A M') \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M')} \text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N)$. Quitte à remplacer M par M' , on peut ainsi supposer que M soit un A -module de type fini.

Affirmation 7.24. Si $\text{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p}\}$, alors $\text{Ass}_B(N \otimes_A M) \subset \text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N)$.

Preuve : Dans ce cas, on a $V(\text{Ann}_A M) = \text{Supp}_A M = V(\mathfrak{p})$ (corollaire 7.8(v.a) et remarque 3.58(ii)) ; ainsi $\mathfrak{p}^r M = 0$ pour quelque $r \in \mathbb{N}$ (remarque 1.56(i)), et par suite, $\mathfrak{p}^r(N \otimes_A M) = 0$. Pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(N \otimes_A M)$, il vient alors $\mathfrak{p}B \subset \mathfrak{q}$, i.e. $\mathfrak{p} \subset f^{-1}\mathfrak{q}$; d'autre part, tout élément de $A \setminus \mathfrak{p}$ est M -régulier, donc $N \otimes_A M$ -régulier (en vertu de la platitude de $N_{[f]}$), d'où finalement $\mathfrak{p} = f^{-1}\mathfrak{q}$, i.e. $\text{Ass}_B(N \otimes_A M) \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Ensuite, d'après le corollaire 7.11, il existe une chaîne finie de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$, et pour tout $i = 1, \dots, n$ un idéal premier $\mathfrak{p}_i \subset A$

tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$; par platitude de $N_{[f]}$, il vient une chaîne de B -sous-modules $0 = P_0 \subset P_1 := N \otimes_A M_1 \subset \cdots \subset P_n := N \otimes_A M$ telle que

$$P_i/P_{i-1} \simeq N \otimes_A (A/\mathfrak{p}_i) \simeq N/\mathfrak{p}_i N \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Avec le corollaire 7.7, on déduit aisément que $\text{Ass}_B(N \otimes_A M) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}_i N)$. Mais d'après (i), on a $\text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}_i N) \cap \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$ si $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$, d'où l'assertion. $\diamond$

Soit alors $(M_{(\mathfrak{p})} \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M)$ une décomposition primaire non redondante de M (théorème 7.18(i,ii)), et posons $Q_{(\mathfrak{p})} := M/M_{(\mathfrak{p})}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$; il vient une injection A -linéaire $M \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} Q_{(\mathfrak{p})}$, d'ou, en vertu de la platitude de $N_{[f]}$:

$$\text{Ass}_B(N \otimes_A M) \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \text{Ass}_B(N \otimes_A Q_{(\mathfrak{p})})$$

(lemme 7.4). On est alors ramené à montrer que $\text{Ass}_B(N \otimes_A Q_{(\mathfrak{p})}) \subset \text{Ass}_B(N/\mathfrak{p}N)$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$; mais comme $\text{Ass}_A(Q_{(\mathfrak{p})}) = \{\mathfrak{p}\}$ pour tout tel $\mathfrak{p}$, il suffit d'invoquer l'observation 7.24 pour conclure. $\square$

Exercice 7.25. (i) Soient A un anneau noethérien, $A[T]$ la A -algèbre des polynômes d'une indéterminée T ; pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et tout A -module N posons $\mathfrak{p}[T] := \mathfrak{p}A[T]$ et $N[T] := A[T] \otimes_A N$. Soient M un A -module de type fini, $0 = N_1 \cap \cdots \cap N_k$ une décomposition primaire non redondante de M , et disons que N_i est $\mathfrak{p}_i$ -primaire, pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer que $N_i[T]$ est $\mathfrak{p}_i[T]$ -primaire pour $i = 1, \dots, n$, et $0 = N_1[T] \cap \cdots \cap N_k[T]$ est une décomposition primaire non redondante de $M[T]$. En particulier, on a :

$$\text{Ass}_{A[T]}(M[T]) = \{\mathfrak{p}[T] \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M\}.$$

(ii) Soient A un anneau, M un A -module, $n \in \mathbb{N}$; posons $A[T_\bullet] := A[T_1, \dots, T_n]$ et $M[T_\bullet] := A[T_\bullet] \otimes_A M$, et soit $f \in A[T_\bullet]$ tel que l'idéal engendré par les coefficients du polynôme f contient 1. Montrer que f est $M[T_\bullet]$ -régulier.

L'existence d'une décomposition primaire avait été démontrée originairement par Emmy Noether pour les idéaux d'un anneau noethérien, et avait été conçue par elle comme une généralisation de la factorisation des idéaux dans les anneaux de Dedekind, en produit de puissances d'idéaux maximaux (cette dernière représentation généralisait, à son tour, le théorème élémentaire sur la décomposition des nombres entiers comme produit de puissances de nombres premiers). La présentation suivie dans cette section est mon interprétation de l'évolution postérieure de ces concepts, à l'issue de laquelle la notion d'idéal premier associé -- généralisée aux modules arbitraires -- s'est révélée plus fondamentale que la décomposition primaire elle-même. Dans la section suivante, en inversant l'ordre chronologique, on déduira la factorisation des idéaux d'un anneau de Dedekind à partir de la décomposition primaire expliquée ci-dessus. Une preuve directe de cette factorisation qui n'a pas recours à la décomposition primaire se trouve dans le livre [49]. On conclut avec une exposition, sous forme d'exercice, du point de vue de Emmy Noether :

Exercice 7.26. (Décomposition primaire à la Emmy Noether.) Soient A un anneau noethérien, et $I \subset A$ un idéal tel que $1 \notin I$. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Si I est un idéal primaire, $\text{rad}(I)$ est un idéal premier.
- (ii) I est primaire $\Leftrightarrow$ pour tous $a, b \in A$ tels que $ab \in I$ et $a \notin I$, on a $b \in \text{rad}(I)$.
- (iii) Il existe une suite finie $I_1, \dots, I_k$ d'idéaux primaires de A avec

$$(*) \quad I = I_1 \cap \cdots \cap I_k.$$

De plus, si cette suite est non redondante, l'ensemble $S := \{\text{rad}(I_j) \mid j = 1, \dots, k\}$ contient précisément k idéaux premiers et il est indépendant de la décomposition $(*)$, et de même pour les idéaux I_j tels que $\text{rad}(I_j)$ est un élément minimal de S .

7.3. Anneaux noethériens de dimension zéro et un. On souhaite maintenant appliquer les résultats de la section précédente à l'étude des anneaux noethériens de dimension ≤ 1 . On démarre avec :

Définition 7.27. (i) Soient A un anneau et M un A -module. On dit que M est *artinien* si toute chaîne *descendante* $M_0 \supset M_1 \supset \dots$ de sous-modules de M est stationnaire, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M_n = M_k$ pour tout $n \geq k$.

(ii) On dit que A est un *anneau artinien*, si le A -module A est artinien.

Exercice 7.28. (i) Soient A un anneau, M un A -module, et $M_0 := 0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k := M$ une chaîne finie de sous-modules de M . Montrer que M est artinien (resp. noethérien) $\Leftrightarrow M_{i+1}/M_i$ est artinien (resp. noethérien) pour $i = 0, \dots, k-1$.

(ii) Montrer que si A est artinien, tout A -module de type fini est artinien.

Théorème 7.29. (Akizuki) *Un anneau $A \neq 0$ est artinien si et seulement s'il est noethérien de dimension zéro.*

Démonstration. Soit $A \neq 0$ noethérien de dimension zéro ; comme tout idéal premier de A est à la fois maximal et minimal, l'exercice 6.109(iii) nous dit que $\text{Spec } A$ est un ensemble fini. Disons que $\text{Spec } A = \text{Max } A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s\}$. Le nilradical $\mathcal{N} := \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_s$ est un idéal de type fini, car A est noethérien. Soit $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de $\mathcal{N}$; par le théorème 1.50(ii) il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $x_i^r = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Par suite $\mathcal{N}^t = 0$ pour tout $t \geq \max(1, rn)$, donc :

$$(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_s)^t = 0$$

et on est ramené à montrer :

Affirmation 7.30. Soit R un anneau tel que $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_t = 0$ pour des idéaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t \in \text{Max } R$ pas forcément distincts. Alors R est artinien si et seulement s'il est noethérien.

Preuve : Supposons que R soit artinien (resp. noethérien), et posons $J_{t-i} := \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ pour tout $i = 1, \dots, t$; on a $\mathfrak{m}_{t-i} \cdot (J_{i+1}/J_i) = 0$, *i.e.* J_{i+1}/J_i est un $k(\mathfrak{m}_{t-i})$ -espace vectoriel pour tout $i = 0, \dots, t-1$, et il est un R -module artinien (resp. noethérien) d'après l'exercice 7.28(i). Par suite :

$$(*) \quad \dim_{k(\mathfrak{m}_{t-i})} J_{i+1}/J_i < +\infty \quad \forall i = 0, \dots, t-1.$$

Cela entraîne aisément que tout sous-quotient J_{i+1}/J_i est un R -module noethérien (resp. artinien), donc de même pour R , encore en vertu de l'exercice 7.28(i). $\diamond$

Réciproquement, soient $A \neq 0$ artinien, et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Evidemment $B := A/\mathfrak{p}$ est encore artinien. Soit $x \in B \setminus \{0\}$. Il existe alors $n \geq 0$ tel que $Bx^n = Bx^{n+1}$, *i.e.* $x^{n+1} = yx^n$ pour quelque $y \in B$, et comme B est intègre, on obtient $yx = 1$; donc B est un corps, et $\mathfrak{p}$ est maximal. Cela montre que $\dim A = 0$. Soit ensuite $\mathcal{F}$ la famille des intersections finies d'idéaux maximaux de A ; comme A est artinien, $\mathcal{F}$ admet un élément minimal I ; disons $I = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$ pour une suite finie $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n \in \text{Max } A$. Il vient $I = I \cap \mathfrak{m}$, *i.e.* $I \subset \mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, et donc il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}$ (lemme 1.55) ; mais alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_j$. Cela montre que $\text{Max } A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\}$ est un ensemble fini, et $\mathcal{N} := \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$ est le nilradical de A . Comme A est artinien, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}^k = \mathcal{N}^{k+1}$. On va montrer que $\mathcal{N}^k = 0$; il viendra alors $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k = 0$, et pour conclure, il suffira d'invoquer l'observation 7.30. On raisonne par l'absurde : si $\mathcal{N}^k \neq 0$, la famille $\mathcal{F}$ des idéaux $I \subset A$ tels que $I \cdot \mathcal{N}^k \neq 0$ est non vide, et donc elle admet un élément minimal J . Il existe alors $x \in J$ avec $x\mathcal{N} \neq 0$, et par minimalité de J il vient $J = Ax$. De plus, $x\mathcal{N} \cdot \mathcal{N}^k = x\mathcal{N}^{k+1} = x\mathcal{N}^k$, donc $x\mathcal{N} \in \mathcal{F}$, d'où $x\mathcal{N} = Ax$, toujours par minimalité de Ax . Soit alors $y \in \mathcal{N}$ tel que $x = xy$; il vient $x = xy^r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, d'où $x = 0$, car y est nilpotent. Mais $x\mathcal{N} \neq 0$, contradiction. $\square$

Théorème 7.31. *Tout anneau artinien est produit d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens.*

Démonstration. La preuve du théorème 7.29 montre que $\text{Spec } A$ est un espace topologique discret et fini. Le théorème suit alors aussitôt de l'exercice 3.66(iii). $\square$

Proposition 7.32. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. Alors, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- soit, $\mathfrak{m}^i \neq \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$
- soit, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^i = 0$.

Le deuxième cas se vérifie si et seulement si $\dim A = 0$.

Démonstration. Si $\mathfrak{m}^i = \mathfrak{m}^{i+1}$, le lemme de Nakayama implique que $\mathfrak{m}^i = 0$. Or, si $\mathfrak{m}^i = 0$, et si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, on obtient $\mathfrak{m}^i \subset \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, i.e. $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, ce qui montre que A est de dimension zéro. Réciproquement, si $\dim A = 0$, l'anneau A est artinien, par le théorème 7.29, donc la première condition ne peut pas se vérifier. $\square$

Proposition 7.33. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *A est principal.*
- (b) *$\mathfrak{m}$ est un idéal principal.*
- (c) *$\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.*
- (d) *Tout idéal de A est une puissance de $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Evidemment (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

(c) $\Rightarrow$ (d) : Si $d := \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, d'où $\mathfrak{m} = 0$, par le lemme de Nakayama. Dans ce cas, A est un corps, et (d) est trivialement vérifiée.

Si $d = 1$, soit $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$; on déduit que $\mathfrak{m} = Ax + \mathfrak{m}^2$, d'où $\mathfrak{m} = Ax$, par le corollaire 3.50. D'autre part, par la proposition 7.32 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$. Or, soit $I \neq 0$ un idéal de A ; il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $I \subset \mathfrak{m}^k$ mais $I \not\subset \mathfrak{m}^{k+1}$. Donc, il existe $y \in I$ et $a \in A$ tels que $y = ax^k$, et $y \notin Ax^{k+1}$; cela implique que $a \notin \mathfrak{m}$, donc a est inversible. D'où, $\mathfrak{m}^k \subset I$, et donc $I = \mathfrak{m}^k$.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, on a déjà remarqué que A est un corps, donc (a) est trivialement vérifiée. Sinon, soit $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$; par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $Ax = \mathfrak{m}^k$, et comme $Ax \not\subset \mathfrak{m}^2$, on voit que $k = 1$, donc $\mathfrak{m}$ est principal, et l'hypothèse (d) implique alors que tout idéal de A est principal. $\square$

7.3.1. Anneaux noethériens de dimension un. Dans le paragraphe précédent on a étudié la structure des anneaux noethériens de dimension zéro. Cette classe d'anneaux est importante, car d'un côté est la première en ordre de complexité croissante, et de l'autre côté, on peut parfois réduire des questions concernant les anneaux noethériens généraux au cas des anneaux artiniens. Toujours en ordre de complexité croissante, on trouve en deuxième position les anneaux noethériens de dimension un. D'un point de vue géométrique, leur intérêt dérive du fait qu'ils sont les anneaux que l'on rencontre dans l'étude des courbes algébriques ; d'autre part, les anneaux d'entiers des extensions finies de $\mathbb{Q}$ appartiennent aussi à cette classe, qui est donc fondamentale pour le développement de la théorie algébriques des nombres. Dans ce paragraphe on démontrera les résultats classiques -- dus essentiellement à Dedekind -- sur la décomposition des idéaux dans les anneaux noethériens de dimension un. L'outil de base pour notre méthode est la décomposition primaire de la section 7.2. On démarre avec :

Proposition 7.34. *Si A est un anneau noethérien intègre de dimension un, tout idéal $I \neq 0$ de A s'écrit de façon unique comme produit d'idéaux primaires, dont les radicaux sont tous distincts. (Si $I = A$, il s'agit du produit d'une famille vide d'idéaux, qui est A .)*

Démonstration. On peut supposer que $I \neq A$, de sorte que $M := A/I \neq 0$ admet une décomposition primaire non redondante :

$$0 = N_1 \cap \cdots \cap N_k \quad \text{pour certains sous-modules primaires } N_1, \dots, N_k \subset M.$$

Donc $\text{Ass}_A M/N_i = \{\mathfrak{p}_i\}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ pour tout $i \neq j$. Evidemment, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe un idéal $J_i \subset A$ contenant I , tel que $N_i = J_i/I$, d'où $M/N_i = A/J_i$, et compte tenu de la remarque 7.2(i), on voit que $\mathfrak{p}_i = \text{rad}(J_i)$. De plus, comme A est intègre, 0 est l'unique idéal premier minimal de A , et $\mathfrak{p}_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, car $I \neq 0$. Donc, tout $\mathfrak{p}_i$ est maximal (car $\dim A = 1$), et en particulier, $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = A$ pour $i \neq j$, d'où $J_i + J_j = A$ pour $i \neq j$. Par le lemme chinois (lemme 1.60), il s'ensuit que $I = \bigcap_{i=1}^k J_i = \prod_{i=1}^k J_i$.

Pour l'unicité : soit $I = I_1 \cdots I_r$ une telle factorisation. Le raisonnement ci-dessus montre que $I_i + I_j = A$ pour tous $i \neq j$, donc $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, encore par le lemme chinois, et $0 = (I_i/I) \cap \cdots \cap (I_r/I)$ est une décomposition primaire de M . Mais comme $I \neq 0$, les radicaux $\mathfrak{p}_i$ des I_i sont tous maximaux, et donc sont en même temps tous minimaux dans l'ensemble $S := \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$; par le corollaire 7.20, il vient $S = \text{Ass}_A M$, et les I_i sont uniquement déterminés. $\square$

Remarque 7.35. Avec les hypothèses de la proposition 7.34, soit $I = J_1 \cdots J_k$ l'unique factorisation de I comme produit d'idéaux primaires. Pour $i = 1, \dots, k$, soit $\mathfrak{p}_i := \text{rad}(J_i)$, et notons $j_i : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}$ et $j'_i : A/I \rightarrow (A/I)_{\mathfrak{p}_i}$ les localisations. Le corollaire 7.20 nous dit plus précisément que $J_i/I = \text{Ker } j'_i$, i.e.

$$J_i = j_i^{-1}(I_{\mathfrak{p}_i}) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

On est donc amené à étudier la structure des idéaux primaires des localisations $A_{\mathfrak{p}_i}$.

Proposition 7.36. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local et noethérien avec $\dim A > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *A est intègre, intégralement clos, et $\dim A = 1$.*
- (b) *L'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est principal.*
- (c) *$\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.*
- (d) *Tout idéal $I \neq 0$ de A est une puissance de $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord :

Affirmation 7.37. Soient A comme dans la proposition, et $I \neq 0$ un idéal de A . Si A est intègre et si $\dim A = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subset I$.

Preuve : En effet, dans ce cas on a $\text{Spec } A = \{0, \mathfrak{m}\}$. Or, si $I = A$, l'assertion est triviale ; sinon, on a $\text{rad}(I) = \mathfrak{m}$ (corollaire 1.53). Soit $x_1, \dots, x_k$ un système fini de générateurs pour $\mathfrak{m}$; on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_i^N \in I$ pour tout $i = 1, \dots, k$, et on déduit aisément que $\mathfrak{m}^{(N-1)k+1} \subset I$. $\diamond$

(a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $a \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$; d'après l'observation 7.37 il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{m}^n \subset Aa$ et $\mathfrak{m}^{n-1} \not\subset Aa$. Soient $b \in \mathfrak{m}^{n-1} \setminus Aa$ et $x := ab^{-1} \in \text{Frac}(A)$. L'ensemble $x^{-1}\mathfrak{m} := \{x^{-1}y \mid y \in \mathfrak{m}\}$ est un A -sous-module de A , car $b\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^n \subset Aa$; i.e. $x^{-1}\mathfrak{m}$ est un idéal de A . Si $x^{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, l'idéal $\mathfrak{m}$ serait un $A[x^{-1}]$ -module fidèle de type fini (car A est noethérien et intègre), donc x^{-1} serait entier sur A (proposition 6.3). Mais par construction, $x^{-1} \notin A$, et A est intégralement clos, contradiction. Par suite $x^{-1}\mathfrak{m} = A$, i.e. $\mathfrak{m} = Ax$ (et $x \in \mathfrak{m}$).

(b) $\Leftrightarrow$ (c) : La condition (b) implique que $\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$. D'autre part, on a $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, par la proposition 7.32, d'où (c). Réciproquement, on déduit (b) à partir de (c) avec la proposition 3.51.

(b) $\Rightarrow$ (a),(d) : Soit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ un idéal premier de A , et disons que $\mathfrak{m} = Ax$ pour quelque $x \in A$; comme $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, il existe une suite finie $a_1, \dots, a_k$ d'éléments de A telle que $a_1x, \dots, a_kx$ est un système de générateurs de $\mathfrak{p}$. Mais $x \notin \mathfrak{p}$, donc $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{p}$, et il

vient $\mathfrak{m}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p} = 0$, par le lemme de Nakayama. Cela montre que A est intègre et $\dim A = 1$. Soit $I \neq 0$ un idéal de A ; par l'observation 7.37, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subset I$. Or, $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ est de dimension zéro, d'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n+1}$, et (b) implique que $\dim_{k(\mathfrak{m})} \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 = 1$. Par la proposition 7.33, il vient $I/\mathfrak{m}^{n+1} = \overline{\mathfrak{m}}^k$ pour quelque $k \leq n$, d'où $I = \mathfrak{m}^k$. En dernier lieu, soient $a, b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a^{-1}b$ est entier sur A ; il faut montrer que $a^{-1}b \in A$. Par ce qui précède, $Aa = Ax^j$, $Ab = Ax^i$ pour certains $i, j \in \mathbb{N}$; d'autre part, $Ax^k \neq Ax^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par la proposition 7.32. Par suite $a = ux^j$, $b = vx^i$ pour certains $u, v \in A \setminus \mathfrak{m}$, i.e. u et v sont inversibles dans A . D'où, $a^{-1}b = wx^{i-j}$ avec $w \in A^\times$. Si $i - j \geq 0$, on a $x^{i-j} \in A$, d'où $a^{-1}b \in A$, comme souhaité. Sinon, x^{i-j} est entier sur A , donc de même pour x^{-1} , et on a

$$x^{-n} + a_1x^{-n+1} + \cdots + a_n = 0 \quad \text{pour certains } a_1, \dots, a_n \in A.$$

D'où, $1 = -x \cdot (a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})$, i.e. x est inversible dans A , contradiction.

(d) $\Rightarrow$ (b) : On a déjà remarqué que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, donc soit $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$; par hypothèse, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $Ax = \mathfrak{m}^r$, et comme $Ax \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, on doit avoir $r = 1$. $\square$

Définition 7.38. Un anneau local noethérien de dimension 1 satisfaisant les conditions équivalentes de la proposition 7.36 est dit un *anneau de valuation discrète*.

Remarque 7.39. Cette terminologie s'explique par l'observation suivante. A tout anneau de valuation discrète A , on peut associer un homomorphisme de groupes

$$v : \text{Frac}(A)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

appelé la *valuation* de A . Pour cela, soient $a, b \in A \setminus \{0\}$, et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; on sait que $Aa = \mathfrak{m}^j$, $Ab = \mathfrak{m}^i$ pour certains $i, j \in \mathbb{N}$, et on pose $v(a^{-1}b) := i - j$. On vérifie aisément que $v(a^{-1}b)$ dépend seulement de $x := a^{-1}b$ (et il ne dépend pas du choix de a et b tels que $x = a^{-1}b$); il s'ensuit immédiatement que v est un homomorphisme du groupe (multiplicatif) $\text{Frac}(A)^\times$ dans le groupe (additif) $\mathbb{Z}$. On peut prolonger v en une application que l'on appellera encore

$$v : K := \text{Frac}(A) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

si l'on pose $v(0) := +\infty$. (on prolonge aussi l'addition de $\mathbb{Z}$ par : $n + \infty = +\infty + n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$). Avec cette convention, on vérifie aisément que

$$(*) \quad \begin{aligned} v(x + y) &\geq \min(v(x), v(y)) \\ v(x \cdot y) &= v(x) + v(y) \end{aligned} \quad \forall x, y \in K.$$

Exercice 7.40. Réciproquement, soient K un corps, $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ une application surjective qui satisfait les conditions (*) ci-dessus : une telle application est dite une *valuation de K* à valeurs entières.

- (i) Montrer que $K^+ := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ est un sous-anneau de K .
- (ii) Montrer que K^+ est un anneau de valuation discrète, de valuation v .

Donc, les anneaux de valuation discrète sont précisément les anneaux obtenus à partir d'une valuation à valeurs entières sur un corps.

Exemple 7.41. (i) Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier fixé. On considère l'application

$$v_p : \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{telle que} \quad v_p(p^n a/b) := n \quad \forall n, a, b \in \mathbb{Z} \text{ avec } (a, p) = (b, p) = 1.$$

On voit aisément (exercice!) que v_p est une valuation, appelée la *valuation p -adique* de $\mathbb{Q}$. L'anneau de valuation correspondant est la localisation $\mathbb{Z}_p$ pour $\mathfrak{p} := p\mathbb{Z}$.

- (ii) Soit K un corps, et $a \in K$ un élément fixé. On considère l'application

$$v_a : K(T)^\times \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{telle que} \quad v_a((T - a)^n P(T)/Q(T)) := n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $P, Q \in K[T]$ avec $P(a), Q(a) \neq 0$. Donc, pour toute fonction rationnelle $R \in K(T)$, l'entier $v_a(R)$ est l'ordre de multiplicité du zéro de R en a . On voit

aisément que v_a est une valuation du corps $K(T)$. L'anneau de valuation correspondant est la localisation $K[T]_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal $(T - a) \cdot K[T]$.

(iii) L'application $P(T) \mapsto -\deg_T P(T)$ sur $K[T]$ se prolonge en une valuation

$$v_\infty : K(T)^\times \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{telle que} \quad v_\infty(P/Q) := \deg_T Q - \deg_T P \quad \forall P, Q \in K[T] \setminus \{0\}.$$

On peut interpréter $v_\infty(P/Q)$ comme l'ordre de multiplicité du zéro de P/Q au point "à l'infini" de la droite projective $\mathbb{P}_K^1$.

Problème 7.42. (i) Soient $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation discrète, $K := \text{Frac}(V)$. Soient A une V -algèbre intègre, fidèlement plate, de type fini, et $d := \dim K \otimes_V A$. Montrer que toute composante irréductible de $\text{Spec } k(\mathfrak{m}) \otimes_V A$ a dimension d .

(ii) Montrer ensuite que $\dim A = d + 1$. (Voir aussi la remarque 8.32.)

Théorème 7.43. Soit A un anneau intègre et noethérien de dimension un. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est intégralement clos.
- (b) Tout idéal primaire de A est une puissance d'un idéal premier.
- (c) $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$.
- (d) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$ on a $\dim_{k(\mathfrak{p})} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 = 1$.

Démonstration. On sait que (a) $\Leftrightarrow$ (c), d'après la proposition 7.36, et grâce au fait que la propriété d'être intégralement clos est locale (proposition 6.14).

(c) $\Leftrightarrow$ (d) : Evidemment $k(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, et il suffit de remarquer que l'application naturelle

$$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \rightarrow \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$$

est un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$ -espaces vectoriels.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Soit $I \neq 0$ un idéal de $A_{\mathfrak{p}}$, notons $j : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ la localisation, et $J := j^{-1}I$; comme l'application induite $A/J \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/I$ est injective, et comme $A_{\mathfrak{p}}$ est intègre et de dimension un, on voit aisément que $\text{rad}(\text{Ann}_A(x)) \supset \mathfrak{p}$ pour tout $x \in A/J$. Mais $\mathfrak{p}$ est maximal, donc $\text{Supp}_A(x) = \{\mathfrak{p}\}$, pour tout $x \in A/J \setminus \{0\}$, i.e. $\text{Ass}_A(A/J) = \{\mathfrak{p}\}$. Autrement dit, J est $\mathfrak{p}$ -primaire, et par hypothèse, on a alors $J = \mathfrak{p}^k$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$; mais dans ce cas $I = J_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^k A_{\mathfrak{p}}$ (lemme 3.30(i)). Cela montre que tout idéal $\neq 0$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est une puissance de l'idéal maximal, d'où (c).

(c) $\Rightarrow$ (b) : Soit $I \subset A$ un idéal $\mathfrak{p}$ -primaire; il faut montrer que I est une puissance de $\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p} = 0$, on a $I = 0$, et l'assertion est triviale. Si $\mathfrak{p} \neq 0$, la remarque 7.35 implique que $I = j^{-1}(I_{\mathfrak{p}})$, où $j : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ est la localisation. Mais par hypothèse, $I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^k A_{\mathfrak{p}}$, pour quelque $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, $\mathfrak{p}^k$ est aussi un idéal $\mathfrak{p}$ -primaire (voir l'exemple 7.14(ii)), donc $\mathfrak{p}^k = j^{-1}(\mathfrak{p}^k A_{\mathfrak{p}})$, encore par la remarque 7.35; on conclut que $I = \mathfrak{p}^k$, d'où (b). $\square$

Définition 7.44. Un anneau intègre et noethérien de dimension un qui satisfait les conditions équivalentes du théorème 7.43 est dit un *anneau de Dedekind*.

Corollaire 7.45. Si A est un anneau de Dedekind, tout idéal $I \neq 0$ se factorise de façon unique comme produit de puissances d'idéaux premiers de A .

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 7.43 et de la proposition 7.34. $\square$

Exercice 7.46. Soient A un anneau de Dedekind, et $a, b \in A$. Montrer que $ab \in Aa^2 + Ab^2$.

Exercice 7.47. Soit K un corps de nombres, i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}$, et notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K , i.e. la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K . Montrer que $\mathcal{O}_K$ est un anneau de Dedekind. (On pourra utiliser le problème 6.85(iii)).

Problème 7.48. Soient A un anneau de Dedekind, et $I \subset A$ un idéal non nul.

- (i) Montrer que si A est semi-local, alors il est un anneau principal.
- (ii) Montrer que I peut être engendré par deux éléments.
- (iii) Montrer que I est un A -module inversible.
- (iv) Soit P un A -module projectif de type fini n . Exhiber des idéaux $I_1, \dots, I_n$ de A avec un isomorphisme de A -modules

$$P \xrightarrow{\sim} I_1 \oplus \dots \oplus I_n.$$

- (v) Pour P comme dans (iv), exhiber un isomorphisme de A -modules :

$$P \xrightarrow{\sim} A^{n-1} \oplus (\Lambda_A^n P)$$

et montrer que le *déterminant* $\Lambda_A^n P$ est un A -module inversible. Donc, la classe d'isomorphisme de P est complètement déterminée par le couple $(n, L) \in \mathbb{N} \times \text{Pic } A$, où n est le rang et L est la classe d'isomorphisme du déterminant de P .

- (vi) Montrer que tout A -module de type fini M admet une décomposition :

$$M \simeq M_{\text{tor}} \oplus P$$

avec M_{tor} le sous-module des éléments de torsion de M , et P un A -module projectif. En déduire qu'un A -module est plat (resp. projectif de type fini) si et seulement s'il est sans torsion (resp. si et seulement s'il est sans torsion et de type fini).

- (vii) Soient $t > 0$ un entier, $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal maximal, et on pose $A' := A/\mathfrak{p}^t$. Montrer que A' est un A' -module injectif.

- (viii) Montrer que tout A -module de torsion de type fini est une somme directe de A -modules cycliques.

7.3.2. Intersections de valuations discrètes. On voit aisément que l'intersection d'une famille arbitraire d'anneaux de valuation discrète d'un corps K est un sous-anneau intégralement clos de K . Le résultat suivant nous dit que, réciproquement, tout sous-anneau noethérien intégralement clos de K admet une telle description.

Théorème 7.49. Soit A un anneau intègre noethérien. Alors A est intégralement clos si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes :

- (a) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ de hauteur 1, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète.
- (b) Pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/aA)$ est de hauteur 1.

En outre, si ces conditions sont vérifiées, on a :

$$(*) \quad A = \bigcap_{\text{ht } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. Noter que si A est un corps, l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1 est vide, et d'autre part l'intersection d'une famille vide d'idéaux de A est A , donc le théorème est trivialement vérifié dans ce cas. On supposera ainsi que A ne soit pas un corps. Si A est intégralement clos et $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier avec $\text{ht } \mathfrak{p} = 1$, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est noethérien, intégralement clos et de dimension 1 (proposition 6.14), d'où (a). Soient ensuite $a \in A \setminus \{0\}$, $\overline{A} := A/aA$, et $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(\overline{A})$; d'après le corollaire 7.8(ii) on trouve $b \in A$ tel que $\text{Ann}_A(b\overline{A}) = \mathfrak{p}$, d'où $\text{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(b\overline{A}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ (remarque 3.58(ii)). Avec $x := a^{-1}b \in \text{Frac } A$, il vient $x \in (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{-1}$ (notation du §4.4.3) et $x \notin A_{\mathfrak{p}}$. Si l'on avait $x \cdot \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, l'élément x serait entier sur $A_{\mathfrak{p}}$, car $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ serait un $A_{\mathfrak{p}}[x]$ -module fidèle de type fini (proposition 6.3); mais $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos, d'où $x \in A_{\mathfrak{p}}$, contradiction. Donc $x \cdot \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$; en particulier, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est un idéal inversible de $A_{\mathfrak{p}}$, et il est alors principal, d'après la proposition 4.117. Noter que $\mathfrak{p} \neq 0$, car $a \neq 0$; par suite $\dim A_{\mathfrak{p}} > 0$, et avec la proposition 7.36 on conclut que $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$, d'où (b).

Réciproquement, si (b) est vérifiée, pour conclure la preuve du théorème, il suffira de montrer l'égalité (*). Soit alors $x \in \bigcap_{\text{ht } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}} \subset \text{Frac } A$, et disons que $x = a^{-1}b$ avec $a \in A \setminus \{0\}, b \in A$; il vient $b \in aA_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1. Soit $\overline{A} := A/aA$ et $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} = \text{Ass}_A(\overline{A})$; choisissons une décomposition primaire

$0 = \bar{q}_1 \cap \cdots \cap \bar{q}_n$ de $\bar{A}$ avec $\bar{q}_i$ un A -sous-module $\mathfrak{p}_i$ -primaire pour tout $i = 1, \dots, n$, dont l'image réciproque q_i dans A est alors un idéal $\mathfrak{p}_i$ -primaire. Par hypothèse, chaque $\mathfrak{p}_i$ est de hauteur 1, donc $q_i = A \cap aA_{\mathfrak{p}_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (corollaire 7.20). Mais $q_1 \cap \cdots \cap q_n = aA$, d'où $b \in aA$ et finalement $x \in A$, comme souhaité. $\square$

Problème 7.50. Soient K un corps, $v_1, \dots, v_k : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ une famille finie de valuations de K , et $A_i \subset K$ l'anneau de valuation de v_i , pour $i = 1, \dots, k$. On suppose que $A_i \not\subset A_j$ pour tous $i \neq j$. Montrer les assertions suivantes :

(i) Il existe $x \in K$ tel que $v_1(x) = 0$ et $v_i(x) > 0$ pour $i = 2, \dots, k$.

(ii) Il existe $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \cdots \times A_k$ tel que :

$$v_i(x_i - 1) > 0 \quad \text{et} \quad v_i(x_j) > 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k \text{ avec } i \neq j.$$

(iii) Pour tout $u_1, \dots, u_k \in K$ et tout $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ il existe $u \in K$ tel que :

$$v_i(u - u_i) = n_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

J'ai trouvé l'exercice suivant dans les notes d'un cours de M.Hochster (sur sa page web : <http://www.math.lsa.umich.edu/~hochster/614F15/614.pdf>) :

Exercice 7.51. (i) Soit $f : A \rightarrow B$ une inclusion d'anneaux intègres, telle que $f(A)$ soit un facteur direct du A -module $B_{[f]}$. Montrer que si B est intégralement clos, il en est de même pour A .

(ii) Soient K un corps, $n, d > 0$ deux entiers, $B := K[X_1, \dots, X_n]$, et $A \subset B$ la K -sous-algèbre engendrée par les monômes de degré total d . Montrer que A est noethérien, intègre et intégralement clos, mais A n'est pas factoriel si $n, d > 1$.

Exercice 7.52. (Modules réflexifs) Soient A un anneau noethérien, intègre et intégralement clos, M un A -module sans torsion et de type fini, et $K := \text{Frac } A$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ les localisations $M \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow M_K := K \otimes_A M$ sont injectives, donc on peut identifier naturellement M et $M_{\mathfrak{p}}$ à des A -sous-modules de M_K .

(i) Montrer que le A -module dual $M^\vee$ est de type fini et sans torsion, et que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ on a un isomorphisme naturel de $A_{\mathfrak{p}}$ -modules :

$$(M^\vee)_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M^\vee \xrightarrow{\sim} (M_{\mathfrak{p}})^\vee := \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \quad x \otimes \phi \mapsto x \cdot \phi_{\mathfrak{p}}.$$

(ii) Soit $\Sigma := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \text{ht } \mathfrak{p} = 1\}$. Montrer que $M^\vee = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (M^\vee)_{\mathfrak{p}}$ (il s'agit de l'intersection d'une famille de sous-modules de $(M^\vee)_K$).

(iii) Soit R un anneau ; on dit qu'un R -module N est *réflexif*, si l'application de bidualité $\beta_N : N \rightarrow N^{\vee\vee}$ est un isomorphisme (voir l'exemple 1.132). Par exemple, d'après l'exercice 4.110(iii), tout R -module projectif de type fini est réflexif.

(a) Soit R un anneau noethérien, S une R -algèbre plate et N un R -module réflexif de type fini. Montrer que $S \otimes_R N$ est un S -module réflexif.

(b) Avec la notation de (i), montrer que $M^\vee$ est un A -module réflexif.

(c) Montrer que M est réflexif si et seulement si $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} M_{\mathfrak{p}}$.

(d) Soient V un K -espace vectoriel, $W \subset V$ un K -sous-espace vectoriel, et $M, M' \subset V$ deux A -sous-modules réflexifs. Montrer que $M \cap M'$ et $M \cap W$ sont deux A -modules réflexifs.

7.4. Un exemple géométrique. A l'exception près de la proposition 7.34, les résultats du §7.3.1 ne sont concernés qu'avec des anneaux intègres et *intégralement clos*. La discussion de la section 6.4 explique pourquoi cette condition ne soit pas arbitraire : si l'anneau A est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini et dimension un, l'ensemble algébrique $\text{Max } A$ est une courbe dans un espace affine $\mathbb{C}^n$; or, si A est de Dedekind, cette courbe est une sous-variété analytique complexe connexe et *non singulière* de $\mathbb{C}^n$. Du point de vue géométrique, ces anneaux sont donc les plus simples parmi les anneaux noethériens de

dimension un ; de l'autre côté, la présence de singularités sur une courbe $C = \operatorname{Spec} A$ associée à une $\mathbb{C}$ -algèbre A de dimension un se répercute sur la géométrie de l'application de normalisation $\phi : C' \rightarrow C$, et l'analyse de cette dernière nous fournit un moyen efficace pour classifier ces singularités : par exemple, la cardinalité de la fibre de ϕ au-dessus d'un point singulier de C est déjà une première mesure quantitative de la complexité de la singularité. Du point de vue algébrique, C' sera simplement le spectre de la fermeture intégrale A' de A dans son corps des fractions (du moins, si A est intègre ; si A n'est pas intègre, on prendra plutôt la fermeture intégrale de A dans le produit $\prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A} k(\mathfrak{p})$, où $\operatorname{Min} A$ dénote l'ensemble fini des premiers minimaux de A). Toutefois, la définition de A' est assez abstraite, et ne conduit pas à des procédés effectifs pour sa détermination, ce qui est un obstacle, justement si on veut l'utiliser pour l'étude des singularités de la courbe originaire C . Pour contourner ce problème, les géomètres algébristes ont développés des algorithmes qui modifient la courbe C en plusieurs étapes par des constructions géométriques explicites, jusqu'à obtenir une courbe non singulière. On va d'abord illustrer ces idées par un exemple assez simple :

7.4.1. *Eclatement d'un point singulier.* Considérons la $\mathbb{C}$ -algèbre

$$A_0 := \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^2).$$

La factorisation $X^2 - Y^2 = (X - Y) \cdot (X + Y)$ montre que $C := \operatorname{Spec} A_0$ se décompose comme la réunion de deux parties irréductibles $V(X - Y) \cup V(X + Y)$, deux droites qui se rencontrent dans un point unique, l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{(0,0)}$ qui correspond à l'origine du plan coordonné complexe $\mathbb{C}^2$. L'anneau A_0 n'est pas intègre, et la désingularisation de $C' \rightarrow C$ s'obtient simplement en séparant les deux composantes irréductibles, ce qui correspond à considérer l'inclusion

$$A_0 \hookrightarrow \mathbb{C}[X, Y]/(X - Y) \times \mathbb{C}[X, Y]/(X + Y) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T] \times \mathbb{C}[T].$$

• Ensuite, on introduit une “petite perturbation” dans l'équation précédente : on rajoute le terme X^3 , pour obtenir l'anneau

$$A := \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^2 - X^3).$$

D'un côté, on voit aisément que le polynôme $X^2 - Y^2 - X^3$ est irréductible, donc A est intègre, et $\operatorname{Spec} A$ est maintenant irréductible ; de l'autre côté, pour des petites valeurs de X et Y la perturbation X^3 est négligeable par rapport aux termes quadratiques, donc on s'attend que dans un voisinage U du point $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ la géométrie de la partie $U \cap \operatorname{Max} A$ soit essentiellement la même que celle de $U \cap \operatorname{Max} A_0$. Et en effet, sur un voisinage U suffisamment petit de $(0, 0)$, l'application holomorphe

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad (z, w) \mapsto (z \cdot (1 - z)^{1/2}, w)$$

est bien définie, et comme la matrice Jacobienne de ϕ est inversible au point $(0, 0)$, l'image de ϕ contient un voisinage U' de $(0, 0)$ tel que la restriction $\phi^{-1}U' \rightarrow U'$ soit un isomorphisme de variétés analytiques complexes. On voit aisément que

$$\phi^{-1}(U' \cap \operatorname{Max} A_0) = \phi^{-1}(U') \cap \operatorname{Max} A$$

donc, les variétés analytiques complexes $\operatorname{Max} A_0$ et $\operatorname{Max} A$ sont isomorphes dans un voisinage de $(0, 0)$.

• On examine maintenant les propriétés algébriques de A : tout d'abord, l'idéal $\mathfrak{m}_{(0,0)} = (X, Y) \in \operatorname{Max} \mathbb{C}[X, Y]$ contient $X^2 - Y^2 - X^3$, donc il correspond à un idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de A . Si l'on note $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les classes de X et Y dans A , on a $\bar{\mathfrak{m}}^2 = (\bar{X}^2, \bar{X} \cdot \bar{Y}, \bar{Y}^2)$, donc $\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 = \mathbb{C}\bar{X} \oplus \mathbb{C}\bar{Y}$. Cela montre que $A_{\bar{\mathfrak{m}}}$ n'est pas un anneau de valuation discrète, donc A n'est pas un anneau de Dedekind. D'autre part A est noethérien, car il

est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini. Il est aussi de dimension un, car il existe une projection finie de $\text{Max } A$ sur la droite affine $\mathbb{C}$, à savoir l'application

$$\text{Max } A \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y) \rightarrow x.$$

Cette application correspond à l'homomorphisme injectif de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\mathbb{C}[X] \rightarrow A \quad X \mapsto \bar{X}$$

qui est évidemment un homomorphisme entier d'anneaux (la $\mathbb{C}[X]$ -algèbre A est engendrée par son élément $\bar{Y}$, racine du polynôme unitaire $P(T) := T^2 - X^2 + X^3$). Or, on sait que $\dim \mathbb{C}[X] = 1$, et $\dim A = \dim \mathbb{C}[X]$ d'après le corollaire 6.20(iii).

• Remarquons que $\bar{\mathfrak{m}}$ est l'unique point singulier de $\text{Spec } A$: si $\mathfrak{p} \in \text{Max } A \setminus \{\bar{\mathfrak{m}}\}$, la localisation $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. En effet, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\mathfrak{p}$ est engendré par $(\bar{X} - a, \bar{Y} - b)$, d'où une application surjective de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels $\mathbb{C}(\bar{X} - a) \oplus \mathbb{C}(\bar{Y} - b) \rightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$; d'autre part, si l'on pose

$$P := (X - a)^2 \quad Q := (Y - b)^2 \quad R := X^2 - Y^2 - X^3$$

on trouve la relation

$$(X + 2a - 1) \cdot P + Q + R = (2a - 3a^2) \cdot (X - a) - 2b \cdot (Y - b)$$

par un calcul direct. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, et $a^2 - b^2 - a^3 = 0$, on a soit $b \neq 0$, soit $2a - 3a^2 \neq 0$, et comme les images de P, Q dans A sont des éléments de $\mathfrak{p}^2$ (et l'image de R est 0 dans A), on obtient la combinaison $\mathbb{C}$ -linéaire non triviale

$$(2a - 3a^2) \cdot (\bar{X} - a) - 2b \cdot (\bar{Y} - b) = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$$

et par suite $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \leq 1$. Comme $\mathfrak{p} \neq 0$, on ne peut pas avoir $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, car sinon on aurait $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^2A_{\mathfrak{p}}$, qui est interdit par la proposition 7.32. On conclut

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 = 1$$

d'où l'assertion. Ainsi, $A[1/\bar{X}]$ (i.e. la localisation de A qui rend $\bar{X}$ inversible) est un anneau de Dedekind : en effet, $\text{Max } A[1/\bar{X}] = \text{Max } A \setminus V(\bar{X}) = \text{Max } A \setminus \{\bar{\mathfrak{m}}\}$, et si $\mathfrak{p} \in \text{Max } A \setminus \{\bar{\mathfrak{m}}\}$ on a évidemment $A_{\mathfrak{p}} = A[1/\bar{X}]_{\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion.

• D'après le lemme 6.87(i), la normalisation B de A est une A -algèbre finie, et on souhaite donner une construction explicite de B . Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $D_{\lambda} \subset \mathbb{C}^2$ la droite d'équation $Y = \lambda X$. Donc, $(0, 0) \in D_{\lambda}$, et 0 est racine double du polynôme $R(X, \lambda X)$ (avec R comme ci-dessus) ; d'où : $D_{\lambda} \cap \text{Max } A = \{(0, 0), (x_{\lambda}, y_{\lambda})\}$, avec

$$(x_{\lambda}, y_{\lambda}) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que} \quad y_{\lambda} = \lambda \cdot x_{\lambda} \quad \text{et} \quad x_{\lambda}^2 - y_{\lambda}^2 - x_{\lambda}^3 = 0.$$

En résolvant, on trouve $x_{\lambda} = 1 - \lambda^2$, $y_{\lambda} = \lambda - \lambda^3$. On a alors une application

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow \text{Max } A \quad \lambda \mapsto (1 - \lambda^2, \lambda - \lambda^3).$$

Cette dernière correspond évidemment à l'homomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}[\lambda] \quad \bar{X} \mapsto 1 - \lambda^2 \quad \bar{Y} \mapsto \lambda - \lambda^3.$$

On voit que $\phi^{-1}(0, 0) = \{1, -1\}$, et ϕ se restreint en une bijection

$$\mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \text{Max } A \setminus \{(0, 0)\}$$

correspondante à l'unique isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres qui prolonge f

$$A[1/\bar{X}] \otimes_A f : A[1/\bar{X}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\lambda, 1/(1 - \lambda^2)]$$

Ainsi, f identifie le corps des fractions de A avec celui de l'anneau de Dedekind $\mathbb{C}[\lambda]$; en conclusion, la normalisation cherchée de A est donnée par $B := \mathbb{C}[\lambda]$.

Noter que $\lambda = f(\bar{Y})/f(\bar{X})$, donc $\text{Spec } B$ est une partie ouverte de l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ engendré par $\bar{X}$ et $\bar{Y}$: cette observation est la clef pour généraliser les considérations de ce paragraphe aux courbes arbitraires, comme on verra après l'intermission suivante.

7.4.2. *Une observation analytique.* Revenons à l'exemple du paragraphe précédent. On a vu que, pour tout $\mathbf{p} := (\bar{X} - a, \bar{Y} - b) \in \text{Max } A \setminus \{\bar{\mathbf{m}}\}$ on a l'identité :

$$R = (2a - 3a^2) \cdot (X - a) - 2b \cdot (Y - b) - (X + 2a - 1) \cdot (X - a)^2 - (Y - b)^2$$

avec $R := X^2 - Y^2 - X^3$. D'où vient cette expression ? Elle vient de la formule de Taylor ! En effet, le développement de Taylor de R au point (a, b) est de la forme

$$R(X, Y) = R(a, b) + \frac{\partial R}{\partial X}(a, b) \cdot (X - a) + \frac{\partial R}{\partial Y}(a, b) \cdot (Y - b) + S(X, Y)$$

pour un reste $S(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que

$$(*) \quad \frac{\partial S}{\partial X}(a, b) = \frac{\partial S}{\partial Y}(a, b) = 0.$$

Or, on a $R(a, b) = 0$, car $(\bar{X} - a, \bar{Y} - b) \in \text{Max } A$, et d'autre part les conditions $(*)$ veulent dire précisément que $S \in \mathfrak{p}^2$.

Plus généralement, considérons un anneau de la forme

$$A := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (R_1, \dots, R_m).$$

Si $\underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ est un point de $\text{Max } A$, i.e. si $\mathfrak{m}_{\underline{a}} := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ contient les polynômes $R_1, \dots, R_m$, on obtient de la même façon :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = J(\underline{a}) \cdot \begin{pmatrix} X_1 - a_1 \\ \vdots \\ X_n - a_n \end{pmatrix} + S \quad \text{avec} \quad J(\underline{a}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial X_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial R_1}{\partial X_n}(\underline{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial X_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial R_m}{\partial X_n}(\underline{a}) \end{bmatrix}$$

pour un reste $S \in \mathfrak{m}_{\underline{a}}^2$. Soit $\bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} := \mathfrak{m}_{\underline{a}} / (R_1, \dots, R_m) \in \text{Max } A$; évidemment $\bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2$ est un quotient de

$$V := \mathbb{C}(X_1 - a_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}(X_n - a_n)$$

et la formule de Taylor nous montre que

$$v_i := \sum_{j=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(\underline{a}) \cdot (X_j - a_j) \in \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Donc $\bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2$ est en fait un quotient de $V / \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Coker } J(\underline{a})$. D'autre part, supposons que l'on ait une relation $\mathbb{C}$ -linéaire de la forme :

$$w := b_1 \cdot (X_1 - a_1) + \cdots + b_n \cdot (X_n - a_n) \in \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2$$

pour certains $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Cela veut dire qu'il existe $A_{jk}, B_l \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ pour $1 \leq j, k \leq n$ et $1 \leq l \leq m$, tels que l'on ait dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ l'identité :

$$\sum_{i=1}^n b_i \cdot (X_i - a_i) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \cdot (X_j - a_j) \cdot (X_k - a_k) + \sum_{l=1}^m B_l \cdot R_l.$$

Si l'on applique $\frac{\partial}{\partial X_i}$ aux deux côtés, et on évalue au point $\underline{a}$, il vient

$$b_i = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial B_l}{\partial X_i}(\underline{a}) \cdot R_l(\underline{a}) + B_l(\underline{a}) \cdot \frac{\partial R_l}{\partial X_i}(\underline{a}) \right) = \sum_{l=1}^m B_l(\underline{a}) \cdot \frac{\partial R_l}{\partial X_i}(\underline{a})$$

d'où

$$w = B_1(\underline{a}) \cdot v_1 + \cdots + B_m(\underline{a}) \cdot v_m.$$

En conclusion, on a obtenu un isomorphisme naturel

$$(**) \quad \boxed{\text{Coker } J(\underline{a}) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2.}$$

En particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \bar{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2 = n - \text{rk}(J(\underline{a})).$$

Le cas où $m \leq n$ et le rang de $J(\underline{a})$ est égal à m est particulièrement intéressant ; en effet, sous ces hypothèses, le théorème des fonctions implicites nous dit qu'il existe un voisinage U de $\underline{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n-m}$, un voisinage U' de $\underline{a}$ dans $\mathbb{C}^n$ et une application holomorphe $\phi : U \rightarrow U'$ avec $\phi(\underline{0}) = \underline{a}$, et ϕ induit un homéomorphisme

$$U \xrightarrow{\sim} U' \cap \text{Max } A.$$

Donc, du moins du point de vue analytique complexe, on voit que la dimension de $U' \cap \text{Max } A$ est égale à $n - m = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \overline{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2$. En fait, on verra plus tard que si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien, on a toujours l'inégalité

$$\dim A \leq \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2.$$

Pour cela, il nous faudra développer des techniques qui remplacent les considérations analytiques ci-dessus : c'est le sujet des leçons 9 et 11.

Remarque 7.53. (i) La plupart des observations de ce paragraphe s'étend sans peine aux algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos K arbitraire. En effet, le développement de Taylor à l'ordre 1, et les calculs ci-dessus sont valables pour des polynômes à coefficients dans n'importe quel corps. En particulier, on a l'isomorphisme (**) pour tout idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}$ d'une telle K -algèbre A , et donc

$$\dim_K \overline{\mathfrak{m}}_{\underline{a}} / \overline{\mathfrak{m}}_{\underline{a}}^2 = n - \text{rk}(J(\underline{a})) \quad \forall \underline{a} \in \text{Max } A.$$

(ii) Voici une application : soit A une K -algèbre de type fini, intègre et de dimension un, et on considère une présentation arbitraire de A

$$A = K[X_1, \dots, X_n] / (R_1, \dots, R_m).$$

Evidemment, $\text{rk} J(\underline{a}) \leq m$ pour tout $\underline{a} \in K^n$, et on déduit aussitôt :

- Si A est un anneau de Dedekind, on a $m \geq n - 1$.
- S'il existe $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$ tel que $A_{\mathfrak{p}}$ est de Dedekind, alors il existe une partie finie $S \subset \text{Max } A$ tel que $A_{\mathfrak{m}}$ est de Dedekind pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A \setminus S$.

En effet, si $\underline{a} \in K^n$ correspond à $\mathfrak{p}$, au vu de la discussion ci-dessus, on trouve :

$$(\dagger) \quad \text{rk} J(\underline{a}) = n - 1.$$

Mais les coefficients de la matrice Jacobienne J sont des polynômes à coefficients dans K , et $(\dagger)$ veut dire qu'il existe un mineur de J de taille $(n-1) \times (n-1)$ dont le déterminant $D \in K[X_1, \dots, X_n]$ est inversible au point $\underline{a}$. Soit $U := \text{Spec } K[X_1, \dots, X_n, D^{-1}]$; or, U est une partie ouverte de $\text{Spec } K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $U \cap \text{Spec } A \neq \emptyset$, donc $S := \text{Spec } A \setminus U$ est une partie fermée qui ne contient pas le point générique de $\text{Spec } A$. Comme $\dim A = 1$, cela implique que S est une partie finie de $\text{Max } A$, d'après l'exercice 6.109(iii). Maintenant, si $\mathfrak{m} \in \text{Max } A \setminus S$, le rang de $J(\underline{a})$ est au moins $n - 1$, et on trouve $d := \dim_K \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 \leq 1$, par ce qui précède ; d'autre part, $d \neq 0$, par la proposition 7.32, CQFD.

7.4.3. Normalisation d'une courbe par éclatement de points singuliers. Comme annoncé, on souhaite maintenant exhiber une suite canonique d'éclatements qui normalise tout anneau noethérien intègre A de dimension un dont la normalisation A' est une A -algèbre finie. En fait, on va d'abord expliquer un résultat valable pour *tout* anneau intègre, et le lemme suivant recueille des observations préliminaires utiles, de nature encore plus générale :

Lemme 7.54. (i) Soient $\underline{X}$ un schéma intègre, $p : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{X}$ sa normalisation (voir le problème 6.92(i)), $q : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme séparé de schémas, et $\phi : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{X}$ -schémas dont l'application continue sous-jacente $\phi : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{Y}$ a image dense. Alors ϕ est surjective et ϕ est universellement fermé.

(ii) Si en outre, $\underline{Y}$ est intègre, ϕ est une normalisation de $\underline{Y}$.

Démonstration. (i) : D'après l'exercice 5.93(ii), le graphe $\Gamma_{\phi} : \underline{X}^{\nu} \rightarrow \underline{X}^{\nu} \times_{\underline{X}} \underline{Y}$ de ϕ est une immersion fermée, car q est séparé ; en outre, p est universellement fermé (exercice 6.24(ii), remarque 6.23(i) et problème 6.59(i)), donc de même pour $p \times_{\underline{X}} \underline{Y} : \underline{X}^{\nu} \times_{\underline{X}} \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$. Par suite, $\phi = (p \times_{\underline{X}} \underline{Y}) \circ \Gamma_{\phi}$ est universellement fermé, et comme son image est dense dans l'espace sous-jacent Y , l'assertion s'ensuit.

(ii) : Soient $\underline{T}$ un schéma intègre et normal, et $f : \underline{T} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de schémas dont l'image est dense dans Y ; alors l'image de $q \circ f$ est dense dans l'espace X sous-jacent à $\underline{X}$ (exercice 1.21(iv)), donc il existe un unique morphisme de schémas $g : \underline{T} \rightarrow \underline{X}^{\nu}$ tel que $q \circ f = p \circ g = q \circ \phi \circ g$, et on doit montrer que $f = f' := \phi \circ g$. Pour cela, soient η et η_T les points génériques respectivement de $\underline{X}$ et $\underline{T}$; rappelons que $K := \mathcal{O}_{X,\eta}$ est un corps (remarque 5.73(ii,iii)), posons $\underline{X}(\eta) := \text{Spec } K$, et soit $j_{\eta} : \underline{X}(\eta) \rightarrow \underline{X}$ la localisation de $\underline{X}$ au point η (remarque 5.50). Pour tout $\underline{X}$ -schéma $\underline{S}$, on notera $\underline{S}(\eta) := \underline{X}(\eta) \times_{\underline{X}} \underline{S}$, et pour tout morphisme $t : \underline{S} \rightarrow \underline{S}'$ de $\underline{X}$ -schéma, on notera $t_{\eta} : \underline{S}(\eta) \rightarrow \underline{S}'(\eta)$ le morphisme déduit de t après le changement de base j_{η} .

Affirmation 7.55. $\phi_{\eta} : \underline{X}^{\nu}(\eta) \rightarrow \underline{Y}(\eta)$ et $q_{\eta} : \underline{Y}(\eta) \rightarrow \underline{X}(\eta)$ sont des isomorphismes.

Preuve : Soit $U \subset \underline{X}$ une partie ouverte affine non vide ; par construction, j_{η} se factorise à travers un morphisme $j_U : \underline{X}(\eta) \rightarrow \underline{U} := U \times_{\underline{X}} \underline{X}$ et le morphisme d'inclusion $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$. Posons alors $\underline{Y}' := \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{Y}$ et $\underline{U}^{\nu} := \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^{\nu}$; alors les restrictions $q' : \underline{Y}' \rightarrow \underline{U}$ et $\phi' : \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{Y}$ de q et ϕ sont encore des morphismes de schémas intègres dont les images sont denses, et la restriction $p' : \underline{U}^{\nu} \rightarrow \underline{U}$ de p est encore une normalisation (lemme 6.121). En outre, ϕ_{η} et q_{η} s'identifient naturellement avec les morphismes déduits de ϕ' et q' après le changement de base j_U . Donc, quitte à remplacer $\underline{X}$ par $\underline{U}$, on peut supposer que $\underline{X}$ soit affine, disons $\underline{X} = \text{Spec } A$, pour un anneau intègre A ; par suite $\underline{X}^{\nu} = \text{Spec } A^{\nu}$, où A^{ν} dénote la normalisation de A (problème 6.92(ii)). Avec cette notation, K est le corps des fractions de A , et j_{η} et p sont induits par les inclusion $A^{\nu} \leftarrow A \rightarrow K$; par suite $p_{\eta} := q_{\eta} \circ \phi_{\eta}$ est induit par l'isomorphisme naturel $i : K \rightarrow E := K \otimes_A A^{\nu}$. Noter ensuite que d'après (i) et l'exercice 5.78, l'application ϕ_{η} est surjective ; mais on vient de voir que l'espace sous-jacent à $\underline{X}^{\nu}(\eta)$ s'identifie à $\text{Spec } E$, donc l'espace sous-jacent à $\underline{Y}(\eta)$ ne contient qu'un point, et $\underline{Y}(\eta)$ est alors trivialement un schéma affine. Or, soit $V \subset Y$ un voisinage affine de l'image de la projection $\underline{Y}(\eta) \rightarrow \underline{Y}$, et posons $\underline{V} := V \times_Y \underline{Y}$; ainsi, $B := \mathcal{O}_Y(V)$ est une A -algèbre intègre, et on a une identification naturelle de A -schémas $\underline{V} = \text{Spec } B$. Mais alors $\underline{V}(\eta) = \text{Spec}(K \otimes_A B)$ est un sous-schéma ouvert non vide de $\underline{Y}(\eta)$, i.e. $\underline{Y}(\eta) = \underline{V}(\eta)$; par suite $F := K \otimes_A B$ est un anneau intègre dont le spectre premier ne contient qu'un unique point, i.e. F est un corps. Finalement, les morphismes q_{η} et ϕ_{η} correspondent à des extensions de corps $K \xrightarrow{i'} F \xrightarrow{i''} E$ dont la composition est l'isomorphisme i ; par suite i' et i'' sont des isomorphismes, d'où l'assertion. $\diamond$

Considérons maintenant le diagramme cartésien de schémas :

$$\mathcal{D} \quad : \quad \begin{array}{ccc} \underline{Z} & \xrightarrow{h} & \underline{Y} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \Delta_{\underline{Y}/\underline{X}} \\ \underline{T} & \xrightarrow{f \times_{\underline{X}} f'} & \underline{Y} \times_{\underline{X}} \underline{Y} \end{array}$$

où $f \times_{\underline{X}} f'$ est l'unique morphisme dont les compositions avec les projections $p_1, p_2 : \underline{Y} \times_{\underline{X}} \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$ sont respectivement f et f' . D'après le lemme 5.106, le diagramme induit $\underline{X}(\eta) \times_{\underline{X}} \mathcal{D}$ s'identifie au diagramme cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc} \underline{Z}(\eta) & \xrightarrow{h_{\eta}} & \underline{Y}(\eta) \\ \delta_{\eta} \downarrow & & \downarrow \Delta_{\underline{Y}(\eta)/\underline{X}(\eta)} \\ \underline{T}(\eta) & \xrightarrow{f_{\eta} \times_{\underline{X}(\eta)} f'_{\eta}} & \underline{Y}(\eta) \times_{\underline{X}(\eta)} \underline{Y}(\eta). \end{array}$$

Mais d'après l'observation 7.55, q_η est un isomorphisme, donc le morphisme diagonal $\Delta_{\underline{Y}(\eta)/\underline{X}(\eta)}$ est un isomorphisme, et de même pour δ_η . D'autre part, on a $q \circ f(\eta_T) = \eta$ (remarque 5.73(iv)), donc l'image de la projection $\underline{T}(\eta) \rightarrow \underline{T}$ contient η_T (exercice 5.78); comme δ_η est un isomorphisme, il s'ensuit que l'image de Z dans T contient η_T . Mais par hypothèse $\Delta_{\underline{Y}/\underline{X}}$ est une immersion fermée, donc de même pour δ (exercice 5.89(ii)), et finalement on obtient que δ est surjectif. Mais comme $\underline{T}$ est réduit, δ doit alors être un isomorphisme (corollaire 1.51(i) : les détails sont laissés aux soins du lecteur). On peut alors calculer :

$$f = p_1 \circ (f \times_{\underline{X}} f') = p_1 \circ \Delta_{\underline{Y}/\underline{X}} \circ h \circ \delta^{-1} = p_2 \circ \Delta_{\underline{Y}/\underline{X}} \circ h \circ \delta^{-1} = p_2 \circ (f \times_{\underline{X}} f') = f'$$

comme souhaité. $\square$

Proposition 7.56. *Soient A un anneau intègre, A^ν sa normalisation, et $X := \operatorname{Spec} A$. Il existe un système cofiltrant de X -schémas $E_\bullet := (E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ tel que :*

- (a) E_λ est l'éclatement d'un idéal $\mathcal{I}_\lambda \subset \mathcal{O}_X$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.
- (b) La limite du système $E_\bullet$ est représentée, dans la catégorie des X -schémas, par le morphisme naturel $p : X^\nu := \operatorname{Spec} A^\nu \rightarrow X$.
- (c) Si A^ν est une A -algèbre finie, il existe $\lambda \in \Lambda$ avec $X^\nu = E_\lambda$.

Démonstration. D'abord, A^ν est la colimite, dans la catégorie $A\text{-Alg}$, du système filtrant $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses A -sous-algèbres de type fini (exercice 2.31(iv)). Par suite, l'objet $A^{\nu\text{op}}$ de la catégorie opposée $A\text{-Alg}^{\text{op}}$ représente la limite du système cofiltrant correspondant $(A_\lambda^{\text{op}} \mid \lambda \in \Lambda)$. D'après le théorème 5.47 et la proposition 2.49(i), il s'ensuit que X^ν représente la limite du système $(\operatorname{Spec} A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dans la catégorie $\mathbf{EsLocAn}$, et donc aussi dans la catégorie des X -schémas (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Il suffit alors de vérifier que chaque morphisme structurel $\pi_\lambda : \operatorname{Spec} A_\lambda \rightarrow X$ est l'éclatement d'un idéal $\mathcal{I}_\lambda \subset \mathcal{O}_X$. Or, on a $A_\lambda = A[\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}]$ pour certains $a_0, \dots, a_n \in A \setminus \{0\}$; notons par $I_\lambda \subset A$ l'idéal engendré par $a_0, \dots, a_n$, et soit $\mathcal{I}_\lambda := I_\lambda \mathcal{O}_X$. La construction explicite de l'éclatement $p_\lambda : E_\lambda \rightarrow X$ de $\mathcal{I}_\lambda$ identifie naturellement $\operatorname{Spec} A_\lambda$ avec un sous-schéma ouvert affine U_λ de E_λ , et π_λ correspond à la restriction de p_λ , sous cette identification. Le morphisme de X -schémas $X^\nu \rightarrow \operatorname{Spec} A_\lambda$ induit par l'inclusion $A_\lambda \rightarrow A^\nu$ s'identifie alors avec un morphisme de X -schémas $\phi_\lambda : X^\nu \rightarrow E_\lambda$ avec image U_λ (corollaire 6.20(i)). Rappelons que p_λ est un morphisme séparé, et E_λ est un schéma intègre (corollaire 5.101(i,iii)), donc U_λ est dense dans E_λ ; d'après le lemme 7.54(i) on a alors $U_\lambda = E_\lambda$, d'où l'assertion. $\square$

Les éclatements intervenant dans la proposition 7.56 sont trop génériques pour être vraiment utiles : en vue des applications, il est plus intéressant de se borner aux éclatements ayant une interprétation géométrique bien définie, comme ceux que l'on a rencontré au § 7.4.1. D'autre part, la question de l'existence d'un algorithme permettant de normaliser – ou mieux encore, *désingulariser* – une variété générale par une suite d'éclatements sélectionnés, devient rapidement extrêmement technique et dépasse le moyens de ce cours; toutefois si l'on se restreint au cas des courbes, on peut par contre fournir une solution satisfaisante à ce problème, en faisant appel à la plupart des outils que l'on a développé jusqu'ici : notamment, le *Main Theorem* de Zariski (théorème 6.55) jouera un rôle clef pour vérifier que notre algorithme se termine en un nombre fini d'étapes.

Soit donc $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma intègre noethérien de dimension un (voir l'exercice 6.67 et la définition 5.79(vi)); le *lieu singulier* de $\underline{X}$ est la partie :

$$\Sigma(\underline{X}) := \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \text{ n'est pas un anneau normal}\}.$$

Lemme 7.57. *Soit $\underline{X}$ comme ci-dessus, et supposons que la normalisation $p : X^\nu \rightarrow X$ de $\underline{X}$ soit un morphisme de type fini (définition 5.79(iii)). Alors on a :*

- (i) $\Sigma(\underline{X})$ est une partie finie fermée de X , et $X \setminus \Sigma(\underline{X}) \neq \emptyset$.
- (ii) $\underline{X}^\nu$ est un schéma noethérien de dimension un.

- (iii) Tout idéal quasi-cohérent non nul de $\mathcal{O}_{X^\nu}$ est inversible.
- (iv) $p^{-1}(x)$ est un ensemble fini, pour tout $x \in X$.

Démonstration. (i,ii) : Soit η le point générique de X ; par hypothèse, X est compact, donc il admet un recouvrement fini $\mathcal{U}$ formé de parties ouvertes affines, et on peut supposer que $U \setminus \{\eta\} \neq \emptyset$ pour chaque $U \in \mathcal{U}$. Alors le schéma $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$ est encore intègre, noethérien et de dimension un pour tout tel U , et la restriction $p_U : \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{U}$ de p est la normalisation de $\underline{U}$ (lemme 6.121). En particulier, p_U est de type fini (lemme 5.81(ii)), et évidemment $\Sigma(\underline{U}) = U \cap \Sigma(\underline{X})$; il suffit alors de vérifier que $\Sigma(\underline{U})$ est une partie finie et fermée de U , et que $\underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^\nu$ est noethérien de dimension un, pour tout $U \in \mathcal{U}$. Ainsi, on peut supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$, avec A intègre noethérien de dimension un, donc $\underline{X}^\nu = \text{Spec } A^\nu$, où A^ν dénote la normalisation de A , et d'après l'exercice 5.80(i) et le corollaire 6.4, le A -module A^ν est alors de type fini. Par suite, A^ν est noethérien de dimension un (théorème 6.65 et corollaire 6.20(iii)), d'où (ii). Ensuite, soient $M := A^\nu/A$ et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; noter que $M_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos (proposition 6.13). Ainsi, $\Sigma(\underline{X}) = \text{Supp}_A(M) = V(\text{Ann}_A(M))$ (remarque 3.58(ii)). Rappelons aussi que $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est le corps des fractions de A , donc $\eta \notin \Sigma(\underline{X})$; ainsi, $A/\text{Ann}_A(M)$ est noethérien de dimension zéro, et l'assertion découle des théorèmes 7.29 et 7.31.

(iii) : L'assertion étant locale sur X^ν , on peut supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ et $\underline{X}^\nu = \text{Spec } A^\nu$, où A^ν dénote la normalisation de A ; dans ce cas, tout idéal de $\mathcal{O}_{X^\nu}$ est de la forme $I\mathcal{O}_{X^\nu}$, pour un idéal $I \subset A^\nu$ (remarque 5.68(i)). Or, d'après (ii), A^ν est un anneau de Dedekind, donc l'assertion découle du problème 7.48(iii).

(iv) : En raisonnant comme dans la preuve de (i,ii), on se ramène au cas où $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau intègre A , et $\underline{X}^\nu = \text{Spec } A^\nu$ pour la normalisation A^ν de A , et en outre A^ν est une A -algèbre finie. L'assertion découle alors du corollaire 6.20(v). $\square$

- Or, soient $\underline{X}$ un schéma vérifiant les conditions du lemme 7.57, et $p : \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{X}$ sa normalisation ; on associe à la partie fermée finie $\Sigma(\underline{X})$ l'idéal quasi-cohérent $\mathcal{I}_{\Sigma(\underline{X})} \subset \mathcal{O}_X$ fourni par l'exemple 5.86(i), de sorte que $\underline{V}(\mathcal{I}_{\Sigma(\underline{X})})$ soit le sous-schéma fermé réduit de $\underline{X}$ d'espace sous-jacent $\Sigma(\underline{X})$. Soit $q : \underline{E} \rightarrow \underline{X}$ l'éclatement de $\mathcal{I}_{\Sigma(\underline{X})}$; on appelle le $\underline{X}$ -schéma $\underline{E}$ l'éclatement du lieu singulier de $\underline{X}$.

- Soient $U := X \setminus \Sigma(\underline{X})$ et $\underline{U} := U \times_X \underline{X}$; par construction, on a $(\mathcal{I}_{\Sigma(\underline{X})})|_U = \mathcal{O}_{X|U}$, donc la restriction $q_U : \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{E} \rightarrow \underline{U}$ de q est un isomorphisme. En outre, $\underline{U}$ est précisément le plus grand sous-schéma normal ouvert de $\underline{X}$, donc aussi la restriction $p_U : \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{U}$ de p est un isomorphisme.

- D'après la remarque 5.73(v), l'homomorphisme $p_y^\sharp : \mathcal{O}_{X,p(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{X^\nu,y}$ est injectif pour tout $y \in X^\nu$; par suite, pour tout idéal quasi-cohérent $\mathcal{J} \neq 0$ de $\mathcal{O}_X$, l'idéal $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X^\nu}$ de $\mathcal{O}_{X^\nu}$ est non nul, car $(\mathcal{J}\mathcal{O}_{X^\nu})_y = \mathcal{J}_{p(y)} \cdot \mathcal{O}_{X^\nu,y}$ pour tout $y \in X^\nu$ (remarque 5.68(iv)). Avec le lemme 7.57(iii) et l'exercice 5.69(i), on déduit que $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X^\nu}$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{X^\nu}$, pour tout tel $\mathcal{J}$.

- En particulier, la propriété universelle de $\underline{E}$ fournit un unique morphisme de $\underline{X}$ -schémas $\phi : \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{E}$. Puisque q_U et p_U sont des isomorphismes, il en est de même pour la restriction $\underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{X}^\nu \rightarrow \underline{U} \times_{\underline{X}} \underline{E}$ de ϕ ; en particulier, l'image de ϕ est dense dans l'espace sous-jacent E . Avec le lemme 7.54(ii) et le corollaire 5.101(i), il s'ensuit que ϕ est la normalisation de $\underline{E}$; en outre, ϕ est surjectif et fermé, donc la topologie de l'espace E sous-jacent à $\underline{E}$ est induite par celle de X^ν via ϕ , et comme X^ν est de dimension un, on déduit aisément qu'il en est de même pour E .

- Ensuite, puisque $\underline{X}$ est noethérien, tout idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ est de type fini ; q est alors un morphisme de type fini (corollaire 5.101(ii)), et par suite $\underline{E}$ est noethérien. De plus, ϕ est un morphisme de type fini, d'après le problème 6.92(iii) et l'exercice 5.82(ii). En résumant, $\underline{E}$ et le morphisme ϕ remplissent les mêmes conditions que l'on a supposé au lemme 7.57 pour le schéma $\underline{X}$ et le morphisme p . On peut alors définir

inductivement une suite de morphismes de schémas :

$$(*) \quad \cdots \xrightarrow{q_3} \underline{E}_2 \xrightarrow{q_2} \underline{E}_1 \xrightarrow{q_1} \underline{E}_0 := \underline{X}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ un morphisme de schémas $p_n : X^\nu \rightarrow \underline{E}_n$, tels que :

- $q_0 := \text{Id}_{\underline{X}}$, et q_{n+1} est l'éclatement du lieu singulier de $\underline{E}_n$
- p_n est la normalisation de $\underline{E}_n$, et il est un morphisme de schémas de type fini
- $p_n = q_{n+1} \circ p_{n+1}$
- $\underline{E}_n$ est intègre, noethérien et de dimension un.

Avec cette notation, on est maintenant prêt pour énoncer :

Théorème 7.58. *Soit $\underline{X}$ un schéma intègre, noethérien, de dimension un, et tel que la normalisation $\underline{X}^\nu \rightarrow \underline{X}$ soit un morphisme de schémas de type fini. Alors :*

- (i) *La suite induite $(*)$ des éclatements de lieux singuliers est stationnaire, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que q_i soit un isomorphisme pour tout $i \geq N + 1$.*
- (ii) *Pour N comme dans (i), le morphisme p_i est un isomorphisme pour tout $i \geq N$, et donc la composition $q_1 \circ \cdots \circ q_N : \underline{E}_N \rightarrow \underline{X}$ est la normalisation de $\underline{X}$.*

Démonstration. Soient Σ_n le lieu singulier de $\underline{E}_n$, et $\underline{U}_n := (E_n \setminus \Sigma_n) \times_{E_n} \underline{E}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; les assertions (i) et (ii) reviennent à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma_n = \emptyset$. Or, il est clair que $q_{n+1}(\Sigma_{n+1}) \subset \Sigma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car la restriction $\underline{U}_n \times_{\underline{E}_n} \underline{E}_{n+1} \rightarrow \underline{U}_n$ de q_{n+1} est un isomorphisme. Comme chaque Σ_n est un ensemble fini, il suffit alors de vérifier que la limite Σ du système induit $(\Sigma_n | n \in \mathbb{N})$ est vide (remarque 2.33(ii)). Pour cela, posons aussi $\Delta_0 := \Sigma_0$, et $\Delta_{n+1} := q_{n+1}^{-1}(\Delta_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; soient en outre Δ la limite du système induit $(\Delta_n | n \in \mathbb{N})$, et $\Delta^\nu := p_0^{-1}(\Delta_0)$. Evidemment $\Sigma_n \subset \Delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc Σ s'identifie naturellement avec une partie de Δ . En outre, Δ^ν est un ensemble fini (lemme 7.57(iv)), et la surjection p_n induit par restriction une surjection $\Delta^\nu \rightarrow \Delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc aussi une surjection $\Delta^\nu \rightarrow \Delta$ (remarque 2.33(ii)). Ainsi, il suffit de vérifier que pour tout $y \in \Delta^\nu$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(y) \notin \Sigma_n$.

Or, soit $V_0 \subset X$ un voisinage ouvert affine de $x_0 := p_0(y)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $V_{n+1} \subset E_{n+1}$ un voisinage ouvert affine de $x_{n+1} := p_{n+1}(y)$ avec $q_{n+1}(V_{n+1}) \subset V_n$. Posons $\underline{V}_n := V_n \times_{E_n} \underline{E}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ainsi, $\underline{V}_n = \text{Spec } A_n$ pour un anneau intègre noethérien A_n (remarque 5.73(i,iii) et exercice 6.67(iii)), et la restriction $r_{n+1} : \underline{V}_{n+1} \rightarrow \underline{V}_n$ de q_{n+1} correspond à un homomorphisme d'anneaux $\phi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ injectif, car l'image de V_{n+1} est dense dans V_n (exercice 3.37(ii)). En outre, noter que $r_{n+1}^{-1}(x_n) \subset p_{n+1}^{-1}(p_0^{-1}(x_0))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car p_{n+1} est surjectif (lemme 7.54(i)); en particulier, $r_{n+1}^{-1}(x_n)$ est une partie finie et fermée de E_{n+1} (lemme 7.57(iv)), et comme E_{n+1} est de dimension un, et que $r_{n+1}^{-1}(x_n)$ ne contient pas le point générique de E_{n+1} , on voit que la topologie de E_{n+1} induit la topologie discrète sur $r_{n+1}^{-1}(x_n)$, en particulier, ϕ_n est *quasi-fini* au point x_{n+1} (voir la définition 6.34(i)).

Rappelons que q_{n+1} se restreint en un isomorphisme $\underline{U}_n \times_{\underline{E}_n} \underline{E}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \underline{U}_n$; par suite, $q_{n+1}^\# : \widetilde{q}_{n+1}^{-1} \mathcal{O}_{E_n} \rightarrow \mathcal{O}_{E_{n+1}}$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{E_n, \eta_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{E_{n+1}, \eta_{n+1}}$ des fibres des faisceaux structuraux aux points génériques respectifs $\eta_n \in E_n$ et $\eta_{n+1} \in E_{n+1}$. Autrement dit, ϕ_n induit un isomorphisme :

$$\text{Frac}(A_n) \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(A_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soient A_0^ν la normalisation de A_0 , et B_n la fermeture intégrale de A_0 dans A_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$; par ce qui précède, A_0^ν est une A_0 -algèbre finie, et B_n s'identifie naturellement avec une A_0 -sous-algèbre de A_0^ν , de sorte que l'on obtient une chaîne ascendante de A_0 -sous-algèbres :

$$\begin{array}{ccccccc} & & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \cdots \subset A_0^\nu \\ & \nearrow \phi_0 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad} & A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & \cdots \subset \text{Frac}(A_0) \end{array}$$

et puisque A_0 est noethérien, la suite $(B_{n+1} \mid n \in \mathbb{N})$ doit alors être stationnaire (proposition 6.64); soit alors $N \in \mathbb{N}$ avec $B_n = B_N$ pour tout $n \geq N$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point x_n correspond à un idéal premier $\mathfrak{q}_n$ de A_n ; soit aussi $\mathfrak{q}'_n := B_n \cap \mathfrak{q}_n$ pour tout $n > 0$. D'après l'exercice 6.41, la composition $\phi_n \circ \dots \circ \phi_0 : A_0 \rightarrow A_{n+1}$ est encore quasi-finie au point x_{n+1} , i.e. en $\mathfrak{q}_{n+1}$; par le théorème 6.55, l'inclusion $B_n \rightarrow A_n$ induit alors un isomorphisme $(B_n)_{\mathfrak{q}'_n} \xrightarrow{\sim} (A_n)_{\mathfrak{q}_n}$ pour tout $n > 0$. D'autre part, $(B_n)_{\mathfrak{q}'_n} = (B_N)_{\mathfrak{q}'_N}$ pour tout $n \geq N$, donc finalement ϕ_n induit un isomorphisme

$$(A_n)_{\mathfrak{q}_n} \xrightarrow{\sim} (A_{n+1})_{\mathfrak{q}_{n+1}} \quad \forall n \geq N.$$

Cela revient à dire que $q_{n+1}^\#$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{E_n, x_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{E_{n+1}, x_{n+1}}$ pour tout $n \geq N$. Mais q_{n+1} est l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{O}_{E_n}$ tel que $V(\mathcal{I}_n)$ soit le sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent Σ_n ; par suite, $\mathcal{I}_{n, x_n}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{E_n, x_n}$, et donc $\mathcal{I}_{n, x_n} \cdot \mathcal{O}_{E_{n+1}, x_{n+1}}$ doit être l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{E_{n+1}, x_{n+1}}$, pour tout $n \geq N$. De l'autre côté, $\mathcal{I}_n \mathcal{O}_{E_{n+1}}$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{E_{n+1}}$, par la propriété universelle de l'éclatement; ainsi, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{E_{n+1}, x_{n+1}}$ est principal, engendré par un élément régulier, et par suite $\mathcal{O}_{E_{n+1}, x_{n+1}}$ est un anneau de valuation discrète (proposition 7.36) pour $n \geq N$, donc de même pour $\mathcal{O}_{E_n, x_n}$, et finalement $x_N \notin \Sigma_N$. $\square$

7.5. Foncteurs dérivés d'un foncteur additif. La construction dont il s'agit dans cette section est au cœur de l'algèbre homologique.

7.5.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'objets projectifs, i.e. telle que tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ est quotient d'un objet projectif de $\mathcal{A}$. On associe à $\mathcal{A}$ la catégorie

$$\mathcal{A} - \text{RésPr}$$

dont les objets $(P_\bullet, \varepsilon)$ sont les résolutions projectives à gauche $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ des objets de $\mathcal{A}$. Pour tout couple de résolutions $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M, Q_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} N$, les morphismes $f : (P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow (Q_\bullet, \varepsilon')$ de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$ sont les morphismes $f : M \rightarrow N$ de $\mathcal{A}$, et la composition de morphismes est la même que pour $\mathcal{A}$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{A} - \text{RésPr}((P_\bullet, \varepsilon), (Q_\bullet, \varepsilon'))$ hérite la structure naturelle de groupe abélien de $\mathcal{A}(M, N)$.

- On a ainsi un foncteur d'oubli évident

$$\pi : \mathcal{A} - \text{RésPr} \rightarrow \mathcal{A} \quad (\varepsilon : P_\bullet \rightarrow M) \mapsto M$$

qui est l'identité sur les morphismes, i.e. $\pi(f) := f$ pour tout f comme ci-dessus. Puisque nos hypothèses entraînent aisément que tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution projective à gauche, il est clair que π est une équivalence de catégories, et par suite $\mathcal{A} - \text{RésPr}$ est une catégorie abélienne.

- Soient maintenant $\mathcal{B}$ une deuxième catégorie abélienne, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif, et $i \in \mathbb{N}$; pour tout objet $(P_\bullet, \varepsilon)$ de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$, on pose

$$\text{L}_i F(P_\bullet, \varepsilon) := H_i(F(P_\bullet)).$$

En outre, pour tout morphisme $f : (P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow (Q_\bullet, \varepsilon')$ de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$ on choisit, à l'aide du théorème 5.9, un morphisme de résolutions

$$\begin{array}{ccc} P_\bullet & \xrightarrow{\varepsilon} & M \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow f \\ Q_\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'} & N \end{array}$$

et on pose

$$\text{L}_i F(f) := H_i(F f_\bullet) : \text{L}_i F(P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow \text{L}_i F(Q_\bullet, \varepsilon').$$

Remarque 7.59. (i) Noter que $\text{L}_i F(f)$ ne dépend pas du choix de $f_\bullet$: car, d'après le théorème 5.9, tout morphisme de complexes $g_\bullet : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ tel que $f \circ \varepsilon_M = \varepsilon_N \circ g_0$ est homotopiquement équivalent à $f_\bullet$, donc $F f_\bullet$ est homotopiquement équivalent à $F g_\bullet$ (remarque 5.5(v)), et ainsi $H_i(F f_\bullet) = H_i(F g_\bullet)$, par la remarque 5.5(iii).

(ii) La notation $L_i F(f)$ est quelque peu ambiguë, car si $(P_\bullet^j, \varepsilon_j), (Q_\bullet^j, \varepsilon'_j)$ pour $j = 1, 2$ sont deux paires d'objets de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$ avec $\pi(P_\bullet^1, \varepsilon_1) = M = \pi(P_\bullet^2, \varepsilon_2)$ et $\pi(Q_\bullet^1, \varepsilon'_1) = N = \pi(Q_\bullet^2, \varepsilon'_2)$, le même morphisme $f \in \mathcal{A}(M, N)$ est à la fois un morphisme $f : (P_\bullet^1, \varepsilon_1) \rightarrow (Q_\bullet^1, \varepsilon'_1)$ et un morphisme $f : (P_\bullet^2, \varepsilon_2) \rightarrow (Q_\bullet^2, \varepsilon'_2)$, donc $L_i F(f) : L_i F(P_\bullet^j, \varepsilon_j) \rightarrow L_i F(Q_\bullet^j, \varepsilon'_j)$ admet deux interprétations, selon que l'on fait $j = 1$ ou $j = 2$. Pour pallier, on pourrait par exemple écrire plus explicitement $L_i F(f, P_\bullet^j, Q_\bullet^j)$ pour cette application. Cependant, dans la pratique l'ambiguïté résultante de notre notation abrégée est assez inoffensive.

Théorème 7.60. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les associations*

$$(P_\bullet, \varepsilon) \mapsto L_i F(P_\bullet, \varepsilon) \quad ((P_\bullet, \varepsilon) \xrightarrow{f} (Q_\bullet, \varepsilon')) \mapsto L_i F(f)$$

définissent un foncteur additif $L_i F : \mathcal{A} - \text{RésPr} \rightarrow \mathcal{B}$.

Démonstration. Soient $(P_\bullet^1, \varepsilon_1) \xrightarrow{f} (P_\bullet^2, \varepsilon_2) \xrightarrow{g} (P_\bullet^3, \varepsilon_3)$ des morphismes de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$, et $h := g \circ f$. Les choix effectués ci-dessus nous donnent des morphismes

$$f_\bullet : P_\bullet^1 \rightarrow P_\bullet^2 \quad g_\bullet : P_\bullet^2 \rightarrow P_\bullet^3 \quad h_\bullet : P_\bullet^1 \rightarrow P_\bullet^3$$

de complexes de A -modules tels que

$$f \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ f_0 \quad g \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \circ g_0 \quad h \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_3 \circ h_0.$$

Au vu du théorème 5.9, on déduit que $h_\bullet$ est homotopiquement équivalent à $g_\bullet \circ f_\bullet$, donc $F(h_\bullet)$ est homotopiquement équivalent à $F(g_\bullet \circ f_\bullet) = F(g_\bullet) \circ F(f_\bullet)$, par la remarque 5.5(v). Compte tenu de la remarque 5.5(iii), il vient

$$L_i F(g \circ f) = L_i F(g) \circ L_i F(f) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

De même, soit $i_\bullet : P_\bullet \rightarrow P_\bullet$ le morphisme associé à l'identité $1_M = 1_{(P_\bullet, \varepsilon)} : (P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow (P_\bullet, \varepsilon)$; par le théorème 5.9 on sait que $i_\bullet$ est homotopiquement équivalent à $1_{P_\bullet}$, donc $F(i_\bullet)$ est homotopiquement équivalent à $F(1_{P_\bullet}) = 1_{F(P_\bullet)}$, et par suite $L_i F(1_{(P_\bullet, \varepsilon)}) = 1_{L_i F(P_\bullet, \varepsilon)}$. Ensuite, soient $f_\bullet^1, f_\bullet^2 : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ les morphismes de complexes associés à un couple donnés $f_1, f_2 : (P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow (Q_\bullet, \varepsilon')$ de morphismes de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$, et $f_\bullet^3 : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ le morphisme associé à $f_3 := af_1 + bf_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On montre de même que $f_\bullet^3$ est homotopiquement équivalent à $af_\bullet^1 + bf_\bullet^2$, donc $F(f_\bullet^3)$ est homotopiquement équivalent à $F(af_\bullet^1 + bf_\bullet^2) = aF(f_\bullet^1) + bF(f_\bullet^2)$, d'où l'additivité de L_i . $\square$

Remarque 7.61. (i) Soient $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ deux foncteurs additifs, et $\eta : F \rightarrow G$ une transformation naturelle. Pour tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et toute résolution projective $\varepsilon : P_\bullet \rightarrow M$, le système $(\eta_{P_i} : FP_i \rightarrow GP_i \mid i \in \mathbb{N})$ est évidemment un morphisme de complexes $\eta_{P_\bullet} : FP_\bullet \rightarrow GP_\bullet$, d'où un morphisme de $\mathcal{B}$

$$(L_i \eta)_{(P_\bullet, \varepsilon)} := H_i(\eta_{P_\bullet}) : L_i F(P_\bullet, \varepsilon) \rightarrow L_i G(P_\bullet, \varepsilon) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

et on voit aisément que l'association $(P_\bullet, \varepsilon) \mapsto (L_i \eta)_{(P_\bullet, \varepsilon)}$ définit une transformation naturelle $L_i \eta : L_i F \rightarrow L_i G$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Dans la situation de (i), soient $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un troisième foncteur additif, et $\tau : G \rightarrow H$ une autre transformation naturelle; on voit aisément que

$$L_i(\tau \circ \eta) = L_i \tau \circ L_i \eta \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(iii) Pour tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, choisissons une résolution projective à gauche $\varepsilon_M : P_{M_\bullet} \rightarrow M$. La donnée de $\mathcal{P} := ((P_{M_\bullet}, \varepsilon_M) \mid M \in \text{Ob}(\mathcal{A}))$ détermine une quasi-inverse pour l'équivalence π , notée

$$\sigma_{\mathcal{P}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} - \text{RésPr} \quad M \mapsto (P_{M_\bullet}, \varepsilon_M)$$

qui est l'identité sur les morphismes, i.e. $\sigma_{\mathcal{P}}(f) := (f : (P_{M\bullet}, \varepsilon_M) \rightarrow (P_{N\bullet}, \varepsilon_N))$ pour tout $f \in \mathcal{A}(M, N)$. Pour un autre système de résolutions projectives à gauche $\mathcal{P}' := ((P'_{M\bullet}, \varepsilon'_M) \mid M \in \text{Ob}(\mathcal{A}))$, on a un isomorphisme de foncteurs

$$\omega^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} : \sigma_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \sigma_{\mathcal{P}'} \quad M \mapsto (1_M : (P_{M\bullet}, \varepsilon_M) \xrightarrow{\sim} (P'_{M\bullet}, \varepsilon'_M))$$

et si $\mathcal{P}'' := ((P''_{M\bullet}, \varepsilon''_M) \mid M \in \text{Ob}(\mathcal{A}))$ est un troisième tel système, il vient

$$\omega^{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} \circ \omega^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} = \omega^{\mathcal{P}, \mathcal{P}''}.$$

(iv) D'après le théorème 7.60, pour tout foncteur additif $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on déduit un foncteur additif

$$L_i^{\mathcal{P}} F := (L_i F) \circ \sigma_{\mathcal{P}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Evidemment cette construction dépend du système de résolutions choisi $\mathcal{P}$, mais pour un autre choix $\mathcal{P}'$, on déduit de (iii) des isomorphismes canoniques

$$\omega_{F,i}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} := (L_i F) * \omega_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} : L_i^{\mathcal{P}} F \xrightarrow{\sim} L_i^{\mathcal{P}'} F \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(notation de l'exercice 1.129(ii)) et on a $\omega_{F,i}^{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} \circ \omega_{F,i}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} = \omega_{F,i}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}''}$, si $\mathcal{P}''$ est un troisième système. En résumé, la construction de $L_i^{\mathcal{P}} F$ est aussi canonique que possible, compte tenu du fait qu'elle dépend d'un grand nombre de choix, codés dans $\mathcal{P}$. Pour certaines catégories $\mathcal{A}$ (e.g. si $\mathcal{A} = A - \text{Mod}$ pour un anneau quelconque A), on pourrait exhiber un système $\mathcal{P}$ canonique, et obtenir ainsi une définition univoque, mais en tout cas, la discussion montre que même un choix arbitraire pour $\mathcal{P}$ donne lieu à une famille de foncteurs canoniquement isomorphes à ceux que l'on obtient à partir de n'importe quel autre choix; de plus, même ces isomorphismes canoniques sont tous compatibles entre eux. En pratique, il n'est donc pas nécessaire de spécifier le système $\mathcal{P}$ adopté, qui pourra être tout simplement négligé dans la notation, et dans toute discussion de ces foncteurs. Ainsi, désormais on notera le foncteur $L_i^{\mathcal{P}} F$, correspondant au choix d'un système $\mathcal{P}$ arbitraire, par

$$L_i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

et on l'appellera *le i -ème foncteur dérivé à gauche* du foncteur F .

(v) Une variante importante du théorème 7.60 s'obtient si l'on suppose plutôt que $\mathcal{A}$ admet assez d'objet injectifs, i.e. que tout objet de $\mathcal{A}$ soit un sous-objet d'un objet injectif; évidemment, cela revient à dire que $\mathcal{A}^{\text{op}}$ admet assez d'objets projectifs. Remplaçons alors $\mathcal{A} - \text{RésPr}$ par la catégorie

$$\mathcal{A} - \text{RésInj}$$

dont les objets $(I^\bullet, M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet)$ sont les résolutions injectives à droite des objets de $\mathcal{A}$; pour tout couple de résolutions $M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet, N \xrightarrow{\varepsilon'} J^\bullet$, les morphismes $(I^\bullet, \varepsilon) \rightarrow (J^\bullet, \varepsilon')$ sont encore les morphismes $M \rightarrow N$ de $\mathcal{A}$. Au vu de la remarque 5.10(iii), on a une identification naturelle

$$\mathcal{A} - \text{RésInj} = (\mathcal{A}^{\text{op}} - \text{RésPr})^{\text{op}}$$

et les constructions précédentes s'adaptent aisément pour attacher à tout foncteur additif $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une suite de foncteurs

$$R^i F : \mathcal{A} - \text{RésInj} \rightarrow \mathcal{B} \quad (I^\bullet, \varepsilon) \mapsto H^i(F(I^\bullet)) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

De même, à tout système $\mathcal{I} := \{M \xrightarrow{\varepsilon_M} I_M^\bullet \mid M \in \text{Ob}(\mathcal{A})\}$ de résolutions injectives à droite on associe une équivalence de catégories

$$\sigma_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} - \text{RésInj} \quad M \mapsto (I_M^\bullet, \varepsilon_M)$$

d'où une suite de *foncteurs additifs dérivés à droite*

$$R_{\mathcal{I}}^i F := (R^i F) \circ \sigma_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad M \mapsto H^i(F(I_M^\bullet)) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

avec, bien entendu, un système d'isomorphismes de foncteurs, pour des choix différents du système auxiliaire $\mathcal{I}$. Les détails seront laissés aux soins du lecteur.

Exercice 7.62. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes, et supposons que $\mathcal{A}$ admet assez d'objets projectifs.

- (i) Montrer que $L_i F P = 0$ pour tout objet projectif P de $\mathcal{A}$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (ii) Soit en outre F exact à droite; exhiber un isomorphisme canonique

$$L_0 F \xrightarrow{\sim} F$$

et montrer que F est exact $\Leftrightarrow L_1 F = 0 \Leftrightarrow L_i F = 0$ pour tout $i > 0$.

(iii) Par exemple, pour un anneau A et un A -module fixé M , soit F_M le foncteur $M \otimes_A - : A - \mathbf{Mod} \rightarrow A - \mathbf{Mod}$ (voir le §3.1.2). Les foncteurs dérivés $L_i F_M$ sont traditionnellement notés :

$$N \mapsto \mathrm{Tor}_i^A(M, N).$$

Déduire de (ii) un isomorphisme naturel pour tout couple de A -modules M, N :

$$\mathrm{Tor}_0^A(M, N) \xrightarrow{\sim} M \otimes_A N.$$

- (iv) Utiliser les résolutions trouvées dans l'exercice 5.8(ii) pour calculer

$$\mathrm{Tor}_i^{A_1}(k(\mathfrak{m}_1), k(\mathfrak{m}_1)) \quad \mathrm{Tor}_i^{A_2}(k(\mathfrak{m}_2), k(\mathfrak{m}_2)) \quad \mathrm{Tor}_i^{A_3}(k(\mathfrak{m}_3), k(\mathfrak{m}_3)) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(v) Soient A un anneau, M un A -module, $a \in A$ un élément régulier. Exhiber des isomorphismes naturels de A -modules :

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, A/aA) \simeq \begin{cases} M/aM & \text{si } i = 0 \\ \mathrm{Ker}(a \cdot \mathrm{Id}_M : M \rightarrow M) & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Exercice 7.63. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes, et supposons que $\mathcal{A}$ admet assez d'objets injectifs.

- (i) Montrer que $R^i F(I) = 0$ pour tout objet injectif I de $\mathcal{A}$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (ii) Soit en outre F exact à gauche; exhiber un isomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\sim} R^0 F$$

et montrer que F est exact $\Leftrightarrow R^1 F = 0 \Leftrightarrow R^i F = 0$ pour tout $i > 0$.

(iii) Pour un anneau A et un A -module fixé M , soit $F_M : A - \mathbf{Mod} \rightarrow A - \mathbf{Mod}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ de la remarque 3.7. Les foncteurs dérivés à droite $R^i F_M$ sont traditionnellement notés :

$$N \mapsto \mathrm{Ext}_A^i(M, N).$$

Déduire de (ii) un isomorphisme naturel pour tout couple de A -modules M, N :

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^0(M, N).$$

Remarque 7.64. (i) Toute application A -linéaire $\phi : M' \rightarrow M$ induit une transformation naturelle $\mathrm{Hom}_A(\phi, -) : \mathrm{Hom}_A(M, -) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M', -)$ de la façon évidente, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ on notera par $\mathrm{Ext}_A^i(\phi, -) : \mathrm{Ext}_A^i(M, -) \rightarrow \mathrm{Ext}_A^i(M', -)$ la i -ème dérivée à droite de $\mathrm{Hom}_A(\phi, -)$, suivant la (duale de la) remarque 7.61(i). Evidemment, si $\phi' : M'' \rightarrow M'$ est une autre application A -linéaire, on a $\mathrm{Hom}_A(\phi', -) \circ \mathrm{Hom}_A(\phi, -) = \mathrm{Hom}_A(\phi \circ \phi', -)$; au vu de la remarque 7.61(ii), il s'ensuit que tout A -module N induit un foncteur $\mathrm{Ext}_A^i(-, N) : (A - \mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \rightarrow A - \mathbf{Mod}$, et une inspection directe montre aisément que ce foncteur est additif. On obtient ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$ un foncteur *biadditif* (i.e. additif séparément dans chaque argument)

$$\mathrm{Ext}_A^i(-, -) : (A - \mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \times (A - \mathbf{Mod}) \rightarrow A - \mathbf{Mod}.$$

De même, les dérivés à gauche de $- \otimes_A -$ nous fournissent les foncteur biadditifs

$$\mathrm{Tor}_i^A(-, -) : (A - \mathbf{Mod}) \times (A - \mathbf{Mod}) \rightarrow A - \mathbf{Mod}.$$

(ii) Le calcul explicite des foncteurs dérivés à droite est souvent difficile, car on a rarement à disposition des résolutions injectives suffisamment maniables. D'autre part, pour le calcul de $\text{Ext}_A^i(M, N)$ on peut contourner ces difficultés : on verra dans la section 8.5 que ce dernier est naturellement isomorphe à $L_i \text{Hom}_A(M, N)$, où $L_i \text{Hom}_A(-, N)$ dénote le i -ème foncteur dérivé à gauche du foncteur additif contravariant $\text{Hom}_A(-, N)$. De même, on verra que $\text{Tor}_i^A(M, N)$ est isomorphe à $L_i T_N(M)$, où $T_N : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}$ est le foncteur $- \otimes_A N$.

On va maintenant joindre la construction du foncteur dérivé avec la suite exacte longue d'homologie du §2.5.2. On remarque d'abord :

Proposition 7.65. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et*

$$\Sigma : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{A}$. Soient aussi $(P'_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon'} M'$ et $(P''_\bullet, d''_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon''} M''$ deux résolutions projectives. Alors il existe une résolution projective $(P_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ avec $P_i := P'_i \oplus P''_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et un diagramme commutatif de résolutions

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} \Sigma_P & & 0 & \longrightarrow & P'_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & P_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet} & P''_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \varepsilon' \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' & & \\ \Sigma & & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que $f_i : P'_i \rightarrow P'_i \oplus P''_i$ et $g_i : P'_i \oplus P''_i \rightarrow P''_i$ sont respectivement l'inclusion et la projection canoniques, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En raisonnant comme dans la remarque 5.2, on se ramène au cas où $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine et exacte de $A - \text{Mod}$, pour un anneau associatif unitaire A convenable. Or, g est un épimorphisme de $\mathcal{A}$, et P''_0 est projectif dans $\mathcal{A}$, donc ε'' se relève en une application A -linéaire $\varepsilon''_M : P''_0 \rightarrow M$; soit aussi $\varepsilon'_M := f \circ \varepsilon' : P'_0 \rightarrow M$. On déduit une application A -linéaire

$$\varepsilon : P_0 \rightarrow M \quad (x, y) \mapsto \varepsilon'_M(x) + \varepsilon''_M(y)$$

et on voit aisément que

$$\varepsilon \circ f_0 = f \circ \varepsilon' \quad \text{et} \quad g \circ \varepsilon = \varepsilon'' \circ g_0.$$

On pose $d_0 := \varepsilon$ et on va construire par récurrence sur $i > 0$ la différentielle $d_i : P'_i \oplus P''_i \rightarrow P'_{i-1} \oplus P''_{i-1}$, sous la forme d'une matrice en blocs

$$\begin{pmatrix} d'_i & (-1)^i \cdot \sigma_i \\ 0 & d''_i \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad d'_{i-1} \circ \sigma_i \circ d''_{i+1} = 0 \quad \forall i > 0.$$

(Rappelons que $d'_0 := \varepsilon'$ et $d''_0 := \varepsilon''$). Avec des différentielles $d_\bullet$ de cette forme, on voit aussitôt que les systèmes des inclusions $(f_i | i \in \mathbb{N})$ et des projections $(g_i | i \in \mathbb{N})$ définissent des morphismes $f_\bullet : P'_\bullet \rightarrow P_\bullet$ et $g_\bullet : P_\bullet \rightarrow P''_\bullet$ comme souhaité.

Pour $i = 1$, remarquons que $g \circ \varepsilon''_M \circ d''_1 = \varepsilon'' \circ d''_1 = 0$, donc $\text{Im}(\varepsilon''_M \circ d''_1) \subset \text{Im}(f)$, et comme ε' est un épimorphisme de $\mathcal{A}$, et que P''_1 est projectif dans $\mathcal{A}$, on trouve

$$\sigma_1 : P''_1 \rightarrow P'_0 \quad \text{tel que} \quad f \circ \varepsilon' \circ \sigma_1 = \varepsilon''_M \circ d''_1$$

ce qui nous donne notre d_1 . Avec cette définition, on calcule pour tout $(x, y) \in P_1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ d_1(x, y) &= \varepsilon(d'_1(x) - \sigma_1(y), d''_1(y)) \\ &= \varepsilon'_M(d'_1(x) - \sigma_1(y)) + \varepsilon''_M(d''_1(y)) \\ &= -\varepsilon'_M \circ \sigma_1(y) + \varepsilon''_M \circ d''_1(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et on a aussi $f \circ \varepsilon' \circ \sigma_1 \circ d''_2 = \varepsilon''_M \circ d''_1 \circ d''_2 = 0$, donc $\varepsilon' \circ \sigma_1 \circ d''_2 = 0$.

Soit ensuite $i > 1$, et supposons que l'on a déjà exhibé σ_{i-1} de la forme souhaitée ; en particulier, $\text{Im}(\sigma_{i-1} \circ d_i'') \subset \text{Ker}(d_{i-2}') = \text{Im}(d_{i-1}')$, et comme P_i'' est projectif dans $\mathcal{A}$, on peut donc reléver $\sigma_{i-1} \circ d_i''$ en une application A -linéaire $\sigma_i : P_i'' \rightarrow P_{i-1}'$, et on obtient ainsi notre différentielle d_i . Par construction on a

$$d_{i-1}' \circ \sigma_i \circ d_{i+1}'' = \sigma_{i-1} \circ d_i'' \circ d_{i+1}'' = 0.$$

En outre, pour tout $(x, y) \in P_i$ il vient :

$$\begin{aligned} d_{i-1} \circ d_i(x, y) &= d_{i-1}(d_i'(x) + (-1)^i \cdot \sigma_i(y), d_i''(y)) \\ &= (d_{i-1}'(d_i'(x) + (-1)^i \cdot \sigma_i(y)) + (-1)^{i-1} \cdot \sigma_{i-1}(d_i''(y)), 0) \\ &= ((-1)^i \cdot d_{i-1}' \circ \sigma_i(y) + (-1)^{i-1} \cdot \sigma_{i-1} \circ d_i''(y), 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela achève la construction de $P_\bullet$. Il reste à vérifier que $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ est une résolution de M . Pour cela, on remarque que $f_\bullet$ et $g_\bullet$ définissent une suite exacte $0 \rightarrow P_\bullet' \rightarrow P_\bullet \rightarrow P_\bullet'' \rightarrow 0$. On en déduit une suite exacte longue d'homologie

$$\cdots \rightarrow H_i(P_\bullet') \rightarrow H_i(P_\bullet) \rightarrow H_i(P_\bullet'') \rightarrow \cdots$$

(voir §2.5.2). Mais par hypothèse $H_i(P_\bullet') = 0 = H_i(P_\bullet'')$ pour tout $i > 0$, d'où $H_i(P_\bullet) = 0$ pour tout $i > 0$. En dernier lieu, pour $i = 0$, le diagramme commutatif de résolutions (*) induit un diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(P_\bullet'') & \longrightarrow & H_0(P_\bullet') & \longrightarrow & H_0(P_\bullet) & \longrightarrow & H_0(P_\bullet'') & \longrightarrow & H_{-1}(P_\bullet') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

à lignes horizontales exactes, et dont les flèches verticales, sauf éventuellement la flèche centrale, sont des isomorphismes ; mais dans ce cas, l'exercice 2.104 nous dit que la flèche centrale est aussi un isomorphisme, et la preuve est achevée. $\square$

Remarque 7.66. Par dualité, on déduit aussitôt la version “à droite” de la proposition 7.65 : si $M' \xrightarrow{\varepsilon'} (I_{M'}, d_{M'}^\bullet)$ et $M'' \xrightarrow{\varepsilon''} (I_{M''}, d_{M''}^\bullet)$ sont deux résolutions injectives à droite, il existe une résolution injective à droite $M \xrightarrow{\varepsilon} (I_M^\bullet, d_M^\bullet)$ avec $I_M^n = I_{M'}^n \oplus I_{M''}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et un diagramme commutatif de résolutions :

$$\begin{array}{ccccccccc} \Sigma & & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' & & \\ \Sigma_I & & 0 & \longrightarrow & I_{M'}^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & I_M^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & I_{M''}^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que $f^\bullet$ et $g^\bullet$ sont respectivement les inclusions et les projections canoniques.

La prochaine étape consiste à vérifier que la construction de la proposition 7.65 est compatible aux morphismes de suites exactes courtes ; pour cela on a :

Proposition 7.67. *On considère un diagramme commutatif*

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \longrightarrow & P_\bullet' & \xrightarrow{f_\bullet^1} & P_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet^1} & P_\bullet'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' & & \\ h_\bullet \cdot & & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f^1} & M & \xrightarrow{g^1} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' & & \\ & & 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f^2} & N & \xrightarrow{g^2} & N'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow \mu' & & \uparrow \mu & & \uparrow \mu'' & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Q_\bullet' & \xrightarrow{f_\bullet^2} & Q_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet^2} & Q_\bullet'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, tel que :

- (a) $(P_\bullet, \varepsilon), (P'_\bullet, \varepsilon'), (P''_\bullet, \varepsilon''), (Q_\bullet, \mu), (Q'_\bullet, \mu'), (Q''_\bullet, \mu'') \in \text{Ob}(\mathcal{A} - \text{RésPr})$
- (b) les 2^{ème} et 3^{ème} lignes horizontales sont des suites exactes courtes d'objets de $\mathcal{A}$,
et la 1^{ère} et la 4^{ème} sont des suites exactes courtes de complexes de $\mathcal{A}$
- (c) $h'_\bullet$ et $h''_\bullet$ sont des morphismes de complexes de $\mathcal{A}$ avec

$$\mu' \circ h'_0 = h' \circ \varepsilon' \quad \text{et} \quad \mu'' \circ h''_0 = h'' \circ \varepsilon''.$$

Alors il existe un morphisme de complexes $h_\bullet : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ tel que

$$(**) \quad \mu \circ h_0 = h \circ \varepsilon$$

et qui fait commuter le diagramme de complexes

$$(***) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_\bullet & \xrightarrow{f^1_\bullet} & P_\bullet & \xrightarrow{g^1_\bullet} & P''_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & h'_\bullet \downarrow & & \downarrow h_\bullet & & \downarrow h''_\bullet \\ 0 & \longrightarrow & Q'_\bullet & \xrightarrow{f^2_\bullet} & Q_\bullet & \xrightarrow{g^2_\bullet} & Q''_\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

Démonstration. Comme P'_i et P''_i sont des objets projectifs de $\mathcal{A}$, on peut supposer que $P_i = P'_i \oplus P''_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et f^1_i, g^1_i sont respectivement l'inclusion canonique et la projection canonique, et de même pour $Q_\bullet$ et les morphismes $f^2_\bullet, g^2_\bullet$. En outre, en raisonnant comme dans la remarque 5.2, on peut supposer que $\mathcal{A}$ soit une sous-catégorie pleine et exacte de $A\text{-Mod}$, pour un anneau associatif unitaire A convenable. Soient aussi $d^{P'_\bullet}, d^{P_\bullet}, d^{P''_\bullet}$ les différentielles des complexes $P'_\bullet, P_\bullet$ et $P''_\bullet$, et de même pour $d^{Q'_\bullet}, d^{Q_\bullet}, d^{Q''_\bullet}$; noter que l'on peut décomposer les applications

$$d^P_i : P'_i \oplus P''_i \rightarrow P'_{i-1} \oplus Q''_{i-1} \quad d^Q_i : Q'_i \oplus Q''_i \rightarrow Q'_{i-1} \oplus Q''_{i-1}$$

comme matrices en blocs

$$d^P_i = \begin{pmatrix} d^{P'}_i & \sigma_i \\ 0 & d^{P''}_i \end{pmatrix} \quad d^Q_i = \begin{pmatrix} d^{Q'}_i & \tau_i \\ 0 & d^{Q''}_i \end{pmatrix} \quad \forall i > 0$$

et les conditions $d^P_{i-1} \circ d^P_i = 0$ et $d^Q_{i-1} \circ d^Q_i = 0$ se traduisent par les identités

$$d^{P'}_{i-1} \circ \sigma_i + \sigma_{i-1} \circ d^{P''}_i = 0 \quad d^{Q'}_{i-1} \circ \tau_i + \tau_{i-1} \circ d^{Q''}_i = 0 \quad \forall i > 1.$$

De même, il existe des homomorphismes $\beta : P''_0 \rightarrow M$ et $\gamma : Q''_0 \rightarrow N$ tels que $\varepsilon : P'_0 \oplus P''_0 \rightarrow M$ et $\mu : Q'_0 \oplus Q''_0 \rightarrow N$ se décomposent de façon analogue :

$$\varepsilon = (f^1 \circ \varepsilon' \quad \beta) \quad \mu = (f^2 \circ \mu' \quad \gamma) \quad \text{avec} \quad g^1 \circ \beta = \varepsilon'' \quad g^2 \circ \gamma = \mu''$$

et les conditions $\varepsilon \circ d^P_1 = 0$ et $\mu \circ d^Q_1 = 0$ se traduisent par les identités

$$f^1 \circ \varepsilon' \circ \sigma_1 + \beta \circ d^{P''}_1 = 0 \quad f^2 \circ \mu' \circ \tau_1 + \gamma \circ d^{Q''}_1 = 0.$$

On va construire les applications $h_i : P'_i \oplus P''_i \rightarrow Q'_i \oplus Q''_i$ par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, comme des matrices en blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} h'_i & \alpha_i \\ 0 & h''_i \end{pmatrix}.$$

Noter qu'avec un morphisme $h_\bullet$ de cette forme, le diagramme $(***)$ est sûrement commutatif. Il reste donc à exhiber les homomorphismes $\alpha_i : P''_i \rightarrow Q'_i$ tels que la condition $(**)$ soit vérifiée, et tels que

$$(\dagger) \quad h_{i-1} \circ d^P_i = d^Q_i \circ h_i \quad \forall i > 0.$$

Avec la notation ci-dessus, la condition $(**)$ devient l'identité de matrices en blocs

$$(f^2 \circ \mu' \circ h'_0 \quad f^2 \circ \mu' \circ \alpha_0 + \gamma \circ h''_0) = (h \circ f^1 \circ \varepsilon' \quad h \circ \beta).$$

Donc, on doit trouver une solution α_0 de l'équation : $f^2 \circ \mu' \circ \alpha_0 = h \circ \beta - \gamma \circ h_0''$. Pour cela on remarque que

$$g^2 \circ (h \circ \beta - \gamma \circ h_0'') = h'' \circ g^1 \circ \beta - \mu'' \circ h_0'' = h'' \circ \varepsilon'' - h'' \circ \varepsilon'' = 0.$$

Comme la troisième ligne du diagramme (*) est exacte, il existe alors une application A -linéaire $\delta : P_0'' \rightarrow N'$ telle que $f^2 \circ \delta = h \circ \beta - \gamma \circ h_0''$. Comme P_0'' est projectif dans $\mathcal{A}$, et comme μ' est une surjection, on peut relever δ en une application $\alpha_0 : P_0'' \rightarrow Q_0'$ qui est la solution souhaitée.

De même, la condition (†) se traduit par l'identité de matrices en blocs

$$\begin{pmatrix} h'_{i-1} \circ d_i^{P'} & h'_{i-1} \circ \sigma_i + \alpha_{i-1} \circ d_i^{P''} \\ 0 & h''_{i-1} \circ d_i^{P''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i^{Q'} \circ h'_i & d_i^{Q'} \circ \alpha_i + \tau_i \circ h''_i \\ 0 & d_i^{Q''} \circ h''_i \end{pmatrix}.$$

Il faut donc trouver, par récurrence sur i , une solution α_i de l'équation

$$d_i^{Q'} \circ \alpha_i = \delta_i := h'_{i-1} \circ \sigma_i + \alpha_{i-1} \circ d_i^{P''} - \tau_i \circ h''_i.$$

Soit $i > 0$, et on suppose que α_{i-1} ait déjà été déterminée. Si $i > 1$, on note que

$$\begin{aligned} d_{i-1}^{Q'} \circ \delta_i &= h'_{i-2} \circ d_{i-1}^{P'} \circ \sigma_i + \delta_{i-1} \circ d_i^{P''} + \tau_{i-1} \circ d_i^{Q''} \circ h''_i \\ &= -h'_{i-2} \circ \sigma_{i-1} \circ d_i^{P''} + \delta_{i-1} \circ d_i^{P''} + \tau_{i-1} \circ h''_{i-1} \circ d_i^{P''} \\ &= (\delta_{i-1} - h'_{i-2} \circ \sigma_{i-1} + \tau_{i-1} \circ h''_{i-1}) \circ d_i^{P''} = 0. \end{aligned}$$

Si $i = 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} f^2 \circ \mu' \circ \delta_1 &= f^2 \circ h' \circ \varepsilon' \circ \sigma_1 + (h \circ \beta - \gamma \circ h_0'') \circ d_1^{P''} + \gamma \circ d_1^{Q''} \circ h''_1 \\ &= h \circ f^1 \circ \varepsilon' \circ \sigma_1 + (h \circ \beta - \gamma \circ h_0'') \circ d_1^{P''} + \gamma \circ h_0'' \circ d_1^{P'} \\ &= -h \circ \beta \circ d_1^{P''} + h \circ \beta \circ d_1^{P''} = 0. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on conclut que $\text{Im } \delta_i \subset \text{Im } d_i^{Q'}$; comme Q'_i est projectif dans $\mathcal{A}$, il s'ensuit que δ_i se relève en une application α_i qui fournit la solution cherchée. $\square$

Remarque 7.68. (i) Par dualité, on obtient aussitôt la version “à droite” suivante de la proposition 7.67. On considère un diagramme commutatif d'objets de $\mathcal{A}$ et de complexes de $\mathcal{A}$, à lignes horizontales exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & I^\bullet & \xrightarrow{g_1^\bullet} & I''^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \varepsilon' & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{g_1} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f_2} & N & \xrightarrow{g_2} & N'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu' & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu'' \\ 0 & \longrightarrow & J'^\bullet & \xrightarrow{f_2^\bullet} & J^\bullet & \xrightarrow{g_2^\bullet} & J''^\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

$h'^\bullet$ $h''^\bullet$

tel que $(I^\bullet, \varepsilon)$, $(I'^\bullet, \varepsilon')$, $(I''^\bullet, \varepsilon'')$, $(J^\bullet, \mu)$, $(J'^\bullet, \mu')$, $(J''^\bullet, \mu'')$ sont des résolutions injectives. Alors il existe un morphisme de complexes $h^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ avec $h^0 \circ \varepsilon = \mu \circ h$, et qui fait commuter le diagramme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & I^\bullet & \xrightarrow{g_1^\bullet} & I''^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h'^\bullet & & \downarrow h^\bullet & & \downarrow h''^\bullet \\ 0 & \longrightarrow & J'^\bullet & \xrightarrow{f_2^\bullet} & J^\bullet & \xrightarrow{g_2^\bullet} & J''^\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

(ii) Par inspection directe, on voit que la proposition 7.67 reste vraie, avec la même preuve, si l'on remplace la condition (a) par les conditions suivantes :

- $(P_\bullet, \varepsilon), (P'_\bullet, \varepsilon'), (P''_\bullet, \varepsilon'')$ sont des résolutions projectives
- $(Q_\bullet, \mu), (Q'_\bullet, \mu'), (Q''_\bullet, \mu'')$ sont des résolutions (non nécessairement projectives)
- la quatrième ligne est scindée en tout degré, i.e. pour tout $i \in \mathbb{N}$ la suite exacte $0 \rightarrow Q'_i \rightarrow Q_i \rightarrow Q''_i \rightarrow 0$ est scindée.

Cette observation sera utile au §10.3.1.

(iii) Soient maintenant $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif; on suppose que $\mathcal{A}$ admet assez d'objets projectifs, et on fixe un système auxiliaire $\mathcal{P} := (\underline{P}_{M\bullet} := (P_{M\bullet}, \varepsilon_M) \mid M \in \text{Ob}(\mathcal{A}))$ de résolutions projectives. Rappelons que F commute avec les biproduits (problème 2.76(i)); si l'on revient à la situation de la proposition 7.65, on déduit une suite exacte courte de complexes

$$F(\Sigma_P) := (0 \rightarrow F(P'_\bullet) \xrightarrow{Ff_\bullet} F(P_\bullet) \xrightarrow{Fg_\bullet} F(P''_\bullet) \rightarrow 0).$$

De l'autre côté, on a l'isomorphisme $Id_M : (P_\bullet, \varepsilon) \xrightarrow{\sim} \underline{P}_M^\bullet$ de $\mathcal{A} - \text{RésPr}$, et de même pour M' et M'' . D'après §2.5.2, on déduit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, un diagramme de $\mathcal{B}$ dont la ligne horizontale en haut est exacte, et dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{L}_{i+1}F(P''_\bullet, \varepsilon'') & \xrightarrow{\partial_i^{\Sigma_P}} & \mathbb{L}_iF(P'_\bullet, \varepsilon') & \xrightarrow{\mathbb{L}_iF(f)} & \mathbb{L}_iF(P_\bullet, \varepsilon) & \xrightarrow{\mathbb{L}_iF(g)} & \mathbb{L}_iF(P''_\bullet, \varepsilon'') \\ \downarrow \mathbb{L}_{i+1}F(Id_{M''}) & & \downarrow \mathbb{L}_iF(Id_{M'}) & & \downarrow \mathbb{L}_iF(Id_M) & & \downarrow \mathbb{L}_iF(Id_{M''}) \\ \mathbb{L}_{i+1}F(\underline{P}_{M''\bullet}) & \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{P}, \Sigma}} & \mathbb{L}_iF(\underline{P}_{M'\bullet}) & \xrightarrow{\mathbb{L}_iF(f)} & \mathbb{L}_iF(\underline{P}_{M\bullet}) & \xrightarrow{\mathbb{L}_iF(g)} & \mathbb{L}_iF(\underline{P}_{M''\bullet}). \end{array}$$

Le sous-diagramme carré central commute par construction, et de même pour le carré de droite; en outre il existe un unique morphisme $\partial_i^{\mathcal{P}, \Sigma}$ de $\mathcal{B}$ qui fait commuter aussi le premier carré. Avec ce choix, la ligne horizontale en bas est alors la *suite exacte longue des foncteurs dérivés de F* associée à la suite exacte courte Σ :

$$\boxed{\cdots \rightarrow \mathbb{L}_{i+1}^{\mathcal{P}}F(M'') \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{P}, \Sigma}} \mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(M') \xrightarrow{\mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(f)} \mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(M) \xrightarrow{\mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(g)} \mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(M'') \rightarrow \cdots}$$

A première vue, $\partial_i^{\mathcal{P}, \Sigma}$ dépend à la fois de $\mathcal{P}$, de Σ , et de la suite exacte auxiliaire de complexes $\Sigma_P := (0 \rightarrow P'_\bullet \rightarrow P_\bullet \rightarrow P''_\bullet \rightarrow 0)$; en fait on peut montrer qu'il ne dépend que de $\mathcal{P}$ et Σ : pour cela, soient $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} M, Q'_\bullet \xrightarrow{\mu'} M'$ et $Q''_\bullet \xrightarrow{\mu''} M''$ des autres résolutions projectives donnant lieu à un diagramme commutatif comme le diagramme (*) de la proposition 7.65; on applique alors la proposition 7.67 avec :

- $N' := M', N := M, N'' := M''$
- $h := \mathbf{1}_M, h' := \mathbf{1}_{M'}$ et $h'' := \mathbf{1}_{M''}$.

En vertu du diagramme (***) de cette proposition et de la remarque 2.111, on déduit un diagramme de $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{L}_{i+1}F(P''_\bullet, \varepsilon'') & \xrightarrow{\partial_i^{\Sigma_P}} & \mathbb{L}_iF(P'_\bullet, \varepsilon') & & \\ & \swarrow \mathbb{L}_{i+1}F(\mathbf{1}_{M''}) & \downarrow \mathbb{L}_{i+1}F(\mathbf{1}_{M''}) & & \downarrow \mathbb{L}_iF(\mathbf{1}_{M'}) & \searrow \mathbb{L}_iF(\mathbf{1}_{M'}) & \\ \mathbb{L}_{i+1}^{\mathcal{P}}F(M'') & & & & & & \mathbb{L}_i^{\mathcal{P}}F(M') \\ & \swarrow \mathbb{L}_{i+1}F(\mathbf{1}_{M''}) & \downarrow \mathbb{L}_{i+1}F(Q''_\bullet, \tau'') & \xrightarrow{\partial_i^{\Sigma_Q}} & \mathbb{L}_iF(Q'_\bullet, \tau') & \searrow \mathbb{L}_iF(\mathbf{1}_{M'}) & \\ & & & & & & \end{array}$$

dont le carré au milieu est commutatif; mais aussi les deux triangles à droite et à gauche commutent, par fonctorialité de $\mathbb{L}_{i+1}F$ et $\mathbb{L}_iF$, d'où l'assertion.

(iv) Un raisonnement analogue montre que le morphisme de bord ∂_i est compatible aux isomorphismes canoniques $\omega_{F,i}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ de la remarque 7.61(iv) : à savoir, pour tout $i \in \mathbb{N}$

on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_{i+1}^{\mathcal{P}} F(M'') & \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{P}, \Sigma}} & L_i^{\mathcal{P}} F(M') \\ (\omega_{F, i+1}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'})_{M''} \downarrow & & \downarrow (\omega_{F, i}^{\mathcal{P}, \mathcal{P}'})_{M'} \\ L_{i+1}^{\mathcal{P}'} F(M'') & \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{P}', \Sigma}} & L_i^{\mathcal{P}'} F(M'). \end{array}$$

(v) La suite des foncteurs dérivés est aussi naturelle pour morphismes de suites exactes courtes : à savoir, dans la situation de la proposition 7.67, le morphisme de suites exactes courtes de $\mathcal{A}$ qui occupe la deuxième et troisième ligne du diagramme (*) induit, en vertu du diagramme (**), un morphisme de suites exactes longues (où l'on peut à nouveau omettre toute mention du système de choix $\mathcal{P}$) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & L_{i+1} F(M'') & \xrightarrow{\partial_i} & L_i F(M') & \xrightarrow{L_i F(f_1)} & L_i F(M) & \xrightarrow{L_i F(g_1)} & L_i F(M'') & \rightarrow & \cdots \\ L_{i+1} F(h'') \downarrow & & \downarrow L_i F(h') & & \downarrow L_i F(h) & & \downarrow L_i F(h) & & \downarrow L_i F(h'') & & \\ \cdots & \rightarrow & L_{i+1} F(N'') & \xrightarrow{\partial_i} & L_i F(N') & \xrightarrow{L_i F(f_2)} & L_i F(N) & \xrightarrow{L_i F(g_2)} & L_i F(N'') & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

(vi) Soit $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un autre foncteur additif, et $\eta : F \rightarrow G$ une transformation naturelle. Dans la situation de la proposition 7.65, il vient un diagramme commutatif de complexes de $\mathcal{B}$, à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & FP_{\bullet}' & \xrightarrow{Ff_{\bullet}} & FP_{\bullet} & \xrightarrow{Fg_{\bullet}} & FP_{\bullet}'' \longrightarrow 0 \\ & & \eta_{P'} \downarrow & & \downarrow \eta_{F_{\bullet}} & & \downarrow \eta_{P''} \\ 0 & \longrightarrow & GP_{\bullet}' & \xrightarrow{Gf_{\bullet}} & GP_{\bullet} & \xrightarrow{Gg_{\bullet}} & GP_{\bullet}'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Compte tenu de la remarque 2.111, on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_i F M'' & \xrightarrow{\partial_i^{\Sigma}} & L_{i-1} F M' \\ (L_i \eta)_{M''} \downarrow & & \downarrow (L_{i-1} \eta)_{M'} \\ L_i G M'' & \xrightarrow{\partial_i^{\Sigma}} & L_{i-1} G M'. \end{array} \quad \forall i > 0.$$

Exemple 7.69. Si l'on prend pour F le foncteur $M \otimes_A -$ (avec un anneau A quelconque, et un A -module fixé M), toute suite exacte courte $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue de foncteurs $\text{Tor}_i^A(M, -)$, dont le début est :

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N'') \rightarrow M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'' \rightarrow 0$$

(voir l'exercice 7.62). Comme application, on a le critère suivant :

Proposition 7.70. Soient A un anneau, et M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) M est un A -module plat.
- (b) $\text{Tor}_i^A(M, N) = 0$ pour tout A -module N et tout entier $i > 0$.
- (c) $\text{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$ pour tout idéal $I \subset A$ de type fini.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Si M un A -module plat, le foncteur $M \otimes_A -$ est exact, donc il suffit d'invoquer l'exercice 7.62(ii).

Trivialement on a (b) $\Rightarrow$ (c). Si la condition (c) est vérifiée, la suite exacte longue de l'exemple 7.69, associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$, implique que l'homomorphisme $M \otimes_A I \rightarrow M$ induit par l'inclusion $I \rightarrow A$ est injectif; on peut alors invoquer la proposition 3.78 pour déduire (a). $\square$

Remarque 7.71. La discussion précédente s'applique, *mutatis mutandis*, aussi à la variante considérée dans la remarque 7.61(v). Ainsi, si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif, et si

$\mathcal{A}$ admet assez d'objets injectifs, avec les remarques 7.66 et 7.68(i) on voit que Σ induit une suite exacte longue des foncteurs dérivés à droite :

$$\boxed{\cdots \rightarrow R^i F(M') \xrightarrow{R^i F(f)} R^i F(M) \xrightarrow{R^i F(g)} R^i F(M'') \xrightarrow{\partial_\Sigma^i} R^{i+1} F(M') \rightarrow \cdots}$$

De même, ces suites exactes longues sont compatibles avec toute transformation naturelle de foncteurs, et sont naturelles pour morphismes de suites exactes courtes, comme dans la remarque 7.68(v,vi).

Problème 7.72. (Extensions de Yoneda) Soit A un anneau ; pour tous A -modules M, N on considère l'ensemble des 1-extensions de Yoneda de M par N , noté :

$$\mathcal{Yon}_A^1(M, N)$$

dont les éléments sont les suites exactes courtes $\Sigma := (0 \rightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \rightarrow 0)$ de A -modules, avec X arbitraire. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{Yon}_A^1(M, N)$ telle que $\Sigma \sim \Sigma'$ si et seulement s'il existe un morphisme de suites exactes courtes $\phi_\bullet : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ avec $\phi_0 = Id_N : N \rightarrow N$ et $\phi_2 = Id_M : M \rightarrow M$:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ \phi_\bullet \downarrow & & & & \parallel & & \downarrow \phi_1 & & \parallel \\ \Sigma' & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X' \longrightarrow M \longrightarrow 0. \end{array}$$

On voit aisément (*e.g.* par le lemme du serpent) que ϕ_1 est alors un isomorphisme. L'ensemble des classes de 1-extensions de Yoneda de M par N est le quotient

$$\text{YExt}_A^1(M, N) := \mathcal{Yon}_A^1(M, N) / \sim.$$

(i) Montrer que si $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{Yon}_A^1(M, N)$ et si $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, alors $\phi^* \Sigma_1 \sim \phi^* \Sigma_2$ et $\psi_* \Sigma_1 \sim \psi_* \Sigma_2$ pour toute application A -linéaire $\phi : M' \rightarrow M$ et $\psi : N \rightarrow N''$ (notation de l'exercice 2.105). On a ainsi associé à ϕ et ψ des applications

$$\text{YExt}_A^1(M, N'') \xleftarrow{\psi_*} \text{YExt}_A^1(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \text{YExt}_A^1(M', N).$$

(ii) Montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{YExt}_A^1(M, N) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{YExt}_A^1(M', N) \\ \psi_* \downarrow & & \downarrow \psi_* \\ \text{YExt}_A^1(M, N'') & \xrightarrow{\phi^*} & \text{YExt}_A^1(M', N''). \end{array}$$

(iii) Soient $\phi' \in \text{Hom}_A(M'', M')$ et $\psi' \in \text{Hom}_A(N'', N')$. Montrer que :

$$\phi'^* \circ \phi^* = (\phi \circ \phi')^* \quad \text{et} \quad \psi'_* \circ \psi_* = (\psi' \circ \psi)_*.$$

(iv) La suite exacte courte Σ induit une suite exacte longue d'homologie pour les foncteurs $\text{Ext}_A^i(M, -)$, et en particulier on a la suite exacte :

$$(*) \quad \text{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_A(M, M) \xrightarrow{\partial^0} \text{Ext}_A^1(M, N).$$

On pose $c_{M,N}(\Sigma) := \partial^0(Id_M)$. Montrer que $c_{M,N}(\Sigma)$ dépend seulement de la classe $[\Sigma]$ de Σ dans $\text{YExt}_A^1(M, N)$. On a ainsi une application

$$c_{M,N} : \text{YExt}_A^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, N).$$

Montrer aussi que $c_{M,N}$ est surjective, et que $c_{M,N}(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow \Sigma$ est scindée.

(v) Montrer que le diagramme :

$$(**) \quad \begin{array}{ccccc} \text{YExt}_A^1(M, N'') & \xleftarrow{\psi_*} & \text{YExt}_A^1(M, N) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{YExt}_A^1(M', N) \\ c_{M,N''} \downarrow & & c_{M,N} \downarrow & & \downarrow c_{M',N} \\ \text{Ext}_A^1(M, N'') & \xleftarrow{\text{Ext}_A^1(M, \psi)} & \text{Ext}_A^1(M, N) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(\phi, N)} & \text{Ext}_A^1(M', N) \end{array}$$

commute (notation de la remarque 7.64(i)).

(vi) Soient Σ_1, Σ_2 deux éléments de $\mathcal{Yon}_A^1(M, N)$; la somme directe de complexes $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ est un élément de $\mathcal{Yon}_A^1(M \oplus M, N \oplus N)$, et on voit aisément que sa classe $[\Sigma_1 \oplus \Sigma_2]$ dans $\text{YExt}_A^1(M \oplus M, N \oplus N)$ ne dépend que des classes $[\Sigma_1], [\Sigma_2] \in \text{YExt}_A^1(M, N)$. Soient aussi $\nabla : N \oplus N \rightarrow N$ l'application telle que $(n, n') \mapsto n + n'$ et $\Delta : M \rightarrow M \oplus M$ l'application telle que $m \mapsto (m, m)$; on pose

$$[\Sigma_1] + [\Sigma_2] := \nabla_* \circ \Delta^* [\Sigma_1 \oplus \Sigma_2].$$

Montrer que la loi de composition ainsi obtenue sur $\text{YExt}_A^1(M, N)$ est associative.

(vii) Soient $\phi_1, \phi_2 : M' \rightarrow M$ deux applications A -linéaires; montrer que

$$\phi_1^*[\Sigma] + \phi_2^*[\Sigma] = (\phi_1 + \phi_2)^*[\Sigma] \quad \forall [\Sigma] \in \text{YExt}_A^1(M, N).$$

(viii) Dédurre de (vii) que $\text{YExt}_A^1(M, N)$ est un groupe avec la loi de composition de (vi), et $c_{M,N}$ est un isomorphisme de groupes, pour tout couple de A -modules M, N . En particulier, $\text{YExt}_A^1(M, N)$ est un groupe abélien, et les opérations ϕ^* et ψ_* de (i) sont des morphismes de groupes.

Remarque 7.73. (i) Noter que notre construction de l'ensemble $\text{YExt}_A^1(M, N)$ se heurte aux mêmes difficultés de nature logique que l'on avait déjà signalées pour la construction de la classe $\text{Sub}(X)$ des sous-objets d'un objet X d'une catégorie arbitraire : à savoir, $\mathcal{Yon}_A^1(M, N)$ est seulement une *classe*, et par suite son quotient par la relation d'équivalence $\sim$ n'est pas bien formé dans notre théorie des ensembles; toutefois, ce problème peut être résolu par la même astuce de Scott que l'on a utilisée pour justifier la construction de $\text{Sub}(X)$: voir la remarque 2.9(ii).

(ii) L'interprétation des foncteurs $\text{Ext}_A^1(-, -)$ en termes d'extensions de Yoneda expliquée ci-dessus se généralise en tout degré $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: on obtient ainsi un isomorphisme naturel entre $\text{Ext}_A^n(M, N)$ et un groupe de *classes de n -extensions de Yoneda de M par N* , ces dernières étant représentées par les suites exactes $0 \rightarrow N \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow M \rightarrow 0$ de longueur $n + 2$: voir [52, Ch.III].

Exercice 7.74. Soit G un groupe abélien de type fini. Montrer que G est libre si et seulement si $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Remarque 7.75. Autour 1950, J.H.C.Whitehead avait conjecturé que l'exercice 7.74 reste valable sans hypothèse de finitude sur G . Cependant, le logicien S.Shelah a apporté en 1974 une réponse assez étonnante à cette question : la validité de la conjecture dépend de la théorie des ensembles dans laquelle on la formule. Elle est indécidable à l'intérieur du système axiomatique le plus courant, la théorie ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix), mais devient vraie dans certaines extensions bien connues de ZFC, et fausse en d'autres systèmes encore : voir [66].

7.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 7.9, partie (i) : Soient $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M \otimes_A N)$, et $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{p}$. On a $\mathfrak{p} = \text{rad}(\text{Ann}_A(m))$ pour quelque $m \in M \otimes_A N$ (remarque 7.2(i)), donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_i^k m = 0$ dans $M \otimes_A N$ pour $i = 1, \dots, n$. D'après le théorème 3.86, M est la colimite d'un système filtrant $(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules libres de rang fini; notons $(j_\lambda : L_\lambda \rightarrow M \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel correspondant, et rappelons que le co-cône induit $(j_\lambda \otimes_A N : L_\lambda \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N)$ est encore universel (exercice 3.14). On trouve alors $\lambda \in \Lambda$ et $m_\lambda \in L_\lambda \otimes_A N$ tel que $(j_\lambda \otimes_A N)(m_\lambda) = m$. Pour $\lambda' \geq \lambda$, soit aussi $f_{\lambda\lambda'} : L_\lambda \rightarrow L_{\lambda'}$ l'homomorphisme de transition, et posons $m_{\lambda'} := (f_{\lambda\lambda'} \otimes_A N)(m_\lambda)$; comme $(j_\lambda \otimes_A N)(x_i^k m_\lambda) = 0$, il existe $\lambda' \geq \lambda$ tel que $x_i^k m_{\lambda'} = (f_{\lambda\lambda'} \otimes_A N)(x_i^k m_\lambda) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. En particulier, $\mathfrak{p} \subset \text{rad}(\text{Ann}_A(m_{\lambda'}))$; de l'autre côté, on a

$$\text{rad}(\text{Ann}_A(m_{\lambda'})) \subset \text{rad}(\text{Ann}_A(j_{\lambda'} \otimes_A N)(m_{\lambda'})) = \text{rad}(\text{Ann}_A(m)) = \mathfrak{p}$$

d'où $V(\mathfrak{p}) = \text{Supp}_A(m_{\lambda'})$. Cela montre que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(L_{\lambda'} \otimes_A N)$; mais d'après le lemme 7.4 on a $\text{Ass}_A(L_{\lambda'} \otimes_A N) = \text{Ass}_A N$. De l'autre côté, $\text{Ass}_A(M \otimes_A N) \subset \text{Supp}_A(M \otimes_A N) \subset \text{Supp}_A M$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $H := \text{Hom}_A(M, N)$; on a $H_{\mathfrak{p}} \simeq \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, d'après l'exercice 4.110(ii), d'où $\text{Ass}_A H \subset \text{Supp}_A H \subset \text{Supp}_A M$. Ensuite, soient $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs du A -module M , et $\phi \in H$ dont le support est $V(\mathfrak{p})$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$; on voit aisément que $\text{Supp}_A(\phi) = \bigcup_{i=1}^n \text{Supp}_A(\phi(x_i))$, et comme $V(\mathfrak{p})$ est irréductible, il vient $V(\mathfrak{p}) = \text{Supp}_A(\phi(x_i))$ pour quelque $i \leq n$, d'où $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A N$. Cela montre que $\text{Ass}_A H \subset \text{Ass}_A N$.

Pour la réciproque, soit $\mathfrak{p} \in (\text{Supp}_A M) \cap \text{Ass}_A N$; en vertu de la proposition 7.6, il suffit de montrer que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}} = \text{Ass}_A \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$, et on a $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in (\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}) \cap \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$. On peut donc supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit local. Dans ce cas, par le corollaire 7.8(ii) on trouve $x \in N$ tel que $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$, donc $Ax \subset N$ est un $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel non nul. D'autre part, on a $0 \neq M(\mathfrak{p}) = M/\mathfrak{p}M$ (remarque 3.58(ii)); il existe alors une application $k(\mathfrak{p})$ -linéaire $M(\mathfrak{p}) \rightarrow Ax$ non nulle, et sa composition $\phi : M \rightarrow N$ avec la projection $M \rightarrow M(\mathfrak{p})$ et l'inclusion $Ax \rightarrow N$ est une application A -linéaire telle que $\text{Supp}_A(\phi) = \{\mathfrak{p}\}$, d'où l'assertion.

Exercice 7.10 Soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M_{[f]}$; notons $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ la localisation de f , et $\phi_{\mathfrak{p}} := \text{Spec } f_{\mathfrak{p}}$. On a $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})_{[f_{\mathfrak{p}}]}$ et $\phi_{\mathfrak{p}}(\text{Ass}_{B_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}) \subset \phi(\text{Ass}_B M)$ (proposition 7.6), donc on peut remplacer f par $f_{\mathfrak{p}}$, et supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit local. Soit $m \in M_{[f]}$ avec $\mathfrak{p} = \text{rad}(\text{Ann}_A(m))$; il vient $\mathfrak{p}B \subset \text{rad}(\text{Ann}_B(m))$. Soit alors $\mathfrak{q}$ un élément minimal de $\text{Supp}_B(m) = V(\text{Ann}_B(m)) \subset V(\mathfrak{p}B)$; comme $\mathfrak{p}B \subset \mathfrak{q}$, on a $\phi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, et de l'autre côté $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(Bm) \subset \text{Ass}_B M$, par le corollaire 7.8(v.a). Réciproquement, soit $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B M$; d'après le corollaire 7.8(ii) il existe $m \in M$ avec $\mathfrak{q} = \text{Ann}_B(m)$, d'où $\phi(\mathfrak{q}) = \text{Ann}_A(m)$ et donc $\phi(\mathfrak{q}) \in \text{Ass}_A M_{[f]}$.

Problème 7.12, partie (i) : Par le critère de Baer (problème 4.20), il suffit de montrer que pour tout idéal $J \subset A$, l'inclusion $j : J \rightarrow A$ induit une surjection

$$(S^{-1}j)^* : \text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A, M) \rightarrow \text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}J, M).$$

Or, d'un côté J est un A -module de présentation finie, car A est noethérien (exercice 6.70(i.a)), et de l'autre côté, $S^{-1}A$ est une A -algèbre plate; au vu de l'exercice 4.110(ii), l'application $(S^{-1}j)^*$ est alors naturellement identifiée avec $S^{-1}A \otimes_A j^*$, où $j^* : \text{Hom}_A(A, M) \rightarrow \text{Hom}_A(J, M)$ est l'application analogue. Cette dernière est surjective, car M est injectif, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Il suffit de montrer que pour tout $x \in N$ il existe $a \in A$ tel que $ax/1 \in S^{-1}M \setminus \{0\}$. Pour cela, posons $J_a := \text{Ann}_A(ax)$ pour tout $a \in A$, et soit

$$\mathcal{F} := \{J_a \mid a \in A \text{ et } ax/1 \neq 0 \text{ dans } S^{-1}N\}.$$

Comme A est noethérien, on peut choisir $b \in A$ tel que J_b soit maximal parmi les éléments de $\mathcal{F}$, et posons $I := \text{Ann}_A(Abx/(M \cap Abx))$. Noter que l'inclusion $J_b \subset I$ est stricte, car N est une extension essentielle de M ; donc, on a $I = J_b + Aa_1 + \dots + Aa_k$ pour un système fini d'éléments $a_1, \dots, a_k \in I \setminus J_b$. Par construction on a $a_i bx \in M \setminus \{0\}$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Or, supposons par l'absurde que $a_i bx/1 = 0$ dans $S^{-1}M$ pour tout $i = 1, \dots, k$; il existe alors $t_1, \dots, t_k \in S$ avec $a_1 t_1 bx = \dots = a_k t_k bx = 0$ dans M . Soit $t := t_1 \dots t_k$; il vient $tbx/1 \neq 0$ dans $S^{-1}N$, et $I \subset \text{Ann}_A(tbx)$, ce qui contredit la maximalité de J_b .

Partie (iii) : L'assertion suit aussitôt de (i) et (ii).

Partie (iv) : Soit $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A E_A(\mathfrak{p})$; d'après le corollaire 7.8(ii) il existe $x \in E_A(\mathfrak{p})$ tel que $\mathfrak{q} = \text{Ann}_A(x)$. On a $M := \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ax) \neq 0$ et il vient $\text{Ann}_A(y) = \mathfrak{q}$ pour tout $y \in M \setminus \{0\}$; mais évidemment on a aussi $\text{Ann}_A(y) = \mathfrak{p}$ pour un tel y , d'où $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Partie (v) : Soient $E_1, E_2 \subset E_A(\mathfrak{p})$ des A -sous-modules tels que $E_A(\mathfrak{p}) = E_1 \oplus E_2$, et pour $i = 1, 2$ notons par $\pi_i : A/\mathfrak{p} \rightarrow E_i$ la composition de $\phi_{(\mathfrak{p})}$ avec la projection $E_A(\mathfrak{p}) \rightarrow E_i$. On a

$$0 = \text{Ker } \phi_{(\mathfrak{p})} = (\text{Ker } \pi_1) \cap (\text{Ker } \pi_2)$$

d'où aussi $(\text{Ker } \pi_1) \cdot (\text{Ker } \pi_2) = 0$. Mais comme $A/\mathfrak{p}$ est intègre, cela veut dire que soit $\text{Ker } \pi_1 = 0$, soit $\text{Ker } \pi_2 = 0$. Disons que $0 = \text{Ker } \pi_1 = \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(E_2)$; comme $E_A(\mathfrak{p})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$, il vient $E_2 = 0$, d'où l'assertion.

Partie (vi) : Soit $E \neq 0$ un A -module injectif, et $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A E$; on trouve alors $x \in E$ avec $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(ii)), d'où un isomorphisme $\psi : Ax \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}$ de A -modules. La composition $\omega := \phi_{(\mathfrak{p})} \circ \psi : Ax \rightarrow E_A(\mathfrak{p})$ est une enveloppe injective de Ax , donc l'inclusion $j : Ax \rightarrow E$ se factorise à travers ω et une injection A -linéaire $\nu : E_A(\mathfrak{p}) \rightarrow E$ (exercice 4.25(v.a)). De même, $\text{Id}_{E_A(\mathfrak{p})}$ se factorise à travers ν et une application A -linéaire $\mu : E \rightarrow E_A(\mathfrak{p})$, car $E_A(\mathfrak{p})$ est injectif; il vient $E = \text{Im}(\nu) \oplus \text{Ker}(\mu)$, et si E est indécomposable, on doit avoir $E = \text{Im}(\nu)$ et $\text{Ker } \mu = 0$; i.e. ν est un isomorphisme. L'unicité de $\mathfrak{p}$ découle aussitôt de (iv).

Partie (vii) : Soit $\mu_a : E_A(\mathfrak{p}) \rightarrow E_A(\mathfrak{p})$ l'application A -linéaire : $x \mapsto ax$. Evidemment $\phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(\text{Ker } \mu_a) = 0$, car la classe $\bar{a} \in A/\mathfrak{p}$ de a est non nulle, et $A/\mathfrak{p}$ est intègre. Comme $E_A(\mathfrak{p})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$, il vient $\text{Ker } \mu_a = 0$. Donc $N := \text{Im}(\mu_a)$ est un A -module isomorphe à $E_A(\mathfrak{p})$, et il est en particulier injectif; en raisonnant comme dans la preuve de (vi), on déduit que N est un facteur direct de $E_A(\mathfrak{p})$; mais ce dernier est indécomposable, d'où $N = E_A(\mathfrak{p})$.

Partie (viii) : L'assertion suit aussitôt de (iii) et de l'exercice 4.25(v.b).

Partie (ix) : Pour tout A -module injectif $E \neq 0$, soit $\mathcal{E}(E)$ l'ensemble des sous-modules injectifs indécomposables de E ; la preuve de (vi) montre que $\mathcal{E}(E) \neq \emptyset$. Pour toute partie $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}(E)$, on considère l'unique application A -linéaire

$$j_{\mathcal{E}'} : \bigoplus_{E' \in \mathcal{E}'} E' \rightarrow E$$

dont la restriction à E' coïncide avec l'inclusion $E' \rightarrow E$, pour tout $E' \in \mathcal{E}'$. Soit aussi $\mathcal{F}$ la famille des parties $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}(E)$ telles que $j_{\mathcal{E}'}$ est injective, et on munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel induit par inclusion de parties de $\mathcal{E}(E)$. Or, si $(\mathcal{E}'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une chaîne totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$ avec $\Lambda \neq \emptyset$, posons $\mathcal{E}' := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}'_\lambda$; évidemment $j_{\mathcal{E}'_\lambda}$ est la restriction de $j_{\mathcal{E}'}$ au sous-module $\bigoplus_{E' \in \mathcal{E}'_\lambda} E'$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Comme par hypothèse chaque $j_{\mathcal{E}'_\lambda}$ est injectif, il en est de même pour $j_{\mathcal{E}'}$, i.e. $\mathcal{E}' \in \mathcal{F}$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors un élément maximal $\mathcal{M}$. D'après l'exercice 6.70(ii), le A -module $E_{\mathcal{M}} := \bigoplus_{E' \in \mathcal{M}} E'$ est injectif; en raisonnant comme dans la preuve de (vi), on voit aisément que $j_{\mathcal{M}}(E_{\mathcal{M}})$ est un facteur direct de E , donc $j_{\mathcal{M}}$ se prolonge en un isomorphisme de A -modules $E_{\mathcal{M}} \oplus F \xrightarrow{\sim} E$, pour un A -sous-module F de E qui est injectif à son tour (remarque 4.2(iii)). Mais si $F \neq 0$, on a $\mathcal{E}(F) \neq \emptyset$, et évidemment $\mathcal{M} \cup \{F'\} \in \mathcal{F}$ si $F' \in \mathcal{E}(F)$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{M}$. Donc $F = 0$, et $j_{\mathcal{M}}$ est l'isomorphisme souhaité.

Partie (x) : D'abord, montrons que $\text{Ass}_A I(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ si $\Lambda_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$. En effet, soit $V(\mathfrak{q}) = V(\text{Ann}_A(x))$ pour quelque $x \in I(\mathfrak{p})$ et $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$; il existe une partie finie non vide $\Lambda' \subset \Lambda_{\mathfrak{p}}$ telle que $x \in E_A(\mathfrak{p})^{(\Lambda')} \subset I(\mathfrak{p})$, donc $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A(E_A(\mathfrak{p})^{(\Lambda')}) = \{\mathfrak{p}\}$, d'après (iv) et le lemme 7.4, d'où l'assertion. Or, soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$; si $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$, on a $\text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}} I(\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} = (\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}) \cap \text{Ass}_A I(\mathfrak{q}) = \emptyset$, d'après la proposition 7.6, d'où $I(\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} = 0$ (corollaire 7.8(i)). D'autre part, si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, on a $I(\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} = I(\mathfrak{q}) = E_{A_{\mathfrak{p}}}(qA_{\mathfrak{p}})^{(\Lambda_{\mathfrak{q}})}$, d'après (vii) et (viii). Quitte à remplacer A et M respectivement par $A_{\mathfrak{p}}$ et $M_{\mathfrak{p}}$, on peut alors supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit local; d'où $\text{Ass}_A \text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), I(\mathfrak{q})) = \{\mathfrak{p}\} \cap \text{Ass}_A I(\mathfrak{q}) = \emptyset$ si $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, car $k(\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$ est un A -module cyclique (exercice 7.9(ii)), et par suite $\text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), I(\mathfrak{q})) = 0$ pour $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(i)). Avec l'exercice 3.17(i), il vient :

$$\text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), M) \simeq \text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), I(\mathfrak{p})) \simeq \text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), E_A(\mathfrak{p}))^{(\Lambda_{\mathfrak{p}})}.$$

On est donc ramené à vérifier que $\text{Hom}_A(k(\mathfrak{p}), E_A(\mathfrak{p}))$ est un $k(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel de dimension 1 ; mais ce dernier est isomorphe au sous-module $F := \text{Ann}_{E_A(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p})$. Soient par l'absurde $x, y \in F$ deux éléments $k(\mathfrak{p})$ -linéairement indépendants ; alors $Ax \cap Ay = 0$, et d'autre part $\phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ax), \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ay) \neq 0$, car $E_A(\mathfrak{p})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$. Comme $A/\mathfrak{p}$ est intègre, il suffit alors d'observer la contradiction suivante :

$$0 \neq \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ax) \cdot \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ay) \subset \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ax) \cap \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ay) = \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(Ax \cap Ay) = \phi_{(\mathfrak{p})}^{-1}(0) = 0.$$

Partie (xi) : On a déjà vu que si $\Lambda_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$, alors $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$. Réciproquement, soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M$; d'après le corollaire 7.8(ii) il existe $x \in M$ avec $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$, d'où une application $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire non nulle $k(\mathfrak{p}) \rightarrow M_{\mathfrak{p}}$, et alors $\Lambda_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$, d'après (x).

Exercice 7.19 : En raisonnant par récurrence sur n , on se ramène à exhiber un sous-module $M_1 \subset M$ tel que $\text{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p}_1\}$ et $\text{Ass}_A(M/M_1) = \{\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$. Or, d'après le théorème 7.18(ii), M admet une décomposition primaire non redondante $(N_{(\mathfrak{p}_1)}, \dots, N_{(\mathfrak{p}_n)})$, de support $\text{Ass}_A(M)$. Posons $M_1 := N_{(\mathfrak{p}_2)} \cap \dots \cap N_{(\mathfrak{p}_n)}$; l'application naturelle $M/M_1 \rightarrow Q := \bigoplus_{i=2}^n M/N_{(\mathfrak{p}_i)}$ est injective, donc $\text{Ass}_A(M/M_1) \subset \text{Ass}_A Q = \{\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ (corollaire 7.7). D'autre part, $M_1 \cap N_{(\mathfrak{p}_1)} = 0$, donc l'application naturelle $M_1 \rightarrow M/N_{(\mathfrak{p}_1)}$ est injective, d'où $\text{Ass}_A(M_1) \subset \text{Ass}_A(M/N_{(\mathfrak{p}_1)}) = \{\mathfrak{p}_1\}$. Comme $M_1 \neq 0$, on a alors $\text{Ass}_A(M_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$ (corollaire 7.8(i)), et $\text{Ass}_A(M/M_1) = \{\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$, encore en vertu du corollaire 7.7.

Exercice 7.22 : Evidemment S est une partie multiplicative de A , donc $\text{Spec } S^{-1}A$ s'identifie naturellement avec $\Sigma := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$ (proposition 3.31). Mais on a $S = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} \mathfrak{p}$, et $\text{Min}(A)$ est un ensemble fini, d'après la remarque 7.21(ii,iii), donc $\mathfrak{q} \in \Sigma \Leftrightarrow \mathfrak{q} \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in \text{Min}(A)$ (proposition 1.58). Cela montre que $\text{Spec}(S^{-1}A)$ s'identifie naturellement avec $\text{Min } A$, et en particulier, tout idéal premier de $S^{-1}A$ est maximal. Soit donc $\text{Spec}(S^{-1}A) = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\}$; on a $\mathcal{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathcal{N}(A) = 0$ (exercice 3.38), donc $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k = 0$, et alors l'homomorphisme naturel $S^{-1}A \rightarrow \prod_{i=1}^k k(\mathfrak{m}_i)$ est bijectif, d'après le lemme 1.60.

Exercice 7.25, partie (i) : Observons d'abord qu'il suffit de montrer que chaque $N_i[T]$ est $\mathfrak{p}_i[T]$ -primaire. En effet, comme $A[T]$ est un A -module libre, pour tout A -module N on a $N = 0 \Leftrightarrow N[T] = 0$, et pour deux sous-modules $N', N'' \subset N$ on a $N'[T] \cap N''[T] = (N' \cap N'')[T]$; donc, si chaque $N_i[T]$ est $\mathfrak{p}_i[T]$ -primaire, on aura la décomposition primaire non redondante $0 = (N_1 \cap \dots \cap N_k)[T] = N_1[T] \cap \dots \cap N_k[T]$ de $M[T]$. De plus, comme $(M/N_i)[T] \simeq M[T]/N_i[T]$, il suffit de montrer que si $\text{Ass}_A M = \{\mathfrak{p}\}$ pour quelque $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, alors $\text{Ass}_{A[T]} M[T] = \{\mathfrak{p}[T]\}$. Mais dans ce cas, $\text{Ass}_{A[T]}(M[T]) = \text{Ass}_{A[T]}(A[T]/\mathfrak{p}[T])$, par le théorème 7.23(ii), d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $S := \{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ l'ensemble des coefficients de f , et prenons un système fini $(b_i \mid i = 1, \dots, n)$ d'éléments de A avec $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$; quitte à remplacer A par sa $\mathbb{Z}$ -sous-algèbre engendrée par $\{a_i, b_i \mid i = 1, \dots, n\}$, on peut supposer que A soit noethérien. On doit vérifier que si $x \in M[T_{\bullet}]$ et si $fx = 0$, alors $x = 0$; évidemment il existe un A -sous-module $N \subset M$ de type fini tel que $x \in N[T_{\bullet}] \subset M[T_{\bullet}]$, donc, quitte à remplacer M par N , on peut supposer que M soit de type fini. Mais alors, avec (i) et une simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on trouve que $\text{Ass}_A(M[T_{\bullet}]) = \{\mathfrak{p}[T_{\bullet}] \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M\}$; d'autre part, puisque S engendre l'idéal A , on a $f \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A M} \mathfrak{p}[T_{\bullet}]$, d'où l'assertion, compte tenu du corollaire 7.8(iii).

Exercice 7.26, partie (i) : Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ tel que I est $\mathfrak{p}$ -primaire ; alors $V(I) = \text{Supp}_A(A/I) = V(\mathfrak{p})$, d'après le corollaire 7.8(v.a), d'où l'assertion, compte tenu de la remarque 1.56(i).

Partie (ii) : C'est un cas particulier de la proposition 7.15(iii).

Partie (iii) : On pose $M := A/I$, et soit $\text{Ass}_A M = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$; par le théorème 7.18(i,ii) il existe une suite finie $(N_i \mid i = 1, \dots, k)$ de sous-modules de M avec $\bigcap_{i=1}^k N_i = 0$, et tels que N_i est $\mathfrak{p}_i$ -primaire pour tout $i = 1, \dots, k$. Pour chaque $i = 1, \dots, k$ on a $N_i = I_i/I$ pour un unique idéal $I_i \subset A$, et comme $M/N_i = A/I_i$, on voit que I_i est $\mathfrak{p}_i$ -primaire, et évidemment $I = I_1 \cap \dots \cap I_k$. Les propriétés d'unicité de S et des I_j tels que $\text{rad}(I_j)$ est minimal dans $\text{Ass}_A M$ découlent du théorème 7.18(ii) et du corollaire 7.20.

Exercice 7.28, partie (i) : Supposons d'abord que M_{i+1}/M_i soit artinien pour tout $i = 0, \dots, k-1$; on va alors montrer que M_i est artinien pour tout $i = 0, \dots, k$. On raisonne par récurrence sur i : l'assertion est triviale pour $i = 0$, et elle est vérifiée par hypothèse, pour $i = 1$; soit donc $i > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour M_{i-1} . Soient $(N_r \mid r \in \mathbb{N})$ une chaîne descendante de sous-modules de M_i , et $\pi : M_i \rightarrow M_i/M_{i-1}$ la projection; il vient des suites descendantes $(N'_r := M_{i-1} \cap N_r \mid r \in \mathbb{N})$ et $(\bar{N}_r := \pi(N_r) \mid r \in \mathbb{N})$ de sous-modules de M_{i-1} et respectivement M_i/M_{i-1} , et par hypothèse de récurrence il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N'_s = N'_r$ et $\bar{N}_s = \bar{N}_r$ pour tout $s \geq r$. D'autre part, pour tout $s \geq r$ on a un diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N'_s & \longrightarrow & N_s & \longrightarrow & \bar{N}_s \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N'_r & \longrightarrow & N_r & \longrightarrow & \bar{N}_r \longrightarrow 0 \end{array}$$

à lignes horizontales exactes, dont les flèches verticales sont les inclusions. Compte tenu de l'exercice 2.104, on déduit que $N_s = N_r$ pour tout tel s , et cela montre que M_i est artinien. Si M_{i+1}/M_i est noethérien, on raisonne de même avec une chaîne ascendante $(N_r \mid r \in \mathbb{N})$ de sous-modules de M_i , pour prouver que M_i est noethérien pour tout $i = 0, \dots, k$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Ensuite, si M est artinien (resp. noethérien), évidemment il en est de même pour tout sous-module et tout quotient de M , donc aussi pour chaque M_{i+1}/M_i .

Partie (ii) : D'après (i), A^n est un A -module artinien pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc de même pour tout quotient de A^n , d'où l'assertion.

Exercice 7.40, partie (i) : Montrons d'abord que $v(1) = 0$: en effet, on a

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$$

donc soit $v(1) = 0$, soit $v(1) = +\infty$. Mais si $v(1) = +\infty$, on aurait $v(x) = v(x \cdot 1) = v(x) + \infty = +\infty$ pour tout $x \in K^+$, ce qui est absurde, car v est surjective. Ensuite, noter que $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$: car, par hypothèse il existe $y \in K$ avec $v(y) = +\infty$, d'où $v(0) = v(0 \cdot y) = v(0) + \infty = +\infty$, et d'autre part, si $x \neq 0$ on a $0 = v(x \cdot x^{-1}) = v(x) + v(x^{-1})$, d'où $v(x) \neq +\infty$. Donc, $0, 1 \in K^+$, et si $v(x), v(y) \geq 0$, on voit que $v(x+y), v(xy) \geq 0$, i.e. K^+ est un sous-anneau de K .

Partie (ii) : Noter que $v(x) = 0$ si et seulement si $v(x^{-1}) = 0$, donc les inversibles de K^+ sont précisément les $x \in K$ tels que $v(x) = 0$. De plus, on vérifie aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la partie $I_n := \{x \in K \mid v(x) \geq n\}$ est un idéal de K^+ . Réciproquement, soit $J \subset K^+$ un idéal $\neq 0$, et $x \in J$ avec $v(x) = n := \min\{v(y) \mid y \in J\}$; si $y \in K$ et $v(y) \geq n$, on a $v(x^{-1}y) \geq 0$, i.e. $x^{-1}y \in K^+$, et donc $y \in J$. Cela montre que tout idéal non nul de K^+ est de la forme I_n pour quelque $n \in \mathbb{N}$, et on voit de plus que ces idéaux sont tous principaux; en particulier, K^+ est noethérien. Noter aussi que $I_n = I_1^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc I_1 est l'unique idéal premier non nul de K^+ , i.e. K^+ est local de dimension un. Ainsi, K^+ remplit les conditions équivalentes de la proposition 7.36, d'où l'assertion.

Problème 7.42, partie (i) : Posons $k := k(\mathfrak{m})$. L'anneau $\bar{A} := k \otimes_V A$ est noethérien (théorème 6.65), et l'homomorphisme structurel $V \rightarrow A$ induit une surjection

$\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } V$ (problème 3.83(i.c)); donc $\text{Spec } \bar{A} \neq \emptyset$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles $Z_0, \dots, Z_n$, i.e. $\bar{A} \neq 0$ a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (exercice 6.109(iii)). Soit alors $\bar{\mathfrak{p}} \in \text{Min } \bar{A}$ avec $Z_0 = V(\bar{\mathfrak{p}})$, et notons par d' le degré de transcendance de l'extension $k \subset k(\bar{\mathfrak{p}})$; au vu du problème 6.82(i), on doit vérifier que $d' = d$. D'après le problème 6.12(ii), il existe un homomorphisme fini et injectif de k -algèbres $f : k[T_1, \dots, T_{d'}] \rightarrow \bar{A}/\bar{\mathfrak{p}}$; on trouve aisément un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} V[T_1, \dots, T_{d'}] & \xrightarrow{p} & k[T_1, \dots, T_{d'}] & & \\ g \downarrow & & k \otimes_V g \downarrow & \searrow f & \\ A & \xrightarrow{p'} & \bar{A} & \xrightarrow{p''} & \bar{A}/\bar{\mathfrak{p}} \end{array}$$

où p , p' et p'' sont les projections, g est un homomorphisme de V -algèbres, et le carré à gauche est cocartésien. Notons par $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation de V comme dans la remarque 7.39, et soit $P \in \text{Ker}(g)$; si $P \neq 0$, soit $\Sigma \subset V \setminus \{0\}$ l'ensemble des coefficients non nuls du polynôme $P(T_1, \dots, T_n)$, posons $k := \min(v(a) \mid a \in \Sigma)$, et soit $b \in V$ un générateur de $\mathfrak{m}^k$. Alors $Q := b^{-1}P \in V[T_1, \dots, T_{d'}]$, et au moins un des coefficients de Q est dans $V^\times$, d'où $\bar{Q} := p(Q) \neq 0$, donc $f(\bar{Q}) \neq 0$; d'autre part, $Q \in \text{Ker}(g)$, car la V -algèbre A est sans torsion (exercice 3.81(ii)), contradiction. Ainsi, g est injectif. Noter que $U := Z_0 \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)$ est un voisinage ouvert de $\bar{\mathfrak{p}}$ dans $\text{Spec } \bar{A}$. Posons $\phi := \text{Spec } g : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } V[T_1, \dots, T_{d'}]$ et $\psi := \text{Spec } f : Z_0 \rightarrow \text{Spec } k[T_1, \dots, T_{d'}]$; sous l'identification naturelle $\text{Spec } \bar{A} \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{m}A) \subset \text{Spec } A$, le point $\bar{\mathfrak{p}}$ correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p} := \text{Ker}(p') \subset A$, et par construction il vient :

$$\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p})) \cap U = \psi^{-1}(\psi(\bar{\mathfrak{p}})) \cap U = \{\mathfrak{p}\}$$

donc g est quasi-fini au point $\mathfrak{p}$. Soit alors C la fermeture intégrale de $V[T_1, \dots, T_{d'}]$ dans A , et $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p} \cap C$; d'après le théorème 6.55, l'inclusion $C \rightarrow A$ induit un isomorphisme $C_{\mathfrak{p}'} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}'}$. Cela montre que d' est le degré de transcendance de l'extension $K \subset \text{Frac}(A)$, et d'après le problème 6.82(i), ce dernier est égal à d .

Partie (ii) : Remarquons d'abord que si B est une V -algèbre intègre, de type fini, plate mais non fidèlement plate, alors l'image de $\text{Spec } B$ dans $\text{Spec } V$ ne contient pas $\mathfrak{m}$ (problème 3.83(i.c)), d'où $B/\mathfrak{m}B = 0$, donc B est une K -algèbre, i.e. $B = K \otimes_V B$. Or, d'après (i) on trouve dans $\text{Spec } A$ des chaînes de spécialisations de longueur $d+1$: on prend une chaîne maximale de points de $\text{Spec } \bar{A}$, et on complète avec l'idéal $0 \in \text{Spec } A$; donc $\dim A \geq d+1$. Montrons par récurrence sur d que $\dim A \leq d+1$. Pour cela, considérons une chaîne d'idéaux premiers $0 \subsetneq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_k$ de A de longueur maximale. Si $d=0$, on a $\dim K \otimes_V A = 0$, donc l'idéal 0 est l'unique point de $\text{Spec } K \otimes_V A$; par suite, $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_k \in \text{Spec } \bar{A}$, et alors $k=0$, d'après (i), d'où l'assertion, dans ce cas. Ensuite, soit $d > 0$, et supposons que l'assertion soit connue pour toute V -algèbre fidèlement plate, intègre et de type fini de dimension $< d$; si $\mathfrak{m}A \subset \mathfrak{p}_0$, on a $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_k \in \text{Spec } \bar{A}$, donc $k=d$, d'après (i), et l'assertion est claire. Sinon, soit $B := A/\mathfrak{p}_0$; alors B est une V -algèbre intègre de type fini et sans torsion, donc B est plate. De plus, la projection $A \rightarrow B$ induit une surjection $K \otimes_V A \rightarrow K \otimes_V B \neq 0$ dont le noyau est l'idéal premier $K \otimes_V \mathfrak{p}_0 \neq 0$; par suite, $\dim K \otimes_V B < d$. Si B n'est pas fidèlement plate, on vient de voir que $B = K \otimes_V B$, d'où $\dim A \leq d$, contradiction. Donc B est une V -algèbre fidèlement plate, et par hypothèse de récurrence, il vient $\dim B \leq d$, d'où $\dim A \leq d+1$.

Exercice 7.46 : Soit $I := Aa^2 + Ab^2 \subset A$, et $J := I + Aab$; on doit vérifier que l'inclusion $I \rightarrow J$ est surjective, et d'après la proposition 3.55 il suffit de montrer que $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$, i.e. que $A_{\mathfrak{p}}ab \subset A_{\mathfrak{p}}a^2 + A_{\mathfrak{p}}b^2$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$. Soit $v_{\mathfrak{p}} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation de $A_{\mathfrak{p}}$; cela revient à montrer que

$$v_{\mathfrak{p}}(ab) \geq \mu_{\mathfrak{p}} := \min(v_{\mathfrak{p}}(a^2), v_{\mathfrak{p}}(b^2)) \quad \mathfrak{p} \in \text{Max } A.$$

Disons que $v_p(a) \geq v_p(b)$; il vient $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ et $\mu_p = 2v_p(b)$, d'où l'assertion.

Exercice 7.47 : L'extension finie $\mathbb{Q} \subset K$ est trivialement séparable, car $\mathbb{Q}$ est un corps de caractéristique nulle, donc le problème 6.85(iii) nous dit que $\mathcal{O}_K$ est un anneau noethérien. En outre, $\mathcal{O}_K$ est une extension entière de $\mathbb{Z}$, donc il est de dimension 1 (corollaire 6.20(iii)), d'où l'assertion.

Problème 7.48, partie (i) : Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ les idéaux maximaux de A ; on pose $J := \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_i^2$, $B := A/J$ et $\bar{\mathfrak{m}}_i := \mathfrak{m}_i/J$ pour $i = 1, \dots, k$. Evidemment $J \neq 0$, donc $\dim B = 0$, i.e. B est un anneau artinien et ses idéaux maximaux sont $\bar{\mathfrak{m}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{m}}_k$. Par le théorème 7.31, l'anneau B est le produit des localisations

$$B_i := B_{\bar{\mathfrak{m}}_i} = A_{\mathfrak{m}_i}/J_{\mathfrak{m}_i} = A/\mathfrak{m}_i^2$$

et on dénote $\pi_i : B \rightarrow B_i$ la projection. Pour $i = 1, \dots, k$, choisissons $\bar{x}_i \in B$ tel que $\pi_j(\bar{x}_i) = 1$ pour tous $j \neq i$, et $\pi_i(\bar{x}_i) \in \bar{\mathfrak{m}}_i B_i \setminus \{0\}$; soit aussi $x_i \in A$ un représentant de la classe $\bar{x}_i$. Evidemment $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{m}_j$; en outre, $x_i \in \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2$. En vertu du corollaire 7.45, il vient $Ax_i = \mathfrak{m}_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Ainsi, tout idéal maximal de A est principal, et donc tout idéal de A est principal, encore par le corollaire 7.45.

Partie (ii) : Soient $x \in I \setminus \{0\}$ et $J := Ax$; il suffit de montrer que l'idéal $\bar{I} := I/J$ de $B := A/J$ est principal. Mais B est un anneau artinien, donc $B = \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max } B} B_{\mathfrak{m}}$, et $\bar{I} = \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max } B} \bar{I}_{\mathfrak{m}}$ (théorème 7.31 et exercice 3.66(i)). Or, si pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$ on trouve un générateur $x_{\mathfrak{m}}$ de l'idéal $\bar{I}_{\mathfrak{m}}$ de $B_{\mathfrak{m}}$, l'élément $(x_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \in \text{Max } B)$ de B sera un générateur de $\bar{I}$. On est donc ramené à montrer que $B_{\mathfrak{m}}$ est principal pour chaque $\mathfrak{m} \in \text{Max } B$. Mais on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/J$ pour un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de A , et $B_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{n}}/J_{\mathfrak{n}}$; d'autre part, $A_{\mathfrak{n}}$ est principal, par le théorème 7.43, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Montrons que I est projectif : comme A est noethérien, tout A -module de type fini est de présentation finie ; au vu du corollaire 4.100(ii), on est donc ramené à vérifier que I est un A -module plat, et par la proposition 3.77 il suffit de montrer que $I_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module plat pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$. Mais $I_{\mathfrak{m}}$ est principal (par le théorème 7.43) et $\neq 0$, et $A_{\mathfrak{m}}$ est intègre, donc $I_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module libre de rang 1, d'où l'assertion. La preuve montre aussi que le rang de I est égal à 1.

Partie (iv) : On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit donc $n > 0$, et supposons que l'assertion soit connue pour tout A -module projectif de rang $n - 1$. D'après le lemme 4.99(ii), il existe $k \in \mathbb{N}$, un A -module Q et un isomorphisme $P \oplus Q \xrightarrow{\sim} A^k$. Evidemment $k \geq n$, donc il existe une projection $\pi : A^k \rightarrow A$ telle que $I_1 := \pi(P)$ soit un idéal non nul de A . Par (iii), on sait que I_1 est un A -module projectif de rang 1, et π induit une surjection $P \rightarrow I_1$; avec $P' := P \cap \text{Ker } \pi$, il vient un isomorphisme A -linéaire $P \xrightarrow{\sim} I_1 \oplus P'$. Ainsi, P' est un A -module projectif (encore par le lemme 4.99), et évidemment $\text{rk}_P = \text{rk}_{I_1} + \text{rk}_{P'} = 1 + \text{rk}_{P'}$, i.e. $\text{rk}_{P'} = n - 1$. Par hypothèse de récurrence il existe des idéaux non nuls $I_2, \dots, I_n$ de A et un isomorphisme $P' \xrightarrow{\sim} I_2 \oplus \dots \oplus I_n$, d'où l'assertion.

Partie (v) : Noter d'abord qu'il suffit d'exhiber un A -module D avec $P \simeq A^{n-1} \oplus D$, car alors D serait évidemment inversible, et $\Lambda_A^n P \simeq \Lambda_A^{n-1}(A^{n-1}) \otimes_A \Lambda_A^1(D) \simeq D$ d'après le problème 3.91(iv) et l'exercice 4.108(ii).

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$, il n'y a rien à prouver. Pour $n = 2$, d'après (iv) on sait que $P \simeq I_1 \oplus I_2$ pour deux idéaux non nuls $I_1, I_2 \subset A$; soit $x_1 \in (I_1 \cap I_2) \setminus \{0\}$ et posons $J := Ax_1$; la preuve de (ii) montre que l'anneau A/J^2 est principal, donc soit $x_2 \in I_2$ dont la classe dans A/J^2 est un générateur de I_2/J^2 , de sorte que $I_2 = Ax_2 + J^2$. On considère l'application A -linéaire

$$\phi : A \rightarrow I_1 \oplus I_2 \quad a \mapsto (ax_1, ax_2).$$

Evidemment ϕ est injective; montrons que $C := \text{Coker } \phi$ est un A -module plat. Pour cela, il suffit de montrer que $C_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } A$ (proposition 3.77); or, si $J_{\mathfrak{p}} = (I_1)_{\mathfrak{p}}$ on a $(I_1 \oplus I_2)_{\mathfrak{p}} = (\text{Im } \phi_{\mathfrak{p}}) \oplus (I_2)_{\mathfrak{p}}$, et dans ce cas $C_{\mathfrak{p}} \simeq (I_2)_{\mathfrak{p}}$ est bien plat. Si $J_{\mathfrak{p}} \subsetneq (I_1)_{\mathfrak{p}}$, il vient $J_{\mathfrak{p}}^2 \subsetneq J_{\mathfrak{p}} \subset (I_2)_{\mathfrak{p}}$, d'où $(I_2)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}x_2$ (rappelons que tout idéal $\neq 0$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est une puissance de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc on a soit $(I_2)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}x_2$, soit $(I_2)_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}^2$), et dans ce cas $(I_1 \oplus I_2)_{\mathfrak{p}} = (\text{Im } \phi_{\mathfrak{p}}) \oplus (I_1)_{\mathfrak{p}}$, donc $C_{\mathfrak{p}} \simeq (I_1)_{\mathfrak{p}}$ est encore plat. Comme C est aussi de présentation finie (exercice 6.70(i.a)), il est projectif (corollaire 4.100(ii)), et donc la projection $I_1 \oplus I_2 \rightarrow C$ admet un inverse à droite $C \rightarrow I_1 \oplus I_2$, d'où l'isomorphisme souhaité $I_1 \oplus I_2 \xrightarrow{\sim} (\text{Im } \phi) \oplus C \xrightarrow{\sim} A \oplus C$.

En dernier lieu, si $n > 2$, on trouve un isomorphisme $P \simeq I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ comme dans (iv); la somme directe $P' := I_1 \oplus \cdots \oplus I_{n-1}$ est alors un A -module projectif de rang $n-1$, et par hypothèse de récurrence il existe un A -module inversible D' avec $A^{n-2} \oplus D' \simeq P'$; par ce qui précède, on trouve ensuite un A -module inversible D avec un isomorphisme $D' \oplus I_n \simeq A \oplus D$, et finalement $P \simeq A^{n-1} \oplus D$.

Partie (vi) : Soient $x, y \in M_{\text{tor}}$, de sorte que $ax = by = 0$ pour certains $a, b \in A \setminus \{0\}$; il vient $a \cdot (a'x) = 0$ pour tout $a' \in A$ et $ab \cdot (x + y) = 0$, avec $ab \neq 0$. Cela montre que M_{tor} est bien un sous-module de M . Posons ensuite $P := M/M_{\text{tor}}$; il suffit de montrer que P est projectif, car alors la projection $\pi : M \rightarrow P$ admet un inverse à droite $P \rightarrow M$ et on déduit aisément l'isomorphisme souhaité. Remarquons d'abord que P est sans torsion : car, si $x \in M$ et $a \cdot \pi(x) = 0$ pour $a \in A \setminus \{0\}$, il vient $ax \in M_{\text{tor}}$, donc il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $bax = 0$, et comme $ba \neq 0$, on conclut que $x \in M_{\text{tor}}$ et finalement $\pi(x) = 0$. Evidemment P est de type fini, donc aussi de présentation finie (exercice 6.70(i)), et on est ramené à montrer que tout A -module N sans torsion est plat (corollaire 4.100(ii)); pour cela, il suffit encore de montrer que $N_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module plat, pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, et comme $N_{\mathfrak{m}}$ est sans torsion, on peut remplacer A, N par $A_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}$ et on est donc ramené au cas où A est un anneau de valuation discrète. L'assertion suit alors de l'exercice 3.81(ii).

Partie (vii) : Remarquons d'abord que $\mathfrak{p}A'$ est l'unique idéal premier de A' , donc A' est local, et l'homomorphisme de localisation $A' \rightarrow A'_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^t A_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme. On peut alors remplacer $A, \mathfrak{p}$ par $A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, et supposer du départ que A soit un anneau de valuation discrète; en particulier, avec $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ on a $\mathfrak{p} = Ax$. On applique le critère de Baer (exemple 4.21(i)) : soient donc $J \subset A'$ un idéal, et $\phi : J \rightarrow A'$ une application A' -linéaire; on doit exhiber une application A' -linéaire $\psi : A' \rightarrow A'$ telle que $\psi|_J = \phi$. Or, on a $\mathfrak{p}^t = Ax^t$ et $J = (Ax^k)/(Ax^t)$ pour quelque $k \leq t$, et notons par $\bar{x}^k \in J$ la classe de x^k ; il vient $x^{t-k} \cdot \phi(\bar{x}^k) = 0$, donc $\phi(\bar{x}^k) \in (Ax^k)/(Ax^t)$. Disons que $\phi(\bar{x}^k) = y \cdot \bar{x}^k$ pour quelque $y \in A'$; l'application ψ souhaitée s'obtient avec $\psi(a) := ay$ pour tout $a \in A'$.

Partie (viii) : Soit $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs de M ; on a $J_i := \text{Ann}_A(x_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et $J := \text{Ann}_A M = \bigcap_{i=1}^n J_i$, d'où $J \neq 0$, car A est intègre. Donc $A' := A/J$ est un anneau artinien et M est un A' -module; d'après le théorème 7.31, il existe des anneaux locaux artiniens $A'_1, \dots, A'_k$ avec un isomorphisme $A' \xrightarrow{\sim} A'_1 \times \cdots \times A'_k$ d'anneaux. Pour tout $i = 1, \dots, k$, soit $\bar{\mathfrak{m}}_i$ l'idéal maximal de A'_i , et $\pi_i : A \rightarrow A' \rightarrow A'_i$ la projection; l'exercice 3.66 nous fournit alors pour tout $i = 1, \dots, k$ un A'_i -module M'_i et une décomposition naturelle :

$$M \simeq (M'_1)_{[\pi_1]} \oplus \cdots \oplus (M'_k)_{[\pi_k]}.$$

Evidemment l'idéal $\mathfrak{m}_i := \pi_i^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}_i)$ est maximal dans A et $\text{Ann}_A(M'_i)$ est un idéal $\mathfrak{m}_i$ -primaire pour tout $i = 1, \dots, k$. On peut ainsi supposer du départ que J soit $\mathfrak{m}$ -primaire pour un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, et donc de même pour $J_1, \dots, J_n$. D'après le théorème 7.43, il existe alors $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ tels que $J_i = \mathfrak{m}^{t_i}$ pour $i = 1, \dots, n$, et $J = \mathfrak{m}^t$ avec $t = \max(t_1, \dots, t_n)$. On raisonne par récurrence sur $d := \dim_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{m}) \otimes_A M$. Si $d = 0$, on a $M = 0$ par le lemme de Nakayama, et l'assertion est trivialement vérifiée. Soit donc $d > 0$; quitte à permuter les générateurs on peut supposer que $t = t_1$, et donc

$M' := A'x_1$ est un A' -sous-module libre de M , et il est donc un A' -module injectif, d'après (vii). Mais alors l'application $Id_{M'} : M' \rightarrow M'$ se factorise à travers une application A' -linéaire $\phi : M \rightarrow M'$, et on a $M = M' \oplus \text{Ker } \phi$. Comme $\dim_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{m}) \otimes_A M' = 1$, il vient $\dim_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{m}) \otimes_A \text{Ker } \phi = d - 1$, et par hypothèse de récurrence $\text{Ker } \phi$ est alors somme directe de A -modules cycliques, donc de même pour M .

Problème 7.50, partie (i) : On raisonne par récurrence sur $k \geq 2$. Si $k = 2$, par hypothèse il existe $y \in A_1 \setminus A_2$. Si $v_1(y) = 0$, on fait $x := y^{-1}$; si $v_1(y) > 0$, on prend $x := (1 + y)^{-1}$. Soit ensuite $k > 2$, et on suppose que l'on a déjà trouvé pour tout $j = 2, \dots, k$ un élément $y_j \in K$ tel que $v_1(y_j) = 0$ et $v_i(y_j) > 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$. S'il existe $j \leq k$ avec $v_j(y_j) > 0$, on prendra $x := y_j$. Supposons donc que $v_j(y_j) \leq 0$ pour tout $j = 2, \dots, k$; dans ce cas, on construit des éléments $y'_2, \dots, y'_k$ comme suit :

- (a) Si $v_j(y_j) = 0$, on pose $y'_j := y_j$.
- (b) Si $v_j(y_j) < 0$ et $v_1(y_j - 1) = 0$ on pose $y'_j := y_j / (y_j - 1)$.
- (c) Si $v_j(y_j) < 0$ et $v_1(y_j - 1) > 0$, et de plus $v_1(2) = 0$, on pose $y'_j := y_j / (y_j + 1)$.
- (d) Si $v_j(y_j) < 0$ et $v_1(y_j - 1), v_1(2) > 0$, on pose $y'_j := (y_j^3 + y_j^2 + y_j) / (y_j^3 + y_j + 1)$.

On remarque que $v_i(y'_j) = v_i(y_j)$ pour tout $j = 2, \dots, k$ et tout $i \neq j$. En effet, cela est clair pour les cas (a), (b), (c). Pour le cas (d), l'assertion est également claire avec $i \neq 1, j$, car on a $v_i(y_j^3 + y_j^2 + y_j) = v_i(y_j)$ et $v_i(y_j^3 + y_j + 1) = 0$ pour ces valeurs de i . En dernier lieu, si $v_1(2) > 0$, la caractéristique du corps résiduel $\overline{A}_1$ de A_1 est égale à 2, et si $\pi : A_1 \rightarrow \overline{A}_1$ est la projection, on a $\pi(y_j) = 1 \Leftrightarrow v_1(y_j - 1) > 0$; dans ce cas, il vient alors $\pi(y_j^3 + y_j^2 + y_j) = 1 = \pi(y_j^3 + y_j + 1)$, d'où $v_1(y'_j) = 0$.

On remarque aussi que $v_j(y'_j) = 0$ pour tout $j = 2, \dots, k$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Finalement, on voit aisément que $x := y'_2 \cdots y'_k$ convient.

Partie (ii) : D'après (i), on a déjà $z_1, \dots, z_k \in K$ tels que $v_i(z_i) = 0$ et $v_i(z_j) > 0$ pour tous $i, j = 1, \dots, k$ avec $i \neq j$. En particulier, pour $z := z_1 + \cdots + z_k$ on a $v_i(z) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. On obtient alors la suite souhaitée avec $x_i := z_i / z$ pour $i = 1, \dots, k$.

Partie (iii) : Montrons d'abord que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ il existe $x \in K$ tel que

$$(*) \quad v_i(x - u_i) \geq m \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Pour cela, choisissons $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \cdots \times A_k$ comme dans (ii), et soit $n > 0$ un entier vérifiant les inégalités suivantes pour tous $i, j = 1, \dots, k$ avec $i \neq j$:

$$nv_i(x_i - 1) + v_i(u_i) \geq m \quad nv_j(x_i) + v_j(u_i) \geq m.$$

On pose $y_i := 1 - (1 - x_i^n)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Noter que

$$1 - x_i^n = (1 - x_i) \cdot (1 + \cdots + x_i^{n-1})$$

d'où $v_i(1 - x_i^n) \geq v_i(1 - x_i)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Il vient :

$$v_i(u_i \cdot (y_i - 1)) = v_i(u_i) + nv_i(1 - x_i^n) \geq v_i(u_i) + nv_i(1 - x_i) \geq m \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

De plus, $y_i = x_i^n \cdot P(x_i^n)$ pour un polynôme $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$, d'où $v_j(y_i) \geq nv_j(x_i)$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$, et donc :

$$v_j(u_i y_i) \geq m \quad \forall i, j = 1, \dots, k \text{ avec } i \neq j.$$

On voit aussitôt que l'élément $x := u_1 y_1 + \cdots + u_k y_k$ satisfait (*).

Prenons maintenant $m > \max(n_1, \dots, n_k)$, et pour tout $i = 1, \dots, k$ soit $t_i \in K$ avec $v_i(t_i) = n_i$. Par ce qui précède, on trouve $x' \in K$ tel que $v_i(x' - t_i) \geq m$ pour $i = 1, \dots, k$, et il s'ensuit aisément que $v_i(x') = n_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Soit aussi $x \in K$ vérifiant les inégalités (*) (pour cette même valeur de m), et on pose $u := x + x'$. Il vient $v_i(u - u_i) = v_i(x' + x - u_i) = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Exercice 7.51, partie (i) : Soient $p : B \rightarrow A$ une application A -linéaire avec $p \circ f = Id_A$, et $a, b \in A \setminus \{0\}$ tels que a/b soit entier sur A ; donc a/b est entier sur B , et alors $a/b \in B$,

i.e. il existe $s \in B$ avec $a = bs$ dans B . Il vient $a = p(a) = p(bs) = b \cdot p(s)$ et donc $a/b = p(s) \in A$.

Partie (ii) : Soit M le A -sous-module de B engendré par les monômes de degré $< d$; on voit aisément que $B = A \oplus M$, et comme B est intégralement clos (problème 6.16(iv)), il en est de même pour A , d'après (i). Evidemment A est une K -algèbre de type fini, donc A est noethérien. Soient maintenant $n, d > 1$, et supposons par l'absurde que A soit factoriel. On déduit aisément que tout monôme de degré d doit alors être premier dans A , car il ne se décompose pas dans A comme produit de polynômes de degrés $< d$. Mais on a les factorisations distinctes : $x_1^d \cdot x_2^d = (x_1^{d-1} x_2) \cdot (x_1 x_2^{d-1})$, contradiction.

Exercice 7.52, partie (i) : Il est clair que $M^\vee$ est sans torsion; ensuite, soit L un A -module libre de rang fini avec une surjection A -linéaire $\pi : L \rightarrow M$; on déduit une injection A -linéaire $\pi^\vee : M^\vee \rightarrow L^\vee$. Evidemment $L^\vee$ est un A -module libre du même rang que L ; comme A est noethérien, $M^\vee$ est alors de type fini (proposition 6.64). Comme M est aussi de présentation finie (exercice 6.70(i.a)), l'isomorphisme souhaité est fourni par l'exercice 4.110(ii).

Partie (ii) : Remarquons d'abord le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (M^\vee)_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\sim} & (M_{\mathfrak{p}})^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M^\vee)_K & \xrightarrow{\sim} & (M_K)^\vee \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les isomorphismes de (i), et dont celles verticales sont les localisations, et sont donc injectives. En particulier, on déduit une identification naturelle de $(M^\vee)_{\mathfrak{p}}$ avec le $A_{\mathfrak{p}}$ -sous-module de $(M_K)^\vee := \text{Hom}_K(M_K, K)$ qui consiste en les formes K -linéaires $\phi : M_K \rightarrow K$ telles que $\phi(M_{\mathfrak{p}}) \subset A_{\mathfrak{p}}$. De même, on identifie $M^\vee$ avec le A -module $\{\phi \in (M_K)^\vee \mid \phi(M) \subset A\}$. L'intersection $N := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (M^\vee)_{\mathfrak{p}}$ correspond alors à la partie des formes K -linéaires $\phi : M_K \rightarrow K$ avec $\phi(M_{\mathfrak{p}}) \subset A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; avec le théorème 7.49, on déduit que $\phi(m) \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} A_{\mathfrak{p}} = A$ pour tout $m \in M$. Cela montre que $N \subset M^\vee$, et l'inclusion opposée est triviale.

Partie (iii.a) : En raisonnant comme dans la preuve de (i), on voit aisément que $N^\vee$ et $N^{\vee\vee}$ sont des R -modules de présentation finie. Si l'on invoque deux fois l'exercice 4.110(ii), on déduit un isomorphisme de R -modules

$$\omega : S \otimes_R N^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} (S \otimes_R N^\vee)^\vee \xrightarrow{\sim} (S \otimes_R N)^{\vee\vee}$$

et une inspection directe des définitions montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & S \otimes_R N & \\ S \otimes_R \beta_N \swarrow & & \searrow \beta_{S \otimes_R N} \\ S \otimes_R N^{\vee\vee} & \xrightarrow{\omega} & (S \otimes_R N)^{\vee\vee} \end{array}$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). L'assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (iii.b) : D'après (i), le A -module $M^{\vee\vee\vee}$ est de type fini et sans torsion, et les localisations $M^\vee \rightarrow (M^\vee)_K \xrightarrow{\sim} (M_K)^\vee$ et $M^{\vee\vee\vee} \rightarrow (M^{\vee\vee\vee})_K \xrightarrow{\sim} (M_K)^{\vee\vee\vee}$ sont injectives (ici $(M_K)^{\vee\vee\vee}$ est le bidual du K -espace vectoriel $(M_K)^\vee$); considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} M^{\vee\vee\vee} & \xrightarrow{(\beta_M)^\vee} & M^\vee & \xrightarrow{\beta_{M^\vee}} & M^{\vee\vee\vee} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (M_K)^{\vee\vee\vee} & \xrightarrow{(\beta_{M_K})^\vee} & (M_K)^\vee & \xrightarrow{\beta_{(M_K)^\vee}} & (M_K)^{\vee\vee\vee} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les localisations. Par inspection directe des définitions, on voit que ce diagramme commute, et la composition des deux flèches horizontales en bas est l'identité de $(M_K)^{\vee\vee\vee}$, d'après l'exemple 1.132. Il s'ensuit aisément que $\beta_{M^\vee}$ est un isomorphisme et $(\beta_M)^\vee$ est son inverse, d'où l'assertion.

Partie (iii.c) : Si M est réflexif, soit $N := M^\vee$; d'après (ii) on a $N^\vee = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (N^\vee)_{\mathfrak{p}}$ et par hypothèse $N^\vee \simeq M$, d'où $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} M_{\mathfrak{p}}$. Pour la réciproque, remarquons pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_{\mathfrak{p}} & & \\ \beta_M \downarrow & & (\beta_M)_{\mathfrak{p}} \downarrow & \searrow \beta_{M_{\mathfrak{p}}} & \\ M^{\vee\vee} & \longrightarrow & (M^{\vee\vee})_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\sim} & (M_{\mathfrak{p}})^{\vee\vee} \end{array}$$

dont les deux flèches horizontales à gauche sont les localisations, et dont celle horizontale à droite est l'isomorphisme $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire de (i). Or, si $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, la localisation $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, donc $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module projectif de type fini (problème 7.48(vi)), et $\beta_{M_{\mathfrak{p}}}$ est un isomorphisme (exercice 4.110(iii)); donc $(\beta_M)_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma$. De plus, $M^{\vee\vee}$ est réflexif d'après (iii.b), donc $M^{\vee\vee} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (M^{\vee\vee})_{\mathfrak{p}}$ par ce qui précède; si l'on a aussi $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} M_{\mathfrak{p}}$, il s'ensuit que β_M est un isomorphisme à son tour, i.e. M est réflexif.

Partie (iii.d) : D'après (iii.c) on a $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} M_{\mathfrak{p}}$ et $M' = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} M'_{\mathfrak{p}}$; il vient : $M \cap M' = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (M_{\mathfrak{p}} \cap M'_{\mathfrak{p}}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (M \cap M')_{\mathfrak{p}}$, donc $M \cap M'$ est réflexif, encore par (iii.c). De même, on a $(W \cap M)_{\mathfrak{p}} = W \cap M_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma$, d'où $W \cap M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (W \cap M)_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (W \cap M_{\mathfrak{p}})$, et cela montre que $W \cap M$ est réflexif.

Exercice 7.62, partie (i) : Si P est projectif, on a la résolution projective triviale $P_{\bullet} \xrightarrow{\varepsilon} P$ avec $P_0 := P$, $P_i := 0$ pour $i > 0$, et $\varepsilon := 1_P$; évidemment $H_i(FP_{\bullet}) = 0$ pour $i > 0$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $(P_{M\bullet}, d_{\bullet}^M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ la résolution projective fixée pour définir $L^i F(M)$; en particulier, on a une suite exacte de $\mathcal{A}$

$$P_{M,1} \xrightarrow{d_1^M} P_{M,0} \xrightarrow{\varepsilon_M} M \rightarrow 0$$

d'où, si F est exact à droite, une suite exacte

$$F(P_{M,1}) \xrightarrow{F(d_1^M)} F(P_{M,0}) \xrightarrow{F(\varepsilon_M)} F(M) \rightarrow 0$$

(proposition 2.102(i)) et on voit que $F(\varepsilon_M)$ induit un isomorphisme

$$\bar{\varepsilon}_M : L_0 F(M) := \text{Coker } F(d_1^M) \xrightarrow{\sim} F(M).$$

Il reste à montrer que l'association $M \mapsto \bar{\varepsilon}_M$ définit une transformation naturelle. Pour cela, soient $f : M \rightarrow N$ un morphisme de $\mathcal{A}$, et $f_{\bullet} : P_{M\bullet} \rightarrow P_{N\bullet}$ le morphisme de résolutions choisi prolongeant f ; on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} F(P_{M,1}) & \xrightarrow{F(d_1^M)} & F(P_{M,0}) & \xrightarrow{F(\varepsilon_M)} & F(M) & \longrightarrow & 0 \\ F(f_1) \downarrow & & \downarrow F(f_0) & & \downarrow F(f) & & \\ F(P_{N,1}) & \xrightarrow{F(d_1^N)} & F(P_{N,0}) & \xrightarrow{F(\varepsilon_N)} & F(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes. Il vient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_0 F(M) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_M} & F(M) \\ L_0 F(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ L_0 F(N) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_N} & F(N) \end{array}$$

d'où l'assertion. Ensuite, si F est exact, alors pour tout $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et toute résolution $P_\bullet \rightarrow M$, le complexe $FP_\bullet$ est exact en tout degré $i > 0$ (proposition 2.102(iii)), d'où $L_i F = 0$ pour tout $i > 0$. De l'autre côté, si $L_1 F = 0$, la suite exacte longue des foncteurs dérivés (remarque 7.68(iii)) et l'exercice 7.62(ii) (resp. la remarque 7.71 et l'exercice 7.63(ii)) montrent que F transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes, donc il est exact, par la proposition 2.102(ii).

Partie (iii) : Par la proposition 3.11 (et les isomorphismes canoniques de la proposition 3.20) le foncteur $M \otimes_A -$ est exact à droite ; on conclut alors avec (ii).

Partie (iv) : La différentielle $d_1 : A_1 \rightarrow A_1$ de notre résolution $P_{k(\mathfrak{m}_1)\bullet}$ pour $k(\mathfrak{m}_1)$ est la multiplication scalaire par X , et on a $X \in \mathfrak{m}_1$, donc $k(\mathfrak{m}_1) \otimes_{A_1} d_1 = 0$. Comme $k(\mathfrak{m}_1) \simeq K$, le complexe $k(\mathfrak{m}_1) \otimes_{A_1} P_{k(\mathfrak{m}_1)\bullet}$ est isomorphe à $0 \rightarrow K \xrightarrow{0} K \rightarrow 0$, d'où :

$$\text{Tor}_i^{A_1}(k(\mathfrak{m}_1), k(\mathfrak{m}_1)) \simeq \begin{cases} K & \text{si } i = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, les différentielles de notre résolution $P_{k(\mathfrak{m}_2)\bullet}$ pour $k(\mathfrak{m}_2)$ sont des matrices à coefficients dans $\mathfrak{m}_2$, donc $k(\mathfrak{m}_2) \otimes_{A_2} P_{k(\mathfrak{m}_2)\bullet} = (0 \rightarrow K \xrightarrow{0} K \oplus K \xrightarrow{0} K \rightarrow 0)$, d'où :

$$\text{Tor}_i^{A_2}(k(\mathfrak{m}_2), k(\mathfrak{m}_2)) \simeq \begin{cases} K & \text{si } i = 0, 2 \\ K \oplus K & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 2. \end{cases}$$

Pour le troisième cas on raisonne de la même façon, et on trouve :

$$\text{Tor}_i^{A_3}(k(\mathfrak{m}_3), k(\mathfrak{m}_3)) \simeq \begin{cases} K & \text{si } i = 0, 3 \\ K \oplus K \oplus K & \text{si } i = 1, 2 \\ 0 & \text{si } i > 3. \end{cases}$$

Partie (v) : Sous nos hypothèses, on a la résolution libre de A/aA suivante :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a \cdot \text{Id}_A} A \xrightarrow{\varepsilon} A/aA \rightarrow 0$$

où ε est la projection. Après tensorisation avec M , on voit que $\text{Tor}_i^A(M, A/aA)$ est isomorphe à l'homologie en degré i du complexe $0 \rightarrow M \xrightarrow{a \cdot \text{Id}_M} M \rightarrow 0$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

Remarque 7.76. Il est évident que la complexité des calculs dans l'exercice 7.62(iv) croît avec le nombre d'indéterminées, et on a donc intérêt à chercher des moyens plus systématiques, si l'on veut obtenir des résultats généraux. Cela conduit à l'introduction des *complexes de Koszul* associés à une suite finie arbitraire d'éléments dans un anneau ; les résolutions que l'on a construit *ad hoc* dans la solution de l'exercice 5.8(ii) sont en effet (isomorphes aux) complexes de Koszul associés respectivement : à l'élément $X \in A_1$, à la suite $X, Y \in A_2$, et à la suite $X, Y, Z \in A_3$. La construction générale sera détaillée dans la section 11.4.

Exercice 7.63, partie (i) : On raisonne comme dans la solution de l'exercice 7.62(i) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Cela suit de l'exercice 7.62(ii), par dualité.

Partie (iii) : cela suit aussitôt de la partie (ii) et de la proposition 2.103(ii).

Problème 7.72, partie (i) : Soit $\Sigma_i := (0 \rightarrow N \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} M \rightarrow 0)$ pour $i = 1, 2$; par hypothèse, on a un isomorphisme de complexes $\tau_\bullet : \Sigma_1 \xrightarrow{\sim} \Sigma_2$ avec $\tau_0 = \text{Id}_N$, $\tau_2 = \text{Id}_M$, et $\tau_1 : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ un isomorphisme de A -modules tel que $\tau_1 \circ f_1 = f_2$ et $g_2 \circ \tau_1 = g_1$. On pose $(0 \rightarrow N \rightarrow X'_i \rightarrow M' \rightarrow 0) := \phi^* \Sigma_i$ pour $i = 1, 2$; par définition, $X'_i = X_i \times_{(g_i, \phi)} M'$ (notation de l'exemple 2.23(ii)). On voit aussitôt qu'il existe un

isomorphisme de complexes $\mu_\bullet : \Sigma'_1 \xrightarrow{\sim} \Sigma'_2$ tel que $\mu_1 : X'_1 \rightarrow X'_2$ est l'application $(x_1, m') \mapsto (\tau_1(x_1), m')$ et avec $\mu_0 = Id_N$, $\mu_2 = Id_{M'}$.

De même, on pose $(0 \rightarrow N'' \rightarrow X''_i \rightarrow M \rightarrow 0) := \psi_* \Sigma_i$ pour $i = 1, 2$; par définition, $X''_i = (N'' \oplus X_i)/N$. On voit aussitôt qu'il existe un isomorphisme de complexes $\nu_\bullet : \psi_* \Sigma_1 \xrightarrow{\sim} \psi_* \Sigma_2$ avec $\nu_0 = Id_{N''}$, $\nu_2 = Id_M$, et $\nu_1 : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$ est induit par l'application $N'' \oplus X_1 \rightarrow N'' \oplus X_2 : (n'', x_1) \mapsto (n'', \tau_1(x_1))$.

Parties (ii) et (iii) : Cela suit aussitôt de l'exercice 2.105(ii,iii).

Partie (iv) : La première assertion suit aussitôt de la naturalité de la suite exacte longue d'homologie pour morphismes de suites exactes courtes (remarque 7.71). Ensuite, l'exactitude de la suite $(*)$ montre que $c_{M,N}(\Sigma) = 0$ si et seulement s'il existe $s : M \rightarrow X$ tel que $Id_M = g_*(s) = s \circ g$, comme souhaité. Pour vérifier la surjectivité de $c_{M,N}$, soit $\xi \in \text{Ext}_A^1(M, N)$; on choisit une suite exacte courte $\Sigma := (0 \rightarrow N \rightarrow I \rightarrow Q \rightarrow 0)$ où I est un A -module injectif; compte tenu de l'exercice 7.63(i), la suite exacte d'homologie induite par Σ devient :

$$\text{Hom}_A(M, Q) \xrightarrow{\partial_\Sigma^0} \text{Ext}_A^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, I) = 0.$$

On trouve alors une application A -linéaire $\phi : M \rightarrow Q$ avec $\partial_\Sigma^0(\phi) = \xi$; le morphisme naturel de suites exactes $\phi^* \Sigma \rightarrow \Sigma$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\partial_{\phi^* \Sigma}^0} & \text{Ext}_A^1(M, N) \\ \text{Hom}_A(M, \phi) \downarrow & & \parallel \\ \text{Hom}_A(M, Q) & \xrightarrow{\partial_\Sigma^0} & \text{Ext}_A^1(M, N) \end{array}$$

(par la version “à droite” de la remarque 7.68(v)) qui montre que $c_{M,N}(\phi^* \Sigma) = \xi$.

Partie (v) : Par naturalité de la suite exacte longue d'homologie, le morphisme naturel $\Sigma \rightarrow \psi_* \Sigma$ de suites exactes courtes induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, M) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_A(M, M) \\ \partial_\Sigma^0 \downarrow & & \downarrow \partial_{\psi_* \Sigma}^0 \\ \text{Ext}_A^1(M, N) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(M, \psi)} & \text{Ext}_A^1(M, N'') \end{array}$$

d'où la commutativité du carré à gauche de $(**)$. De même, la commutativité du carré à droite de $(**)$ suit du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\phi, M)} & \text{Hom}_A(M', M) & \xleftarrow{\text{Hom}_A(M', \phi)} & \text{Hom}_A(M', M') \\ \partial_\Sigma^0 \downarrow & & \downarrow \partial_\Sigma^0 & & \downarrow \partial_{\phi^* \Sigma}^0 \\ \text{Ext}_A^1(M, N) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(\phi, N)} & \text{Ext}_A^1(M', N) & \xlongequal{\quad} & \text{Ext}_A^1(M', N). \end{array}$$

dont le carré de droite est induit par le morphisme $\phi^* \Sigma \rightarrow \Sigma$ de suites exactes courtes, et celui de gauche est fourni par la “version à droite” de la remarque 7.68(vi).

Partie (vi) : Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \in \mathcal{Yon}_A^1(M, N)$; par inspection directe on trouve :

$$\begin{aligned} ([\Sigma_1] + [\Sigma_2]) + [\Sigma_3] &= \nabla_* \circ \Delta^* \circ (\nabla \oplus Id_N)_* \circ (\Delta \oplus Id_M)^* [\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \Sigma_3] \\ [\Sigma_1] + ([\Sigma_2] + [\Sigma_3]) &= \nabla_* \circ \Delta^* \circ (Id_N \oplus \nabla)_* \circ (Id_M \oplus \Delta)^* [\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \Sigma_3]. \end{aligned}$$

Mais compte tenu de (ii) et (iii), on a :

$$\begin{aligned} \nabla_* \circ \Delta^* \circ (\nabla \oplus Id_N)_* \circ (\Delta \oplus Id_M)^* &= \nabla_* \circ (\nabla \oplus Id_N)_* \circ \Delta^* \circ (\Delta \oplus Id_M)^* \\ &= (\nabla \circ (\nabla \oplus Id_N))_* \circ ((\Delta \oplus Id_M) \circ \Delta)^* \\ &= (\nabla \circ (Id_N \oplus \nabla))_* \circ ((Id_M \oplus \Delta) \circ \Delta)^* \\ &= \nabla_* \circ (Id_N \oplus \nabla)_* \circ \Delta^* \circ (Id_M \oplus \Delta)^* \\ &= \nabla_* \circ \Delta^* \circ (Id_N \oplus \nabla)_* \circ (Id_M \oplus \Delta)^*. \end{aligned}$$

Partie (vii) : Soit $\Sigma := (0 \rightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \rightarrow 0)$; au vu de (ii) et (iii), on a :

$$\phi_1^*[\Sigma] + \phi_2^*[\Sigma] = \nabla_* \circ \Delta'^* \circ (\phi_1 \oplus \phi_2)^*[\Sigma \oplus \Sigma] = ((\phi_1 \oplus \phi_2) \circ \Delta)^* \circ \nabla_*[\Sigma \oplus \Sigma]$$

où $\Delta' : M' \rightarrow M' \oplus M'$ dénote de même l'application diagonale de M' . Or, si l'on pose $(0 \rightarrow N \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g'} M \oplus M \rightarrow 0) := \nabla_*(\Sigma \oplus \Sigma)$, par définition Y est le conoyau de l'application $j : N \oplus N \rightarrow N \oplus X \oplus X$ telle que $(n, n') \mapsto (n + n', -f(n), -f(n'))$. Noter que l'image de j coïncide avec le noyau de la surjection A -linéaire

$$N \oplus X \oplus X \rightarrow X \oplus M \quad (n, x, x') \mapsto (x + x' + f(n), g(x')).$$

On en déduit un isomorphisme de A -modules $Y \xrightarrow{\sim} X \oplus M$, qui identifie f' avec l'application $N \rightarrow X \oplus M : n \mapsto (f(n), 0)$ et g' avec l'application $X \oplus M \rightarrow M \oplus M : (x, m) \mapsto (g(x) - m, m)$. Par suite $((\phi_1 \oplus \phi_2) \circ \Delta)^* \circ \nabla_*(\Sigma \oplus \Sigma)$ est équivalent à la suite exacte courte $0 \rightarrow N \rightarrow Z \rightarrow M' \rightarrow 0$, avec

$$Z := \{(x, m, m') \in X \oplus M \oplus M' \mid g(x) - m = \phi_1(m'), m = \phi_2(m')\}.$$

En dernier lieu, soit $(0 \rightarrow N \rightarrow Z' \rightarrow M' \rightarrow 0) := (\phi_1 + \phi_2)^*\Sigma$, de sorte que $Z' = X \times_{(g, \phi_1 + \phi_2)} M'$; on a un isomorphisme évident de A -modules

$$\tau : Z' \xrightarrow{\sim} Z \quad (x, m') \mapsto (x, \phi_2(m'), m')$$

d'où un isomorphisme $t_\bullet : (\phi_1 + \phi_2)^*\Sigma \xrightarrow{\sim} ((\phi_1 \oplus \phi_2) \circ \Delta)^* \circ \nabla_*(\Sigma \oplus \Sigma)$ de suites exactes courtes avec $t_0 = Id_N$, $t_2 = Id_{M'}$ et $t_1 = \tau$.

Partie (viii) : Prenons $M = M'$ dans (vii), et soit $0_M : M \rightarrow M$ l'application nulle; il vient $[\Sigma] + 0_M^*[\Sigma] = (Id_M + 0_M)^*[\Sigma] = [\Sigma]$, et en outre

$$[\Sigma] + (-Id_M)^*[\Sigma] = (Id_M - Id_M)^*[\Sigma] = 0_M^*[\Sigma].$$

Mais si $\Sigma = (0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0)$, alors $0_M^*(\Sigma) = (0 \rightarrow N \rightarrow X' \rightarrow M \rightarrow 0)$ par définition, avec $X' := X \times_{(g, 0)} M \xrightarrow{\sim} N \oplus M$; autrement dit, $0_M^*(\Sigma)$ est scindée pour tout $\Sigma \in \mathcal{Yon}_A^1(M, N)$. Mais on voit aisément que toutes les suites scindées sont équivalentes, et si $\Sigma' \sim \Sigma''$ sont deux éléments de $\mathcal{Yon}_A^1(M, N)$, alors Σ' est scindé si et seulement si Σ'' est scindé (les détails sont laissés aux soins du lecteur). On conclut que la classe $[0]$ d'une suite scindée est l'élément neutre pour l'addition de $\mathcal{YExt}_A^1(M, N)$, et tout élément $[\Sigma]$ admet un inverse $(-Id_M)^*[\Sigma]$, i.e. $(\mathcal{YExt}_A^1(M, N), +, [0])$ est un groupe.

Ensuite, pour tout A -module P et $i = 1, 2$ soient $P \xleftarrow{e_i^P} P \oplus P \xrightarrow{p_i^P} P$ les projections et les inclusions canoniques; pour tout A -module P le foncteur contravariant $\text{Ext}_A^1(-, P)$ est aussi additif (remarque 7.64(i)), donc on a un isomorphisme naturel

$$\omega_{M,P} : \text{Ext}_A^1(M \oplus M, P) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^1(M, P) \oplus \text{Ext}_A^1(M, P)$$

qui identifie les applications $\text{Ext}_A^1(p_i^M, P) : \text{Ext}_A^1(M, P) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M \oplus M, P)$ aux inclusions naturelles (problème 2.76(i)); compte tenu des identités $p_i^M \circ \Delta = Id_M$ pour $i = 1, 2$, il s'ensuit aisément que $\text{Ext}_A^1(\Delta, P) \circ \omega_{M,P}^{-1}$ est l'application telle que $(\xi, \xi') \mapsto \xi + \xi'$ pour tous $\xi, \xi' \in \text{Ext}_A^1(M, P)$. De même, on a un isomorphisme

$$\omega'_{P,N} : \text{Ext}_A^1(P, N \oplus N) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^1(P, N) \oplus \text{Ext}_A^1(P, N)$$

qui identifie $\text{Ext}_A^1(p_i^N, N) : \text{Ext}_A^1(P, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(P, N \oplus N)$ à l'inclusion naturelle, et les identités $\nabla \circ e_i^N = Id_N$ pour $i = 1, 2$ montrent que $\text{Ext}_A^1(P, \nabla) \circ \omega'_{P,N}^{-1}$ est l'application telle que $(\eta, \eta') \mapsto \eta + \eta'$ pour tous $\eta, \eta' \in \text{Ext}_A^1(P, N)$. La composition $(\omega'_{M,N} \oplus \omega'_{M,N}) \circ \omega_{M,N \oplus N}$ est un isomorphisme

$$\omega'' : \text{Ext}_A^1(M \oplus M, N \oplus N) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i,j=1}^2 E_{ij} \quad \text{avec} \quad E_{ij} := \text{Ext}_A^1(M, N) \quad \forall i, j = 1, 2$$

dont la projection sur chaque facteur E_{ij} coïncide avec $\text{Ext}_A^1(e_i^M, p_j^N)$. Par ce qui précède, ω'' identifie $\text{Ext}_A^1(\Delta, \nabla) := \text{Ext}_A^1(M, \nabla) \circ \text{Ext}_A^1(\Delta, N \oplus N)$ avec l'application

$$\bigoplus_{i,j=1}^2 E_{ij} \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, N) \quad (\xi_{ij} \mid i, j = 1, 2) \mapsto \sum_{i,j=1}^2 \xi_{ij}.$$

Or, soient $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{Yon}_A^1(M, N)$ et $\xi := c_{M \oplus M, N \oplus N}([\Sigma_1 \oplus \Sigma_2])$; par (v), on a

$$\mathrm{Ext}_A^1(e_i^M, p_j^N)(\xi) = c_{M, N}(p_{j*}^N \circ e_i^{M*}[\Sigma_1 \oplus \Sigma_2]) \quad \forall i, j = 1, 2.$$

On vérifie aisément que $p_{j*}^N \circ e_i^{M*}(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)$ est une suite scindée si $i \neq j$, et pour $i = 1, 2$ on a $p_{i*}^N \circ e_i^{M*}(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2) \sim \Sigma_i$ (les détails sont laissés au lecteur). Il vient :

$$\omega''(\xi) = (\xi_{ij} \mid i, j = 1, 2) \quad \text{avec} \quad \xi_{12} = \xi_{21} = 0 \quad \xi_{ii} = c_{M, N}([\Sigma_i]) \quad i = 1, 2.$$

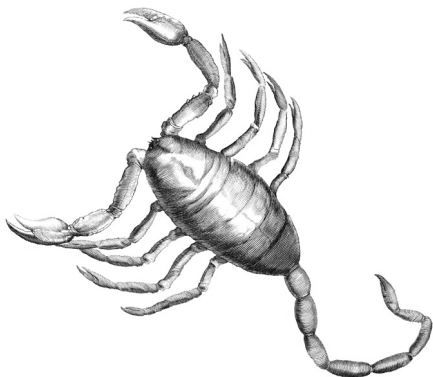
On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} c_{M, N}([\Sigma_1] + [\Sigma_2]) &= c_{M, N}(\nabla_* \circ \Delta^*([\Sigma_1 \oplus \Sigma_2])) = \mathrm{Ext}_A^1(\Delta, \nabla)(\xi) \\ &= c_{M, N}([\Sigma_1]) + c_{M, N}([\Sigma_2]) \end{aligned}$$

i.e. $c_{M, N}$ est un morphisme de groupes, et même un isomorphisme, compte tenu de (iv) ; en particulier $\mathrm{YExt}_A^1(M, N)$ est un groupe abélien, et en vertu de (v) il s'ensuit aussi que les opérations ϕ^* et ψ_* de (i) sont des morphismes de groupes.

Exercice 7.74 : Si G est libre, toute 1-extension de Yoneda $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$ est scindée, donc $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$, par le problème 7.72(viii). Si G n'est pas libre, il admet un facteur direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour quelque $n > 1$, et comme le foncteur $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z})$ commute avec les sommes directes finies, il suffit de montrer que $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$. Pour cela, on remarque que la 1-extension de Yoneda $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ n'est pas scindée, et on invoque à nouveau le problème 7.72(viii).

8. SCORPION $\mathfrak{M}$



On a vu que les anneaux locaux noethériens intègres et intégralement fermés de dimension un peuvent être caractérisés par la donnée d’une *valuation* à valeurs entières définie sur leurs corps des fractions : voir la remarque 7.39. Plus généralement, des valuations à valeurs dans des groupes ordonnés arbitraires surgissent naturellement en de nombreuses situations et applications de l’algèbre commutative. Notamment, on les utilise pour enrichir un anneau d’une structure *métrique*, analogue à celles que l’on trouve le plus souvent dans l’étude des algèbres réelles de l’analyse fonctionnelle ; cela explique en partie le rôle fondamental que les valuations ont acquis lors du développement des nouvelles *géométries analytiques non-archimédiennes* qui ont vu le jour au début des années 90 (*variétés analytiques* de Berkovich [3] et *espaces adiques* de Huber [39],[40],[41]). On démarre cette leçon avec une première introduction au cercle d’idées autour de la théorie des valuations.

On va ensuite s’autoriser un détour au début de la deuxième section, afin de revisiter l’anneau $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues à valeurs réelles d’un espace topologique X : on verra comment les mêmes considérations “de nature métrique” soient efficaces aussi pour étudier le spectre premier de $\mathcal{C}(X)$; en particulier, la notion de convexité (rencontrée déjà dans la définition 8.1(iii)) y joue un rôle similaire, et conduit à des conséquences analogues : pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{C}(T)$, le spectre premier de $\mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ est totalement ordonné par inclusion, comme le spectre premier de tout anneau de valuation. Pour ces derniers, cela découle de l’ordre total sur le groupe des valeurs ; par contre, pour le quotient $\mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ on exploite un ordre total naturel *défini directement sur le corps résiduel* $k(\mathfrak{p})$. On aboutit ainsi naturellement à la notion de *corps formellement réel*, un élégant mélange d’analyse réelle et algèbre qui nous occupe à partir du §8.2.2.

Jusqu’ici, les espaces spectraux rencontrés sur notre parcours provenaient tous des spectres premiers, ou parfois des parties constructibles de ces derniers, mais il existe d’autres constructions permettant d’associer un espace spectral à tout anneau, et en fait la plus ancienne de ces constructions précède l’introduction du spectre premier et remonte, comme celui-ci, aux travaux séminaux de Zariski ; dans la section 8.4 on présente une version moderne de la même idée qui a été développée en grande généralité et avec remarquable succès par R.Huber : ses *spectres valuatifs* fournissent en effet le socle sur lequel il a ensuite bâti sa théorie des espaces adiques, une vaste généralisation de la *géométrie analytique rigide* de J.Tate. A leur tour, les espaces adiques sont à la base des *espaces perfectoïdes* de P.Scholze [64], l’une des plus spectaculaires trouvailles des dernières années dans le domaine de la géométrie arithmétique. De l’autre côté, les corps formellement réels reviennent à la charge dans la section 8.3, consacrée aux *spectres réels* des anneaux, qui depuis une trentaine d’années sont devenus un outil fondamental de la *géométrie semi-algébrique réelle* : voir par exemple les traités [1] et [6].

La juxtaposition de corps ordonnés et valuations dans cette leçon n’est pas arbitraire : déjà les travaux précurseurs de Krull et Baer les avaient reconnus comme deux sujets

jumeaux, courant sur deux rails parallèles, et on aura plusieurs occasions de remarquer les surprenantes correspondances entre la théorie du spectre réel et celle du spectre valuatif. Parfois les rails s'entrecroisent : notamment au §8.3.1, où l'analyse des spécialisations d'un point λ du spectre réel fait intervenir certaines *valuations λ -convexes* du corps résiduel de λ . Aussi Huber avait lui-même contribué à la théorie du spectre réel bien avant de se pencher sur son homologue valuatif : avec ses espaces adiques, l'esprit semi-algébrique réel s'empare de la géométrie analytique non-archimédienne.

La leçon s'achève avec une section de saveur homologique : on y discute l'importante technique des *complexes doubles* de modules, qui nous servira par la suite.

8.1. Valuations sur les anneaux. Le point de départ est la définition suivante :

Définition 8.1. (i) Un *groupe abélien ordonné* est un groupe abélien $(\Gamma, +, 0)$ muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ telle que :

$$\gamma \leq \gamma' \Rightarrow \gamma + \delta \leq \gamma' + \delta \quad \forall \gamma, \gamma', \delta \in \Gamma.$$

On prolonge $\leq$ en un ordre total sur l'ensemble

$$\Gamma_{\circ} := \Gamma \sqcup \{+\infty\}$$

de telle façon que $+\infty$ soit l'élément maximal. On prolonge aussi la loi d'addition de Γ , avec : $\gamma + (+\infty) = (+\infty) + \gamma = +\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{\circ}$. De plus, on pose

$$\Gamma^+ := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geq 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\circ}^+ := \Gamma^+ \sqcup \{+\infty\}.$$

(ii) Un *morphisme de groupes ordonnés* $f : (\Gamma, \leq) \rightarrow (\Gamma', \leq)$ est un homomorphisme de groupes $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tel que :

$$\gamma \leq \delta \Rightarrow f(\gamma) \leq f(\delta) \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma.$$

On notera $f_{\circ} : \Gamma_{\circ} \rightarrow \Gamma'_{\circ}$ l'application qui prolonge f , avec $f_{\circ}(+\infty) = +\infty$.

(iii) Un sous-groupe $\Delta \subset \Gamma$ est *convexe*, s'il satisfait la condition suivante. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel qu'il existe $\delta \in \Delta$ avec $0 \leq \gamma \leq \delta$, on a $\gamma \in \Delta$. On dénote par

$$\text{Spec } \Gamma$$

le *spectre* de Γ , i.e. l'ensemble des sous-groupes convexes de Γ . Noter que tout morphisme de groupes ordonnés $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ induit une application :

$$\text{Spec } f : \text{Spec } \Gamma' \rightarrow \text{Spec } \Gamma \quad \Delta' \mapsto f^{-1}\Delta'.$$

(iv) Soit A un anneau ; une *valuation sur A à valeurs dans Γ* est une application

$$v : A \rightarrow \Gamma_{\circ} \quad \text{telle que :} \quad \begin{cases} v(1) = 0 \text{ et } v(0) = +\infty \\ v(a+b) \geq \min(v(a), v(b)) \\ v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \end{cases} \quad \forall a, b \in A.$$

(v) On dit que deux valuations $v : A \rightarrow \Gamma_{\circ}$ et $v' : A \rightarrow \Gamma'_{\circ}$ sont *équivalentes* s'il existe deux morphismes injectifs $f : \Gamma'' \rightarrow \Gamma$ et $g : \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ de groupes ordonnés, et une valuation $v'' : A \rightarrow \Gamma''_{\circ}$ tels que

$$f_{\circ} \circ v'' = v \quad \text{et} \quad g_{\circ} \circ v'' = v'.$$

Exercice 8.2. (i) Soient A un anneau, $\mathcal{V}_A$ l'ensemble des valuations de A ; pour tous $v, v' \in \mathcal{V}_A$ écrivons $v \sim v' \Leftrightarrow v$ est équivalente à v' . Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{V}_A$. (Voir aussi l'exercice 8.19.)

(ii) Soient $v : A \rightarrow \Gamma_{\circ}$ un élément de $\mathcal{V}_A$, $\phi : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux, $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un morphisme de groupes ordonnés. Montrer que $f_{\circ} \circ v \circ \phi \in \mathcal{V}_B$.

Remarque 8.3. Un mot de caution : ce que l'on a nommé ici $\mathcal{V}_A$ n'est pas, à proprement parler, un ensemble, mais plutôt une *classe*. Toutefois, le quotient $\mathcal{V}_A/\sim$ peut être représenté encore par une classe, par l'astuce de Scott de la remarque 2.9(ii), et à l'aide de l'exercice 8.19 on peut ensuite même vérifier aisément que ces classes d'équivalence des valuations sur A forment un *ensemble*.

Exemple 8.4. (i) Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ des groupes (abéliens) ordonnés ; munissons $\Gamma := \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$ de l'ordre *lexicographique*, tel que pour tous $\gamma_\bullet := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma'_\bullet := (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n) \in \Gamma$ on a $\gamma_\bullet < \gamma'_\bullet$ si et seulement s'il existe $k \leq n$ tel que $\gamma_i = \gamma'_i$ pour $i = 1, \dots, k-1$, et $\gamma_k < \gamma'_k$. On voit aisément que $(\Gamma, \leq)$ est un groupe ordonné. Noter que pour tout $k = 1, \dots, n$, on a le sous-groupe convexe

$$\Delta_k := \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \Gamma_k \times \dots \times \Gamma_n \subset \Gamma.$$

(ii) Il est évident que si Δ, Δ' sont deux sous-groupes convexes d'un groupe ordonné Γ , on a soit $\Delta \subset \Delta'$, soit $\Delta' \subset \Delta$. Le supremum des longueurs n des chaînes $\Delta_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Delta_n$ de sous-groupes convexes de Γ est appelé le *rang convexe* de Γ . Il s'agit donc d'un invariant à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

(iii) Par exemple, le rang convexe de $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, muni de son ordre lexicographique, est égal à n . Plus généralement, si $r_1, \dots, r_n$ sont les rangs convexes des groupes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ de (i), alors le rang convexe de Γ est $r_1 + \dots + r_n$ (exercice!).

Exercice 8.5. Soient $(\Gamma, \leq)$ un groupe abélien ordonné, $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe.

(i) Montrer que Γ est sans torsion. De plus, $\Gamma = \{0\} \Leftrightarrow \Gamma$ a rang convexe 0.

(ii) Montrer que Δ est convexe si et seulement s'il existe une structure de groupe ordonné sur le quotient Γ/Δ , telle que la projection canonique $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta$ soit un morphisme de groupes ordonnés. Noter que le groupe ordonné $(\Gamma/\Delta, \leq)$ est complètement déterminé par cette dernière condition.

(iii) Soit $i: \Delta \rightarrow \Gamma$ l'inclusion ; montrer que $\text{Spec}(i): \text{Spec } \Gamma \rightarrow \text{Spec } \Delta$ est surjective, et même bijective si Γ/Δ est un groupe de torsion. En particulier, si r_Δ et r_Γ sont les rangs convexes de Δ et Γ , on a $r_\Delta \leq r_\Gamma$, avec égalité si Γ/Δ est de torsion.

Définition 8.6. Soit $v: A \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation d'un anneau A .

(i) Le sous-groupe Γ_v de Γ engendré par $v(A) \setminus \{+\infty\}$ est le *groupe des valeurs* de v , et son rang convexe (pour l'ordre induit par Γ) est le *rang* de v . Evidemment les groupes des valeurs de deux valuations équivalentes de A sont isomorphes ; en particulier, le rang ne dépend que de la classe d'équivalence de v .

(ii) Si $\Gamma_v = \{0\}$, on dit que la valuation v est *triviale*.

Exemple 8.7. (i) Pour tout anneau intègre A , l'application $P \mapsto -\deg_T P$ est une valuation de l'anneau $A[T]$ à valeurs dans le groupe ordonné des entiers (le polynôme nul a degré $+\infty$; comparer avec l'exemple 7.41(iii)).

(ii) On peut généraliser (i) comme suit. Soient $m, n > 0$ des entiers, et M une matrice de taille $n \times m$, à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ de son ordre lexicographique (dédit de l'ordre naturel sur chaque facteur $\mathbb{R}$) ; soit aussi $B := A[T_1, \dots, T_m]$. Pour tout $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^m$ notons $T_\bullet^\underline{\nu} := T_1^{\nu_1} \dots T_m^{\nu_m}$; évidemment, pour chaque $P(T_1, \dots, T_m) \in B \setminus \{0\}$ il existe une partie finie $S \subset \mathbb{N}^m$ non vide, et un système d'éléments $(a_\underline{\nu} | \underline{\nu} \in S)$ de $A \setminus \{0\}$ tel que $P = \sum_{\underline{\nu} \in S} a_\underline{\nu} T_\bullet^\underline{\nu}$, et on pose

$$v_M(P) := \max(M \cdot \underline{\nu} | \underline{\nu} \in S) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ainsi que} \quad v_M(0) := +\infty.$$

On voit aisément que si A est intègre, v_M est une valuation de rang $\leq n$ sur B ; en effet, le rang de v_M dépend des propriétés diophantiennes de la matrice M . Si $A = K$ est un corps, on peut décrire à l'aide de la valuation v_M un algorithme de division avec reste pour polynômes à m indéterminées, généralisant l'algorithme euclidien bien connu pour $n = 1$. Les propriétés diophantiennes de M influencent les caractéristiques de l'algorithme associé : en particulier, même pour assurer que l'algorithme se termine en temps fini, il

est nécessaire de choisir M de telle façon que le rang de v_M soit égal à m (et donc, il faut que $n \geq m$). Ces algorithmes construits à partir de v_M (ou de variantes de v_M) sont des outils de base de l'algèbre computationnelle moderne : voir [14, Ch.2].

Remarque 8.8. Soient A un anneau, et $v : A \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation de A .

(i) Noter que $2 \cdot v(-1) = v((-1)^2) = 0$, d'où $v(-1) = 0$, en vertu de l'exercice 8.5(i). Par suite $v(a) = v(-a)$ pour tout $a \in A$.

(ii) Si $a, b \in A$ et si $v(a) < v(b)$, alors $v(a + b) = v(a)$. En effet, supposons que $v(a + b) > v(a)$; il vient $v(a) \geq \min(v(a + b), v(-b)) > v(a)$, ce qui est absurde.

Exercice 8.9. Soient A un anneau, $v : A \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation, $S \subset A$ une partie telle que $v(s) \neq +\infty$ pour tout $s \in S$, et $j : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation. Montrer qu'il existe une valuation unique $w : S^{-1}A \rightarrow \Gamma_\circ$ telle que $v = w \circ j$.

Définition 8.10. Le *support* d'une valuation v de A est la partie

$$\text{Supp}(v) := v^{-1}(+\infty) \subset A.$$

On voit aisément que $\text{Supp}(v)$ est un idéal premier de A , et on dénote son corps résiduel par $k(v)$; en outre, v se factorise à travers une unique *valuation résiduelle*

$$\bar{v} : k(v) \rightarrow \Gamma_{v\circ}.$$

En effet, on voit aisément que v se factorise à travers une valuation v' de $\bar{A} := A/\text{Supp}(v)$, et v' admet un prolongement unique sur $k(v) = \text{Frac}(\bar{A})$ (exercice 8.9).

Exercice 8.11. (i) Soient A un anneau, $v : A \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation, $k := k(v)$ et $\mathfrak{p} := \text{Supp}(v)$; soient aussi $a \in A$ et $\rho \in \Gamma$. On considère l'application

$$|\cdot|_{(a,\rho)}^v : A[X] \rightarrow \Gamma_\circ \quad P(X) \mapsto |P(X)|_{(a,\rho)}^v$$

définie par l'association :

$$b_0 + b_1(X - a) + \cdots + b_n(X - a)^n \mapsto \min(v(b_k) + k\rho \mid k = 0, \dots, n).$$

Montrer que $|\cdot|_{(a,\rho)}^v$ est une valuation de $A[X]$, appelée la *valuation de Gauss de centre a et rayon ρ* . On a $\text{Supp}(|\cdot|_{(a,\rho)}^v) = \mathfrak{p}[X] := \mathfrak{p} \cdot A[X]$; ainsi, $|\cdot|_{(a,\rho)}^v$ se factorise à travers une unique valuation $k(X) \rightarrow \Gamma_\circ$, appelée encore valuation de Gauss.

(ii) Soient $A \subset B$ une inclusion d'anneaux, $w : B \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation, $v := w|_A$, $x \in B \setminus A$, et $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille d'éléments de A indexée par un ensemble filtrant $(\Lambda, \leq)$; posons $\rho_\lambda := w(x - a_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On suppose que pour tout $a \in A$ il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\rho_\lambda \geq w(x - a)$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. Montrer que pour tout $P(X) \in A[X]$ scindé sur A il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que :

$$w(P(x)) = |P(X)|_{(a_\lambda, \rho_\lambda)}^v \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Problème 8.12. (Anneaux semi-normés) Soit A un anneau ; une *semi-norme réelle* sur A est une application $w : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ telle que $w(1) \geq 0, w(0) = +\infty$ et :

$$w(a - b) \geq \min(w(a), w(b)) \quad w(a \cdot b) \geq w(a) + w(b) \quad \forall a, b \in A.$$

On dit que w est *p-multiplicative* si en outre on a

$$w(a^n) = n \cdot w(a) \quad \forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On appelle *anneau semi-normé* tout couple (A, w) formé d'un anneau A et d'une semi-norme réelle w sur A ; si w est p-multiplicative, on dit que (A, w) est *uniforme*. Un *morphisme d'anneaux semi-normés* $f : (A, w) \rightarrow (B, u)$ est un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ pour lequel il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(f(a)) \geq C + w(a)$ pour tout $a \in A$. Evidemment les anneaux semi-normés et leurs morphismes forment une catégorie **AnNorm** ; notons par **AnUni** la sous-catégorie pleine de **AnNorm** dont les objets sont les anneaux semi-normés uniformes.

(i) Soit (A, w) un anneau semi-normé; montrer que $w(1) \in \{0, +\infty\}$, et que $w(1) = +\infty \Leftrightarrow w(a) = +\infty$ pour tout $a \in A$. Montrer aussi que $w(-a) = w(a)$ pour tout $a \in A$, et que $w(a_1 + \dots + a_n) \geq \min(w(a_1), \dots, w(a_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $a_1, \dots, a_n \in A$.

(ii) Soient (A, w) un anneau semi-normé, $a \in A$; montrer que $(\frac{w(a^n)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}_o$ (où $+\infty/n := +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Posons

$$w^*(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} w(a^n)/n \quad \forall a \in A.$$

Montrer que $w^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ est une semi-norme p-multiplicative, et que $w^*(a) \geq w(a)$ pour tout $a \in A$. On appelle w^* l'uniformisation de w .

(iii) Montrer que les associations :

$$(A, w) \mapsto (A, w^*) \quad (f : (A, w) \rightarrow (B, u)) \mapsto (f : (A, w^*) \rightarrow (B, u^*))$$

définissent un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathbf{AnUni} \rightarrow \mathbf{AnNorm}$.

(iv) Soit (A, w) un anneau semi-normé uniforme, et posons

$$A^+ := \{a \in A \mid w(a) \geq 0\} \quad I := \{a \in A \mid w(a) > 0\} \quad J := w^{-1}(+\infty).$$

Montrer que A^+ est un sous-anneau intégralement fermé dans A , que I est un idéal radical de A^+ , et que J est un idéal radical de A et de A^+ . Montrer en outre que w est la composition de la projection $A \rightarrow \bar{A} := A/J$ et d'une unique norme p-multiplicative $\bar{w}$ sur $\bar{A}$. (Pour une application, voir le problème 10.18.)

Remarque 8.13. Il est plus courant de définir une semi-norme réelle sur un anneau A comme une application $|\cdot| : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $|1| \leq 1$, $|0| = 0$, et :

$$|a - b| \leq \max(|a|, |b|) \quad |a \cdot b| \leq |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in A$$

et une telle semi-norme est alors dite p-multiplicative si $|a^n| = |a|^n$ pour tout $a \in A$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (voir e.g. [8, §1.2]). Cette notion est toutefois équivalente à celle du problème 8.12 : en effet, si $w : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ vérifie les conditions de *loc.cit.*, on obtient $|\cdot|$ vérifiant les conditions ci-dessus, en posant $|a| := \rho^{w(a)}$ pour tout $a \in A$, avec $\rho \in]0, 1[$ un réel arbitrairement choisi (avec la convention que $\rho^{+\infty} := 0$).

8.1.1. Anneaux de valuation. D'après la définition 8.10, la donnée d'une valuation sur A équivaut à celle d'un idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, et d'une valuation sur le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$. L'étude des valuations est donc ramenée au cas des valuations des corps. Soit v une valuation définie sur un corps K ; évidemment

$$K^+ := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

est un sous-anneau de K , appelé l'anneau de valuation de v . Les anneaux de valuation des valuations de K seront appelés simplement les anneaux de valuations de K . Noter que $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$, car $v(x) + v(x^{-1}) = 0$, si $x \neq 0$; de même, un élément $x \in K^+$ est inversible (dans K^+) si et seulement si $v(x) = 0$, et $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ est un idéal de K^+ . Par suite $\mathfrak{m}$ est le plus grand idéal strictement contenu dans K^+ , donc $(K^+, \mathfrak{m})$ est un anneau local. Il est évident que K^+ ne dépend que de la classe d'équivalence de v . De plus, on voit aisément que tout idéal de type fini de K^+ est principal : en effet, si $x_1, \dots, x_n$ est un système de générateurs pour l'idéal $I \subset V$, on peut supposer que $v(x_1) \leq v(x_i)$ pour tout $i = 2, \dots, n$, d'où $K^+x_i \subset K^+x_1$ pour $i = 2, \dots, n$, et donc $I = K^+x_1$. Remarquons aussi que K^+ est intégralement clos : cela se démontre en effet comme dans la solution du problème 8.12(iv).

Le spectre premier de K^+ admet une description très simple en termes du groupe des valeurs Γ_v de la valuation correspondante :

Proposition 8.14. Avec la notation ci-dessus on a :

(i) Il existe une bijection naturelle renversant l'ordre d'inclusion

$$\text{Spec } K^+ \xrightarrow{\sim} \text{Spec } \Gamma_v$$

qui associe à chaque idéal premier $\mathfrak{p} \subset K^+$ le sous-groupe convexe

$$\Delta(\mathfrak{p}) := \{\gamma \in \Gamma_v \mid \gamma, -\gamma < v(x) \ \forall x \in \mathfrak{p}\}$$

et dont l'inverse associe à chaque sous-groupe convexe $\Delta \subset \Gamma_v$ l'idéal premier

$$\mathfrak{p}(\Delta) := \{x \in K^+ \mid \gamma < v(x) \ \forall \gamma \in \Delta\}.$$

(ii) En particulier, $\text{Spec } K^+$ est totalement ordonné par inclusion, et on a :

$$v^{-1}(\Delta^+) = K^+ \setminus \mathfrak{p}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \text{Spec } \Gamma_v.$$

Démonstration. (i) : Pour tout $\Delta \in \text{Spec } \Gamma_v$, on voit aisément que $\mathfrak{p}(\Delta)$ est un idéal premier de K^+ : les détails seront laissés aux soins du lecteur.

Ensuite, soient $\gamma, \gamma' \in \Delta(\mathfrak{p})$; si $\gamma \leq 0$ ou $\gamma' \leq 0$, il est clair que $\gamma + \gamma' < v(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{p}$. Si $\gamma, \gamma' > 0$, il existe $y, y' \in K^+$ tels que $v(y) = \gamma$ et $v(y') = \gamma'$; par hypothèse on a $y, y' \notin \mathfrak{p}$, d'où $yy' \notin \mathfrak{p}$, et par suite $\gamma + \gamma' < v(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{p}$ (car sinon, $v(x^{-1}yy') \geq 0$, i.e. $yy' \in xK^+ \subset \mathfrak{p}$, contradiction). Cela montre que $\Delta(\mathfrak{p})$ est un sous-groupe de Γ_v , et la convexité de $\Delta(\mathfrak{p})$ est évidente.

Or, posons $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}(\Delta)$; les définitions donnent aussitôt l'inclusion $\Delta \subset \Delta(\mathfrak{q})$. Pour la réciproque, soit $\gamma \in \Gamma_v \setminus \Delta$; on veut montrer que $\gamma \notin \Delta(\mathfrak{q})$, et quitte à remplacer γ par $-\gamma$, on peut supposer que $\gamma \geq 0$. Dans ce cas, il existe $y \in K^+$ tel que $v(y) = \gamma$; d'autre part, la convexité de Δ implique que $\gamma > \delta$ pour tout $\delta \in \Delta$. Par suite $y \in \mathfrak{q}$, d'où l'assertion. En particulier, cela montre que l'application $\mathfrak{p} \mapsto \Delta(\mathfrak{p})$ est une surjection de $\text{Spec } K^+$ sur $\text{Spec } \Gamma_v$. Pour voir qu'elle est aussi une injection, soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } K^+$ et $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$; évidemment $\gamma_x := v(x) \geq 0$ et $\gamma_x \notin \Delta(\mathfrak{p})$. Il suffit de montrer que $\gamma_x \in \Delta(\mathfrak{q})$; mais si $\gamma_x \notin \Delta(\mathfrak{q})$, il existe $z \in \mathfrak{q}$ tel que $v(z) \leq \gamma_x$, d'où $v(z^{-1}x) \geq 0$, i.e. $x \in zK^+ \subset \mathfrak{q}$, contradiction.

(ii) découle aussitôt de (i). $\square$

Exercice 8.15. (Ramification des valuations) Soient K un corps, K' une extension algébrique de K , et v' une valuation de K' ; on dénote par v la restriction de v' à K , et on pose $\Gamma := \Gamma_v$ et $\Gamma' := \Gamma_{v'}$. Soient aussi k et k' les corps résiduels des anneaux de valuation K^+ et K'^+ correspondants, et posons

$$e(v'|v) := [\Gamma' : \Gamma] \quad f(v'|v) := [k' : k].$$

(i) Montrer que $e(v'|v) \cdot f(v'|v) \leq [K' : K]$. Les entiers $e(v'|v)$ et $f(v'|v)$ sont appelés respectivement *l'indice de ramification* et *le degré de v' sur v* .

(ii) Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K'^+ & \longrightarrow & \text{Spec } \Gamma' \\ \text{Spec } i \downarrow & & \downarrow \text{Spec } j \\ \text{Spec } K^+ & \longrightarrow & \text{Spec } \Gamma \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les bijections de la proposition 8.14(i), et les flèches verticales sont induites par les inclusions $i : K \rightarrow K'$ et $j : \Gamma \rightarrow \Gamma'$.

(iii) En déduire que $\text{Spec } i : \text{Spec } K'^+ \rightarrow \text{Spec } K^+$ est une bijection.

(iv) Montrer que si K est algébriquement clos, il en est de même pour k .

On peut caractériser comme suit les anneaux de valuation de K :

Lemme 8.16. Soient K un corps, $A \subset K$ un sous-anneau. Le deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) A est l'anneau de valuation d'une valuation v de K .

(b) Pour tout $x \in K^\times$ on a soit $x \in A$, soit $x^{-1} \in A$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b), car si $x \in K^\times$ et $v(x) < 0$, on a $v(x^{-1}) = -v(x) \geq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : on pose $\Gamma := K^\times / A^\times$; donc $(\Gamma, +)$ est un groupe abélien (son élément neutre 0 est la classe de $1 \in K^\times$), et la projection $v : K^\times \rightarrow \Gamma$ est un homomorphisme de groupes

que l'on prolonge à K par $v(0) := +\infty$. On munit Γ de la relation d'ordre total suivante : si $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ sont les classes de $x, x' \in K^\times$, on dit que $\gamma \leq \gamma' \Leftrightarrow x'/x \in A$. On voit aisément que cette définition ne dépend pas des représentants x et x' , et que si $\gamma \leq \gamma'$ et $\gamma' \leq \gamma''$, alors $\gamma \leq \gamma''$; de plus, si l'on a à la fois $\gamma \leq \gamma'$ et $\gamma' \leq \gamma$, alors $x'/x \in A^\times$, d'où $\gamma = \gamma'$. Il est également clair que si $\gamma \leq \gamma'$, alors $\gamma + \delta \leq \gamma' + \delta$ pour tout $\delta \in \Gamma$. Evidemment, $A = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$, donc il ne reste qu'à montrer que $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ pour tous $x, y \in K$. Pour cela, on peut supposer que $+\infty \neq v(x) \leq v(y)$, i.e. $y/x \in A$, d'où $(x+y)/x = 1 + y/x \in A$, et finalement $v(x+y) \geq v(x)$, comme souhaité. $\square$

Remarque 8.17. (i) Soit A l'anneau de valuation d'une valuation $v : K^\times \rightarrow \Gamma$.

(i) La preuve du lemme 8.16 munit $K^\times/A^\times$ d'un ordre total $\leq$, tel que v se factorise à travers un homomorphisme *injectif* $(K^\times/A^\times, \leq) \rightarrow \Gamma$ de groupes ordonnés. Par suite, $(K^\times/A^\times, \leq)$ est le groupe des valeurs de v (à isomorphisme unique près), et A détermine v à équivalence de valuations près.

(ii) On voit aussi que tout sous-anneau $V \subset K$ contenant A est un anneau de valuation de K ; en outre, il est une localisation de A : car, si $\mathfrak{m}_V \subset V$ est l'idéal maximal, et si $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{m}_V$, le lemme 8.16 implique aisément que $V = A_{\mathfrak{p}}$, et la preuve du même lemme montre aussi bien que le groupe des valeurs de V est (naturellement identifié avec) $\Gamma_v/\Delta(\mathfrak{p})$, où $\Delta(\mathfrak{p}) \subset \Gamma_v$ est le sous-groupe convexe correspondant à $\mathfrak{p}$, suivant la bijection canonique de la proposition 8.14.

(iii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, le quotient $A/\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation de $k(\mathfrak{p})$: en effet, la projection $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ se prolonge en une surjection $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow k(\mathfrak{p})$; or si $x \in k(\mathfrak{p}) \setminus (A/\mathfrak{p})$, d'après le lemme 8.16 il faut montrer que $x^{-1} \in A/\mathfrak{p}$. Pour cela, on est ramené à montrer que pour tout $y \in A_{\mathfrak{p}} \setminus A$ on a $y^{-1} \in A$, et cela découle encore du même lemme. En outre, la proposition 8.14(ii) entraîne une identification naturelle du groupe des valeurs de $A/\mathfrak{p}$ avec $\Delta(\mathfrak{p})$. Voir aussi le problème 8.105.

Exercice 8.18. (Composition de valuations) Soient K un corps, $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation de K . Soient aussi $\pi : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection canonique, V' un anneau de valuation de $k(\mathfrak{m})$. Montrer que $\pi^{-1}V'$ est un anneau de valuation de K .

Exercice 8.19. Soient A un anneau, v et w deux valuations de A . Montrer que v et w sont équivalentes si et seulement si, pour tous $a, b \in A$ on a :

$$v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow w(a) \geq w(b).$$

Un lecteur (très) perspicace aura à ce point cru entrevoir des analogies formelles avec notre discussion des filtres et ultrafiltres dans la section 1.6 : rappelons que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre (ou plus généralement, un filtre premier) sur un espace topologique T , et si $Z \subset T$ est une partie fermée, alors soit $Z \in \mathcal{F}$, soit l'adhérence de $T \setminus Z$ appartient à $\mathcal{F}$. Cela fait écho à la condition (b) du lemme 8.16. On peut alors soupçonner aussi que la construction d'anneaux de valuation de K s'effectuera en général par application du lemme de Zorn sur un ensemble partiellement ordonné convenable associé à K . En effet, on a la définition suivante :

Définition 8.20. Soient K un corps, $\mathcal{L}_K$ l'ensemble des sous-anneaux locaux de K . On munit $\mathcal{L}_K$ de l'ordre partiel tel que pour tous $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B) \in \mathcal{L}_K$ on a

$$(A, \mathfrak{m}_A) \leq (B, \mathfrak{m}_B) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ et } \mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A.$$

On dit aussi que $(B, \mathfrak{m}_B)$ domine $(A, \mathfrak{m}_A)$ si $(A, \mathfrak{m}_A) \leq (B, \mathfrak{m}_B)$.

Théorème 8.21. Soient K un corps, et $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{L}_K$. On a :

- (i) Il existe un élément maximal $(V, \mathfrak{m}_V)$ de $\mathcal{L}_K$ tel que $(A, \mathfrak{m}_A) \leq (V, \mathfrak{m}_V)$.
- (ii) Les éléments maximaux de $\mathcal{L}_K$ sont les anneaux de valuation de K .

Démonstration. (i) : Soit $((A_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ une partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{L}_K$ avec $(A, \mathfrak{m}_A) \leq (A_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; par le lemme de Zorn, il suffit de

remarquer que $V := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ est un élément de $\mathcal{L}_K$ (car l'unique idéal maximal de V est $\mathfrak{m}_V := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{m}_\lambda$) et $(A_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda) \leq (V, \mathfrak{m}_V)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

(ii) : Montrons d'abord que tout anneau de valuation V de K est maximal dans $\mathcal{L}_K$. En effet, si $(V, \mathfrak{m}_V) \leq (A, \mathfrak{m}_A)$, on a $V \subset A$; si $x \in A \setminus V$, on aurait $x^{-1} \in V \setminus V^\times$, donc $x^{-1} \in \mathfrak{m}_V \subset \mathfrak{m}_A$ (lemme 8.16), d'où $x \notin A$, contradiction. Or, soit $(V, \mathfrak{m}_V)$ maximal dans $\mathcal{L}_K$, et $x \in K^\times$; on doit vérifier que $x \in V$ ou $x^{-1} \in V$ (lemme 8.16). Soient $f : V \rightarrow V[x] \subset K$ l'inclusion, et $\phi := \text{Spec } f : \text{Spec } V[x] \rightarrow \text{Spec } V$.

Affirmation 8.22. Si $x \notin V$, la fibre $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_V) = \text{Spec } V[x] \otimes_V k(\mathfrak{m}_V)$ est vide.

Preuve : Si $\mathfrak{p} \in \phi^{-1}(\mathfrak{m}_V)$, on a $V[x]_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{L}_K$, et $V \leq V[x]_{\mathfrak{p}}$. Mais par hypothèse, V est strictement contenu dans $V[x]$; cela contredit la maximalité de V . $\diamond$

L'observation revient à dire que si $x \notin V$, alors $V[x] \otimes_V k(\mathfrak{m}_V) = 0$ (théorème 1.34), i.e. $1 \in \mathfrak{m}_V \cdot V[x]$. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathfrak{m}_V$ tels que

$$(*) \quad 1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Mais $1 - a_0 \in V^\times$; donc, avec $b_i := (1 - a_0)^{-1} \cdot a_i$ pour $i = 1, \dots, n$, il vient

$$1 = b_1 x + \dots + b_n x^n \quad \text{et} \quad b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{m}_V.$$

Le même argument s'applique au cas où $x^{-1} \notin V$, et donne une identité :

$$(**) \quad 1 = c_1 x^{-1} + \dots + c_m x^{-m} \quad \text{avec } c_1, \dots, c_m \in \mathfrak{m}_V.$$

Choisissons maintenant des identités (*) et (**) avec n et m minimaux. Quitte à échanger x et x^{-1} , on peut aussi supposer que $n \geq m$; dans ce cas, on obtient

$$1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n (c_1 x^{n-1} + \dots + c_m x^{n-m}).$$

Cette dernière est une identité du type (*), mais chaque puissance de x dans cette expression a degré $< n$, ce qui contredit la minimalité de n . $\square$

Exercice 8.23. Dans la situation de la définition 8.20, soit $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{L}_K$ avec $\dim A = 1$ et $K = \text{Frac } A$. Montrer qu'il existe un anneau de valuation $(V, \mathfrak{m}_V)$ de K avec $\dim V = 1$ et $(A, \mathfrak{m}_A) \leq (V, \mathfrak{m}_V)$.

Le corollaire suivant généralise le théorème 7.49 :

Corollaire 8.24. Soient K un corps, $A \subset K$ un sous-anneau. La fermeture intégrale de A dans K est l'intersection de tous les anneaux de valuation de K contenant A .

Démonstration. On a déjà remarqué que tout anneau de valuation de K est intégralement clos, donc l'intersection des anneaux de valuation de K contenant A est aussi intégralement close, et en particulier contient la fermeture intégrale de A dans K . Soit donc $x \in K$ un élément qui n'est pas entier sur A ; on doit exhiber un anneau de valuation V de K tel que $A \subset V$ et $x \notin V$. Pour cela, posons $y := x^{-1}$; l'idéal $yA[y]$ de l'anneau $A[y] \subset K$ ne contient pas 1, car autrement on aurait une identité de la forme $1 = a_1 y + \dots + a_n y^n$, pour certains $a_0, \dots, a_n \in A$, d'où l'identité $x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n = 0$, donc x serait entier sur A , une contradiction. Il existe alors un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A[y]$ avec $yA[y] \subset \mathfrak{p}A[y] \subset \mathfrak{p}A[y]_{\mathfrak{p}}$ (corollaire 1.35(ii)); par le théorème 8.21, l'anneau local $A[y]_{\mathfrak{p}}$ est dominé par un anneau de valuation $(V, \mathfrak{m}_V)$ de K . En particulier, $y \in \mathfrak{m}_V$, et donc $x \notin V$, comme souhaité. $\square$

Exercice 8.25. (i) Soient K un corps, $A \in \mathcal{L}_K$, et $\mathcal{V}_{K/A} \subset \mathcal{L}_K$ l'ensemble des anneaux de valuations V de K tels que $A \leq V$. Montrer que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_{K/A}} V$ est la fermeture intégrale de A dans K .

(ii) Soit $K \subset E$ une extension de corps arbitraire. Montrer que toute valuation v de K se prolonge en une valuation w de E (donc, avec $\Gamma_v \subset \Gamma_w$).

(iii) Soient B un anneau, $v : B \rightarrow \Gamma_0$ une valuation, $b, b' \in B$ et $\rho, \rho' \in \Gamma$. Montrer que $|\cdot|_{(b, \rho)}^v = |\cdot|_{(b', \rho')}^v \Leftrightarrow v(b - b') \geq \rho = \rho'$ (notation de l'exercice 8.11(i)).

(iv) Soient K un corps, $w : K(X) \rightarrow \Gamma_{\circ}$ une valuation, $(K^+, \mathfrak{m}_K)$ et $(W, \mathfrak{m}_W)$ les anneaux de valuation de $v := w|_K : K \rightarrow \Gamma_{\circ}$ et respectivement de w , et $\rho := w(X)$. Montrer que $w = |\cdot|_{(0,\rho)}^v$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathbb{Z}\rho \cap v(K^{\times}) = \{0\}$
- il existe $a \in K^{\times}$ tel que $\rho = v(a)$, et l'image de $a^{-1}X$ dans $k(\mathfrak{m}_W)$ est transcendante sur $k(\mathfrak{m}_K)$.

(v) Dans la situation de (ii), soient $(E^+, \mathfrak{m}_E)$ et $(K^+, \mathfrak{m}_K)$ les anneaux de valuation de w et de v ; montrer que (notation du corollaire 1.100) :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Gamma_w/\Gamma_v) + \text{tr. deg}(k(\mathfrak{m}_E)/k(\mathfrak{m}_K)) \leq \text{tr. deg}(E/K).$$

Le cas d'une intersection d'un nombre *fini* d'anneaux de valuations de K peut être analysé plus en détail; pour cela, on utilisera l'astuce suivante due à Nagata :

Lemme 8.26. Soient K un corps, $V_1, \dots, V_n$ des anneaux de valuation de K , et $A := \bigcap_{i=1}^n V_i$. Alors, pour tout $a \in K$ il existe un entier $s \geq 2$ tel que A contient

$$b_s := (1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1} \quad \text{et} \quad ab_s.$$

Démonstration. On considère chaque V_i séparément. Si $a \notin V_i$, on a $c := a^{-1} \in \mathfrak{m}_i$, l'idéal maximal de V_i , d'où

$$b_s = c^{s-1}/(1 + c + \dots + c^{s-1}) \in V_i \quad \forall s \geq 1$$

et $ab_s = c^{s-2}/(1 + c + \dots + c^{s-1}) \in V_i$ pour tout $s \geq 2$. Ensuite, supposons que $a \in V_i$ et $1 - a^t \in K \setminus \mathfrak{m}_i$ pour tout $t \geq 1$; dans ce cas, $1 - a^t \in V_i^{\times}$ pour $t \geq 1$, et l'identité $b_s = (1 - a)/(1 - a^s)$ montre que $b_s, ab_s \in V_i$ pour tout $s \geq 1$.

Si $1 - a \in \mathfrak{m}_i \setminus \{0\}$, noter que $c_t := (1 - a^t)/(1 - a) = 1 + a + \dots + a^{t-1} \in V_i$ pour $t \geq 1$; pour tout $s \geq 2$ non divisible par la caractéristique de $k(\mathfrak{m}_i)$ on a alors

$$c_s = s + (a - 1) + \dots + (a^{s-1} - 1) = s + (a - 1) \cdot (c_1 + \dots + c_{s-1}) \in V_i^{\times}$$

et par suite $b_s, ab_s \in V_i$ pour ces mêmes entiers s . Il est en de même si $a = 1$.

En dernier lieu, supposons que $a \in V_i$, $1 - a \notin \mathfrak{m}_i$, et $1 - a^t \in \mathfrak{m}_i$ pour quelque $t \geq 2$; posons $t_0 := \min\{t \geq 2 \mid 1 - a^t \in \mathfrak{m}_i\}$. On remarque que $1 - a^{kt_0} = (1 - a^{t_0}) \cdot (1 + a^{t_0} + \dots + a^{(k-1)t_0}) \in \mathfrak{m}_i$ pour tout $k \geq 1$, et d'autre part, $a^{t_0}, 1 - a^r \in V_i^{\times}$ pour tout $0 < r < t_0$. Si $s \in \mathbb{N}$, écrivons $s = kt_0 + r$ avec $0 \leq r < t_0$; il vient

$$1 - a^s = 1 - a^{kt_0} + a^{kt_0} \cdot (1 - a^r) \in \mathfrak{m}_i \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.$$

Donc, $b_s, ab_s \in V_i$ si $s \in \mathbb{N} \setminus (\{1\} \cup t_0\mathbb{N})$. Ainsi, pour chaque $i = 1, \dots, n$ il existe $d_i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tel que $b_s, ab_s \in V_i$ pour tout $s \in \mathbb{N} \setminus (\{1\} \cup d_i\mathbb{N})$, d'où le lemme. $\square$

Théorème 8.27. Soient K un corps, $n > 0$ un entier, $V_1, \dots, V_n$ des anneaux de valuations de K , avec $V_i \not\subseteq V_j$ pour $i \neq j$; on pose $A := \bigcap_{i=1}^n V_i$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit aussi $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal de V_i , et $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{m}_i \cap A$. Alors on a :

- (i) $\text{Max } A = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$.
- (ii) En outre, $A_{\mathfrak{p}_i} = V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. (ii) : Evidemment $A_{\mathfrak{p}_i} \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. De l'autre côté, soit $a \in V_i$, et choisissons un entier $s \geq 2$ vérifiant les conditions du lemme 8.26; on pose $b := (1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1}$, donc $b, ab \in A$, et par construction $b \in V_i^{\times}$. En particulier, $b \in A \setminus \mathfrak{p}_i$, d'où $a = (ab)/b \in A_{\mathfrak{p}_i}$.

(i) : Il vient de (ii) que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ pour $i \neq j$. Or, si $I \subset A$ est un idéal qui n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, il existe $x \in I \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ (proposition 1.58); on déduit que $x \in V_i^{\times}$ pour $i = 1, \dots, n$, d'où $x \in A^{\times}$. L'assertion s'ensuit aussitôt. $\square$

Problème 8.28. Soient K un corps, E une extension algébrique de K , et V un anneau de valuation de K . On définit $\mathcal{V}_{E/V} \subset \mathcal{L}_E$ comme dans l'exercice 8.25(i), et soit A la fermeture intégrale de V dans E . Montrer que :

- (i) Si E est une extension finie de K , l'ensemble $\mathcal{V}_{E/V}$ est fini.
- (ii) Si E est une extension normale de K , le groupe de Galois $\text{Gal}(E/K)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{V}_{E/V}$. (Noter que si $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$ et si $W \in \mathcal{V}_{E/V}$, le sous-anneau $\sigma(W) \subset E$ est aussi un élément de $\mathcal{V}_{E/V}$.)
- (iii) On a une bijection naturelle $\text{Max } A \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{E/V} : \mathfrak{m} \mapsto A_{\mathfrak{m}}$.

Exercice 8.29. Soient V un anneau de valuation, M un V -module.

(i) On suppose que M soit de type fini et sans torsion (voir §1.1.4). Montrer que M est libre (de rang fini).

(ii) Dédire de (i) que *tout V -module sans torsion est plat*.

(iii) On suppose que M soit de présentation finie, et on considère une surjection V -linéaire $\phi : L \rightarrow M$ avec L un V -module libre de rang fini. Noter que $N := \text{Ker } \phi$ est un V -module de type fini, par l'exercice 2.110(iv), donc aussi libre de rang fini, par (i). Soit ensuite $L^\vee := \text{Hom}_V(L, V)$ le dual de L , et notons

$$\varepsilon : N \otimes_V L^\vee \rightarrow V \quad x \otimes \alpha \mapsto \alpha(x)$$

la restriction de l'application d'évaluation. Montrer qu'il existe $\alpha \in L^\vee$ et $x \in N$ tels que $\text{Im}(\varepsilon) = V \cdot \alpha(x)$, et en déduire que $N = Vx \oplus (N \cap \text{Ker } \alpha)$.

(iv) Dans la situation de (iii), posons $a := \alpha(x)$. Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $x = ay$ et $L = Vy \oplus \text{Ker } \alpha$.

(v) Dédire de (iii) et (iv) qu'il existe une base $y_1, \dots, y_n$ de L , un entier $k \leq n$ et des éléments $a_1, \dots, a_k \in V$ tels que $N = (Va_1y_1) \oplus \dots \oplus (Va_ky_k)$. En particulier, *tout V -module de présentation finie est somme directe finie de V -modules cycliques*.

8.1.2. Algèbres de type fini sur un anneau de valuation. Soit V un anneau de valuation arbitraire; on achève cette section avec un résultat de Nagata (voir [58, Th.3]) concernant les modules sur les V -algèbres de type fini, qui nous sera utile plus tard, pour la preuve d'un important théorème de Gruson et Raynaud.

Proposition 8.30. (Nagata) *Soient V un anneau de valuation, $(A, f : V \rightarrow A)$ une V -algèbre de type fini, M un A -module de type fini tel que $M_{[f]}$ soit un V -module plat. Alors M est un A -module de présentation finie.*

Démonstration. Par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme surjectif de V -algèbres $A_0 := V[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{g} A$, et d'après l'exercice 3.17(v.c), il suffit de vérifier que le A_0 -module $M_{[g]}$ soit de présentation finie. Ainsi, il suffit de prouver la proposition avec $A = V[T_1, \dots, T_n]$. Dans ce cas, pour tout $i \in \mathbb{N}$ soit $A_{(i)} \subset A_{[f]}$ le V -sous-module des polynômes de degré total $\leq i$, et posons

$$\mathcal{R}(A_{(\bullet)}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} U^i A_{(i)} \subset A[U].$$

Donc, $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ est l'ensemble des $U^d a_d + \dots + a_0 \in A[U]$ de degré quelconque $d \in \mathbb{N}$, tels que $a_i(T_1, \dots, T_n) \in A$ soit un polynôme de degré total $\leq i$ pour tout $i = 0, \dots, d$. Comme $U^i A_{(i)} \cdot U^j A_{(j)} \subset U^{i+j} A_{(i+j)}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on voit que $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ est un sous-anneau de $A[U]$, et il est même un anneau gradué (voir §1.1.6) : sa composante homogène de degré i est $U^i A_{(i)}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Affirmation 8.31. Il existe un isomorphisme de V -algèbres

$$V[U, X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(A_{(\bullet)}).$$

Preuve : On obtient un tel isomorphisme en posant : $U \mapsto U$ et $X_i \mapsto UT_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Son inverse est l'homomorphisme de V -algèbres tel que $U^d T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n} \mapsto U^{d-(i_1+\dots+i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ pour tous $d, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ tels que $i_1 + \dots + i_n \leq d$. $\diamond$

Soit ensuite $M[U] := A[U] \otimes_A M$; noter que le système $(U^i \mid i \in \mathbb{N})$ est une base du A -module libre $A[U]$, donc on peut identifier naturellement $M[U]$ avec l'ensemble des termes de la forme $U^d x_d + U^{d-1} x_{d-1} + \dots + x_0$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ et toute suite

$x_0, \dots, x_d \in M$. Soit aussi $\Sigma := \{y_1, \dots, y_r\}$ un système fini de générateurs pour le A -module M , et pour tout $i \in \mathbb{N}$ notons par $M_{(i)} \subset M[U]$ le V -sous-module engendré par la famille $\{U^i a y \mid a \in A_{(i)}, y \in \Sigma\}$; on pose de même

$$\mathcal{R}(M_{(\bullet)}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_{(i)} \subset M[U].$$

Or, le $A[U]$ -module $M[U]$ devient un $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -module gradué après restriction des scalaires suivant l'inclusion $\mathcal{R}(A_{(\bullet)}) \subset A[U]$, et on voit aisément que $\mathcal{R}(M_{(\bullet)})$ est un $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -sous-module gradué de $M[U]$. En dernier lieu, soit $\phi : A^r \rightarrow M$ la surjection A -linéaire telle que $\phi(a_1, \dots, a_r) := a_1 y_1 + \dots + a_r y_r$ pour tous $a_1, \dots, a_r \in A$; noter que $U^i \cdot \phi(A_{(i)}^r) = M_{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et on pose

$$M'_{(i)} := U^i \cdot (A_{(i)}^r \cap \text{Ker } \phi) \subset \mathcal{R}(A_{(\bullet)})^r \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

La somme directe $\mathcal{R}(M'_{(\bullet)}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M'_{(i)}$ est un $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -sous-module gradué du $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -module $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})^r$, d'où une suite exacte de $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -modules gradués :

$$C_{(\bullet)} \quad : \quad 0 \rightarrow \mathcal{R}(M'_{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{R}(A_{(\bullet)})^r \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathcal{R}(M_{(\bullet)}) \rightarrow 0$$

avec $\tilde{\phi}$ l'application $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -linéaire telle que : $(U^{i_1} a_1, \dots, U^{i_r} a_r) \mapsto U^{i_1} a_1 y_1 + \dots + U^{i_r} a_r y_r$ pour tous $U^{i_1} a_1, \dots, U^{i_r} a_r \in \mathcal{R}(A_{(\bullet)})$. Par construction, $C_{(\bullet)}$ est la somme directe de ses composantes homogènes $C_{(i)} := (0 \rightarrow M'_{(i)} \rightarrow A_{(i)}^r \rightarrow M_{(i)} \rightarrow 0)$, et chaque complexe $C_{(i)}$ est une suite exacte courte de V -modules sans torsion; de plus, chaque $M_{(i)}$ est un V -module de type fini, donc libre de rang fini (exercice 8.29(i)). Mais alors $C_{(i)}$ est un complexe *scindé* de V -modules libres, pour tout $i \in \mathbb{N}$; le produit tensoriel $k \otimes_V C_{(\bullet)}$ de $C_{(\bullet)}$ avec le corps résiduel k de V est donc une suite exacte courte de $k \otimes_V \mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -modules. D'après l'observation 8.31, l'anneau gradué $R := k \otimes_V \mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ (avec la graduation induite par celle de $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$) est isomorphe à $k[U, X_1, \dots, X_n]$; en particulier il est noethérien, donc le noyau $k \otimes_V \mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$ de $k \otimes_V \tilde{\phi}$ est un R -module gradué *de type fini* (dont la graduation est induite par celle de $\mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$). Soit $\Sigma' := \{U^{d_1} x'_1, \dots, U^{d_s} x'_s\}$ une famille finie d'éléments homogènes de $\mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$ (avec $x'_1, \dots, x'_s \in \text{Ker } \phi$) telle que $1 \otimes U^{d_1} x'_1, \dots, 1 \otimes U^{d_s} x'_s$ soit un système de générateurs de $k \otimes_V \mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$, et notons par $\mathcal{R}(M''_{(\bullet)}) \subset \mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$ le $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -sous-module engendré par Σ' . Donc $\mathcal{R}(M''_{(\bullet)})$ est la somme directe de ses composantes homogènes $M''_{(i)}$, et par construction l'inclusion $M''_{(i)} \rightarrow M'_{(i)}$ de V -modules de type fini induit une surjection $k \otimes_V M''_{(i)} \rightarrow k \otimes_V M'_{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; d'après le corollaire 3.50, il vient $M''_{(i)} = M'_{(i)}$ pour chaque i , d'où $\mathcal{R}(M''_{(\bullet)}) = \mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$, i.e. Σ' engendre le $\mathcal{R}(A_{(\bullet)})$ -module $\mathcal{R}(M'_{(\bullet)})$. On déduit aisément que $\{x'_1, \dots, x'_s\}$ engendre le A -module $\text{Ker } \phi$, donc M est bien de présentation finie. $\square$

Remarque 8.32. (i) Par inspection directe, on constate que la solution du problème 7.42(i) se généralise aussitôt au cas d'un anneau $(V, \mathfrak{m})$ de valuation quelconque, et d'une V -algèbre A intègre, fidèlement plate, de type fini : avec $K := \text{Frac}(V)$, on trouve ainsi que toute composante irréductible de $\text{Spec } k(\mathfrak{m}) \otimes_V A$ a dimension $\dim K \otimes_V A$. Noter aussi que, au vu du théorème 3.84(ii), du problème 3.83(i.c) et de l'exercice 8.29(ii), A est fidèlement plate $\Leftrightarrow A$ est sans torsion et $k(\mathfrak{m}) \otimes_V A \neq 0$.

(ii) De plus, si $\dim V = 1$, aussi la preuve de la partie (ii) du problème 7.42 se généralise *verbatim* : on a $\dim A = 1 + \dim K \otimes_V A$ dans ce cas.

8.2. Ordres sur les anneaux et corps formellement réels. Ma présentation est empruntée en partie à l'article [4] de I.Bertuccioni.

Définition 8.33. (i) Un *anneau partiellement ordonné* est la donnée $(A, \leq)$ d'un anneau A et une relation d'ordre partiel sur A telle que pour tous $a, b, c \in A$ on a :

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$
- Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Une partie $S \subset A$ est *convexe* si elle satisfait la condition suivante. pour tous $a \in A$ et $b \in S$, si l'on a $0 \leq a \leq b$, alors $a \in S$.

(ii) Un *anneau totalement ordonné* est un anneau partiellement ordonné $(A, \leq)$ dont l'ordre $\leq$ est total.

(iii) Un *morphisme d'anneaux partiellement ordonnés* $\phi : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$ est un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ qui est aussi un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés (définition 1.30(iv)). Les anneaux partiellement ordonnés et les morphismes d'anneaux partiellement ordonnés forment une catégorie

poAnn.

Remarque 8.34. Soit $f : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$ un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés tel que l'application $f : A \rightarrow B$ est *bijective*.

(i) Noter que f est un isomorphisme dans la catégorie $\mathbb{Z} - \text{Alg}$, mais il n'est pas forcément un isomorphisme de la catégorie poAnn. Par exemple, on peut munir $\mathbb{Z}$ de son ordre standard $\leq$, et de l'ordre trivial $\leq'$ tel que $n \leq' m$ si et seulement si $n = m$, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$; l'identité $\text{Id}_{\mathbb{Z}} : (\mathbb{Z}, \leq') \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$ est un morphisme de poAnn, mais il n'est pas un isomorphisme de cette catégorie.

(ii) Toutefois, si de plus $(A, \leq)$ est un anneau *totalement ordonné*, alors f est un isomorphisme de poAnn : la vérification sera laissée au lecteur.

(iii) Si $(A, \leq)$ est un anneau totalement ordonné, alors $a^2 \geq 0$ pour tout $a \in A$. En effet, cela est clair si $a \geq 0$; sinon, on a $a < 0$, car l'ordre $\leq$ est total; d'où $0 = a - a \leq -a$, et encore $0 \leq (-a)^2 = a^2$. Pour $a \in A^\times$, il s'ensuit que $a > 0$ si et seulement si $1/a > 0$, car $a^{-1} = a \cdot (1/a)^2$.

Exercice 8.35. Soient $(A, \leq)$ un anneau totalement ordonné, $S \subset A$ une partie. Montrer qu'il existe un ordre total unique $\leq_S$ sur $S^{-1}A$ tel que la localisation soit un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés $(A, \leq) \rightarrow (S^{-1}A, \leq_S)$.

Exercice 8.36. (i) Soient $(A, \leq)$ un anneau partiellement ordonné, $I \subset A$ un idéal, $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection. Le foncteur $\mathbf{h}_{(A, \leq)} : \text{poAnn} \rightarrow \text{Ens}$ admet un sous-foncteur

$$F_I : \text{poAnn} \rightarrow \text{Ens} \quad (B, \leq) \mapsto \{f : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq) \mid I \subset \text{Ker } f\}$$

(notation de la section 2.1). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) On a sur A/I une unique structure $(A/I, \leq)$ d'anneau partiellement ordonné telle que $\pi : (A, \leq) \rightarrow (A/I, \leq)$ soit un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés, et le couple $((A/I, \leq), \pi)$ soit universel pour le sous-foncteur F_I .

(b) L'idéal I est convexe (voir la définition 8.33(i)).

Si I est convexe, la relation d'ordre sur A/I caractérisée par (a) sera appelée *l'ordre partiel induit par $(A, \leq)$* .

(ii) Si les conditions (a) et (b) de (i) sont vérifiées, montrer qu'un idéal $J \subset A/I$ est convexe si et seulement s'il en est de même pour $\pi^{-1}(J) \subset A$.

Exercice 8.37. Soit $((A_\bullet, \leq), g_{\bullet\bullet})$ un système d'anneaux partiellement ordonnés, indexé par un ensemble Λ filtrant (voir l'exercice 2.31; donc, $g_{\lambda\mu} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda < \mu$). Soit aussi $(A, (i_\lambda : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda))$ un co-cône universel pour le système d'anneaux (non ordonnés) $(A_\bullet, g_{\bullet\bullet})$. Montrer qu'il existe un ordre partiel unique $\leq$ sur A , tel que $(A, \leq)$ soit un anneau partiellement ordonné, les homomorphismes i_λ soient tous des morphismes d'anneaux partiellement ordonnés, et le co-cône $((A, \leq), i_\bullet)$ soit universel pour le système d'anneaux partiellement ordonnés $((A_\bullet, \leq), g_{\bullet\bullet})$. En particulier, $(A, \leq)$ représente la limite directe de ce système dans la catégorie poAnn.

L'exemple fondamental pour nous est l'anneau partiellement ordonné $(\mathcal{C}(X), \leq)$ associé à tout espace topologique X , où pour tous $f, g \in \mathcal{C}(X)$ on déclare que

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Lemme 8.38. *Pour tout espace topologique X on a :*

- (i) *Soient $f, g \in \mathcal{C}(X)$ et on suppose que $|f| \leq |g|$. Alors $f^2 \in g \cdot \mathcal{C}(X)$.*
- (ii) *Tout idéal premier de $\mathcal{C}(X)$ est convexe.*
- (iii) *Si $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(X)$ est un idéal premier, le quotient $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$, muni de l'ordre partiel induit par $(\mathcal{C}(X), \leq)$, est un anneau totalement ordonné.*

Démonstration. (i) : Considérons la fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) := f(x)^2/g(x)$ si $g(x) \neq 0$, et $h(x) := 0$ sinon. On voit aisément que h est continue, et $f^2 = g \cdot h$.

(ii) : Soient $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(X)$ un idéal premier, $g \in \mathfrak{p}$ et $f \in \mathcal{C}(X)$ tels que $0 \leq f \leq g$; par (i) on déduit que $f^2 \in g \cdot \mathcal{C}(X) \subset \mathfrak{p}$, d'où $f \in \mathfrak{p}$.

(iii) : Quel que soit $f \in \mathcal{C}(X)$, on a évidemment $|f| \geq 0$ et $-|f| \leq 0$. D'autre part, $0 = f^2 - |f|^2 = (f - |f|) \cdot (f + |f|)$, d'où soit $f \equiv |f| \geq 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, soit $f \equiv -|f| \leq 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 8.39. Soit X un espace topologique.

(i) Evidemment, si $(A, \leq)$ est un anneau *totalement* ordonné, et si $I, J \subset A$ sont deux idéaux convexes, on a soit $I \subset J$, soit $J \subset I$: les détails sont laissés au lecteur. Au vu du lemme 8.38(ii,iii) et de l'exercice 8.36(ii), l'ensemble $\text{Spec } \mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$ est alors *totalement ordonné par inclusion*, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{C}(X)$, comme déjà vu pour le spectre premier des anneaux de valuation (proposition 8.14(ii)).

(ii) Par suite, $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$ est un anneau local. En outre, le radical de tout idéal I de $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$ est premier : car $\text{rad}(I)$ est l'intersection des idéaux premiers contenant I (corollaire 1.53), et l'intersection d'une famille d'idéaux premiers totalement ordonnée par inclusion est un idéal premier (voir la solution de l'exercice 1.61).

(iii) Supposons que X soit complètement régulier, fixons $x \in X$, et notons par $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(X)$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en x . D'après l'exercice 4.95, la localisation $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ est identifiée naturellement à l'anneau des germes des fonctions continues autour de x . Noter que pour toute inclusion $U \subset V$ de voisinages de x dans X , l'homomorphisme de restriction $\rho_{UV} : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ est un morphisme d'anneaux ordonnés ; au vu de l'exercice 8.37, il existe alors un ordre partiel unique sur $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ tel que $(\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}, \leq)$ représente la colimite dans $\mathbf{poAnn}$ du système $(\mathcal{C}(U), \rho_{UV} \mid x \in U \subset V \subset X)$. En particulier, pour tout voisinage ouvert U de x dans X , l'homomorphisme canonique $\rho_U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés. On déduit que tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ est convexe : en effet, soient $f \in \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$, $g \in \mathfrak{p}$ avec $0 \leq f \leq g$; on vient de remarquer qu'il existe un voisinage ouvert U de x et des fonctions continues $f', g' : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\rho_U(f') = f$ et $\rho_U(g') = g$, et quitte à remplacer U par un voisinage plus petit, on peut supposer que $0 \leq f' \leq g'$. En particulier, $g' \in \mathfrak{q} := \rho_U^{-1}\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{q}$ est un idéal convexe de $\mathcal{C}(U)$, par le lemme 8.38(ii) ; donc $f' \in \mathfrak{q}$, d'où $f \in \mathfrak{p}$.

(iv) Dans la situation de (iii), soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{C}(X)$ contenu dans $\mathfrak{m}$, et munissons $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$ (resp. $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$) de l'ordre induit par $\mathcal{C}(X)$ (resp. par $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$) ; en vertu de (ii), l'homomorphisme naturel de $\mathcal{C}(X)$ -algèbres

$$\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p} \rightarrow \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$$

est un isomorphisme ; de plus, une inspection directe montre que cette application est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés. Compte tenu du lemme 8.38(iii) et de la remarque 8.34(ii), on déduit qu'il s'agit d'un isomorphisme d'anneaux partiellement ordonnés.

(v) Toujours pour X comme dans (iii), remarquons aussi que tout $a \in \mathfrak{m}\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ est "infinitésimal", i.e. $-\rho < a < \rho$ pour tout nombre réel $\rho > 0$ (on identifie tout réel ρ avec la fonction constante $X \rightarrow \mathbb{R}$ de valeur ρ). En effet, a correspond à un germe de fonction continue autour de x , i.e. la classe d'un couple (U, α) , composé d'un voisinage ouvert U de x , et d'une fonction continue $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha(x) = 0$; quitte à restreindre U , on peut alors supposer que $-\rho < \alpha(t) < \rho$ pour tout $t \in U$, d'où l'assertion. Au vu de (iv),

le même résultat reste valable pour $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$: tout élément non inversible de cet anneau est infinitésimal.

On est maintenant prêt pour montrer :

Théorème 8.40. *Soient X un espace topologique compact et séparé, $x_0 \in X$, et $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(X)$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en x_0 . Supposons que l'homomorphisme naturel $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ ne soit pas un isomorphisme. Alors*

$$\dim \mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}} = +\infty.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ contient un idéal premier non maximal. En effet, sinon $\mathfrak{m}\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ serait l'unique idéal premier, et il serait donc le nilradical de $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ (théorème 1.50(ii)). Mais évidemment le nilradical de $\mathcal{C}(X)$ est l'idéal 0, donc de même pour sa localisation $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ (exercice 3.38); ainsi, $\mathfrak{m}\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}} = 0$, d'où $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{C}(X)/\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}} = \mathbb{R}$, et cela contredit notre hypothèse.

Soit donc $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ un idéal premier non maximal; évidemment il suffit de montrer qu'il existe un autre idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{C}(X)$ tel que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$. Pour cela, choisissons un élément non nul $\bar{a}$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ de $A := \mathcal{C}(X)/\mathfrak{p}$; en vertu du lemme 8.38(iii) on peut supposer que $\bar{a} > 0$. Notons par $\bar{q}$ le radical de l'idéal $\bar{a}A$; on sait que $\bar{q}$ est un idéal premier de A (remarque 8.39(ii)), et on est donc ramené à montrer que $\bar{q}$ est strictement contenu dans $\mathfrak{m}A$. Or, comme l'ordre de A est induit par $\mathcal{C}(X)$, on peut trouver $a \in \mathfrak{m}$ tel que $a > 0$ et dont la classe dans A coïncide avec $\bar{a}$. On considère la fonction $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$b(x) := \begin{cases} |\log a(x)|^{-1} & \text{si } a(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } a(x) = 0. \end{cases}$$

On vérifie aisément que b est continue sur X , et comme $b(x_0) = 0$, on a $b \in \mathfrak{m}$; notons $\bar{b}$ la classe de b dans A . Rappelons que pour tout entier $k > 0$ il existe un réel $\delta_k > 1$ tel que $|\log y| < y/k$ pour tout réel $y > \delta_k$, autrement dit, $|\log y|^k < 1/y$ pour $0 < y < 1/\delta_k^k$; il s'ensuit aisément que $b(x)^k \geq a(x)$ pour tout $x \in U_k := a^{-1}([0, 1/\delta_k^k])$, et évidemment U_k est un voisinage ouvert de x_0 dans X . On déduit que $b^k \geq a$ dans la localisation $\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$, donc dans A on a :

$$(*) \quad \bar{b}^k \geq \bar{a} \quad \forall k > 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\bar{b} \notin \bar{q}$. On raisonne par l'absurde : si $\bar{b} \in \bar{q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\bar{c} \in A$ tels que $\bar{b}^n = \bar{a} \cdot \bar{c}$, donc $\bar{b}^{n+1} = \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \leq \bar{a}/2$, par la remarque 8.39(v); compte tenu de (*), il vient $\bar{a} \leq \bar{a}/2$, i.e. $\bar{a} \leq 0$, contradiction. $\square$

Exemple 8.41. Soit $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}([0, 1])$ l'idéal des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Comme $A := \mathcal{C}([0, 1])_{\mathfrak{m}}$ est l'anneau des germes de fonctions continues autour de 0, on voit que le noyau de l'homomorphisme de localisation $\mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow A$ est l'idéal des fonctions qui s'annulent dans un voisinage de 0. En particulier, la fonction g telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$ n'est ni nulle ni inversible dans A , ce qui montre que l'homomorphisme naturel $\mathbb{R} \rightarrow A$ n'est pas un isomorphisme. Donc, d'après le théorème 8.40, pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de A il existe une chaîne strictement ascendante $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots$ de longueur infinie, avec $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. Pour compléter cette discussion, on va montrer qu'il existe aussi des chaînes infinies strictement descendantes d'idéaux premiers de A ; plus précisément, on va exhiber une suite décroissante infinie de *filtres premiers* de $[0, 1]$: en vertu du lemme 1.138(ii,iv), on en déduira la chaîne d'idéaux premiers cherchée. J'ai appris les constructions suivantes de J.-F. Burnol.

8.2.1. Une chaîne descendante de filtres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $D_n \subset [0, 1[$ la partie des réels dont l'écriture décimale comporte exactement n fois le chiffre 1, et que

des zéros ailleurs (e.g. $D_0 = \{0\}$ et $D_1 = \{10^{-n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$). Pour $n \geq 1$ et tout $x \in D_n$, on dénote $k_1(x) < k_2(x) < \dots < k_n(x)$ les entiers tels que

$$x = 10^{-k_1(x)} + 10^{-k_2(x)} + \dots + 10^{-k_n(x)}.$$

On pose aussi $k_0(0) := 0$. Pour tout $n \geq 1$, on considère l'application

$$\partial_n : D_n \rightarrow D_{n-1} \quad x \mapsto 10^{-k_1(x)} + 10^{-k_2(x)} + \dots + 10^{-k_{n-1}(x)}$$

et pour toute partie $W \subset D_{n-1}$ et toute fonction $f : W \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit

$$Z(W, f) := \{y \in D_n \mid \partial_n(y) \in W \text{ et } y - \partial_n(y) \leq 10^{-f(\partial_n(y)) - k_{n-1}(y)}\}$$

et on dénote par $\overline{Z(W, f)}$ l'adhérence de $Z(W, f)$ dans $[0, 1]$.

Remarque 8.42. (i) Notons que pour tout $W \subset D_{n-1}$ on a

$$W = \{\partial_n(z) \mid z \in Z(W, f)\} \quad \text{pour toute fonction } f : W \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

De plus, si $g : W \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une autre fonction, on a $Z(W, f) = Z(W, g)$ si et seulement si $f = g$: cela se voit en remarquant que, pour $x_1, x_2 \in D_{n-1}$ avec $x_1 < x_2$, les intervalles $[x_1, x_1 + 10^{-1-k_{n-1}(x_1)}]$ et $[x_2, x_2 + 10^{-1-k_{n-1}(x_2)}]$ sont disjoints, car :

$$x_1 + 10^{-1-k_{n-1}(x_1)} < x_2.$$

(ii) Soient $W_1, \dots, W_k \subset D_{n-1}$ et $f_i : W_i \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une fonction donnée pour tout $i = 1, \dots, k$; si $W := W_1 \cap \dots \cap W_k$ et si $g(w) := \max\{f_1(w), \dots, f_k(w)\}$ pour tout $w \in W$, on voit aisément que

$$Z(W_1, f_1) \cap \dots \cap Z(W_k, f_k) = Z(W, g).$$

Lemme 8.43. Avec la notation ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- (i) L'adhérence $\overline{D_n}$ de D_n dans $[0, 1]$ est $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$.
- (ii) La topologie de $[0, 1]$ induit la topologie discrète sur D_n .
- (iii) Si une suite $(y_j \mid j \in \mathbb{N})$ de points de D_{n+1} converge vers un point $x \in D_n$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\partial_{n+1}(y_j) = x$ pour tout $j \geq i$.
- (iv) Pour toute partie $W \subset D_n$ et toute fonction $f : W \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$\overline{Z(W, f)} \cap D_n = W.$$

Démonstration. (i) : En effet, il est clair que la réunion des $D_0, \dots, D_n$ est dans l'adhérence de D_n . Si $x \in [0, 1]$ n'est pas dans cette réunion :

- soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que le dernier chiffre de la partie entière N de $10^k x$ est dans $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et alors $](N-1)/10^k, (N+1)/10^k[$ est un voisinage ouvert de x qui ne rencontre pas D_n
- soit x n'a que des 0, 1 et 2 dans son écriture décimale, et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que le dernier chiffre de la partie entière N de $10^k x$ est 2. Or, si $10^k x$ n'est pas un entier, tout réel de $]N/10^k, (N+1)/10^k[$ (qui est un voisinage ouvert de x) ont le chiffre 2 dans leur écriture décimale. Si $10^k x = N$ est un entier, alors tous les réels de $]x - 10^{-k-1}, x + 10^{-k}[$ ont soit le chiffre 2, soit le chiffre 9 dans leur écriture décimale
- soit x n'a que des 0 et 1 dans son écriture décimale, et donc au moins $n+1$ fois le chiffre 1. Soit $k := k_{n+1}(x)$ et N la partie entière de $10^k x$; donc l'intervalle $](N-1)/10^k, (N+1)/10^k[$ contient x , et tous les réels de cet intervalle soit ont au moins $N+1$ fois le chiffre 1, soit ont N fois le chiffre 1, et au moins un chiffre distinct de 0 et 1. Donc, ici aussi x n'est pas dans l'adhérence de D_n .

(iii) : On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$ il n'y a rien à montrer, donc supposons que $n > 0$. En remarquant que $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1/9$, on voit aisément que $x \in]\frac{8}{9} \cdot 10^{-k_1(x)}, \frac{10}{9} \cdot 10^{-k_1(x)}[$ et $y_j \in]\frac{8}{9} \cdot 10^{-k_1(y_j)}, \frac{10}{9} \cdot 10^{-k_1(y_j)}[$ pour tout $j \in \mathbb{N}$; ces intervalles étant séparés si $k_1(x) \neq k_1(y_j)$, on en déduit qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $k_1(x) = k_1(y_j)$ pour tout $j \geq i$. Quitte à éliminer un nombre fini de termes, on peut alors

supposer que $k_1(x) = k_1(y_j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$; dans ce cas, posons $x' := x - 10^{-k_1(x)}$ et $y'_j := y_j - 10^{-k_1(x)}$ pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Ainsi $x' \in D_{n-1}$, $y'_j \in D_n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, et la suite $(y'_j \mid j \in \mathbb{N})$ converge vers x' ; par hypothèse de récurrence, on conclut qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\partial_n(y'_j) = x'$ pour tout $j \geq i$, et finalement $\partial_{n+1}(y_j) = x$ pour tout $j \geq i$.

(ii) : La preuve de (iii) ci-dessus montre aussi bien que toute suite $(y_j \mid j \in \mathbb{N})$ de D_n convergente vers un point de D_n doit être stationnaire, d'où l'assertion.

(iv) : Soit $x \in \overline{Z(W, f)} \cap D_n$; si $(y_k \mid k \in \mathbb{N})$ est une suite de points de $Z(W, f)$ qui converge vers x , la partie (iii) nous donne $k \in \mathbb{N}$ tel que $\partial_{n+1}(y_k) = x$, donc $x \in W$ (remarque 8.42(i)). Evidemment on a aussi $W \subset \overline{Z(W, f)}$, d'où l'assertion. $\square$

On construit maintenant, par récurrence sur n , un ultrafiltre $\mathcal{G}_n$ de D_n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Evidemment, on prend $\mathcal{G}_0 := \{\{0\}\}$. Soit $n \geq 0$, et on suppose que $\mathcal{G}_n$ a déjà été construit; on considère la famille $\mathcal{Q}_{n+1}$ des parties de D_{n+1} de la forme $Z(W, f)$ avec $W \in \mathcal{G}_n$ et $f : W \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une fonction arbitraire. Comme la topologie de D_{n+1} est discrète (lemme 8.43(ii)), tout élément de $\mathcal{Q}_{n+1}$ est trivialement une partie fermée de D_{n+1} . De plus, une simple récurrence sur n montre que $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{n+1}$, et $\mathcal{Q}_{n+1}$ est stable par intersections finies, en vertu de la remarque 8.42(ii). Par l'exemple 1.136(ii) et le lemme 1.135, on déduit que $\mathcal{Q}_{n+1}$ est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{G}_{n+1}$ de D_{n+1} . Montrons que

$$\mathcal{H}_n := \{\overline{Z} \cap D_n \mid Z \in \mathcal{G}_{n+1}\} = \mathcal{G}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(où $\overline{Z}$ dénote, comme toujours, l'adhérence de Z dans $[0, 1]$). En effet, évidemment toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{H}_n$ contient un élément de $\mathcal{H}_n$, et le lemme 8.43(iv) implique que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{H}_n$; comme $\mathcal{G}_n$ est maximal, il suffit de vérifier que $\emptyset \notin \mathcal{H}_n$, car dans ce cas $\mathcal{H}_n$ engendre un filtre de D_n (voir l'exemple 1.136(ii)) et doit donc coïncider avec $\mathcal{G}_n$. On raisonne par l'absurde : si $Z \in \mathcal{G}_{n+1}$ et $\overline{Z} \cap D_n = \emptyset$, pour tout $x \in D_n$ on peut choisir un entier $f(x) \geq 1$ tel que Z ne rencontre pas $I_x := [x, x + 10^{-f(x)-k_n(x)}]$. Mais l'ensemble $D_{n+1} \cap \bigcup_{x \in D_n} I_x$ est par définition un élément de la famille $\mathcal{Q}_{n+1}$, donc un élément du filtre $\mathcal{G}_{n+1}$; comme l'intersection avec Z est vide, on a une contradiction.

Or, en vertu de l'exemple 1.136(iii,iv), l'image directe $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{G}_n$ suivant l'inclusion $D_n \rightarrow [0, 1]$ est un filtre premier de $[0, 1]$. On obtient ainsi une suite $(\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N})$ de filtres premiers de $[0, 1]$, et il suffit de montrer que cette suite est strictement décroissante. Mais notons que $\overline{D}_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; par contre, pour $m > n$, les éléments de $\mathcal{F}_m$ ont intersection non vide avec D_m , et comme $D_m \cap \overline{D}_n = \emptyset$ (lemme 8.43(i)), on voit déjà que $\mathcal{F}_n \neq \mathcal{F}_m$ pour $m > n$.

Il reste donc à montrer que $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, soit $W \in \mathcal{F}_{n+1}$; alors $Z := W \cap D_{n+1} \in \mathcal{G}_{n+1}$. D'autre part, on vient de voir que $\overline{Z} \cap D_n \in \mathcal{G}_n$, d'où $\overline{Z} \in \mathcal{F}_n$; mais évidemment $\overline{Z} \subset W$, donc $W \in \mathcal{F}_n$, CQFD.

Remarque 8.44. Une publication récente (voir [62]) montre qu'il existe des familles strictement décroissantes $(\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de filtres premiers de $[0, 1]$ indexées par l'ensemble bien ordonné Λ des nombres ordinaux de cardinalité $\leq \aleph_1$ (la cardinalité de Λ est $\aleph_2$), et aussi des familles strictement croissantes de filtres premiers indexées par ce même Λ . Plus généralement, l'article montre que ces résultats sont valables pour la classe des *espaces polonais* de cardinalité $\geq \aleph_1$.

Problème 8.45. (Compactifications de Stone-Čech) Notons

$$\text{csTop} \quad \text{et} \quad \text{crTop}$$

les sous-catégories pleines de **Top** dont les objets sont respectivement les espaces compacts et séparés et les espaces complètement réguliers (voir l'exercice 1.119(v)), et soient $j_{\text{cs}} : \text{csTop} \rightarrow \text{Top}$ et $j_{\text{cr}} : \text{crTop} \rightarrow \text{Top}$ les foncteurs d'inclusion. Au §1.2.1 on a associé à tout espace topologique T une application continue

$$\phi_T : T \rightarrow \beta(T) := \text{Max } \mathcal{C}(T).$$

- (i) Montrer que l'application ϕ_T a image dense et que $\beta(T) \in \text{Ob}(\text{csTop})$.
(ii) Montrer que T est complètement régulier $\Leftrightarrow \phi_T$ est injective et la topologie de T est induite par $\beta(T)$ via ϕ_T .
(iii) Soit $f : T \rightarrow S$ une application continue entre espaces topologiques. Montrer qu'il existe une unique application continue $\beta(f) : \beta(T) \rightarrow \beta(S)$ telle que le diagramme suivant commute (on pourra utiliser le corollaire 4.80) :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & S \\ \phi_T \downarrow & & \downarrow \phi_S \\ \beta(T) & \xrightarrow{\beta(f)} & \beta(S). \end{array}$$

(iv) Dédurre de (iii) que les associations $T \mapsto \beta(T)$ et $(f : T \rightarrow S) \mapsto \beta(f)$ définissent un foncteur $\beta : \text{Top} \rightarrow \text{csTop}$, et l'association $T \mapsto \phi_T$ est une transformation naturelle $\phi : \mathbf{1}_{\text{Top}} \rightarrow j_{\text{cs}} \circ \beta$.

(v) Montrer que β est adjoint à gauche de j_{cs} . Si T est complètement régulier, l'espace $\beta(T)$ est (homéomorphe à) la *compactification de Stone-Čech* de T .

(vi) Pour tout espace topologique T , munissons $\gamma(T) := \phi_T(T)$ de la topologie induite par l'inclusion dans $\beta(T)$, et pour toute application continue $f : T \rightarrow S$, soit $\gamma(f) : \gamma(T) \rightarrow \gamma(S)$ la restriction de $\beta(f)$. Montrer que les associations $T \mapsto \gamma(T)$ et $f \mapsto \gamma(f)$ définissent un foncteur $\gamma : \text{Top} \rightarrow \text{crTop}$ adjoint à gauche de j_{cr} .

Remarque 8.46. (i) Pour tout espace topologique T , considérons l'anneau

$$\mathcal{C}_b(T) := \bigcup_{r>0} \text{Top}(T, [-r, r])$$

des fonctions continues bornées $T \rightarrow \mathbb{R}$. Si T est compact, on a $\mathcal{C}_b(T) = \mathcal{C}(T)$ (exercice 1.26(i.c)); en particulier, $\mathcal{C}_b(\beta T) = \mathcal{C}(\beta T)$ avec la notation du problème 8.45, et d'autre part on a pour tout réel $r > 0$ une bijection :

$$\text{Top}(\beta T, [-r, r]) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(T, [-r, r]) \quad f \mapsto f \circ \phi_T$$

en vertu du problème 8.45(v), d'où un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$\mathcal{C}(\beta T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_b(T).$$

(ii) Soit ensuite R un anneau avec $\mathcal{C}_b(T) \subset R \subset \mathcal{C}(T)$; noter que pour tout $f \in R$, les fonctions $g := 1/(1 + f^2)$ et $h := f/(1 + f^2)$ sont bornées et $f = g^{-1}h$. Ainsi $R = S^{-1}\mathcal{C}_b(T)$, avec $S := \{1/(1 + f^2) \mid f \in R\}$. Donc, R est aussi isomorphe à une localisation de $\mathcal{C}(\beta T)$; par suite, tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ est de la forme $R\mathfrak{q}$ pour quelque $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathcal{C}(\beta T)$, et l'espace topologique $\text{Spec } R/\mathfrak{p}$ s'identifie avec une partie de $\text{Spec } \mathcal{C}(\beta T)$. En particulier, $\text{Spec } R/\mathfrak{p}$ est totalement ordonné par inclusion (remarque 8.39(i)), pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$; le corollaire 4.80 nous dit alors que $\text{Max } R \in \text{Ob}(\text{csTop})$. Ensuite, pour tout $t \in T$ soit $\mathfrak{m}_t := \phi_T(t) \in \beta(T)$, de sorte que $\mathfrak{m}_t$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(T)$, et l'inclusion $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(T)$ induit un isomorphisme $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T)/\mathfrak{m}_t$; on déduit aisément que $\mathfrak{n}_t := R \cap \mathfrak{m}_t \in \text{Max } R$. On obtient ainsi une application continue $\phi_T^R : T \rightarrow \text{Max } R : t \mapsto \mathfrak{n}_t$. En raisonnant comme dans la solution du problème 8.45(i,v) on voit que l'image de ϕ_T^R est dense dans $\text{Max } R$, et que $(\text{Max } R, \phi_T^R)$ est un couple universel pour le foncteur $h_T \circ j_{\text{cs}} : \text{csTop} \rightarrow \text{Ens}$: les détails sont confiés aux soins du lecteur. Au vu du lemme 2.4(i), il existe alors un homéomorphisme unique $\omega : \text{Max } R \xrightarrow{\sim} \beta(T)$ tel que $\omega \circ \phi_T^R = \phi_T$.

8.2.2. Corps formellement réels. On a déjà constaté le rôle privilégié joué par les corps valués dans la théorie des valuations; de même, on verra que l'étude des corps ordonnés est fondamentale pour la théorie des ordres des anneaux généraux. Je suis essentiellement la présentation du premier chapitre de [6].

Définition 8.47. (i) Un corps K est dit *formellement réel*, s'il existe une relation d'ordre $\leq$ sur K tel que $(K, \leq)$ soit un anneau totalement ordonné.

(ii) Un corps *formellement réel clos* est un corps formellement réel K qui n'admet aucune extension algébrique non triviale $K \subsetneq E$ avec E formellement réel.

(iii) Un *cône* d'un corps K est une partie $C \subset K$ telle que :

- pour tous $x, y \in C$ on a $x + y \in C$ et $xy \in C$
- pour tout $x \in K$ on a $x^2 \in C$.

De plus, on dit que le cône C est *propre* si $-1 \notin C$.

(iv) Si $(K, \leq)$ est un corps totalement ordonné, on dénote

$$|x| := \max(x, -x) \quad \forall x \in K.$$

Remarque 8.48. (i) Si $(K, \leq)$ est un corps totalement ordonné, la partie

$$C(K, \leq) := \{x \in K \mid x \geq 0\}$$

est évidemment un cône propre de K , appelé le *cône positif* de $(K, \leq)$. Noter que

$$C(K, \leq) \cup -C(K, \leq) = K \quad \text{avec} \quad -C(K, \leq) := \{-x \mid x \in C(K, \leq)\}.$$

Noter aussi que $C(K, \leq)$ contient l'image de $\mathbb{N}$ dans K ; il s'ensuit aussitôt que la caractéristique de tout corps totalement ordonné est zéro.

(ii) Réciproquement, si C est un cône propre d'un corps K avec $C \cup -C = K$, alors $C \cap -C = \{0\}$, et C est le cône positif de $(K, \leq)$, pour la relation $\leq$ telle que :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in C \quad \forall x, y \in K.$$

En effet, il est clair que si $x \leq y$, on a $x + z \leq y + z$ pour tout $z \in K$, et $xz \leq yz$ pour tout $z \geq 0$. Aussi, la réflexivité et transitivité de la relation $\leq$ sont évidentes. Ensuite, soit $x \in K$ tel que $x, -x \in C$; il vient $-x^2 \in C$, et si $x \neq 0$, on déduit que $-1 = (-x^2) \cdot (1/x)^2 \in C$, contradiction. Donc $x = 0$, d'où l'antisymétrie de $\leq$.

Autrement dit, l'association : $(K, \leq) \mapsto C(K, \leq)$ établit une bijection entre les structures de corps totalement ordonné sur K et les cônes propres maximaux de K .

(iii) La partie ΣK^2 des sommes de carrés d'éléments de K est un cône contenu dans tous les cônes de K . Noter que ΣK^2 est un cône propre si et seulement si, pour tout $n \geq 1$, l'équation $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ admet dans K l'unique solution $x_1 = \dots = x_n = 0$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur).

Lemme 8.49. Soient K un corps, et C un cône propre de K . Alors il existe un ordre $\leq$ sur K tel que $(K, \leq)$ soit un corps totalement ordonné et $C \subset C(K, \leq)$.

Démonstration. On remarque d'abord :

Affirmation 8.50. Si $-a \in K \setminus C$, alors $C[a] := \{x + ay \mid x, y \in C\}$ est encore un cône propre de K .

Preuve : Si $-1 = x + ay$ avec $x, y \in C$, on doit avoir $y \neq 0$, car C est propre ; mais alors $-a = (1/y)^2 y(1 + x) \in C$, contradiction. Donc, $-1 \notin C[a]$, et on voit aisément que $C[a]$ est un cône de K . $\diamond$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cônes propres de K contenant C , partiellement ordonné par l'inclusion de cônes ; on a $\mathcal{C} \neq \emptyset$, car $C \in \mathcal{C}$, et si $(C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{C}$ avec $\Lambda \neq \emptyset$, on a $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{C}$ admet donc un élément maximal Q , et il suffit de montrer que Q est le cône positif d'un ordre de K . Pour cela il suffit de vérifier que $Q \cup -Q = K$ (remarque 8.48(ii)). Or, soit $a \in K \setminus Q$; d'après l'observation 8.50, le cône $Q[-a]$ est propre, et par maximalité de Q on a donc $Q = Q[-a]$, i.e. $-a \in Q$, d'où l'assertion. $\square$

Théorème 8.51. Soit K un corps de caractéristique zéro.

- (i) ΣK^2 est l'intersection des cônes positifs de tous les ordres totaux de K .
- (ii) (Artin-Schreier) K est formellement réel $\Leftrightarrow \Sigma K^2$ est un cône propre de K .

Démonstration. (Rappelons que l'intersection d'une famille vide de parties de K est K .) L'assertion (ii) est une conséquence immédiate du lemme 8.49 et de la remarque 8.48(iii). Cette remarque montre aussi que ΣK^2 est contenu dans l'intersection Q des cônes positifs des ordres totaux de K . D'autre part, s'il existe $a \in K \setminus \Sigma K^2$, le cône ΣK^2 est propre, car si $-1 \in \Sigma K^2$, on a $a = (\frac{1+a}{2})^2 + (-1) \cdot (\frac{1-a}{2})^2 \in \Sigma K^2$; mais alors le cône $\Sigma K^2[-a]$ est encore propre, d'après l'observation 8.50, donc il existe un ordre total $\leq$ sur K tel que $\Sigma K^2[-a] \subset C(K, \leq)$, d'où $a \notin Q$. Cela achève de montrer (i). $\square$

Exercice 8.52. Soient K un corps, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si K est formellement réel, il en est de même pour le corps des fractions rationnelles $K(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 8.53. Soit K un corps. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) K est formellement réel clos.
- (b) K admet un unique ordre tel que $(K, \leq)$ soit un corps totalement ordonné, dont le cône positif est la partie $Q := \{x^2 \mid x \in K\}$, et tout polynôme de $K[X]$ de degré impair a une racine dans K .
- (c) On a $-1 \notin Q$ et le corps $K[i] := K[X]/(X^2 + 1)$ est algébriquement clos.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $a \in K \setminus Q$; alors $E := K[a^{1/2}]$ est une extension non triviale de K , et donc n'est pas formellement réel, d'après (a). Par le théorème 8.51(ii), il existe ainsi un entier $n \geq 1$ et $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in K$ tels que

$$(x_1 + a^{1/2}y_1)^2 + \dots + (x_n + a^{1/2}y_n)^2 = -1.$$

Soit $u := \sum_{i=1}^n x_i^2$, $v := \sum_{i=1}^n y_i^2$ et $w := 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$; on déduit la relation K -linéaire $(1+u+av)+a^{1/2}w=0$, et comme $\{1, a^{1/2}\}$ est une base du K -espace vectoriel E , il vient $1+u+av=w=0$. Ainsi, $-a=v^{-1} \cdot (1+u)=v \cdot (1/v)^2 \cdot (1+u) \in \Sigma K^2$. Cela montre que $\Sigma K^2 \cup -\Sigma K^2 = K$, donc d'après la remarque 8.48(ii) il n'y a sur K qu'un seul ordre possible $\leq$ tel que $(K, \leq)$ soit un corps totalement ordonné, et son cône positif est ΣK^2 . On déduit aussi que si un élément de K n'est pas un carré, il est négatif pour cet ordre, et donc $Q = \Sigma K^2$. En dernier lieu, vérifions que tout $P \in K[X]$ de degré d impair admet une racine dans K ; on raisonne par récurrence sur d . L'assertion est triviale si $d=1$, donc on peut supposer que $d \geq 3$; en outre on peut supposer que P soit irréductible sur K , car si $P = P_1 P_2$ avec $P_1, P_2 \in K[X]$, un de ces facteurs doit à son tour avoir degré impair. Ainsi, $E := K[X]/P \cdot K[X]$ est une extension non triviale de K ; d'après (a) et le théorème 8.51(ii), il existe alors un entier $n \geq 1$ et $R_1, \dots, R_n \in K[X]$ tels que

$$R := R_1^2 + \dots + R_n^2 \equiv -1 \pmod{P}$$

dans $K[X]$, et on peut aussi supposer que $d_i := \deg(R_i) < d$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $R_i := a_{i0} + a_{i1}X + \dots + a_{id_i}X^{d_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$; noter que $a_{id_i}^2$ est le terme de plus haut degré de R_i^2 . On pose $e := \max(d_1, \dots, d_n)$ et $S := \{i \leq n \mid d_i = e\}$, et on remarque que $a := \sum_{i \in S} a_{id_i}^2 > 0$; par suite $\deg(R) = 2e$, et le terme de plus haut degré de R est a . Noter aussi que $e > 0$, car sinon $R_1, \dots, R_n \in K$, et comme $d > 0$, on aurait $R_1^2 + \dots + R_n^2 = -1$ dans K , ce qui est absurde, car K est formellement réel. Disons que $R+1 = P \cdot T$ avec $T \in K[X]$; on vient de voir que $0 < \deg(R+1) = 2e \leq 2d-2$, et comme $\deg(P) = d$ est impair, il en est alors de même pour $\deg(T)$, et ce dernier est $\leq d-2$. Par hypothèse de récurrence, T admet une racine x dans K ; mais alors $-1 = R_1(x)^2 + \dots + R_n(x)^2$, contradiction.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Soit $P \in K[X]$ de degré $d = 2^m n$ avec n impair; montrons par récurrence sur m que P admet une racine dans $K[i]$. La condition (b) nous donne l'assertion pour $m=0$; soit donc $m > 0$, et on suppose que l'assertion soit déjà connue pour les polynômes de degré $2^{m-1}n$ avec n impair. Fixons une clôture algébrique K^a de K , et disons que $P = (X-y_1) \dots (X-y_d)$ pour certains $y_1, \dots, y_d \in K^a$; soit aussi $A := \mathbb{Z}[X, T_1, \dots, T_d]$, et posons

$$R_h(X, T_1, \dots, T_d) := \prod_{1 \leq i < j \leq d} (X - T_i - T_j - hT_i T_j) \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Le groupe symétrique S_d agit naturellement sur A par automorphismes de $\mathbb{Z}[X]$ -algèbre : pour tout $\sigma \in S_d$ et tout $i = 1, \dots, d$ on fait $\sigma(T_i) := T_{\sigma(i)}$. Rappelons que la $\mathbb{Z}[X]$ -sous-algèbre des invariants de A pour cette action de S_d est engendrée par les polynômes symétriques $s_1, \dots, s_d$ des indéterminées $T_1, \dots, T_d$. On voit aisément que chaque R_h est S_d -invariant avec $\deg_X(R_h) = N := d(d-1)/2$, d'où :

$$R_h = \prod_{i=1}^N a_i(T_1, \dots, T_n) X^i \quad \text{avec } a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}[s_1, \dots, s_n].$$

Il s'ensuit aussitôt que $r_h(X) := R_h(X, y_1, \dots, y_d) \in K[X]$. Noter que $N = 2^{m-1}n$ avec n impair ; par hypothèse de récurrence, r_h admet donc une racine dans $K[i]$, i.e. il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $y_{i(h)} + y_{j(h)} + h y_{i(h)} y_{j(h)} \in K[i]$. On trouve alors $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ et une partie infinie $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ telle que $i(h) = i_0$ et $j(h) = j_0$ pour tout $h \in \Sigma$, et on conclut aisément que $u := y_{i_0} + y_{j_0} \in K[i]$ et $v := y_{i_0} y_{j_0} \in K[i]$. Mais y_{i_0} et y_{j_0} sont les racines du polynôme $F := X^2 - uX + v \in K[i][X]$, donc on est ramené à montrer :

Affirmation 8.54. Le polynôme F est scindé dans $K[i][X]$.

Preuve : Le racines de F sont $(-u \pm \sqrt{u^2 - 4v})/2$, donc il suffit de vérifier que tout élément de $K[i]$ admet ses racines carrées dans $K[i]$. Soit donc $a + ib \in K[i]$; on cherche $x, y \in K$ satisfaisant l'identité :

$$a + ib = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \quad \text{i.e.} \quad a = x^2 - y^2 \quad b = 2xy$$

Il vient : $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$, et $a^2 + b^2 \geq 0$ est le carré d'un $c \in K$ positif, par (b) ; d'où $c = x^2 + y^2$, et noter que $c \geq |a|$. Par suite, x (resp. y) est une racine carrée de $(c + a)/2$ (resp. $(c - a)/2$). $\diamond$

(c) $\Rightarrow$ (a) : Vérifions que K est formellement réel : comme $-1 \notin Q$, d'après le théorème 8.51(ii) il suffit de montrer que $Q = \Sigma K^2$; cela revient à vérifier que pour tous $a, b \in K$ on a $a^2 + b^2 \in Q$. Or, comme $K[i]$ est algébriquement clos, il existe $c, d \in K$ avec $a + ib = (c + id)^2$, et il vient $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$. En dernier lieu, il est clair que $K[i]$ est la seule extension algébrique non triviale de K , car toute telle extension devrait être contenue dans $K[i]$; cela achève de montrer (a). $\square$

Exercice 8.55. Soient K un corps formellement réel clos, $P \in K[X]$, et $a, b \in K$ avec $a < b$. On notera $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ et $]a, b[:= [a, b] \setminus \{a, b\}$.

- (i) Montrer que si $P(a)P(b) < 0$, il existe $c \in]a, b[$ avec $P(c) = 0$.
- (ii) Montrer que si $P(a) = P(b) = 0$, il existe $c \in]a, b[$ avec $P'(c) = 0$ (ici P' dénote le polynôme dérivé du polynôme P).
- (iii) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $P(b) - P(a) = (b - a) \cdot P'(c)$.
- (iv) Montrer que si $P'(x)$ est strictement positif (resp. strictement négatif) sur $]a, b[$, alors P est strictement croissant (resp. strictement décroissant) sur $[a, b]$.

8.2.3. Algorithme de Sturm. Soient K un corps formellement réel, et $P \in K[X] \setminus K$ sans racines multiples, de sorte que P et P' sont premiers entre eux. Dans cette situation, on dispose d'un algorithme effectif pour compter le nombre de racines de P dans l'intervalle $[a, b]$ (notation de l'exercice 8.55). Pour cela, soit

$$P_0, P_1, \dots, P_k$$

la suite des polynômes obtenue par l'algorithme euclidien de calcul du pgcd(P, P') ; donc $P_0 := P$, $P_1 := P'$, et P_n pour $n > 1$ est défini inductivement par l'identité

$$P_{n-2} = P_{n-1}Q_n - P_n \quad \text{avec } Q_n \in K[X] \text{ et } \deg P_n < \deg P_{n-1}.$$

Le dernier polynôme P_k est un élément de $K^\times$, car $\text{pgcd}(P, P') = 1$. Soit $x \in K$; noter que si $P_i(x) = 0$ pour quelque $i \in \{0, \dots, k-1\}$, alors $P_{i+1}(x) \neq 0$, car sinon une simple récurrence donnerait $P_j(x) = 0$ pour tout $j = i+1, \dots, k$, et cela est absurde, car $P_k \in K^\times$. Si x n'est pas une racine de P , on note le nombre

$$v(x) := \sigma_0(x) + \dots + \sigma_{k-1}(x)$$

de changements de signe dans la suite $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$, calculé comme suit. Pour $i = 0, \dots, k-1$ on pose $\sigma_i(x) := 1$ s'il existe $l \in \{i+1, \dots, k\}$ tel que $P_i(x)P_l(x) < 0$ et $P_j(x) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ avec $i < j < l$; sinon, $\sigma_i(x) := 0$.

Théorème 8.56. (Sturm) Avec la notation du §8.2.3, supposons que $P(a), P(b) \neq 0$. Alors le nombre de racines de P dans l'intervalle $[a, b]$ est $v(a) - v(b)$.

Démonstration. Soit $c_1 < c_2 < \dots < c_r$ la suite ordonnée des racines de $R := P_0 P_1 \dots P_k$ dans $[a, b]$. Si $r = 0$, compte tenu de l'exercice 8.55(i), on voit que chaque fonction σ_i est constante sur $[a, b]$, et alors l'assertion est trivialement vérifiée dans ce cas. Si $r > 0$, le même raisonnement montre que pour tout $i = 0, \dots, k-1$ la fonction σ_i est constante sur chaque intervalle $]c_j, c_{j+1}[$, et si $a < c_1$ (resp. si $b > c_r$), alors chaque σ_i est aussi constante sur $[a, c_1[$ (resp. sur $]c_r, b]$). Donc, il suffit de montrer que s'il existe une unique racine c de R dans $[a, b]$, alors $v(a) - v(b)$ est égal à 1 si c est une racine de P , et est égal à 0 sinon.

- Or, dans le cas où c est une racine de P , on a $P'(c) \neq 0$, et comme c est l'unique racine de R dans $[a, b]$, on voit que $P'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Le signe de P' est alors constant sur $[a, b]$, par l'exercice 8.55(i); donc P est strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, d'après l'exercice 8.55(iv). On déduit aisément que $P_0(x)P_1(x) < 0$ pour $x \in [a, c[$ et $P_0(x)P_1(x) > 0$ pour $x \in]c, b]$. Cela donne $\sigma_0(x) = 1$ pour $x \in [a, c[$ et $\sigma_0(x) = 0$ pour $x \in]c, b]$.

- Ensuite, si $P_i(c) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$, il s'ensuit que les polynômes $P_1, \dots, P_k$ n'ont aucune racine dans $[a, b]$ (car c est l'unique racine de R), et leurs signes sont constants sur cet intervalle, d'après l'exercice 8.55(i), donc de même pour les fonctions $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$.

- En dernier lieu, si $c \in [a, b]$ est racine de P_i avec $i > 0$, on a déjà remarqué que $P_{i-1}(c), P_{i+1}(c) \neq 0$, et comme $P_{i-1}(c) = P_i(c)Q_{i+1}(c) - P_{i+1}(c) = -P_{i+1}(c)$, il vient $P_{i-1}(c)P_{i+1}(c) < 0$. De plus, comme c est l'unique racine de R dans $[a, b]$, on a $P_i(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b] \setminus \{c\}$, et le signe de $P_{i-1}(x)$ (resp. de $P_{i+1}(x)$) est égal au signe de $P_{i-1}(c)$ (resp. de $P_{i+1}(c)$) pour tout $x \in [a, b]$, encore grâce à l'exercice 8.55(i). On conclut que $\sigma_{i-1}(c) = 1$, $\sigma_i(c) = 0$, et pour $x \neq c$, si $\sigma_{i-1}(x) = 1$ (resp. $\sigma_{i-1}(x) = 0$) on doit avoir $\sigma_i(x) = 0$ (resp. $\sigma_i(x) = 1$).

L'assertion souhaitée s'obtient maintenant par inspection de ces trois cas. $\square$

Définition 8.57. Soient $(K, \leq)$ un corps totalement ordonné, $K \subset E$ une extension de corps. On dit que E est une *clôture formellement réelle* de $(K, \leq)$ si E est à la fois formellement réel clos et une extension algébrique de K , et l'unique ordre $\leq$ de E tel que $(E, \leq)$ soit un corps totalement ordonné, prolonge l'ordre de K .

Exemple 8.58. (i) Evidemment $\mathbb{R}$ est formellement réel clos. Avec le critère (b) de la proposition 8.53, on voit qu'il en est de même pour son sous-corps $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ des nombres algébriques réels : ceci est alors une clôture formellement réelle de $\mathbb{Q}$.

(ii) Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$ est formellement réel, mais il n'est pas clos : ses ordres totaux peuvent se décrire comme suit. Si $(\mathbb{R}(X), \leq)$ est un corps totalement ordonné, notons $J_- := \{a \in \mathbb{R} \mid a < X\}$ et $J_+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > X\}$; évidemment $J_- \sqcup J_+ = \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $J_- =]-\infty, 0]$; donc X est positif et *infinitésimal* dans $(\mathbb{R}(X), \leq)$, i.e. plus petit de tout réel strictement positif, et cette condition détermine $\leq$: car pour tout polynôme $P(X) = a_k X^k + a_{k+1} X^{k+1} + \dots + a_{k+n} X^{k+n} \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_k \neq 0$ on aura $P > 0$ si et seulement si $a_k > 0$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur); puis, pour $Q(X) = b_{k'} X^{k'} + b_{k'+1} X^{k'+1} + \dots + b_{k'+n'} X^{k'+n'} \in \mathbb{R}[X]$ avec $b_{k'} \neq 0$ on aura $P(X)/Q(X) > 0$ si et seulement si $P(X)Q(X) > 0$, i.e. si et seulement si $a_k b_{k'} > 0$. Réciproquement, on voit aisément que l'ensemble des fractions rationnelles vérifiant cette condition est un cône propre maximal de $\mathbb{R}(X)$, d'où l'existence et unicité d'un tel ordre total, que l'on notera $\leq_{0+}$. Plus généralement, si $J_- =]-\infty, a]$ (resp. si $J_- =]-\infty, a[$) pour quelque $a \in \mathbb{R}$, soit $\phi_a : \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(X)$

(resp. $\psi_a : \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(X)$) l'automorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre tel que $\phi_a(X) := X - a$ (resp. $\psi_a(X) := a - X$), et noter que $X - a$ (resp. $a - X$) est positif et infinitésimal dans $(\mathbb{R}(X), \leq)$; par ce qui précède, il s'ensuit que $0 < P/Q$ si et seulement si $0 <_{0+} \phi_a^{-1}(P/Q)$ (resp. si et seulement si $0 <_{0+} \psi_a^{-1}(P/Q)$). Donc il existe un unique tel ordre total $\leq_{a+}$ (resp. $\leq_{a-}$) sur $\mathbb{R}(X)$. En dernier lieu, si $J_- = \emptyset$ (resp. si $J_- = \mathbb{R}$) soit $\phi_{-\infty} : \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(X)$ (resp. $\phi_{+\infty} : \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(X)$) l'automorphisme tel que $\phi_{-\infty}(X) := -1/X$ (resp. $\phi_{+\infty}(X) := 1/X$), et noter que $-1/X$ (resp. $1/X$) est positif et infinitésimal dans $(\mathbb{R}(X), \leq)$, donc $0 < P/Q \Leftrightarrow 0 <_{0+} \phi_{-\infty}^{-1}(P/Q)$ (resp. $\Leftrightarrow 0 <_{0+} \phi_{+\infty}^{-1}(P/Q)$); à nouveau, on déduit l'existence et unicité d'un tel ordre $\leq_{-\infty}$ (resp. $\leq_{+\infty}$).

Théorème 8.59. *Tout corps totalement ordonné $(K, \leq)$ admet une clôture formellement réelle, unique à isomorphisme unique près d'extensions de corps de K .*

Démonstration. Fixons une clôture algébrique K^a de K , et soit $\mathcal{E}$ la famille des corps totalement ordonnés $(E, \leq)$ tels que $K \subset E \subset K^a$, et tels que l'ordre de E prolonge l'ordre de K . On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre partiel $\preceq$ telle que $(E, \leq) \preceq (E', \leq')$ si et seulement si $E \subset E'$ et l'ordre de E' prolonge l'ordre de E . Si $((E_\lambda, \leq_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{E}$, il est clair que le corps $E := \bigcup_\lambda E_\lambda$ admet un ordre unique $\leq_E$ tel que $(E_\lambda, \leq_\lambda) \preceq (E, \leq_E)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ a alors un élément maximal $(F, \leq)$, et on va montrer que F est formellement réel clos. Tout d'abord, soit $a > 0$ un élément de F ; si a n'est pas un carré dans F , soit $C \subset F[a^{1/2}] \subset K^a$ la partie des éléments :

$$\sum_{i=1}^n b_i (c_i + d_i a^{1/2})^2$$

pour $n > 0$ arbitraire, avec $b_1, c_1, d_1, \dots, b_n, c_n, d_n \in F$ et $b_1, \dots, b_n > 0$. On voit aisément que C est un cône de $F[a^{1/2}]$, et il est en fait un cône propre, car si $\sum_{i=1}^n b_i (c_i + d_i a^{1/2}) = -1$, en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 8.53, on trouverait $-1 = \sum_{i=1}^n b_i (c_i^2 + ad_i^2) > 0$ dans F , contradiction. Mais alors C est contenue dans le cône positif d'un ordre de $F[a^{1/2}]$, d'après le lemme 8.49; comme $C(F, \leq) \subset C$, cela contredit la maximalité de F . Donc tout élément $a > 0$ de F est un carré dans F , et cela entraîne qu'il existe une unique structure de corps totalement ordonné sur F . Or, si $F' \subset K^a$ est une autre extension formellement réelle de K avec $F \subset F'$, il s'ensuit que toute structure de corps totalement ordonné sur F' doit nécessairement prolonger l'unique telle structure de F ; par maximalité de F , on doit ainsi avoir $F = F'$, i.e. F est formellement réel clos.

Affirmation 8.60. Si $i : (K, \leq) \rightarrow (F', \leq)$ est un homomorphisme de corps totalement ordonnés, avec F' formellement réel clos, il existe un unique homomorphisme de corps totalement ordonnés $j : (F, \leq) \rightarrow (F', \leq)$ tel que $j|_K = i$.

Preuve : Soit $\mathcal{F}$ la famille des homomorphismes de corps totalement ordonnés

$$\phi : (E, \leq) \rightarrow (F', \leq) \quad \text{avec } K \subset E \subset F$$

tels que l'ordre de E est la restriction de l'ordre de F . On munit $\mathcal{F}$ de la relation d'ordre partiel $\preceq$ telle que pour deux tels homomorphismes ϕ et $\phi' : (E', \leq) \rightarrow (F', \leq)$ on a $\phi \preceq \phi'$ si et seulement si $E \subset E'$ et $\phi|_E = \phi'$. Evidemment, si $(\phi_\lambda : (E_\lambda, \leq) \rightarrow (F', \leq) \mid \lambda \in \Lambda)$ est une partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{F}$, il existe un unique homomorphisme $\phi : \bigcup_\lambda E_\lambda \rightarrow F'$ avec $\phi|_{E_\lambda} = \phi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $\phi \in \mathcal{F}$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet alors un élément maximal $\Phi : L \rightarrow F'$, et on doit montrer que $L = F$. Supposons donc que $a \in F \setminus L$, et soit $P = X^q + \sum_{i=0}^{q-1} c_i X^i$ son polynôme minimal sur L ; rappelons que K est de caractéristique nulle (remarque 8.48(i)), donc P n'a pas de racines multiples. Soient $a_1 < \dots < a_n$ les racines de P dans F , et disons que $a = a_j$ pour un indice $j \leq n$. Par le théorème de Sturm 8.56, il s'ensuit que $\Phi(P) := X^q + \sum_{i=0}^{q-1} \Phi(c_i) X^i$ a aussi n racines distinctes $b_1 < \dots < b_n$ dans F' , et on peut ainsi prolonger Φ en un homomorphisme $\Psi : L[a] \rightarrow F'$ par $\Psi(a) := b_j$.

Montrons maintenant que Ψ est un homomorphisme de corps ordonnés. En effet, soit $y \in L[a]$ un élément positif, et choisissons $x_1, \dots, x_{n-1}, z \in F$ tels que $x_i^2 = a_{i+1} - a_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $z^2 = y$. Comme L est un corps de caractéristique nulle, son extension finie $L' := L[a_1, x_1, \dots, x_n, z]$ admet un élément primitif α , et en raisonnant comme ci-dessus on voit que Φ se prolonge en un homomorphisme $\Phi' : L' = L[\alpha] \rightarrow F'$. Noter que $L[a_1, \dots, a_n] \subset L'$, et $\Phi'(a_i)$ est évidemment une racine de $\Phi(P)$, pour tout $i = 1, \dots, n$; comme $\Phi'(a_{i+1}) - \Phi'(a_i) = \Phi'(x_i)^2 > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$, il vient $\Phi'(a_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et en particulier $\Phi'(a) = b_j$, donc $\Phi'_{|L[a]} = \Psi$. Alors $\Psi(y) = \Phi'(y) = \Phi'(z)^2 > 0$, ce qui montre que Ψ préserve l'ordre. Cela contredit la maximalité de Φ .

Il reste à vérifier l'unicité de l'homomorphisme $j : (F, \leq) \rightarrow (F', \leq)$. Soit donc $j' : (F, \leq) \rightarrow (F', \leq)$ un autre homomorphisme de corps totalement ordonnés, et pour $a \in F$, soient $a_1 < \dots < a_n$ les racines dans F du polynôme minimal $P \in K[X]$ de a sur K ; alors $j(a_1) < \dots < j(a_n)$ est la suite des racines de P dans F' , et de même pour $j'(a_1) < \dots < j'(a_n)$. Donc $j(a_i) = j'(a_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et en particulier $j(a) = j'(a)$, d'où $j = j'$, comme souhaité. $\diamond$

On peut maintenant vérifier l'unicité à isomorphisme unique près de F : si F' est une autre clôture formellement réelle de K , d'après l'observation 8.60 il existe des homomorphismes uniques $j : F \rightarrow F'$ et $j' : F' \rightarrow F$ de corps totalement ordonnés avec $j|_K = j'|_K = Id_K$; de même, les compositions $j' \circ j : F \rightarrow F$ et $j \circ j' : F' \rightarrow F'$ doivent coïncider avec Id_F et $Id_{F'}$, encore par l'observation 8.60. En dernier lieu, noter que *tout* homomorphisme de corps $F \rightarrow F'$ préserve les ordres de ces corps, car les cônes positifs respectifs sont les ensembles des carrés (proposition 8.53); en résumé, il existe un *unique* K -isomorphisme $F \xrightarrow{\sim} F'$, et cela achève la preuve. $\square$

Voici une application qui complète le lemme 8.38, et généralise [32, Th.13.4]; ce résultat m'a été communiqué par O.Gabber.

Proposition 8.61. *Soient T un espace topologique, et $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(T)$ un idéal premier.*

- (i) *Le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ est formellement réel clos.*
- (ii) *Le quotient $\mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre intégralement clos.*

Démonstration. (i) : D'après le lemme 8.38(iii), le quotient $A := \mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ est un anneau totalement ordonné, pour l'ordre induit par la projection $\mathcal{C}(T) \rightarrow A$. D'après l'exercice 8.35, l'ordre de A se prolonge naturellement à $k(\mathfrak{p})$: explicitement, pour $x, y \in k(\mathfrak{p})$, on écrit $x = a/b$, $y = c/d$ avec $a, b, c, d \in A$ et $b, d > 0$, et on déclare que $x \leq y$ si et seulement si $ad \leq bc$. Si $x \in k(\mathfrak{p})$ est un élément strictement positif, on a alors $x = a/b$ avec $a, b > 0$ dans A ; par définition, a et b sont les classes de fonctions continues $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(t), g(t) \geq 0$ pour tout $t \in T$. Mais alors $f^{1/2}, g^{1/2} : T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sont bien définies et continues, et leurs classes dans A sont des racines carrées positives de a et b ; cela montre que tout élément positif de $k(\mathfrak{p})$ est un carré, *i.e.* le cône positif de $(k(\mathfrak{p}), \leq)$ est l'ensemble des carrés. D'après la proposition 8.53, il reste à vérifier que tout polynôme $P \in k(\mathfrak{p})[X]$ de degré impair admet une racine dans $k(\mathfrak{p})$. Pour cela, on considère pour tout entier $n > 0$ l'application $\rho_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie comme suit. Pour tout $\underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, notons $P_{\underline{a}} := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$; soit $\mathcal{Z}(\underline{a})$ l'ensemble des racines complexes de $P_{\underline{a}}$, et pour tout $z \in \mathcal{Z}(\underline{a})$ soit $\nu(\underline{a}, z) > 0$ la multiplicité de la racine z , de sorte que $\sum_{z \in \mathcal{Z}(\underline{a})} \nu(\underline{a}, z) = n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on dénote par $\Re(z) \in \mathbb{R}$ la partie réelle de z ; on pose $\mathcal{R}(\underline{a}) := \{\Re(z) \mid z \in \mathcal{Z}(\underline{a})\}$ et pour tout $x \in \mathcal{R}(\underline{a})$ soit $\mathcal{Z}(\underline{a}, x) := \{z \in \mathcal{Z}(\underline{a}) \mid \Re(z) = x\}$ et $\nu'(\underline{a}, x) := \sum_{z \in \mathcal{Z}(\underline{a}, x)} \nu(\underline{a}, z)$, de sorte que $\sum_{x \in \mathcal{R}(\underline{a})} \nu'(\underline{a}, x) = n$. Alors $\rho_n(\underline{a}) \in \mathbb{R}^n$ est l'unique suite $(b_1, \dots, b_n)$ telle que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ et dans laquelle chaque valeur $x \in \mathcal{R}(\underline{a})$ apparaît $\nu'(\underline{a}, x)$ fois.

Affirmation 8.62. Pour tout $n > 0$, l'application $\rho_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Preuve : Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$\|\underline{a}\| := \max(|a_1|, \dots, |a_n|) \quad \forall \underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|\underline{a} - \underline{b}\| < \delta$, alors $\|\rho_n(\underline{a}) - \rho_n(\underline{b})\| < \varepsilon$. Si $\mathcal{R}(\underline{a})$ (resp. $\mathcal{Z}(\underline{a})$) contient un unique point, soit $M := 1$ (resp. $M' := 1$), et sinon soit $M := \min(|x - x'| \mid x, x' \in \mathcal{R}(\underline{a}), x \neq x')$ (resp. $M' := \min(|z - z'| \mid z, z' \in \mathcal{Z}(\underline{a}), z \neq z')$). On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \min(M, M')$. Pour tout $z \in \mathcal{Z}(\underline{a})$, soit aussi $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ l'application telle que $t \mapsto z + \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}$ pour tout $t \in [0, 1]$; donc γ_z est un lacet simple, le bord d'un disque $\mathbb{D}(z, \varepsilon)$ centré en z et de rayon ε . Par notre condition sur ε , il est clair que ces disques $\mathbb{D}(z, \varepsilon)$ et $\mathbb{D}(z', \varepsilon)$ sont disjoints pour tous $z, z' \in \mathcal{Z}(\underline{a})$ distincts, et en particulier $P_{\underline{a}}(\gamma_z(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $z \in \mathcal{Z}(\underline{a})$; on voit aussi aisément qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |P_{\underline{a}}(\gamma_z(t)) - P_{\underline{b}}(\gamma_z(t))| < |P_{\underline{a}}(\gamma_z(t))| \quad \forall t \in [0, 1], \forall z \in \mathcal{Z}(\underline{a}).$$

D'après le théorème de Rouché (voir *e.g.* [11, Ch.III, Ex.19]), on a alors

$$\sum_{w \in \mathcal{Z}(\underline{b}) \cap \mathbb{D}(z, \varepsilon)} \nu(\underline{b}, w) = \nu(\underline{a}, z)$$

pour tout $z \in \mathcal{Z}(\underline{a})$ et tout $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\underline{a} - \underline{b}\| < \delta$. Cela veut dire que les racines de $P_{\underline{b}}$ sont contenues dans $\bigcup_{z \in \mathcal{Z}(\underline{a})} \mathbb{D}(z, \varepsilon)$. En outre, soient $(t_1, \dots, t_n) := \rho_n(\underline{a})$, $(s_1, \dots, s_n) := \rho_n(\underline{b})$, et $x \in \mathcal{R}(\underline{a})$, et disons que $t_j = t_{j+1} = \dots = t_{j+\nu'(\underline{a}, x)-1} = x$; notre condition sur ε entraîne que chaque $s_j, \dots, s_{j+\nu'(\underline{a})-1}$ est la partie réelle d'une racine w de $P_{\underline{b}}$ avec $w \in \mathbb{D}(z, \varepsilon)$ pour une racine z de $P_{\underline{a}}$ avec $\Re(z) = x$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Par suite $|t_k - s_k| < \varepsilon$ pour tout $k = j, \dots, j + \nu'(\underline{a}, x) - 1$, et cela pour tout $x \in \mathcal{R}(\underline{a})$, d'où finalement $\|\rho_n(\underline{a}) - \rho_n(\underline{b})\| < \varepsilon$. $\diamond$

Or, soit $P \in k(\mathfrak{p})[X]$ un polynôme unitaire de degré n , et $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP \in A[X]$; alors $Q := a^n P(a^{-1}X) \in A[X]$ et les racines de Q sont de la forme ax , avec x une racine de P . En particulier, P admet une racine dans $k(\mathfrak{p})$ si et seulement s'il en est de même pour Q , et on peut donc supposer que P soit l'image dans $A[X]$ d'un polynôme unitaire $\tilde{P} \in \mathcal{C}(T)[X]$. Disons que $\tilde{P} = \tilde{P}(t, X) = X^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j X^{n-j}$ pour certaines fonctions continues $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$. On obtient ainsi une application continue $\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$. Noter que pour tout $t \in T$, les coordonnées $r_{1,t}, \dots, r_{n,t}$ du vecteur $r_{\bullet,t} := \rho_n \circ \alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les parties réelles des racines complexes de $\tilde{P}(t, X) \in \mathbb{R}[X]$, et d'après l'observation 8.62, chaque application $t \mapsto r_{j,t}$ est une fonction continue $r_j \in \mathcal{C}(T)$. Soit alors

$$R(t) := \tilde{P}(t, r_{1,t}) \cdots \tilde{P}(t, r_{n,t}) \quad \forall t \in T.$$

Noter que si n est impair, pour tout $t \in T$ au moins une des racines de $\tilde{P}(t, X)$ est réelle, donc elle est une des coordonnées $r_{j,t}$; cela veut dire que dans ce cas $R(t) = 0$ pour tout $t \in T$, donc $R = 0$ dans A . Comme A est intègre, un des facteurs $P(r_j)$ est déjà égal à zéro dans A , *i.e.* l'image $\bar{r}_j \in A$ de r_j est la racine cherchée de P .

(ii) : Il nous faudra l'observation générale suivante :

Affirmation 8.63. Soit $A \subsetneq B$ une extension entière d'anneaux, telle que pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ l'extension résiduelle $k(A \cap \mathfrak{q}) \subset k(\mathfrak{q})$ soit de degré ≤ 2 . Alors il existe $b \in B \setminus A$ et un polynôme unitaire $P \in A[X]$ de degré 2 avec $P(b) = 0$.

Preuve : Noter que si $A \subsetneq C \subsetneq B$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } C$ il existe $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ tel que $\mathfrak{p} = C \cap \mathfrak{q}$ (corollaire 6.20(i)), et on a $k(\mathfrak{p} \cap A) = k(\mathfrak{q} \cap A) \subset k(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{q})$, donc le degré de $k(\mathfrak{p})$ sur $k(\mathfrak{p} \cap A)$ est encore ≤ 2 . On peut donc remplacer B par $C := A[c]$ pour n'importe quel $c \in B \setminus A$, et supposer du départ que B soit une extension finie de A . Dans ce cas, $Z := \text{Supp}_A(B/A)$ est une partie fermée de $\text{Spec } A$ (remarque 3.58(ii)); soit $\mathfrak{p} \in \text{Max } Z$, *i.e.* le point générique d'une composante irréductible de Z (voir l'exercice 6.109(i)). On a $(B/A)_{\mathfrak{p}} \neq 0$, *i.e.* $A_{\mathfrak{p}} \subsetneq B_{\mathfrak{p}}$, et cette inclusion est une extension entière et

finie ; supposons qu'il existe $b' \in B_{\mathfrak{p}} \setminus A_{\mathfrak{p}}$ et $Q \in A_{\mathfrak{p}}[X]$ unitaire de degré 2 avec $Q(b') = 0$ dans $B_{\mathfrak{p}}$. Il existe alors $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que

$$b' = c/s \quad \text{et} \quad Q := X^2 + (a/s)X + (a'/s)$$

pour certains $c \in B$ et $a, a' \in A$, et il vient $c^2 + ac + a's = 0$ dans $B_{\mathfrak{q}}$, donc il existe $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $t(c^2 + ac + a's) = 0$ dans B , et l'élément $b := tc \in B$ vérifie la condition souhaitée (noter que $b \notin A$, car $b' \notin A_{\mathfrak{p}}$). On peut ainsi remplacer A et B par $A_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{p}}$, et supposer du départ que $(A, \mathfrak{m})$ soit local, et $\text{Supp}(B/A) = \{\mathfrak{m}\}$ (remarque 3.58(iii)). Cette dernière condition revient à dire que $\mathfrak{m}$ est le radical de $\text{Ann}_A(B/A)$ (remarque 3.58(ii)), et il s'ensuit aisément que pour tout sous-idéal $I \subset \mathfrak{m}$ de type fini il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n(B/A) = 0$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Rappelons que $\mathcal{J}(B) = \text{rad}(\mathfrak{m}B)$ (exercice 6.22(ii)) ; or, si $\mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{J}(B)$, soit $f \in \mathcal{J}(B) \setminus \mathfrak{m}$; alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m \in \mathfrak{m}B$, et donc il existe aussi un sous-idéal $I \subset \mathfrak{m}$ de type fini tel que $f^m \in IB$. Par ce qui précède, on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{nm}(B/A) = 0$, d'où $f^{nm} \in A$; soit alors p le plus grand entier tel que $b := f^p \in B \setminus A$. On a $a := b^2 \in A$, et l'assertion suit dans ce cas avec $P := X^2 - a$.

Donc, on est ramené au cas où $\mathfrak{m} = \mathcal{J}(B)$. Or, si $(B, \mathfrak{m}_B)$ est local, par hypothèse l'extension résiduelle $k(\mathfrak{m}) \subset k(\mathfrak{m}_B)$ a degré $d \leq 2$; mais comme $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_B$ et $B \neq A$, on a $k(\mathfrak{m}) \neq k(\mathfrak{m}_B)$, donc $d = 2$. Soit $b \in B$ dont l'image $\bar{b}$ dans $k(\mathfrak{m}_B)$ n'est pas dans $k(\mathfrak{m})$, et soit $Q \in A[X]$ unitaire de degré 2 dont l'image dans $k(\mathfrak{m})[X]$ est le polynôme minimal de $\bar{b}$; il vient $a := Q(b) \in \mathfrak{m}$, et l'assertion suit avec $P := Q - a$.

En dernier lieu, si $\mathfrak{m} = \mathcal{J}(B)$ et B n'est pas local, soit $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\} = \text{Max } B$ (corollaire 6.20(v)) ; par le lemme chinois, on trouve $b \in B$ tel que $b - 1 \in \mathfrak{m}_1$ et $b \in \mathfrak{m}_j$ pour tout $j = 2, \dots, k$. Comme $\mathfrak{m}_1 \cap A = \mathfrak{m}_2 \cap A$, il vient $b \notin A$, et $a := b^2 - b \in \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}$, donc l'assertion suit avec $P := X^2 - X - a$. $\diamond$

Or, supposons par l'absurde que $A := \mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ ne soit pas intégralement clos, et soit B la clôture intégrale de A dans son corps des fractions $k(\mathfrak{p})$. Au vu de (i) et de la proposition 8.53, l'extension résiduelle $k(\mathfrak{p} \cap A) \subset k(\mathfrak{p})$ est alors de degré ≤ 2 pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$. D'après l'observation 8.63, il existe ainsi $b \in B \setminus A$ et un polynôme $P := X^2 + aX + c \in A[X]$ tel que $P(b) = 0$; pour $x := b + a/2$, il vient $x^2 = a^2/4 - c \in A$ et $x \in B \setminus A$. Mais la classe de x^2 est un élément positif du corps formellement réel clos $k(\mathfrak{p} \cap A)$, donc x^2 est positif pour l'ordre de A , et alors est la classe d'une fonction $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ continue et partout non négative ; la racine carrée $f^{1/2} : T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est encore un élément de $\mathcal{C}(T)$, et sa classe $y \in A$ fournit une racine carrée de x^2 , i.e. $x = \pm y$, d'où $x \in A$, contradiction. $\square$

8.3. Le spectre réel. L'exemple fondamental $(\mathcal{C}(X), \leq)$ de la section 8.2, est un cas particulier de la construction générale suivante. Soient A un anneau, $(\mathfrak{p}_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille d'idéaux premiers de A , dont les corps résiduels $k(\mathfrak{p}_{\lambda})$ sont formellement réels ; choisissons pour chaque $\lambda \in \Lambda$ une structure de corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{p}_{\lambda}), \leq_{\lambda})$ sur $k(\mathfrak{p}_{\lambda})$, et soit $I := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_{\lambda}$. Pour tout $a \in A/I$ et tout $\lambda \in \Lambda$, notons par $\bar{a}_{\lambda} \in k(\mathfrak{p}_{\lambda})$ la classe de a ; on obtient une relation d'ordre sur A/I par :

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}_{\lambda} \leq_{\lambda} \bar{b}_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

En effet, $\leq$ est évidemment réflexive et transitive ; elle est aussi antisymétrique, car si $a \leq b \leq a$, on a $\bar{a}_{\lambda} = \bar{b}_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'où $a = b$. On voit alors aisément que $(A/I, \leq)$ est un anneau partiellement ordonné. Par exemple, pour un corps K formellement réel, et $A := K[T]$, on peut prendre la famille $(\mathfrak{m}_a \mid a \in K)$, où $\mathfrak{m}_a \subset A$ dénote comme d'habitude, l'idéal maximal engendré par $T - a$, pour tout $a \in K$. Comme K est un corps infini, $\bigcap_{a \in K} \mathfrak{m}_a = 0$; en choisissant pour tout $a \in K$ un ordre $\leq_a$ sur $k(\mathfrak{m}_a)$, on déduit ainsi une structure d'anneau partiellement ordonné sur A . Pour un anneau arbitraire, ce procédé ne produit pas nécessairement toutes les structures d'anneau partiellement ordonné sur A , comme illustré par l'exemple suivant :

Exemple 8.64. Soit $A := \mathbb{Z}[T]/T^2\mathbb{Z}[T]$. Tout élément de A admet un représentant unique $aT + b \in \mathbb{Z}[T]$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, et on définit une relation d'ordre sur A par :

$$a + bT \leq a' + b'T \iff a < a' \text{ ou } a = a' \text{ et } b \leq b'.$$

On vérifie aisément que $(A, \leq)$ est un anneau partiellement ordonné, mais comme l'image de T est nilpotent dans A , cet ordre $\leq$ ne s'obtient d'aucune famille d'ordres sur des corps résiduels de A , par la méthode expliquée ci-dessus.

Néanmoins, ces considérations suggèrent de regarder de plus près l'ensemble de tous les ordres sur tous les corps résiduels de A : cela conduit à la définition suivante, due aux géomètres M.Coste et M-F. Roy :

Définition 8.65. (i) Soit A un anneau. Le *spectre réel* de A est l'ensemble

$$\text{Spr } A$$

des couples $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, où $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et $\leq_\lambda$ est un ordre sur le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ tel que $(k(\mathfrak{p}), \leq_\lambda)$ soit un corps totalement ordonné.

(ii) Pour tout $a \in A$ et $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$, notons $\bar{a}_\lambda \in k(\mathfrak{p})$ l'image de a , et

$$D_+(a) := \{\lambda \in \text{Spr } A \mid \bar{a}_\lambda >_\lambda 0\} \quad D_\pm(a) := D_+(a) \cup D_+(-a).$$

On munit $\text{Spr } A$ de la topologie $\mathcal{T}_A$ engendrée par la prébase $(D_+(a) \mid a \in A)$.

L'exercice suivant généralise aux éléments de $\text{Spr } A$ la correspondance de la remarque 8.48 entre cônes propres et ordres totaux sur les corps.

Exercice 8.66. (Cônes premiers) Soit A un anneau. On dénote par $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des cônes $C \subset A$, i.e. des parties telles que :

- (a) pour tous $a, b \in C$ on a $a + b \in C$ et $ab \in C$
- (b) $C \cup (-C) = A$, avec $-C := \{-a \mid a \in C\}$.

Le *support* d'un cône $C \in \mathcal{C}_A$ est la partie $\text{Supp } C := C \cap (-C)$.

(i) Montrer que $\text{Supp } C$ est un idéal de A , pour tout $C \in \mathcal{C}_A$. Pour tout idéal $I \subset A$, on pose $\mathcal{C}_A(I) := \{C \in \mathcal{C}_A \mid \text{Supp } C = I\}$.

(ii) Pour tout idéal $I \subset A$, soit $\pi_I : A \rightarrow A/I$ la projection, et $\mathcal{C}_{A/I}$ l'ensemble des relations d'ordre $\leq$ sur A/I telles que $(A/I, \leq)$ soit un anneau totalement ordonné ; à tout $(A/I, \leq) \in \mathcal{C}_{A/I}$ on associe le *cône positif*

$$C(A/I, \leq) := \pi_I^{-1}\{a \in A/I \mid a \geq 0\} \subset A.$$

Montrer que l'application : $(A/I, \leq) \mapsto C(A/I, \leq)$ est une bijection $\mathcal{C}_{A/I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_A(I)$.

(iii) Un cône $C \in \mathcal{C}_A$ est *premier* si $\text{Supp } C$ est un idéal premier de A . Soit $\mathcal{C}_A^p \subset \mathcal{C}_A$ la partie des cônes premiers de A . Dédurre de (ii) une bijection naturelle :

$$\text{Spr } A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_A^p.$$

(iv) Soit $C \neq A$ un cône de A . Montrer que C est premier si et seulement s'il satisfait la condition suivante. Pour tous $a, b \in A$ tels que $a \notin C$ et $ab \in C$, on a $-b \in C$.

Théorème 8.67. (i) Pour tout anneau A , l'espace topologique $\text{Spr } A$ est spectral.

(ii) $D_+(a)$ est une partie ouverte compacte de $\text{Spr } A$, pour tout $a \in A$.

Démonstration. Munissons l'ensemble $\{0, 1\}$ de la topologie discrète, et $\mathcal{P} := \{0, 1\}^A$ de la topologie du produit (voir l'exemple 2.20(iii)) ; on associe à tout $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$ l'application $\varepsilon_\lambda : A \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\varepsilon_\lambda(a) = 1 \iff \bar{a} \geq_\lambda 0$, où $\bar{a} \in k(\mathfrak{p})$ dénote la classe de a . D'après l'exercice 8.66(iii), on a ainsi une injection

$$\varepsilon : \text{Spr } A \rightarrow \mathcal{P} \quad \lambda \mapsto \varepsilon_\lambda$$

et soit $\mathcal{T}'_A$ la topologie sur $\text{Spr } A$ induite par $\mathcal{P}$ via ε . Explicitement, $\mathcal{T}'_A$ est la topologie engendrée par toutes les parties $D_+(a)$ et par leurs complémentaires.

Affirmation 8.68. L'image de ε est une partie fermée de $\mathcal{P}$.

Preuve : Soit $x_\bullet := (x_a \mid a \in A) \in \mathcal{P}$ un point dans l'adhérence de l'image de ε . On doit vérifier que $x_\bullet$ est dans l'image de ε , et d'après l'exercice 8.66(iii), il suffit de montrer que $C := \{a \in A \mid x_a = 1\}$ est un cône premier de A . Soient donc $a, b \in A$ avec $a, b \in C$, et supposons par l'absurde que $a + b \notin C$; cela revient aux conditions : $x_a = x_b = 1$ et $x_{a+b} = 0$. Soit alors $U \subset \mathcal{P}$ la partie ouverte des suites $(y_c \mid c \in A)$ telles que $y_a = y_b = 1$ et $y_{a+b} = 0$; on a $x_\bullet \in U$, donc par hypothèse U rencontre l'image de ε . Soit $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $\varepsilon_\lambda \in U$; cela veut dire que $\bar{a}, \bar{b} \geq_\lambda 0$ mais $\bar{a} + \bar{b} <_\lambda 0$, une contradiction. De même on montre que $ab \in C$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Ensuite, montrons que $C \cup (-C) = A$: sinon, il existerait $a \in A$ tel que $x_a = x_{-a} = 0$; soit alors $U \subset \mathcal{P}$ la partie ouverte des suites $y_\bullet$ telles que $y_a = y_{-a} = 0$. On a $x_\bullet \in U$, donc par hypothèse U rencontre l'image de ε ; soit $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $\varepsilon_\lambda \in U$. Il vient $\bar{a} <_\lambda 0$ et $-\bar{a} <_\lambda 0$, contradiction. Cela achève de montrer que C est bien un cône. Il reste à vérifier que C est premier, et noter que $C \neq A$: en effet, puisque $-1 < 0$ dans tout corps totalement ordonné, l'image de ε est contenue dans la partie fermée $V \subset \mathcal{P}$ formée des suites $(y_c \mid c \in A)$ avec $y_{-1} = 0$, et par suite $C \in V$, i.e. $-1 \notin C$. Au vu de l'exercice 8.66(iv), on est alors ramené à montrer que pour tous $a, b \in A$ tels que $x_a = 0$ et $x_{ab} = 1$, on a $x_{-b} = 1$. Pour cela, on raisonne par l'absurde comme ci-dessus : pour tels a, b supposons que $x_{-b} = 0$; alors $x_\bullet$ est dans la partie ouverte $U \subset \mathcal{P}$ des suites $y_\bullet$ telles que $y_a = y_{-b} = 0$ et $y_{ab} = 1$. Mais alors U rencontre l'image de ε , et on déduit aisément une contradiction. $\diamond$

D'après le théorème de Tychonoff (problème 2.25(ii)), $\mathcal{P}$ est un espace topologique compact et séparé; l'observation 8.68 entraîne alors qu'il en est de même pour $(\text{Spr } A, \mathcal{T}'_A)$. D'autre part, si C et C' sont les cônes premiers correspondants à deux éléments distincts λ et λ' de $\text{Spr } A$, il existe soit $a \in C \setminus C'$, soit $a' \in C' \setminus C$; dans le premier cas on a $\lambda \in D_+(a)$ et $\lambda' \notin D_+(a)$, et dans le deuxième cas on a $\lambda' \in D_+(a')$ et $\lambda \notin D_+(a')$. Cela montre que l'espace topologique $(\text{Spr } A, \mathcal{T}'_A)$ de la définition 8.65(ii) est de type T_0 (voir la définition 1.25(i)). En dernier lieu, il est clair que toute partie $D_+(a)$ de $\text{Spr } A$ est ouverte et fermée pour la topologie $\mathcal{T}'_A$; on conclut alors avec la proposition 4.57. $\square$

Exemple 8.69. Soient A un anneau, et $a \in A$. D'après le théorème 8.67, les parties $D_+(a)$ et $D_\pm(a)$ sont ouvertes et constructibles dans $\text{Spr } A$; donc la partie $W(a) := (\text{Spr } A) \setminus D_\pm(a)$ est fermée et constructible.

(ii) Plus généralement, soient $a_\bullet := (a_1, \dots, a_n)$ et $b_\bullet := (b_1, \dots, b_m)$ deux suites finies d'éléments de A . Les parties

$$D_+(a_\bullet) := D_+(a_1) \cap \dots \cap D_+(a_n) \quad \text{et} \quad W(b_\bullet) := W(b_1) \cap \dots \cap W(b_m)$$

sont respectivement ouverte constructible et fermée constructible dans $\text{Spr } A$, et

$$R_A^+(b_\bullet; a_\bullet) := W(b_\bullet) \cap D_+(a_\bullet)$$

est une partie constructible. Noter que $W(b_\bullet) = W(b_1^2 + \dots + b_m^2)$ (remarque 8.48(iii)). Noter aussi que $R_A^+(0; a_\bullet) = D_+(a_\bullet)$ et $R_A^+(b_\bullet; 1) = W(b_\bullet)$.

Remarque 8.70. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } B$, et $\mathfrak{p}' := f^{-1}(\mathfrak{p})$; la relation d'ordre $\leq_\lambda$ de $k(\mathfrak{p})$ induit par restriction, via l'extension de corps résiduels $f_{(\mathfrak{p})} : k(\mathfrak{p}') \rightarrow k(\mathfrak{p})$, une structure de corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{p}'), \leq'_\lambda)$ sur $k(\mathfrak{p}')$; on obtient ainsi une application bien définie

$$\text{Spr } f : \text{Spr } B \rightarrow \text{Spr } A \quad (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \mapsto (\mathfrak{p}', \leq'_\lambda).$$

Par simple inspection, on voit que $(\text{Spr } f)^{-1}D_+(a) = D_+(f(a))$ pour tout $a \in A$. En particulier, $\text{Spr } f$ est une application continue et compacte. Au vu de l'exercice 8.66(iii), $\text{Spr } f$ correspond à une application naturelle $\mathcal{C}_B^p \rightarrow \mathcal{C}_A^p$: encore par inspection directe, on trouve que cette dernière associe à tout cône premier $C \subset B$ son image réciproque $f^{-1}C \subset A$: les détails sont confiés aux soins du lecteur.

(ii) Pour tout $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } B$, on fixera une clôture formellement réelle

$$\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$$

du corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{p}), \leq_\lambda)$. Noter que dans la situation de (i), d'après l'observation 8.60, l'extension de corps résiduels $f_{(\mathfrak{p})} : k(\mathfrak{p}') \rightarrow k(\mathfrak{p})$ se prolonge en un unique homomorphisme de corps totalement ordonnés

$$\bar{f}_{(\mathfrak{p})} : \bar{k}(\mathfrak{p}', \leq'_\lambda) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda).$$

(iii) Pour tout anneau A on a aussi une application naturelle de *support* :

$$\sigma_A : \text{Spr } A \rightarrow \text{Spec } A \quad (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \mapsto \mathfrak{p}.$$

Noter que $\sigma_A^{-1}(D(a)) = D_\pm(a)$ pour tout $a \in A$. Ainsi, σ_A est continue et compacte. Les associations : $A \mapsto \text{Spr } A$ et $(f : A \rightarrow B) \mapsto \text{Spr } f$ définissent un foncteur

$$\text{Spr} : (\mathbb{Z} - \text{Alg})^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$$

et l'association : $A \mapsto \sigma_A$ est une transformation naturelle $\sigma : \text{Spr} \rightarrow \text{Spec}$.

(iv) La preuve du théorème 8.67 montre aussi que toute partie constructible de $\text{Spr } A$ est une réunion finie de parties de la forme $\bigcap_{i=1}^n D_+(a_i) \setminus D_+(b_i)$, pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, et $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in A$. Mais, avec la notation de l'exemple 8.69, on a :

$$D_+(a) \setminus D_+(b) = D_+(a, -b) \cup R_A^+(b; a).$$

Donc, toute partie constructible de $\text{Spr } A$ est une réunion finie de parties $R_A^+(b_\bullet; a_\bullet)$ associées aux suites finies $a_\bullet, b_\bullet$ d'éléments de A .

Exemple 8.71. (i) Pour tout espace topologique T , l'application

$$\sigma_{\mathcal{C}(T)} : \text{Spr } \mathcal{C}(T) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{C}(T)$$

est un homéomorphisme. En effet, la proposition 8.61(i) entraîne aisément que $\sigma_{\mathcal{C}(T)}$ est une bijection ; d'après la proposition 4.69(ii), il suffit alors de montrer que $\sigma_{\mathcal{C}(T)}$ est une application spécialisante. Cela revient à vérifier l'assertion suivante. Si $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ et $\mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ sont deux points de $\text{Spr } \mathcal{C}(T)$ avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, alors λ est une spécialisation de μ dans $\text{Spr } \mathcal{C}(T)$. Or, soit $f \in \mathcal{C}(T)$, et notons par $f_\mathfrak{p} \in k(\mathfrak{p})$ et $f_\mathfrak{q} \in k(\mathfrak{q})$ les classes de f ; supposons que $\mu \notin D_+(f)$. Comme $k(\mathfrak{q})$ est formellement réel clos, il existe alors $x \in k(\mathfrak{q})$ tel que $x^2 = -f_\mathfrak{q}$ (proposition 8.53(ii)), et d'après la proposition 8.61(ii) on a $x \in \mathcal{C}(T)/\mathfrak{q}$; si $x_\mathfrak{p} \in \mathcal{C}(T)/\mathfrak{p}$ dénote l'image de x , il vient $x_\mathfrak{p}^2 = -f_\mathfrak{p}$, d'où $\lambda \notin D_+(f)$, comme souhaité.

(ii) Soit $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } \mathbb{R}[X]$; si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$, l'extension de corps résiduels $\mathbb{R} \rightarrow k(\mathfrak{p})$ doit être un isomorphisme, donc $\mathfrak{p}$ est engendré par $X - a$ pour un unique $a \in \mathbb{R}$, et $\leq_\lambda$ est l'unique ordre total de $k(\mathfrak{p})$; ainsi, on identifie naturellement $\mathbb{R}$ avec une partie de $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$. Sinon, $\mathfrak{p} = 0$ et $\leq_\lambda$ est un des ordres totaux du corps $\mathbb{R}(X)$, qui ont été classifiés par l'exemple 8.58 : en résumé, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a deux tels points $a^+ := (0, \leq_{a^+})$ et $a^- := (0, \leq_{a^-})$ de $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$, auxquels il faut ajouter les points $+\infty := (0, \leq_{+\infty})$ et $-\infty := (0, \leq_{-\infty})$. Il vient :

$$\text{Spr } \mathbb{R}[X] = \{-\infty, +\infty\} \cup \{a^-, a, a^+ \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Munissons $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$ de l'ordre total tel que $-\infty < a^- < a < a^+ < b < +\infty$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; puis, pour tous $x, y \in \text{Spr } \mathbb{R}[X]$ avec $x < y$ on posera $[x, y] := \{z \in \text{Spr } \mathbb{R}[X] \mid x \leq z \leq y\}$. Noter que si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $D_+(PQ) = D_+(P, Q) \cup D_+(-P, -Q)$; il s'ensuit aussitôt que les parties $D_+(P)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ forment une prébase de la topologie de $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$. Mais si P est irréductible et unitaire de degré 2, on a $P = (X - a)^2 + b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$, et alors $D_+(P) = \text{Spr } \mathbb{R}[X]$. Donc en fait l'ensemble $\{D_+(X - a), D_+(a - X) \mid a \in \mathbb{R}\}$ est déjà une prébase pour $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$. Noter que

$$D_+(X - a) = [a^+, +\infty] \quad D_+(a - X) = [-\infty, a^-] \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Par suite, toute partie ouverte de $\text{Spr } \mathbb{R}[X]$ est la réunion d'intervalles $[a^+, b^-]$ avec $a < b$ réels, et de demi-droites $[a^+, +\infty]$ et $[-\infty, a^-]$. Noter aussi que

$$\text{Min}(\text{Spr } \mathbb{R}[X]) = \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$$

est homéomorphe à l'intervalle fermé $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ (notation de la remarque 4.62(i)).

Exercice 8.72. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et $p : A \rightarrow A/I$ la projection.

(i) Montrer que l'application $\phi := \text{Spr}(p) : \text{Spr } A/I \rightarrow \text{Spr } A$ est injective, et son image est $\sigma_A^{-1}(V(I))$, où σ_A est définie comme dans la remarque 8.70(iii). De plus, la topologie de $\text{Spr } A/I$ coïncide avec la topologie induite par $\text{Spr } A$ via ϕ .

(ii) Si I est engendré par une suite finie $b_1, \dots, b_n \in A$, montrer que l'image de ϕ est la partie fermée constructible $W(b_1, \dots, b_n)$ (notation de l'exemple 8.69(ii)).

Exercice 8.73. Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie, $j : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation.

(i) Montrer que $\phi := \text{Spr}(j) : \text{Spr } S^{-1}A \rightarrow \text{Spr } A$ est injective, et son image est $T := \sigma_A^{-1}(U)$, où $U := \bigcap_{s \in S} D(s)$ est l'image de $\text{Spec}(j) : \text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \text{Spec } A$. De plus la topologie de $\text{Spr } S^{-1}A$ coïncide avec celle induite par $\text{Spr } A$ via ϕ .

(ii) En particulier, si $S = \{f\}$ pour quelque $f \in A$, l'image de $\phi : \text{Spr } A_f \rightarrow \text{Spr } A$ est la partie ouverte constructible $D_+(f)$.

Remarque 8.74. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que $\text{Spr } f$ est une *immersion constructible* si son image est constructible dans $\text{Spr } A$, la topologie de $\text{Spr } B$ coïncide avec celle induite par $\text{Spr } A$ via $\text{Spr } f$, et l'extension de corps résiduels $f_{(\mathfrak{p})} : k(f^{-1}\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est un isomorphisme pour tout $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } B$.

(i) Noter que si $\text{Spr } f$ est une immersion constructible, alors elle est injective, car $\text{Spr } B$ est un espace de type T_0 (remarque 4.51(iv)). D'après le lemme 6.111, pour toute partie constructible $Z \subset \text{Spr } B$, la partie $(\text{Spr } f)(Z)$ est constructible dans $\text{Spr } A$; par suite, si $g : B \rightarrow C$ est un autre homomorphisme d'anneaux tel que $\text{Spr } g$ est une immersion constructible, il en est de même pour $\text{Spr}(g \circ f)$.

(ii) Considérons un diagramme cocartésien d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ f' \downarrow & & \downarrow g \\ B' & \xrightarrow{g'} & B'' \end{array}$$

tel que $\text{Spr}(f)$ soit une immersion constructible. Alors il vient une bijection :

$$\text{Spr } B'' \xrightarrow{\sim} \text{Spr } B \times_{\text{Spr}(A)} \text{Spr } B' \quad \nu \mapsto (\text{Spr } g(\nu), \text{Spr } g'(\nu)).$$

En effet, soient $\mu := (\mathfrak{p}, \leq_\mu) \in \text{Spr } B$, et $\lambda := (\mathfrak{q}, \leq_\lambda) := (\text{Spr } f)(\mu)$; par l'exercice 8.66(iii) et la remarque 8.70(i), la partie $(\text{Spr } f')^{-1}(\lambda) \subset \text{Spr } B'$ correspond naturellement à l'ensemble des cônes premiers $C \subset k(\mathfrak{q}) \otimes_A B'$ tels que $k(\mathfrak{q}) \cap C$ soit le cône positif $C(\lambda)$ du corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{q}), \leq_\lambda)$. De même, $(\text{Spr } g)^{-1}(\mu) \subset \text{Spr } B''$ correspond à l'ensemble des cônes premiers $C \subset k(\mathfrak{p}) \otimes_B B''$ tels que $k(\mathfrak{p}) \cap C$ soit le cône positif $C(\mu)$ de $(k(\mathfrak{p}), \leq_\mu)$. Mais par hypothèse, l'extension $k(\mathfrak{q}) \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est un isomorphisme envoyant $C(\lambda)$ sur $C(\mu)$; donc g' induit un isomorphisme $k(\mathfrak{q}) \otimes_A B' \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p}) \otimes_B B''$, induisant à son tour une bijection entre les cônes premiers de $k(\mathfrak{q}) \otimes_A B'$ et ceux de $k(\mathfrak{p}) \otimes_B B''$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

(iii) Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie. Une *filtration constructible adaptée à S* est la donnée d'une famille $(f_\lambda : A \rightarrow A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'homomorphismes d'anneaux, vérifiant les conditions suivantes :

- (a) On a $f_\lambda(S) \subset A_\lambda^\times \cup \{0\}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.
- (b) $\text{Spr } f_\lambda : \text{Spr } A_\lambda \rightarrow \text{Spr } A$ est une immersion constructible pour tout $\lambda \in \Lambda$.
- (c) $\text{Spr } A$ est la réunion disjointe des images des applications $\text{Spr } f_\lambda$.

Si S est une partie finie, il existe une filtration constructible finie adaptée à S . Pour la preuve, on raisonne par récurrence sur la cardinalité c de S : si $c = 0$, on prend

la famille triviale $(Id_A : A \rightarrow A)$, et il n'y a rien à montrer. Soit donc $c > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute partie de cardinalité $< c$; on choisit $a \in S$, et une filtration constructible $(f_\lambda : A \rightarrow A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ adaptée à $S \setminus \{a\}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $g_{\lambda,1} : A_\lambda \rightarrow A_{\lambda,1} := A_\lambda / f_\lambda(a)A_\lambda$ la projection naturelle et $g_{\lambda,2} : A_\lambda \rightarrow A_{\lambda,2} := A_\lambda[f_\lambda(a)^{-1}]$ la localisation; avec les exercices 8.72 et 8.73 on voit aisément que $(g_{\lambda,i} : A_\lambda \rightarrow A_{\lambda,i} \mid i = 1, 2)$ est une filtration constructible adaptée à $\{f_\lambda(a)\}$. Il s'ensuit aussitôt que $(g_{\lambda,i} \circ f_\lambda : A \rightarrow A_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda, i = 1, 2)$ est une filtration constructible adaptée à S .

Problème 8.75. Soient A un anneau, $f : A \rightarrow A[X]$ l'homomorphisme structurel, $\pi := \text{Spr}(f) : \text{Spr } A[X] \rightarrow \text{Spr } A$, et $P_1, \dots, P_q \in A[X]$. Montrer que :

$$\pi(D_+(P_1, \dots, P_q)) = \bigcup_{i,j=1}^q Z_{ij}^{(1)} \cup Z_i^{(2)} \cup Z_j^{(3)} \cup Z^{(4)}$$

où, pour tous $i, j = 1, \dots, q$ et tout $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$ on a :

- (a) $\lambda \in Z_{ij}^{(1)}$ s'il existe $a, b \in \overline{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $a <_\lambda b$ et $P_i(a) = P_j(b) = 0$, et tels que P_t ne s'annule pas sur $]a, b[$ et $P_t(\frac{a+b}{2}) >_\lambda 0$ pour tout $t = 1, \dots, q$.
- (b) $\lambda \in Z_i^{(2)}$ s'il existe $a \in \overline{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $P_i(a) = 0$, tel que $P_t(a+1) >_\lambda 0$ et P_t ne s'annule pas sur $]a, +\infty[$, pour tout $t = 1, \dots, q$.
- (c) $\lambda \in Z_j^{(3)}$ s'il existe $b \in \overline{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $P_j(b) = 0$, tel que $P_t(b-1) >_\lambda 0$ et P_t ne s'annule pas sur $] -\infty, b[$, pour tout $t = 1, \dots, q$.
- (d) $\lambda \in Z^{(4)}$ si P_t ne s'annule pas sur $\overline{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ et $P_t(0) > 0$ pour tout $t = 1, \dots, q$.

Le théorème suivant est l'homologue pour spectres réels du théorème de Chevalley 6.115. Il est aussi une reformulation du *principe de Tarski-Seidenberg*, un outil clef de la géométrie algébrique réelle.

Théorème 8.76. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, $Z \subset \text{Spr } B$ une partie constructible. Alors $(\text{Spr } f)(Z)$ est une partie constructible de $\text{Spr } A$.

Démonstration. Rappelons que pour tout $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$, le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ est de caractéristique zéro (remarque 8.48(i)); au vu de l'exercice 8.73(i), la localisation $j : A \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ induit alors un homéomorphisme $\text{Spr}(j) : \text{Spr } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} \text{Spr } A$, et de même on a une identification naturelle $\text{Spr } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{\sim} \text{Spr } B$. Sous ces identifications, l'application $\text{Spr } f$ correspond à $\text{Spr}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} f) : \text{Spr } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow \text{Spr } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$. On peut donc supposer du départ que A et B soient des $\mathbb{Q}$ -algèbres.

Affirmation 8.77. On peut supposer que f soit l'homomorphisme structurel de la A -algèbre de polynômes $A[X]$.

Preuve : Evidemment, si le théorème est vrai pour des homomorphismes $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, il est vrai aussi pour $g \circ f$. Or, supposons que le théorème soit déjà connu pour l'homomorphisme structurel $A \rightarrow A[X]$ de toute A -algèbre de polynômes à une indéterminée X , pour tout anneau A et toute partie constructible Z de $\text{Spr } A[X]$; par récurrence sur n , on déduit alors le théorème pour l'homomorphisme structurel $j_n : A \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, car ce dernier est la composition des homomorphismes $A \rightarrow A[X_1] \rightarrow A[X_1, X_2] \rightarrow \dots \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$, pour lesquels l'assertion est déjà connue par hypothèse. Mais on a un isomorphisme de A -algèbres $\omega : A[X_1, \dots, X_n]/I \xrightarrow{\sim} B$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$ et un idéal de type fini $I \subset C := A[X_1, \dots, X_n]$; l'homomorphisme f est ainsi la composition de j_n , de la projection $p : C \rightarrow C/I$, et de ω . On est donc ramené à montrer le théorème pour p . Mais pour ce dernier, il suffit d'invoquer l'exercice 8.72 et le lemme 6.111. $\diamond$

Donc, on supposera par la suite que $f : A \rightarrow B := A[X]$ soit l'homomorphisme structurel, et on pose $\phi := \text{Spr } f$. Au vu de la remarque 8.70(iv), on peut aussi supposer

que $Z = R_B^+(b_\bullet; a_\bullet)$ pour des suites de polynômes $a_\bullet := (a_1(X), \dots, a_n(X))$ et $b_\bullet := (b_1(X), \dots, b_m(X))$ de B . On notera par $\deg_X P$ le degré de tout $P \in B$ non nul, et on posera $\deg_X 0 := -1$; pour toute suite finie $c_\bullet := (c_1, \dots, c_k)$ d'éléments de B , on pose aussi $N(c_\bullet) := \max(\deg_X c_i \mid i = 1, \dots, k)$ et on raisonne par récurrence sur $N(a_\bullet, b_\bullet)$. Disons que $a_i := \sum_{j=0}^{d_i} a_{ij} X^{d_i-j}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $b_i := \sum_{j=0}^{e_i} b_{ij} X^{e_i-j}$ pour $i = 1, \dots, m$.

Affirmation 8.78. Le théorème est vrai pour $Z = R_B^+(b_\bullet; a_\bullet)$ si $N(a_\bullet, b_\bullet) \leq 0$.

Preuve : Dans ce cas, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$, et évidemment $\phi(Z) \subset T := R_A^+(b_\bullet; a_\bullet)$. Soit $p : B \rightarrow A$ l'homomorphisme d'anneaux tel que $p(P) := P(0)$ pour tout $P(X) \in B$, et posons $\psi := \text{Spr}(p)$; on a $p \circ f = \text{Id}_A$, d'où $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\text{Spr } A}$. Evidemment $\psi(T) \subset Z$, d'où $T = \phi \circ \psi(T) \subset \phi(Z)$, et donc $\phi(Z) = T$. $\diamond$

Supposons donc que $N := N(a_\bullet, b_\bullet) > 0$, et que l'assertion soit déjà connue pour tout couple de suites finies $r_\bullet, s_\bullet$ d'éléments de B avec $N(r_\bullet, s_\bullet) < N$.

Affirmation 8.79. Si $b_{10} \in A^\times$, il existe $r_2, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n \in B$ tels que

$$N(r_\bullet, s_\bullet) < e_1 \quad \text{et} \quad Z = R_B^+(b_1, r_2, \dots, r_m; s_\bullet).$$

Preuve : Il suffit de remarquer que la division euclidienne par b_1 est disponible dans l'anneau B , i.e. pour tout $P \in B$ il existe $Q, R \in B$ tels que $P = b_1 Q + R$ et $\deg_X R < e_1$. Pour cela, on raisonne par récurrence sur le degré d de P . Si $d < e_1$, l'assertion est trivialement vérifiée avec $Q = 0$ et $R = P$. Soit alors $d \geq e_1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout polynôme de degré $< d$; disons que $P(X) = \sum_{i=0}^d \alpha_i X^{d-i} \in B$. Alors $P = \alpha_0 b_{10}^{-1} X^{d-e_1} b_1 + R_1$, avec $\deg_X R_1 < d$; par récurrence, on a $R_1 = Q_1 b_1 + R_2$ avec $\deg_X R_2 < e_1$, donc on pourra prendre $Q := Q_1 + \alpha_0 b_{10}^{-1} X^{d-e_1}$ et $R := R_2$. Cela étant, pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 2, \dots, m$ écrivons $a_i = P_i b_1 + s_i$ et $b_j = Q_j b_1 + r_j$ avec $P_i, s_i, Q_j, r_j \in B$ et $\deg_X r_j, \deg_X s_i < e_1$; il est clair que $Z = R_B^+(b_1, r_2, \dots, r_m; s_\bullet)$. $\diamond$

Affirmation 8.80. Soit $c := \sum_{i=0}^d c_i X^{d-i} \in B$ avec $d < N$ et $c_0 \in A^\times$. Pour toute partie constructible $T \subset \text{Spr } B$, la partie $\phi(W(c) \cap T)$ est constructible dans $\text{Spr } A$.

Preuve : On peut supposer que $T = R_B^+(r_\bullet; s_\bullet)$ pour des suites $r_\bullet := (r_2, \dots, r_m)$, $s_\bullet := (s_1, \dots, s_n)$ d'éléments de B , et donc $W(c) \cap T = R_B^+(r_\bullet^*; s_\bullet)$, avec $r_\bullet^* := (c, r_2, \dots, r_m)$. Au vu de l'observation 8.79, on peut supposer que $N(r_\bullet^*, s_\bullet) = d$, et l'assertion vient alors de notre hypothèse de récurrence. $\diamond$

Affirmation 8.81. On peut supposer que $a_{i0} \in A^\times$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

(a) $m = 1$, $b_{10} \in A^\times$ et $N(a_\bullet) < N$.

(b) $Z = D_+(a_\bullet)$.

Preuve : Soit S l'ensemble des coefficients des polynômes $b_1, \dots, b_m$. D'après la remarque 8.74(iii), il existe une filtration constructible $(g_\lambda : A \rightarrow A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ finie et adaptée à la partie S . Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $h_\lambda := g_\lambda \otimes_A A[X] : A[X] \rightarrow A_\lambda[X]$, et $f_\lambda : A_\lambda \rightarrow A_\lambda[X]$ l'homomorphisme structurel; on pose $\phi_\lambda := \text{Spr } f_\lambda$. Il vient un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spr } A_\lambda[X] & \xrightarrow{\text{Spr } h_\lambda} & \text{Spr } A[X] \\ \phi_\lambda \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spr } A_\lambda & \xrightarrow{\text{Spr } g_\lambda} & \text{Spr } A. \end{array}$$

Evidemment $Z_\lambda := (\text{Spr } h_\lambda)^{-1}(Z) = R_{A_\lambda[X]}^+(h_\lambda(b_\bullet); h_\lambda(a_\bullet))$; d'autre part, d'après la remarque 8.74(ii) on a $\phi_\lambda(Z_\lambda) = (\text{Spr } g_\lambda)^{-1}(\phi Z)$, et au vu de la remarque 8.74(i), il suffit alors de montrer que $\phi_\lambda(Z_\lambda)$ est une partie constructible de $\text{Spr } A_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$; noter que $N(h_\lambda(a_\bullet), h_\lambda(b_\bullet)) \leq N$ pour tout tel λ . Or, si $h_\lambda(b_1) = \dots = h_\lambda(b_m) = 0$, la condition (b) est vérifiée. Sinon, quitte à permuter les polynômes b_i et à remplacer A, B

par A_λ, B_λ , on est ramené au cas où $b_{10} \in A^\times$, et grâce à l'observation 8.79, on peut ensuite modifier $b_2, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n$ pour avoir aussi :

(c) $N(b_2, \dots, b_m, a_\bullet) < e_1$.

Après cette modification, les coefficients non nuls des $b_2, \dots, b_m$ ne sont plus forcément inversibles ; soit alors S' l'ensemble des coefficients de ces polynômes, et prenons une filtration constructible $(g'_\lambda : A \rightarrow A'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$ adaptée à S' . Soit $h'_\lambda := g'_\lambda \otimes_A A[X]$, notons $f'_\lambda : A'_\lambda \rightarrow A'_\lambda[X]$ l'homomorphisme structurel, et $Z'_\lambda := R^+_{A'_\lambda[X]}(h'_\lambda(b_\bullet); h'_\lambda(a_\bullet))$ pour tout $\lambda \in \Lambda'$; en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène à montrer que $(\text{Spr } f'_\lambda)(Z'_\lambda)$ est constructible dans $\text{Spr } A'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda'$. On peut donc supposer que (c) est vérifiée, et que tous les coefficients non nuls de $b_1, \dots, b_m$ soient inversibles. Or, si $b_2 = \dots = b_m = 0$, la condition (a) est vérifiée. Sinon, disons que $b_2 \neq 0$, et donc $b_{20} \in A^\times$; on a $Z = W(b_2) \cap Z$, et dans ce cas l'assertion du théorème suit de l'observation 8.80.

En dernier lieu, pour se ramener au cas où chaque coefficient non nul de $a_1, \dots, a_n$ est inversible, on considère une filtration constructible finie adaptée à l'ensemble des coefficients de ces polynômes, et on raisonne à nouveau comme ci-dessus : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Noter que si $a_i = 0$ pour quelque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $Z_\lambda = \emptyset$, et l'assertion est triviale dans ce cas ; on peut donc supposer que le coefficient principal de $a_1, \dots, a_n$ soit inversible dans A . $\diamond$

• On considère d'abord la condition (a) de l'observation 8.81, i.e. $Z = R^+_B(b; a_\bullet)$, avec $b(X) \in B$ de degré N dont le coefficient principal b_0 est inversible dans A , et $a_1, \dots, a_n$ de degrés $< N$ et coefficients principaux $a_{10}, \dots, a_{n0} \in A^\times$. Noter que le coefficient principal de la dérivée b' de b (par rapport à l'indéterminée X) est Nb_0 , et comme $N > 0$ et que A est une $\mathbb{Q}$ -algèbre, on a $Nb_0 \in A^\times$ aussi. Posons

$$Z_1 := W(b') \cap Z \quad Z_2 := D_+(b') \cap Z \quad Z_3 := D_+(-b') \cap Z.$$

Comme $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$, il suffit de montrer que $\phi(Z_i)$ est constructible dans $\text{Spr } A$ pour $i = 1, 2, 3$. Or, l'assertion pour Z_1 suit de l'observation 8.80, car $\deg_X b' < N$; l'assertion pour Z_3 est ramenée aussitôt à celle pour Z_2 , quitte à remplacer b par $-b$. Pour Z_2 , on pose $a_{n+1} := b'$, et on remarque :

Affirmation 8.82. Avec la notation ci-dessus (et celle de la remarque 8.70(ii)) :

$$\phi(Z_2) = \bigcup_{i,j=1}^{n+1} T_{ij}^{(1)} \cup T_i^{(2)} \cup T_j^{(3)} \cup T^{(4)}$$

où, pour tous $i, j = 1, \dots, n+1$ et tout $\lambda := (\mathbf{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$ on a :

(a) $\lambda \in T_{ij}^{(1)}$ s'il existe $y, z \in \bar{k}(\mathbf{p}, \leq_\lambda)$ avec

$$y <_\lambda z \quad b(y) <_\lambda 0 <_\lambda b(z) \quad a_i(y) = a_j(z) = 0$$

tels que a_t ne s'annule pas sur $]y, z[$ et $a_t(\frac{y+z}{2}) >_\lambda 0$ pour tout $t = 1, \dots, n+1$.

(b) $\lambda \in T_i^{(2)}$ s'il existe $y, z \in \bar{k}(\mathbf{p}, \leq_\lambda)$ avec

$$b(y) <_\lambda 0 \quad a_i(y) = 0 \quad b(x) >_\lambda 0 \quad \forall x \in [z, +\infty[$$

tels que a_t ne s'annule pas sur $]y, +\infty[$ et $a_t(y+1) > 0$ pour $t = 1, \dots, n+1$.

(c) $\lambda \in T_j^{(3)}$ s'il existe $y, z \in \bar{k}(\mathbf{p}, \leq_\lambda)$ avec

$$b(z) >_\lambda 0 \quad a_j(z) = 0 \quad b(x) <_\lambda 0 \quad \forall x \in]-\infty, y]$$

tels que a_t ne s'annule pas sur $] -\infty, z[$ et $a_t(z-1) > 0$ pour $t = 1, \dots, n+1$.

(d) $\lambda \in T^{(4)}$ s'il existe $y, z \in \bar{k}(\mathbf{p}, \leq_\lambda)$ avec

$$b(x) <_\lambda 0 \quad \forall x \in]-\infty, y] \quad b(x) >_\lambda 0 \quad \forall x \in [z, +\infty[$$

et $a_t(x) > 0$ pour tout $x \in \bar{k}(\mathbf{p}, \leq_\lambda)$ et tout $t = 1, \dots, n+1$.

Preuve : On raisonne comme dans la solution du problème 8.75 : d'abord, si $\lambda \in T_{ij}^{(1)}$ pour quelque $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$, soient $y, z \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ comme dans (a) ; d'après l'exercice 8.55(i), il existe $x \in]y, z[$ tel que $b(x) = 0$, et a_t a signe constant sur l'intervalle $]y, z[$, pour tout $t = 1, \dots, n+1$. Par suite $a_t(x) > 0$ pour $t = 1, \dots, n+1$. Or, soit $p : A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ la projection, et $q : A[X] \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $q \circ f = p$ et $q(X) = x$. On pose $\mathfrak{q} := \text{Ker}(q)$; évidemment q se factorise à travers un homomorphisme $k(\mathfrak{q}) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et on munit $k(\mathfrak{q})$ de l'ordre total $\leq_\mu$ induit par celui de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$. Il vient

$$(*) \quad \mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in Z_2 \quad \text{et} \quad \phi(\mu) = \lambda.$$

Ensuite, si $\lambda \in T_i^{(2)}$ pour quelque $i \in \{1, \dots, n+1\}$, il existe $x \in]y, z[$ tel que $b(x) = 0$, et a_t a signe constant sur la demi-droite $]y, +\infty[$ pour tout $t = 1, \dots, n+1$; en particulier $a_1(x), \dots, a_{n+1}(x) > 0$. Si l'on définit $\mathfrak{q}$ et $\leq_\mu$ comme dans le cas précédent, on trouve encore (*). On raisonne de même si $\lambda \in T_j^{(3)}$ pour quelque $j \in \{1, \dots, n+1\}$ ou si $\lambda \in T^{(4)}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Réciproquement, soit $\lambda \in \phi(Z_2)$; notons par $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$ les racines dans $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ des polynômes $a_1, \dots, a_{n+1}$. Soit $(\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in Z_2$ avec $\lambda = \phi(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$; comme dans la solution du problème 8.75, on identifie naturellement $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec un sous-corps de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, et on voit que toutes les racines dans $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ des polynômes $a_1, \dots, a_{n+1}$ et b se trouvent déjà dans ce sous-corps. Or, soit $\beta \in k(\mathfrak{q}) \cap \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ la classe de X , et supposons que $\alpha_l < \beta < \alpha_{l+1}$ pour quelque $l \in \{1, \dots, k-1\}$; les polynômes $a_1, \dots, a_{n+1}$ ont signe constant sur l'intervalle $]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$ de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, car ils n'ont aucune racine dans cet intervalle. Comme $a_t(\beta) >_\mu 0$ pour $t = 1, \dots, n+1$, il vient :

$$a_t((\alpha_l + \alpha_{l+1})/2) > 0 \quad \forall t = 1, \dots, n+1.$$

De plus, comme $b(\beta) = 0$ et $b'(x) = a_{n+1}(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$, on a $b(\alpha_l) <_\lambda 0 <_\lambda b(\alpha_{l+1})$ (exercice 8.55(iv)). Si α_l est racine de a_i et α_{l+1} est racine de a_j , on a ainsi $\lambda \in T_{ij}^{(1)}$. Ensuite, supposons que $\beta >_\mu \alpha_k$; les polynômes $a_1, \dots, a_{n+1}$ n'ont aucune racine dans la demi-droite $]\alpha_k, +\infty[$, donc ils ont signe constant sur cette demi-droite, et par hypothèse $a_t(\beta) >_\mu 0$ pour tout $t = 1, \dots, n+1$. Il vient :

$$a_t(\alpha_k + 1) >_\lambda 0 \quad \forall t = 1, \dots, n+1.$$

De plus, comme $b(\beta) = 0$ et $b'(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha_k, +\infty[$, on a $b(\alpha_k) < 0$ et $b(x) >_\lambda 0$ pour tout $x >_\lambda \beta$, encore par l'exercice 8.55(iv)). Si $a_i(\alpha_k) = 0$, cela montre que $\lambda \in T_i^{(2)}$. De même, on voit que si $\beta <_\mu \alpha_1$, on a $\lambda \in T_j^{(3)}$ pour quelque $j \in \{1, \dots, n+1\}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. En dernier lieu, si $k = 0$, i.e. si aucun des polynômes $a_1, \dots, a_{n+1}$ ne s'annule sur $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, alors ces polynômes ne s'annulent non plus sur $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, donc ils ont signe constant sur ce corps, et $a_t(\beta) >_\mu 0$ pour $t = 1, \dots, n+1$; de plus, comme $b(\beta) = 0$ et $b'(x) > 0$ pour tout $x \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, il vient $b(x) <_\lambda 0$ pour tout $x \in]-\infty, \beta[$ et $b(x) >_\lambda 0$ pour tout $x \in]\beta, +\infty[$. Cela montre que $\lambda \in T^{(4)}$. $\diamond$

On est ainsi ramené à montrer que les parties $T_{ij}^{(1)}$, $T_i^{(2)}$, $T_j^{(3)}$ et $T^{(4)}$ sont constructibles dans $\text{Spr } A$. Pour cela, soit $B' := A[X, y, z]$, la A -algèbre polynomiale libre aux indéterminées X, y, z , et $B'' := A[y, z] \subset B'$; notons par $\pi : \text{Spr } B' \rightarrow \text{Spr } B''$ l'application continue induite par l'inclusion $B'' \rightarrow B'$. On pose

$$U_1 := D_+(-b(y), b(z)) \setminus \bigcup_{t=1}^{n+1} \pi(W(a_t(X)) \cap D_+(X - y, z - X)) \subset \text{Spr } B''.$$

Pour tout $(\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in \text{Spr } B'$, soient $\bar{X}, \bar{y}, \bar{z} \in k(\mathfrak{q})$ les classes de X, y, z .

Affirmation 8.83. On a $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in U_1$ si et seulement si $b(y) <_\lambda 0$, $b(z) >_\lambda 0$, et a_t ne s'annule pas sur l'intervalle $]\bar{y}, \bar{z}[$ du corps $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, pour tout $t = 1, \dots, n+1$.

Preuve : Si $\beta \in]\bar{y}, \bar{z}[$ est une racine de a_t , la projection $B'' \rightarrow k(\mathfrak{p}) \subset \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ se prolonge en un unique homomorphisme d'anneaux $g : B' \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ tel que $g(X) = \beta$;

soit $\mathfrak{q} := \text{Ker}(g)$, de sorte que g se factorise à travers un homomorphisme de corps $\bar{g} : k(\mathfrak{q}) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et munissons $k(\mathfrak{q})$ de l'ordre $\leq_\mu$ induit par $\leq_\lambda$ via $\bar{g}$. Evidemment $(\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in V_t := W(a_t(X)) \cap D_+(X - y, z - X)$, et $\pi(\mathfrak{q}, \leq_\mu) = (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$. Réciproquement, supposons que $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) = \pi(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ pour $(\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in V_t$, et comme d'habitude, on identifie naturellement $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec un sous-corps de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$. Or, le corps $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)[\bar{X}]$ est une extension algébrique de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ contenue dans le corps totalement ordonné $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$; par la maximalité de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, il vient $\bar{X} \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, donc a_t admet une racine dans $[\bar{y}, \bar{z}]$. $\diamond$

Soient maintenant $\pi' : \text{Spr } B'' \rightarrow \text{Spr } A[z]$ et $\pi'' : \text{Spr } A[z] \rightarrow \text{Spr } A$ les applications continues induites par les inclusions $A[z] \rightarrow B''$ et $A \rightarrow A[z]$; on pose

$$U'_1 := \pi' \left(W(a_i(y)) \cap D_+ \left(z - y, a_1 \left(\frac{y+z}{2} \right), \dots, a_{n+1} \left(\frac{y+z}{2} \right) \right) \cap U_1 \right)$$

$$U''_1 := \pi''(W(a_j(z)) \cap U'_1).$$

D'après l'observation 8.80, la partie U_1 est constructible dans $\text{Spr } B''$; de même, U'_1 est constructible dans $\text{Spr } A[z]$, et U''_1 est constructible dans $\text{Spr } A$, toujours en vertu de l'observation 8.80. Mais compte tenu de l'observation 8.83, on voit aisément que $U''_1 = T_{ij}^{(1)}$: les détails seront confiés aux soins du lecteur. Ensuite, posons

$$U_2 := D_+(-b(z)) \setminus \bigcup_{t=1}^{n+1} \pi'(W(a_t(y)) \cap D_+(y - z)) \subset \text{Spr } A[z]$$

$$U'_2 := \pi''(W(a_i(z)) \cap D_+(b_0, a_1(z+1), \dots, a_{n+1}(z+1)) \cap U_2).$$

Affirmation 8.84. (i) Soient $(K, \leq)$ un corps totalement ordonné, et $P(X) := c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n \in K[X]$ avec $c_0 \neq 0$. Pour tout $x \in K$ on a :

$$|x| > d := |c_0|^{-1}(|c_0| + \dots + |c_n|) \Rightarrow P(x)/(c_0 x^n) > 0.$$

(ii) $D_+(b_0) = \{(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A \mid \exists z \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \forall x \in [z, +\infty[\ b(x) >_\lambda 0\}$.

(iii) $D_+((-1)^{N+1}b_0) = \{(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A \mid \exists z \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \forall x \in]-\infty, z] \ b(x) <_\lambda 0\}$.

Preuve : On a $y := P(x)/(c_0 x^n) = 1 + c_0^{-1}c_1 x^{-1} + \dots + c_0^{-1}c_n x^{-n}$ pour tout $x \neq 0$. Noter que $d \geq 1$; donc, si $|x| > d$, on a $|x|^{-k} \leq |x|^{-1}$ pour tout $k \geq 1$, d'où $y \geq 1 - |xc_0|^{-1} \sum_{i=1}^n |c_i| > 1 - |x|^{-1}d > 0$. Cela achève la preuve de (i). L'assertion (ii) (resp. (iii)) découle de (i), avec $P(X) := b(X)$ (resp. avec $P(X) := -b(-X)$). $\diamond$

En raisonnant comme dans le cas précédent, et compte tenu de l'observation 8.84(ii), on voit aisément que d'un côté U_2 et U'_2 sont des parties constructibles de $\text{Spr } A[z]$ et respectivement $\text{Spr } A$; de l'autre côté $U'_2 = T_i^{(2)}$. De même, on vérifie que $T_j^{(3)}$ est constructible : les détails sont laissés aux soins du lecteur. En dernier lieu, avec l'observation 8.84(ii,iii) on voit aussitôt que :

$$T^{(4)} = D_+(b_0, (-1)^{N+1}b_0) \cap \bigcap_{t=1}^{n+1} (D_+(a_t(0)) \setminus \pi''(W(a_t(z))))$$

et cela est une partie constructible de $\text{Spr } A$, d'après l'observation 8.80.

Affirmation 8.85. Soit $c := \sum_{i=0}^d c_i X^{d-i} \in B$ avec $d \leq N$ et $c_0 \in A^\times$. Pour toute partie constructible $T \subset \text{Spr } B$, la partie $\phi(W(c) \cap T)$ est constructible dans $\text{Spr } A$.

Preuve : On peut supposer que $T = R_B^+(r_\bullet; s_\bullet)$ pour des suites $r_\bullet := (r_2, \dots, r_m)$, $s_\bullet := (s_1, \dots, s_n)$ d'éléments de B , et donc $W(c) \cap T = R_B^+(r_\bullet^*; s_\bullet)$, avec $r_\bullet^* := (c, r_2, \dots, r_m)$. Au vu de l'observation 8.79, on peut de plus supposer que $N(r_\bullet, s_\bullet) < N$. Ensuite, on choisit une filtration constructible adaptée à l'ensemble des coefficients de $r_2, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n$, et on raisonne comme dans la preuve de l'observation 8.81, pour se ramener au cas où les coefficients principaux de tous ces polynômes sont inversibles. Or, si $m \geq 2$, on a $R_B^+(r_\bullet^*, s_\bullet) = W(b_2) \cap R_B^+(r_\bullet^*, s_\bullet)$, et l'assertion suit déjà de l'observation 8.80. Sinon, la suite $r_\bullet^*$ ne contient que le polynôme c de degré N , et $N(s_\bullet) < N$, i.e. la condition (a) de l'observation 8.81 est vérifiée, et ce cas vient d'être traité. $\diamond$

• Il ne reste qu'à considérer le cas où Z satisfait la condition (b) de l'observation 8.81, i.e. $Z = D_+(a_1, \dots, a_n)$ avec $N(a_\bullet) = N$ et les coefficients principaux de $a_1, \dots, a_n$ sont inversibles dans A . Or, le problème 8.75 nous fournit une décomposition de $\phi(Z)$ en des parties $Z_{ij}^{(1)}, Z_i^{(2)}, Z_j^{(3)}$ et $Z^{(4)}$, analogue à celle de l'observation 8.82. La preuve de la constructibilité de ces parties se fait, *mutatis mutandis*, comme pour les parties correspondantes $T_{ij}^{(1)}, T_i^{(2)}, T_j^{(3)}$ et $T^{(4)}$: on détaille la vérification pour $T_{ij}^{(1)}$ et on laisse les autres cas au lecteur. En effet, soient :

$$\begin{aligned} U &:= \bigcap_{t=1}^n D_+ \left(a_t \left(\frac{y+z}{2} \right) \right) \setminus \pi(W(a_t(X)) \cap D_+(X-y, z-X)) \subset \text{Spr } B'' \\ U' &:= \pi'(W(a_i(y)) \cap D_+(z-y) \cap U) \\ U'' &:= \pi''(W(a_j(z)) \cap U'). \end{aligned}$$

Avec l'observation 8.85, on voit que U_1, U'_1 et U''_1 sont des parties constructibles de $\text{Spr } B''$, $\text{Spr } A[z]$ et respectivement $\text{Spr } A$; mais $U'' = T_{ij}^{(1)}$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 8.86. Le polonais Alfred Tarski (1901-83), l'un des plus éminents logiciens du 20ème siècle, est notamment célébré comme le fondateur de la *théorie des modèles*, dont le théorème 8.76 fut l'une des premières applications : en effet, dans sa formulation originaire, le principe de Tarski-Seidenberg établit *l'élimination des quantificateurs* pour la théorie du premier ordre des corps formellement réels clos. Une exposition plus proche en esprit à la théorie des modèles est proposée dans l'article [69] de Swan, auquel je me suis inspiré pour ma présentation.

Problème 8.87. (Le théorème d'homomorphisme d'Artin-Lang) Soient K un corps formellement réel clos, A une K -algèbre ; on pose $X := \text{Spec } A$, et rappelons que $X(K)$ dénote l'ensemble des K -points du K -schéma X (voir la remarque 5.49(v)). Pour tout $\mathfrak{m} \in X(K)$, l'extension de corps résiduels $K \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est un isomorphisme, en particulier $k(\mathfrak{m})$ est un corps formellement réel clos, et si $\leq_{\mathfrak{m}}$ dénote son ordre total, le couple $(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}})$ est un point de $\text{Spr } A$. On a ainsi une application injective

$$X(K) \rightarrow \text{Spr } A \quad \mathfrak{m} \mapsto (\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}})$$

qui identifie l'ensemble des K -points de X avec une partie de $\text{Spr } A$.

(i) Soit A une K -algèbre de type fini. Montrer que l'image de $X(K)$ est dense dans la topologie constructible de $\text{Spr } A$. Cet énoncé est l'homologue du problème 6.117(iv) ; il est aussi une forme du *théorème d'homomorphisme d'Artin-Lang*.

(ii) Soit $\mathcal{Q} \subset A$ la partie multiplicative des éléments de la forme $1 + \sum_{i=1}^r a_i^2$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $a_1, \dots, a_r \in A$. Supposons à nouveau que A soit une K -algèbre de type fini ; montrer que $X(K) \neq \emptyset$ si et seulement si $0 \notin \mathcal{Q}$.

(iii) Soit A une K -algèbre intègre et de type fini. Montrer que $X(K)$ est dense dans X si et seulement si le corps des fractions E de A est formellement réel.

(iv) (Reelnullstellensatz) Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier, $I \subset A := K[T_1, \dots, T_n]$ un idéal, $P \in A$, et $V_K(I) := \{x_\bullet \in K^n \mid f(x_\bullet) = 0 \forall f \in I\}$. Montrer que $P(x_\bullet) = 0$ pour tout $x_\bullet \in V(I) \Leftrightarrow$ il existe $r, s \in \mathbb{N}$ et $Q_1, \dots, Q_r \in A$ avec $P^{2s} + \sum_{i=1}^r Q_i^2 \in I$.

Une autre application célèbre est le théorème suivant de E.Artin, qui donne une réponse positive au *XVIIème problème de Hilbert* :

Théorème 8.88. Soient K un corps formellement réel clos, $n \in \mathbb{N}$ un entier, et $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ pour tous $a_1, \dots, a_n \in K$. Alors P est une somme de carrés dans le corps des fractions rationnelles $E := K(X_1, \dots, X_n)$.

Démonstration. Si P n'est pas une somme de carrés dans E , il existe un ordre total $\leq_\lambda$ sur E tel que $P <_\lambda 0$ (théorème 8.51(i)), d'où un point $\lambda := (0, \leq_\lambda) \in \text{Spr } K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\lambda \in D_+(-P)$. Soit $X := \text{Spec } K[X_1, \dots, X_n]$; d'après le problème 8.87(i), il existe

alors $\mathfrak{m} \in X(K)$ tel que $(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}}) \in D_+(-P)$. Mais $\mathfrak{m}$ correspond à un point $a_{\bullet} \in K^n$ tel que $-P(a_{\bullet}) > 0$, contradiction. $\square$

Exercice 8.89. Soit $A_{\bullet} := (A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ un système d'anneaux indexé par un ensemble partiellement ordonné filtrant Λ , et soit A la limite directe de $A_{\bullet}$. Montrer que le cône induit $(\text{Spr } A \rightarrow \text{Spr } A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ est universel, *i.e.* il identifie $\text{Spr } A$ avec la limite inverse du système cofiltrant d'espaces topologiques $(\text{Spr } A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$.

Problème 8.90. (i) Soient K un corps formellement réel clos, et E, F deux extensions formellement réelles de K . Montrer que $E \otimes_K F$ est un anneau intègre, et que son corps des fractions est formellement réel.

(ii) Soient $C \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ deux homomorphismes d'anneaux. Montrer que $g' := B \otimes_A g : B \rightarrow D := B \otimes_A C$ et $f' := f \otimes_A C : C \rightarrow D$ induisent une surjection :

$$\text{Spr } D \rightarrow \text{Spr } B \times_{\text{Spr } A} \text{Spr } C \quad \lambda \mapsto (\text{Spr}(g')(\lambda), \text{Spr}(f')(\lambda)).$$

8.3.1. Spécialisations dans le spectre réel. Pour tout anneau A , munissons $\text{Spr } A$ de l'ordre partiel $\leq$ induit par les spécialisations (voir la remarque 4.62(i)). Aussi, rappelons que pour tout $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_{\lambda}) \in \text{Spr } A$, le cône positif $C(\lambda)$ de λ est un cône premier (exercice 8.66(iii)). Une partie convexe du corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{p}), \leq_{\lambda})$ sera appelé aussi brièvement λ -convexe (voir la définition 8.33(i)).

Proposition 8.91. Avec la notation ci-dessus, soient $\lambda, \mu \in \text{Spr } A$. On a :

(i) $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow C(\mu) \subset C(\lambda)$.

(ii) L'adhérence $\overline{\{\lambda\}}$ de λ dans $\text{Spr } A$ est une partie totalement ordonnée.

(iii) Soit $\{\mathfrak{p}\}$ l'adhérence de $\mathfrak{p} := \sigma_A(\lambda)$ dans $\text{Spec } A$ (notation de la remarque 8.70(iii)).

Alors σ_A induit par restriction une injection $\overline{\{\lambda\}} \hookrightarrow \{\mathfrak{p}\}$.

Démonstration. (i) : Disons que $\lambda = (\mathfrak{p}, \leq_{\lambda})$ et $\mu = (\mu, \leq_{\mu})$; pour tout $a \in A$ notons par $a_{\mathfrak{p}} \in k(\mathfrak{p})$ et $a_{\mu} \in k(\mu)$ les classes de a . Par définition, on a $\lambda \leq \mu$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée. Pour tout $a \in A$ tel que $0 <_{\lambda} a_{\mathfrak{p}}$, on a $0 <_{\mu} a_{\mu}$; autrement dit : si $0 \leq_{\mu} -a_{\mu}$, alors $0 \leq_{\lambda} -a_{\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion.

(ii) : Soient $\mu, \mu' \in \overline{\{\lambda\}}$ avec $\mu \not\leq \mu'$ et $\mu' \not\leq \mu$; d'après (i), on trouve alors $a \in C(\mu) \setminus C(\mu')$ et $b \in C(\mu') \setminus C(\mu)$. On a soit $a - b \in C(\lambda)$, soit $b - a \in C(\lambda)$; comme $C(\lambda) \subset C(\mu) \cap C(\mu')$, dans le premier cas il vient $a = (a - b) + b \in C(\mu')$, et dans le deuxième cas $b = (b - a) + a \in C(\mu)$, contradiction.

(iii) : Soient $\mu, \mu' \in \overline{\{\lambda\}}$; d'après (i) et (ii) on peut supposer que $C(\mu) \subset C(\mu')$. Soit $x \in C(\mu') \setminus C(\mu)$; comme $C(\mu) \cup (-C(\mu)) = A$, il vient $-x \in C(\mu)$, donc $x \in \text{Supp}(C(\mu'))$ (notation de l'exercice 8.66) et $x \notin \text{Supp}(C(\mu))$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 8.92. Pour tout anneau A il existe une rétraction continue

$$\text{Spr } A \rightarrow \text{Min}(\text{Spr } A)$$

et $\text{Min}(\text{Spr } A)$ est compact et séparé pour la topologie induite par $\text{Spr } A$.

Démonstration. D'après la proposition 8.91(ii) (et avec le corollaire 4.72(i)), tout point de $\text{Spr } A$ admet une spécialisation unique dans $\text{Min } A$. L'assertion suit alors des corollaires 4.72(ii) et 4.80. $\square$

Lemme 8.93. Soient A un anneau, et $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_{\lambda}) \in \text{Spr } A$. On a :

(i) Pour tout sous-anneau $B \subset k(\mathfrak{p})$, la partie

$$B^* := \{x \in k(\mathfrak{p}) \mid \exists b \in B \text{ tel que } |x| \leq_{\lambda} |b|\}$$

est un anneau de valuation λ -convexe de $k(\mathfrak{p})$, appelé l'enveloppe λ -convexe de B .

(ii) Si, de plus, $(B, \mathfrak{m})$ est un sous-anneau local de $k(\mathfrak{p})$ et si $\mathfrak{m}$ est une partie convexe de $(B, \leq_{\lambda})$, alors B^* domine B (définition 8.20), et son idéal maximal est

$$\mathfrak{m}^* := \{x \in k(\mathfrak{p}) \mid |x| <_{\lambda} 1/(1 + |b|) \ \forall b \in B\}.$$

(iii) Soit $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation de $k(\mathfrak{p})$. Alors V est λ -convexe si et seulement si l'on a $0 <_\lambda 1 + x$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$.

(iv) Soient $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation λ -convexe de $k(\mathfrak{p})$, et $\pi : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection. Alors il existe un unique point $\lambda^* := (0, \leq_{\lambda^*}) \in \text{Spr } k(\mathfrak{m})$ tel que :

$$(*) \quad 0 <_{\lambda^*} \pi(x) \Leftrightarrow 0 <_\lambda x \quad \forall x \in V^\times.$$

On appelle $\leq_{\lambda^*}$ l'ordre induit par $\leq_\lambda$ sur $k(\mathfrak{m})$.

Démonstration. (i) : On vérifie sans peine que B^* est un sous-anneau λ -convexe de $k(\mathfrak{p})$. Pour voir que B^* est un anneau de valuation, il suffit de remarquer que pour tout $x \in k(\mathfrak{p})^\times$ on a soit $|x| \leq_\lambda 1$, soit $|x^{-1}| \leq_\lambda 1$ (lemme 8.16).

(ii) Noter que $0 < 1 \leq_\lambda 1 + |b|$ pour tout $b \in B$; comme $\mathfrak{m}$ est λ -convexe, il vient $1 + |b| \in B^\times$ pour tout $b \in B$. Or, soit $\mathfrak{m}_{B^*}$ l'idéal maximal de B^* ; si $x \in \mathfrak{m}_{B^*} \setminus \{0\}$, on a $x^{-1} \in k(\mathfrak{p}) \setminus B^*$, i.e. $b <_\lambda |x^{-1}|$ pour tout $b \in B$, et en particulier $1 + |b| <_\lambda |x^{-1}|$, i.e. $|x| <_\lambda 1/(1 + |b|)$. Cela montre que $\mathfrak{m}_{B^*} \subset \mathfrak{m}^*$. Pour l'inclusion réciproque, noter que si $x \in \mathfrak{m}^* \setminus \{0\}$, on a $b \leq_\lambda 1 + |b| <_\lambda |x^{-1}|$ pour tout $b \in B$, d'où $x^{-1} \notin B^*$, et donc $x \in \mathfrak{m}_{B^*}$. Ensuite, comme $B \subset B^*$, on a $B^\times \subset (B^*)^\times$, d'où $\mathfrak{m}^* \cap B \subset \mathfrak{m}$. Réciproquement, soit par l'absurde $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^*$; alors il existe $b \in B$ tel que $0 <_\lambda 1/(1 + |b|) \leq_\lambda |x|$. Mais on vient de voir que $1 + |b| \in B^\times$; la convexité de $\mathfrak{m}$ donne alors $1/(1 + |b|) \in \mathfrak{m}$, contradiction.

(iii) : Si V est λ -convexe et si $x \in k(\mathfrak{p})$ vérifie $1 + x \leq_\lambda 0$, il vient $1 \leq_\lambda -x$, d'où $0 <_\lambda -x^{-1} \leq_\lambda 1$, donc $x^{-1} \in V$, et ainsi $x \notin \mathfrak{m}$. Réciproquement, supposons que $0 <_\lambda 1 + x$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$, et soient $a \in k(\mathfrak{p})$, $b \in V$ avec $0 \leq_\lambda a \leq_\lambda b$; si $a \notin V$, il vient $a^{-1}b \in \mathfrak{m}$ et $0 <_\lambda a^{-1}$, d'où $1 \leq_\lambda a^{-1}b$, i.e. $1 - a^{-1}b \leq_\lambda 0$, contradiction.

(iv) : Montrons d'abord que si $a, b \in V^\times$ ont la même image dans $k(\mathfrak{m})$ et si $0 <_\lambda a$, alors $0 <_\lambda b$: en effet, la condition veut dire que $c := a - b \in \mathfrak{m}$, d'où $cb^{-1} \in \mathfrak{m}$ et $b = a(1 + cb^{-1})$; l'assertion suit alors de (iii). Cela établi, on voit aussitôt que la condition $(*)$ définit un ordre $\leq_{\lambda^*}$ tel que $(k(\mathfrak{m}), \leq_{\lambda^*})$ soit un corps totalement ordonné : les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

Proposition 8.94. Soient A un anneau, et $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda), \mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in \text{Spr } A$, avec $\lambda \geq \mu$. Soit aussi $B^* \subset k(\mathfrak{p})$ l'enveloppe λ -convexe de $B := (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$. On a :

(i) L'anneau de valuation $(B^*, \mathfrak{m}^*)$ domine B .

(ii) L'ordre $\leq_{\lambda^*}$ induit par $\leq_\lambda$ sur $k(\mathfrak{m}^*)$ étend l'ordre $\leq_\mu$ du sous-corps $k(\mathfrak{q})$.

Démonstration. (i) : Soient $a \in B$ et $b \in \mathfrak{m} := (\mathfrak{q}/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$ avec $0 \leq_\lambda a \leq_\lambda b$; compte tenu du lemme 8.93(ii), il suffit de montrer que $a \in \mathfrak{m}$. Soit $\pi : B \rightarrow k(\mathfrak{q})$ la projection. Comme $0 \leq_\lambda b - a$ et $0 \leq_\lambda a$, on a $\lambda \notin D_+(a - b) \cup D_+(-a)$, donc $\mu \notin D_+(a - b) \cup D_+(-a)$, d'où $\pi(a - b) \leq_\mu 0$ et $\pi(-a) \leq_\mu 0$. Mais $\pi(a - b) = \pi(a)$, donc finalement $\pi(a) = 0$, comme souhaité.

(ii) : D'après (i), on a $k(\mathfrak{q}) \subset k(\mathfrak{m}^*)$, donc $(\mathfrak{q}, \leq_{\lambda^*})$ est un point de $\text{Spr } A$; mais la condition $(*)$ du lemme 8.93(iv) entraîne aisément que $(\mathfrak{q}, \leq_{\lambda^*})$ est une spécialisation de λ . Au vu de la proposition 8.91(iii), l'assertion suit aussitôt. $\square$

Soient A un anneau, $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$, et $\overline{\{\lambda\}}$ l'adhérence de λ dans $\text{Spr } A$. Notons par $\mathcal{V}(A, \lambda)$ l'ensemble des anneaux de valuation λ -convexes de $k(\mathfrak{p})$ contenant $A/\mathfrak{p}$. Avec la proposition 8.94 on obtient une injection naturelle

$$\omega : \overline{\{\lambda\}} \hookrightarrow \mathcal{V}(A, \lambda) \quad (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \mapsto (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}^*$$

qui associe l'enveloppe λ -convexe de $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$ à toute spécialisation $(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ de λ . En effet, comme $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}^*$ domine $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$, l'injectivité de ω suit aussitôt de la proposition 8.91(iii). L'application ω admet l'inverse à gauche $\psi : \mathcal{V}(A, \lambda) \rightarrow \overline{\{\lambda\}}$ suivante : soit $(V, \mathfrak{m}) \in \mathcal{V}(A, \lambda)$, munissons $k(\mathfrak{m})$ de l'ordre $\leq_{\lambda^*}$ induit par $\leq_\lambda$ (lemme 8.93(iv)), et posons $\mathfrak{q} := (A/\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{m}$; alors V domine $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$, et si $\leq_\mu$ est la restriction de $\leq_{\lambda^*}$ au sous-corps $k(\mathfrak{q})$ de $k(\mathfrak{m})$, on voit aisément que $\mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ est une spécialisation de λ dans $\text{Spr } A$, et on pose $\psi(V) := \mu$. En général, ω n'est pas une bijection.

Comme application, on déduit l'homologue suivant du théorème 6.19 :

Théorème 8.95. *Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme entier d'anneaux. Alors $\text{Spr } f : \text{Spr } B \rightarrow \text{Spr } A$ est une application fermée.*

Démonstration. Au vu de la proposition 4.69(i), il suffit de montrer que $\text{Spr } f$ est spécialisante. Soient donc $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda), \mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in \text{Spr } A$ avec $\lambda \geq \mu$, et $\lambda' := (\mathfrak{p}', \leq_{\lambda'}) \in \text{Spr } B$ tel que $\text{Spr}(f)(\lambda') = \lambda$. Posons $C := (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$, et notons par $(V, \mathfrak{m}_V)$ l'enveloppe λ' -convexe de C : il est un anneau de valuation λ' -convexe du corps résiduel $k(\mathfrak{p}')$ (lemme 8.93(i)) ; de plus, la preuve de la proposition 8.94(i) montre que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_C$ de C est une partie convexe de $(C, \leq_\lambda)$, et l'ordre $\leq_{\lambda'}$ de $k(\mathfrak{p}')$ prolonge l'ordre $\leq_\lambda$ de son sous-corps $k(\mathfrak{p})$, donc V domine C (lemme 8.93(ii)). Par hypothèse, f induit une extension entière d'anneaux $A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{p}'$; or, V contient $A/\mathfrak{p}$ et il est intégralement clos dans le corps des fractions $k(\mathfrak{p}')$ de $B/\mathfrak{p}'$ (voir §8.1.1), d'où $B/\mathfrak{p}' \subset V$. Soit $\mathfrak{q}' \subset B$ l'unique idéal premier tel que $\mathfrak{q}'/\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}_V \cap (B/\mathfrak{p}')$; en résumé, on a obtenu des chaînes d'inclusions :

$$C \subset (B/\mathfrak{p}')_{\mathfrak{q}'} \subset V \quad k(\mathfrak{m}_C) \subset k(\mathfrak{q}') \subset k(\mathfrak{m}_V).$$

Soit aussi $\leq_\beta$ l'ordre induit par $\leq_{\lambda'}$ sur $k(\mathfrak{m}_V)$ (lemme 8.93(iv)), de sorte que $(\mathfrak{m}_V, \leq_\beta)$ est une spécialisation de $(0, \leq_{\lambda'})$ dans $\text{Spr } V$. Comme V domine C , on voit aisément que $\beta := (\mathfrak{m}_C, \leq_\beta)$ est l'unique spécialisation de $(0, \leq_\lambda)$ dans $\text{Spr } C$ avec $\sigma_C(\beta) = \mathfrak{m}_C$ (proposition 8.91(iii)). Rappelons que l'homomorphisme naturel $A \rightarrow C$ identifie $\text{Spr } C$ (resp. $\text{Spec } C$) avec une partie de $\text{Spr } A$ (resp. de $\text{Spec } A$) ; sous cette identification, le point $(0, \leq_\lambda)$ de $\text{Spr } C$ correspond à λ et le point $\mathfrak{m}_C$ de $\text{Spec } C$ correspond à $\mathfrak{q}$, donc finalement le point β de $\text{Spr } C$ correspond à μ . En dernier lieu, la restriction $\leq_{\mu'}$ de $\leq_\beta$ au sous-corps $k(\mathfrak{q}')$ de $k(\mathfrak{m}_V)$ donne un point $\mu' := (\mathfrak{q}', \leq_{\mu'})$ de $\text{Spr } B$, qui spécialise λ' , et par construction $\text{Spr}(f)(\mu') = \mu$. $\square$

Remarque 8.96. D'autre part, signalons que les théorèmes du type going down 3.84 et 6.28 n'ont pas des homologues pour le spectre réel : par exemple, soient $A := \mathbb{R}[X]$ et $B := A[Y]/I$, où $I \subset A[Y]$ est l'idéal engendré par $X^2 + Y^2$; alors l'inclusion $A \rightarrow B$ est un homomorphisme plat et fini, mais l'application induite $\text{Spr } B \rightarrow \text{Spr } A$ n'est pas générissante. En effet, on a $\text{Spr } B = \{(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}})\}$ où $\mathfrak{m} \subset B$ est l'idéal maximal engendré par (X, Y) et $\leq_{\mathfrak{m}}$ est l'unique ordre de $B/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$; mais l'image de $(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}})$ dans $\text{Spr } A$ admet deux générisations strictes 0^+ et 0^- (notation de l'exemple 8.71(ii)). Voir toutefois le problème 8.98(ii).

Exercice 8.97. Soient K un corps et $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation de K .

(i) Montrer que l'application $\sigma_V : \text{Spr } V \rightarrow \text{Spec } V$ est générissante (voir la remarque 8.70(iii)). Donc, si $k(\mathfrak{m})$ est formellement réel, il en est de même pour K .

(ii) Supposons que K soit formellement réel clos, et que V soit convexe par rapport à l'ordre unique $\leq$ de K . Montrer que $k(\mathfrak{m})$ est formellement réel clos.

Problème 8.98. (i) Soient $K \subset K'$ une inclusion de corps formellement réels clos ; montrer que l'inclusion $i : K(T) \rightarrow K'(T)$ de corps des fractions rationnelles induit une surjection $\text{Spr}(i) : \text{Spr } K'(T) \rightarrow \text{Spr } K(T)$.

(ii) Soient A un anneau, et $n \in \mathbb{N}$; montrer que, malgré la remarque 8.96, l'inclusion naturelle $f : A \rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ induit une application continue ouverte $\text{Spr } f : \text{Spr } A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{Spr } A$.

8.4. Le spectre valuatif. Pour tout anneau A on considère l'ensemble

$$\text{Spv } A$$

des classes d'équivalence des valuations de A (avec la notation de l'exercice 8.2, il s'agit de l'ensemble quotient $\mathcal{V}_A/\sim$). pour tous $a, b \in A$ soit aussi

$$R_A\left(\frac{a}{b}\right) := \{v \in \text{Spv } A \mid v(a) \geq v(b) \neq +\infty\}.$$

Noter que si v et v' sont deux valuations équivalentes de A , on a $v(b) \neq +\infty$ si et seulement si $v'(b) \neq +\infty$, et $v(a) \geq v(b)$ si et seulement si $v'(a) \geq v'(b)$, donc la définition de cette partie de $\text{Spv } A$ est bien posée. Plus généralement, à tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ on associe le sous-ensemble rationnel

$$R_A\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right) := \bigcap_{i=1}^n R_A\left(\frac{a_i}{b_i}\right).$$

Définition 8.99. Soit $\mathcal{T}_A$ la topologie sur $\text{Spv } A$ engendrée par les sous-ensembles rationnels. Le spectre valuatif de A est l'espace topologique $(\text{Spv } A, \mathcal{T}_A)$.

Théorème 8.100. Pour tout anneau A , le spectre valuatif $\text{Spv } A$ est un espace spectral, dont les sous-ensembles rationnels forment une base d'ouverts compacts.

Démonstration. Munissons l'ensemble $\{0, 1\}$ de la topologie discrète, et $\mathcal{P} := \{0, 1\}^{A \times A}$ de la topologie du produit (voir l'exemple 2.20(iii)); à toute valuation v de A on associe l'application $\phi_v : A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\phi_v(a, b) = 1$ si et seulement si $v(a) \geq v(b)$. D'après l'exercice 8.19, deux valuations v et w de A sont équivalentes si et seulement si $\phi_v = \phi_w$, d'où une injection bien définie

$$\phi : \text{Spv } A \rightarrow \mathcal{P} \quad v \mapsto \phi_v$$

et soit $\mathcal{T}'_A$ la topologie de $\text{Spv } A$ induite par $\mathcal{P}$ via ϕ . Explicitement, posons

$$Q_A\left(\frac{a}{b}\right) := \{v \in \text{Spv } A \mid v(a) \geq v(b)\} \quad \forall a, b \in A.$$

On voit aisément que $\mathcal{T}'_A$ est la topologie engendrée par la prébase formée de toutes les parties $Q_A\left(\frac{a}{b}\right)$ et des leurs complémentaires.

Affirmation 8.101. L'image de ϕ est l'ensemble des applications $f : A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant les conditions suivantes, pour tous $a, b, c \in A$:

- (a) On a $f(a, b) = 1$ ou $f(b, a) = 1$
- (b) Si $f(a, b) = f(b, c) = 1$, alors $f(a, c) = 1$
- (c) On a $f(a + b, a) = 1$ ou $f(a + b, b) = 1$
- (d) Si $f(a, b) = 1$, alors $f(ac, bc) = 1$
- (e) Si $f(ac, bc) = 1$ et $f(c, 0) = 0$, alors $f(a, b) = 1$
- (f) $f(1, 0) = 0$.

Preuve : Evidemment, toute application f dans l'image de ϕ satisfait ces conditions. Réciproquement, soit $f : A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant (a)–(f); de (a), (f) et (d) il vient :

- (g) $f(0, x) = 1$ pour tout $x \in A$.

Soit $\mathfrak{p} := \{a \in A \mid f(a, 0) = 1\}$. Montrons que $\mathfrak{p}$ est un idéal de A . En effet, (a) implique que $0 \in \mathfrak{p}$. Ensuite, soient $a, b \in \mathfrak{p}$; d'après (c) on peut supposer que $f(a + b, a) = 1$, et avec (b) il vient $f(a + b, 0) = 1$, i.e. $a + b \in \mathfrak{p}$. En dernier lieu, si $a \in \mathfrak{p}$ et $b \in A$, on déduit $ab \in \mathfrak{p}$ avec (d), d'où l'assertion. De plus, (e) et (f) impliquent que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier; soit alors $K := k(\mathfrak{p})$. Noter aussi que :

- (h) $f(a, a + x) = f(a + x, a) = 1$ pour tous $a \in A$ et $x \in \mathfrak{p}$.

En effet, supposons par l'absurde que $f(a, a + x) = 0$; avec (c) on déduit $f(a, -x) = 1$, et au vu de (b) il vient $f(a, 0) = 1$. Mais d'après (g) on a aussi $f(0, a + x) = 1$, et encore par (b) on déduit $f(a, a + x) = 1$, contradiction. Ensuite, posons $b := a + x$; par ce qui précède on a $f(b, b - x) = 1$, d'où la deuxième identité de (h). Montrons que f se factorise à travers la projection $A \times A \rightarrow A/\mathfrak{p} \times A/\mathfrak{p}$ et une application

$$\bar{f} : A/\mathfrak{p} \times A/\mathfrak{p} \rightarrow \{0, 1\}.$$

En effet, soient $a, b \in A$ et $c \in \mathfrak{p}$, et supposons d'abord que $f(a, b) = 1$; il faut montrer que $f(a + c, b) = 1$. Pour cela, il suffit d'invoquer (b) et (h); de même on montre que $f(a, b + c) = 1$ dans ce cas. D'autre part, si $f(a, b) = 0$, on doit avoir $f(a + c, b) = 0$, car sinon par ce qui précède on aurait $f(a, b) = f(a + c - c, b) = f(a + c, b) = 1$, contradiction;

de même on voit que $f(a, b+c) = 0$. Cela achève de vérifier que $\bar{f}$ est bien définie, et par construction on a :

(i) $\bar{f}(x, 0) = 0$ pour tout $x \in A/\mathfrak{p} \setminus \{0\}$.

Or, soit $x \in k(\mathfrak{p})$, et disons que $x = b^{-1}a$ pour certains $a, b \in A/\mathfrak{p}$; on dira que x est *f-positif* si $\bar{f}(a, b) = 1$. Avec (d), (e) et (i) on voit aisément que cette condition ne dépend pas des choix de a et b , et on dénote par $V \subset k(\mathfrak{p})$ la partie des éléments *f-positifs*. Soient $x, y \in V$, et disons que $x = b^{-1}a$, $y = b^{-1}a'$ pour certains $a, a', b \in A/\mathfrak{p}$ avec $b \neq 0$; au vu de (c) on peut supposer que $\bar{f}(a+a', a) = 1$, et avec (b) il vient alors $\bar{f}(a+a', b) = 1$, i.e. $x+y \in V$. De même, avec (d) on obtient $\bar{f}(aa', ba') = \bar{f}(ba', bb') = 1$, et (b) donne alors $\bar{f}(aa', bb') = 1$, i.e. $xy \in V$. De plus (a) implique que l'on a soit $\bar{f}(-1, 1) = 1$, soit $\bar{f}(1, -1) = 1$, et dans les deux cas on conclut que $-1 \in V$; puis $1 = (-1)^2 \in V$ et $0 = 1 + (-1) \in V$. Cela achève de montrer que V est un sous-anneau de $k(\mathfrak{p})$, et (a) et le lemme 8.16 entraînent alors qu'il est l'anneau de valuation d'une valuation w de $k(\mathfrak{p})$; la composition de w avec la projection $A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est ainsi une valuation v de A , et il suffit maintenant de constater que $\phi_v = f$: les détails seront laissés aux soins du lecteur. $\diamond$

L'observation 8.101 entraîne aisément que l'image de ϕ est une partie *fermée* de $\mathcal{P}$; or, d'après le théorème de Tychonoff (problème 2.25(ii)), $\mathcal{P}$ est un espace topologique compact et séparé, donc de même pour $(\text{Spv } A, \mathcal{T}'_A)$.

Affirmation 8.102. $(\text{Spv } A, \mathcal{T}_A)$ est un espace de type T_0 (voir la définition 1.25(i)).

Preuve : Soient $v, w \in \text{Spv } A$ deux valuations non équivalentes, et supposons d'abord qu'il existe $b \in A$ tel que $w(b) = +\infty$ et $v(b) \neq +\infty$; dans ce cas il vient $v \in R_A(\frac{b}{b})$ et $w \notin R_A(\frac{b}{b})$. On raisonne de même s'il existe $b \in A$ tel que $v(b) = +\infty$ et $w(b) \neq +\infty$. On est donc ramené au cas où $\text{Supp}(v) = \text{Supp}(w)$, et d'après l'exercice 8.19, quitte à échanger v et w on peut supposer qu'il existe $a, b \in A$ tel que $v(a) \geq v(b)$ et $w(a) < w(b)$. Dans ce cas on a $w(a) \neq +\infty$, d'où aussi $v(a) \neq +\infty$ et alors $v(b) \neq +\infty$; il vient $v \in R_A(\frac{a}{b})$ et $w \notin R_A(\frac{a}{b})$. $\diamond$

Noter aussi que tout sous-ensemble rationnel de $\text{Spv } A$ est une partie ouverte et fermée pour la topologie $\mathcal{T}'_A$, car on a $R_A(\frac{a}{b}) = Q_A(\frac{a}{b}) \setminus Q_A(\frac{b}{b})$ pour tous $a, b \in A$. Au vu de l'observation 8.102 et de la proposition 4.57, cela achève la preuve. $\square$

Remarque 8.103. (i) La preuve du théorème 8.100 montre aussi que toute partie construable de $\text{Spv } A$ est réunion finie de parties de la forme

$$(Q_A(\frac{a_1}{b_1}) \cap \cdots \cap Q_A(\frac{a_n}{b_n})) \setminus (Q_A(\frac{c_1}{d_1}) \cup \cdots \cup Q_A(\frac{c_m}{d_m}))$$

avec $a_\bullet, b_\bullet$ et $c_\bullet, d_\bullet$ des suites d'éléments de A de longueur n et m arbitraire.

(ii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux; pour toute valuation $v : B \rightarrow \Gamma_\circ$ de B , la composition $v \circ f : A \rightarrow \Gamma_\circ$ est évidemment une valuation de A , et si $v' : B \rightarrow \Gamma'_\circ$ est une autre valuation équivalente à v , les valuations $v \circ f$ et $v' \circ f$ sont évidemment équivalentes; on obtient ainsi une application bien définie

$$\text{Spv } f : \text{Spv } B \rightarrow \text{Spv } A \quad v \mapsto v \circ f.$$

De plus, par inspection directe des définitions on voit que

$$(\text{Spv } f)^{-1} R_A(\frac{a}{b}) = R_B(\frac{f(a)}{f(b)}) \quad \forall a, b \in A.$$

Donc $\text{Spv } f$ est continue et compacte, et on obtient ainsi un foncteur contravariant

$$\text{Spv} : (\mathbb{Z} - \text{Alg})^{\text{op}} \rightarrow \text{Top} \quad A \mapsto \text{Spv } A \quad f \mapsto \text{Spv } f$$

de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques.

(iii) Noter aussi que l'application

$$\sigma_A : \text{Spv } A \rightarrow \text{Spec } A \quad v \mapsto \text{Supp}(v)$$

(notation de la définition 8.10) est continue et compacte, car on a :

$$\sigma_A^{-1}(D(a)) = R_A\left(\frac{a}{a}\right) \quad \forall a \in A.$$

On voit aisément que l'association $A \mapsto \sigma_A$ définit une transformation naturelle

$$\sigma : \text{Spv} \rightarrow \text{Spec}.$$

(iv) En outre, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ on a un homéomorphisme naturel

$$\text{Spv } k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \sigma_A^{-1}(\mathfrak{p})$$

où l'on munit la fibre $\sigma_A^{-1}(\mathfrak{p})$ de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spv } A$. En effet, on a déjà observé que toute valuation v avec support $\mathfrak{p}$ se factorise à travers la projection $\pi : A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ et une unique valuation résiduelle $\bar{v} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow \Gamma_{v_o}$ (et évidemment deux valuations v et w de A avec support $\mathfrak{p}$ sont équivalentes si et seulement s'il en est de même pour leurs respectives valuations résiduelles). Donc l'application continue $\text{Spv } \pi : \text{Spv } k(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Spv } A$ est injective et son image est $\sigma_A^{-1}(\mathfrak{p})$. Il reste à vérifier que la topologie de $\text{Spv } k(\mathfrak{p})$ coïncide avec celle induite par $\text{Spv } A$ via $\text{Spv } \pi$. Pour cela, soient $x, y \in k(\mathfrak{p})$, et écrivons $x = \pi(a)/\pi(c)$, $y = \pi(b)/\pi(c)$ avec $a, b \in A$ et $c \in A \setminus \mathfrak{p}$; comme $\bar{v}(\pi(c)) \neq +\infty$ pour toute valuation $\bar{v}$ de $k(\mathfrak{p})$, on a $R_{k(\mathfrak{p})}\left(\frac{x}{y}\right) = R_{k(\mathfrak{p})}\left(\frac{\pi(a)}{\pi(b)}\right) = (\text{Spv } \pi)^{-1}R_A\left(\frac{a}{b}\right)$, d'où l'assertion.

(v) Noter aussi que σ_A admet une section continue et compacte

$$\tau_A : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spv } A$$

qui associe à tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ l'unique valuation triviale $\tau_A(\mathfrak{p})$ de A avec support $\mathfrak{p}$ (définition 8.6(ii)). Noter que $\tau_A^{-1}(R_A(\frac{a}{b})) = D(b)$ pour tous $a, b \in A$.

(vi) Pour tout $v \in \text{Spv } A$, on notera :

$$k(v)^+$$

l'anneau de valuation de la valuation résiduelle $\bar{v} : k(v) \rightarrow \Gamma_{v_o}$ de v .

Exercice 8.104. (i) Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie, $i : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation, et munissons $Z := \bigcap_{s \in S} R_A(\frac{s}{s})$ de la topologie induite par $\text{Spv } A$ via l'inclusion $j : Z \rightarrow \text{Spv } A$. Montrer que $\text{Spv}(i) : \text{Spv } S^{-1}A \rightarrow \text{Spv } A$ est la composition d'un homéomorphisme $\text{Spv } S^{-1}A \xrightarrow{\sim} Z$ et de j .

(ii) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection, et munissons $Z := \bigcap_{a \in I} (\text{Spv}(A) \setminus R_A(\frac{a}{a}))$ de la topologie induite par $\text{Spv } A$ via l'inclusion $j : Z \rightarrow \text{Spv } A$. Montrer que $\text{Spv}(\pi) : \text{Spv } A/I \rightarrow \text{Spv } A$ est la composition d'un homéomorphisme $\text{Spv } A/I \xrightarrow{\sim} Z$ et de j .

(iii) Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow A'$ deux homomorphismes d'anneaux, et $B' := A' \otimes_A B$. Montrer que les homomorphismes canoniques $f' : A' \rightarrow B'$ et $g' : B \rightarrow B'$ induisent une *surjection* continue d'espaces topologiques

$$\phi : \text{Spv } B' \rightarrow \text{Spv } A' \times_{\text{Spv } A} \text{Spv } B \quad v \mapsto (v \circ f', v \circ g').$$

Problème 8.105. (Spécialisations dans $\text{Spv } A$) Soient $v : A \rightarrow \Gamma_o$ une valuation, $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe convexe; le *sous-groupe caractéristique* de v , noté :

$$c\Gamma_v$$

est le plus petit sous-groupe convexe de Γ_v contenant $v(A) \setminus \Gamma_o^+$. Soit $\rho_o : \Gamma_o \rightarrow \Delta_o$ l'application telle que $\rho_o(\gamma) := \gamma$ si $\gamma \in \Delta$ et $\rho_o(\gamma) := +\infty$ sinon. On pose

$$v^\Delta := \rho_o \circ v : A \rightarrow \Delta_o$$

(i) Montrer que v^Δ est une valuation si et seulement si $c\Gamma_v \subset \Delta$.

(ii) On suppose que $c\Gamma_v \subset \Delta$. Montrer que v^Δ est une spécialisation de v dans $\text{Spv } A$. Dans ce cas, on dit que v^Δ est la *spécialisation primaire* de v associée à Δ , et aussi que v est une *générisation primaire* de v^Δ .

(iii) Rappelons qu'il existe un unique ordre total sur Γ/Δ tel que la projection $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta$ soit un morphisme de groupes ordonnés (exercice 8.5(ii)). On voit aussitôt que la composition de v avec $\pi_o : \Gamma_o \rightarrow (\Gamma/\Delta)_o$ est une valuation

$$v_\Delta : A \rightarrow (\Gamma/\Delta)_o \quad a \mapsto \pi_o \circ v(a).$$

Montrer que v_Δ est une généralisation de v . On dit que v_Δ est la *généralisation secondaire* de v associée à Δ , et aussi que v est une *spécialisation secondaire* de v_Δ .

Remarque 8.106. (i) Soient A un anneau et $v, w, u \in \text{Spv } A$; on écrira

$$v \succeq_p w \text{ et } v \succeq_s u \quad (\text{resp. } v \preceq_p w \text{ et } v \preceq_s u)$$

pour signifier que v est une généralisation primaire de w et secondaire de u (resp. que v est une spécialisation primaire de w et secondaire de u) dans $\text{Spv } A$.

(ii) Si $v \succeq_p w$, et si l'on a $v(a) \geq v(b)$ pour certains $a, b \in A$, alors $w(a) \geq w(b)$. En effet, soit $\Delta \subset \Gamma_v$ un sous-groupe convexe avec $c\Gamma_v \subset \Delta$, tel que $w = v^\Delta$; l'assertion est trivial si $v(a) \notin \Delta$. Si $v(a) \in \Delta$ et $v(b) < 0$, on a $v(b) \in c\Gamma_v$, d'où l'assertion, dans ce cas. En dernier lieu, si $v(a) \in \Delta$ et $v(b) \geq 0$, on a encore $v(b) \in \Delta$, par convexité de Δ , et on déduit à nouveau l'inégalité souhaitée.

Lemme 8.107. Soient A un anneau intègre, v_K une valuation de $K := \text{Frac } A$, et $\Delta \subset \Gamma_{v_K}$ un sous-groupe convexe. Posons $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}(\Delta) \subset k(v_K)^+$ (notation de la proposition 8.14(i)), $A' := k(v_K)_{\mathfrak{p}}^+$, et soient $v : A \rightarrow \Gamma_{v_o}$, $v' : A' \rightarrow \Gamma_{v_o}$ les restrictions de v_K . Alors :

- (i) $A' = k(v_\Delta)^+$ et $v_K(A') = \Delta \cdot \Gamma_{v_o}^+$.
- (ii) On a $A \subset A'$ si et seulement si $c\Gamma_v \subset \Delta$.
- (iii) $c\Gamma_{v'} = \Delta$, de sorte que $w := v'^\Delta$ est bien définie, et $k(w)^+ = k(v)^+/\mathfrak{p}$.
- (iv) Si $c\Gamma_v \subset \Delta$, alors $\text{Supp}(v^\Delta) = \mathfrak{p} \cap A$ et $k(v^\Delta)^+ = k(v^\Delta) \cap k(v)^+/\mathfrak{p}$.

Démonstration. (i) : On a $v_K^{-1}(\Delta^+) = k(v_K)^+ \setminus \mathfrak{p}$ (proposition 8.14(ii)), d'où $v_K(A') = \Delta \cdot \Gamma_{v_o}^+$. Pour vérifier que $A' = k(v_\Delta)^+$, il suffit de montrer que :

$$(*) \quad v_K^{-1}(\Delta \cdot \Gamma_{v_o}^+) = A'.$$

Soit donc $x \in K$ avec $v(x) \in \Delta \cdot \Gamma_v$; si $v(x) \geq 0$, on a $x \in k(v_K)^+ \subset A'$. Sinon, on a $v(x) = \delta + \gamma < 0$ avec $\delta \in \Delta$ et $\gamma \geq 0$; par suite $0 \leq \gamma < -\delta$, d'où $\gamma \in \Delta$, car Δ est convexe, donc $v(x) \in \Delta \setminus \Delta^+$, et alors $x^{-1} \in k(v_K)^+ \setminus \mathfrak{p}$, d'où finalement $x \in A'$.

(ii) : Si $c\Gamma_v \subset \Delta$, on a $v(A) \subset \Gamma_v^+ \cup \Delta$, d'où $A \subset A'$, au vu de (*). Réciproquement, si $A \subset A'$, il vient $v(A) \setminus \Gamma_{v_o}^+ \subset (\Delta \cdot \Gamma_v^+) \setminus \Gamma_v^+$. On est alors ramené à vérifier que le sous-groupe Δ' engendré par $(\Delta \cdot \Gamma_v^+) \setminus \Gamma_v^+$ coïncide avec Δ . Or, évidemment $\Delta \setminus \Delta^+ \subset \Delta'$, d'où $\Delta \subset \Delta'$; réciproquement, si $\gamma \in (\Delta \cdot \Gamma_v^+) \setminus \Gamma_v^+$, en raisonnant comme dans la preuve de (i) on voit que $\gamma \in \Delta$, d'où l'assertion.

(iii) : Avec (i) et la preuve de (ii) on voit déjà que $c\Gamma_{v'} = \Delta$. Ensuite, soit $x \in A'$, et écrivons $x = a/s$ avec $a \in k(v_K)^+ = k(v)^+$ et $s \in k(v)^+ \setminus \mathfrak{p}$, de sorte que $v(s) \in \Delta^+$; ainsi, $v'(x) = v(a) - v(s)$, et on a $w(x) = +\infty \Leftrightarrow v'(x) \notin \Delta \Leftrightarrow v(a) \notin \Delta \Leftrightarrow a \in \mathfrak{p}$. Cela achève de vérifier que $\text{Supp}(w) = \mathfrak{p}A'$, d'où $k(w) = k(\mathfrak{p})$. En dernier lieu, $w(x) \in \Gamma_w^+ \Leftrightarrow v(x) \in \Delta^+ \Leftrightarrow x \in k(v)^+ \setminus \mathfrak{p}$. Cela montre que $k(w)^+ = k(v)^+/\mathfrak{p}$.

(iv) découle aussitôt de (ii) et (iii). $\square$

Problème 8.108. Soient A un anneau, $v \in \text{Spv } A$ et $\mathfrak{q} := \text{Supp}(v)$.

- (i) Soit $w \in \text{Spv } A$ une généralisation de v . Montrer que $w \succeq_s v \Leftrightarrow \text{Supp}(w) = \mathfrak{q}$.
- (ii) On dit qu'un idéal $I \subset A$ est *v-convexe* si pour tout $a \in A$ tel qu'il existe $b \in I$ avec $v(a) \geq v(b)$, on a $a \in I$. Montrer que les supports des spécialisations primaires de v sont les idéaux premiers *v-convexes* de A .
- (iii) Soit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ un idéal premier de A ; montrer qu'il existe $w \in \text{Spv } A$ avec $w \succeq_p v$ et $\text{Supp}(w) = \mathfrak{p}$. Ainsi, l'application σ_A de la remarque 8.103(iii) est généralisante.
- (iv) Soient $w, w' \in \text{Spv } A$ tels que $v \succeq_p w \succeq_s w'$. Montrer qu'il existe $v' \in \text{Spv } A$ tel que

$$v \succeq_s v' \succeq_p w'.$$

Proposition 8.109. Soient A un anneau et $v \in \text{Spv } A$. Toute spécialisation de v dans $\text{Spv } A$ est une spécialisation primaire d'une spécialisation secondaire de v .

Démonstration. Soient w une spécialisation de v , et $\mathfrak{p} := \text{Supp}(w)$; supposons d'abord que $c\Gamma_v = \{0\} = v(A \setminus \mathfrak{p})$. Dans ce cas, $v^{\{0\}}$ est une spécialisation primaire de v et $\text{Supp}(v^{\{0\}}) \subset \mathfrak{p}$. D'après le problème 8.108(iii) il existe $w' \in \text{Spv } A$ avec $w' \succeq_p w$ et $\text{Supp}(w') = \text{Supp}(v^{\{0\}})$, et évidemment $v^{\{0\}} \succeq_s w'$. En résumé, on a une chaîne de spécialisations :

$$v \succeq_p v^{\{0\}} \succeq_s w' \succeq_p w.$$

D'après le problème 8.108(iv) il existe alors $v' \in \text{Spv } A$ avec $v \succeq_s v' \succeq_p w'$; par suite, $v' \succeq_p w$, d'où l'assertion. On peut ainsi supposer que soit $c\Gamma_v \neq \{0\}$, soit il existe $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ avec $v(x) > 0$. Remarquons maintenant :

Affirmation 8.110. (i) $\mathfrak{p}$ est un idéal premier v -convexe.

(ii) Si $a, b \in A$ et $v(a) \geq v(b)$, $w(a) \neq +\infty$, $w(b) = +\infty$, alors $v(a) = v(b) \neq +\infty$.

Preuve : (ii) : En effet, les hypothèses donnent $w \in R_A(\frac{b}{a})$, d'où $v \in R_A(\frac{b}{a})$; i.e. $v(b) \geq v(a) \neq +\infty$, et l'assertion s'ensuit.

(i) : Soient $x, y \in A$ avec $v(x) \geq v(y)$ et $w(y) = +\infty$, et supposons par l'absurde que $w(x) \neq +\infty$. D'après (ii) on a alors $v(x) = v(y) \neq +\infty$. Or, s'il existe $a \in A$ avec $v(a) < 0$, on déduit $v(x) > v(ay)$ et $w(ay) = +\infty$; mais alors (ii) donne $v(x) = v(ay)$, contradiction. En dernier lieu, si $v(a) > 0$ pour quelque $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, il vient $v(ax) > v(y)$ et $w(ax) \neq +\infty$, auquel cas (ii) donne $v(ax) = v(y)$, contradiction. $\diamond$

D'après l'observation 8.110(i) et le problème 8.108(ii) il existe $u \in \text{Spv } A$ avec $v \succeq_p u$ et $\text{Supp}(u) = \text{Supp}(w)$; montrons que w est une spécialisation de u . Pour cela, soient $a, b \in A$ tels que $w \in R_A(\frac{a}{b})$; puisque v est une généralisation de w , on a $v \in R_A(\frac{a}{b})$, et comme u est une spécialisation primaire de v , il vient $u(a) \geq u(b)$ (remarque 8.106(ii)). En outre, $u(b) \neq +\infty$, car $\text{Supp}(w) = \text{Supp}(v)$; donc $u \in R_A(\frac{a}{b})$, d'où l'assertion. On a ainsi la chaîne de spécialisations : $v \succeq_p u \succeq_s w$ (problème 8.108(i)). Il suffit maintenant d'invoquer le problème 8.108(iv). $\square$

Lemme 8.111. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $v, w \in \text{Spv } B$ deux valuations, et posons $v' := \text{Spv}(f)(v)$ et $w' := \text{Spv}(f)(w)$. On a :

(i) Si $v \succeq_p w$, alors $v' \succeq_p w'$, et si $v \succeq_s w$, alors $v' \succeq_s w'$.

(ii) $\text{Spv } f$ induit des surjections :

$$\{u \in \text{Spv } B \mid u \succeq_s v\} \rightarrow \{u' \in \text{Spv } A \mid u' \succeq_s v'\}$$

$$\{u \in \text{Spv } B \mid v \succeq_s u\} \rightarrow \{u' \in \text{Spv } A \mid v' \succeq_s u'\}.$$

Démonstration. (i) découle aussitôt des définitions.

(ii) : Evidemment l'homomorphisme induit $i : \Gamma_{v'} \rightarrow \Gamma_v$ est injectif, et $\text{Spec}(i)$ est alors surjectif (exercice 8.5(iii)), donc $\text{Spv } f$ induit une surjection des généralisations secondaires de v sur les généralisations secondaires de v' . Ensuite, soit $u' \in \text{Spv } A$ avec $v' \succeq_s u'$, et notons par $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}'$) l'idéal maximal de $k(v)^+$ (resp. de $k(v')^+$). Avec le lemme 8.107(i) on voit que :

$$k(u') = k(v') \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} \cap k(v') = \mathfrak{m}' \subset k(u')^+ \subset k(v')^+.$$

Donc, $k(\mathfrak{m}')$ est un sous-corps de $k(\mathfrak{m})$, et $\bar{V} := k(u')^+/\mathfrak{m}'$ est un anneau de valuation de $k(\mathfrak{m}')$ (remarque 8.17(iii)). D'après l'exercice 8.25(ii), il existe alors un anneau de valuation $\bar{W}$ de $k(\mathfrak{m})$ avec $\bar{V} = k(\mathfrak{m}') \cap \bar{W}$, et d'après l'exercice 8.18, l'image réciproque $W \subset k(v)^+$ de $\bar{W}$ est l'anneau de valuation d'une valuation $\bar{u}$ de $k(v)$; la composition $u : B \rightarrow \Gamma_{\bar{u} \circ}$ de la projection $B \rightarrow k(v)$ avec $\bar{u}$ est donc une valuation de B . Par construction, $k(u')^+ = W \cap k(u')$ et $\bar{v} \succeq_s \bar{u}$ (remarque 8.17(ii)); par suite $v \succeq_s u$, et $\text{Spv}(f)(u) = u'$. $\square$

Les résultats suivants sont les homologues des théorèmes 3.84, 6.19 et 6.28.

Théorème 8.112. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme plat d'anneaux. On a :

(i) Pour tout $v \in \text{Spv } B$, l'application $\text{Spv } f$ induit une surjection :

$$\{w \in \text{Spv } B \mid w \succeq_p v\} \rightarrow \{w' \in \text{Spv } A \mid w' \succeq_p \text{Spv}(f)(v)\}.$$

(ii) L'application $\text{Spv } f$ est générissante.

Démonstration. (i) : Soit $w_A \in \text{Spv } A$ avec $w_A \succeq_p v_A := \text{Spv}(f)(v)$; on cherche $w \in \text{Spv } B$ avec $w \succeq_p v$ et $\text{Spv}(f)(w) = w_A$. Soit $\mathfrak{q} := \text{Supp}(w_A)$ et notons par $\pi_A : A \rightarrow A/\mathfrak{q}$ et $\pi_B : B \rightarrow B/\mathfrak{q}B$ les projections; évidemment il existe $s_A, t_A \in \text{Spv } A/\mathfrak{q}$ et $s \in \text{Spv } B/\mathfrak{q}B$ avec $t_A \succeq_p s_A$, tels que

$$\text{Spv}(\pi_A)(s_A) = v_A \quad \text{Spv}(\pi_A)(t_A) = w_A \quad \text{Spv}(\pi_B)(s) = v \quad \text{Spv}(f \otimes_A A/\mathfrak{q})(s) = s_A.$$

Si l'on trouve $t \in \text{Spv } B/\mathfrak{q}B$ avec $t \succeq_p s$ et $\text{Spv}(f \otimes_A A/\mathfrak{q})(t) = t_A$, on pourra prendre $w := \text{Spv}(\pi_B)(t)$ (lemme 8.111(i)). Quitte à remplacer f par $f \otimes_A A/\mathfrak{q}$ (qui est encore un homomorphisme plat, par la remarque 3.74(vi)), on peut alors supposer que A soit intègre et $\mathfrak{q} = 0$, donc w_A est la restriction d'une valuation w_K de $K := \text{Frac } A$. Soit $\Delta \subset \Gamma_{w_A}$ un sous-groupe convexe avec $c\Gamma_{w_A} \subset \Delta$ et $v_A = w_A^\Delta$; la proposition 8.14(i) associe à Δ un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $k(w_A)^+$. Posons $A' := k(w_A)_\mathfrak{p}^+$, et soit $w_{A'} : A' \rightarrow \Gamma_{w_K}$ la restriction de w_K . D'après le lemme 8.107(ii,iv), $A \subset A'$ et $c\Gamma_{w_{A'}} = \Delta$, de sorte que $v_{A'} := w_{A'}^\Delta$ est une spécialisation primaire bien définie de $w_{A'}$ qui prolonge v_A , et $k(v_{A'})^+ = k(w_{A'})^+/\mathfrak{p}$.

Soit $B' := A' \otimes_A B$; d'après l'exercice 8.104(iii), les homomorphismes canoniques $f' := A' \otimes_A f : A' \rightarrow B'$ et $g : B \rightarrow B'$ induisent une surjection $\phi : \text{Spv } B' \rightarrow \text{Spv } A' \times_{\text{Spv } A} \text{Spv } B$, donc il existe $v_{B'} \in \text{Spv } B'$ avec $\phi(v_{B'}) = (v_{A'}, v)$. On est ainsi ramené à exhiber $w_{B'} \in \text{Spv } B'$ telle que $w_{B'} \succeq_p v_{B'}$ et $\text{Spv}(f')(w_{B'}) = w_{A'}$, car on prendra alors $w := \text{Spv}(g)(w_{B'})$. En outre, f' est plat (remarque 3.74(vi)); quitte à remplacer f par f' on peut ainsi supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit un anneau local avec :

$$(*) \quad k(w_A)^+ \subset A \quad \text{et} \quad k(v_A)^+ = k(w_A)^+/\mathfrak{p}.$$

D'après le théorème 3.84(ii), il existe un idéal premier $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{s} := \text{Supp}(v)$ de B avec $f^{-1}(\mathfrak{r}) = 0$; posons $\overline{B} := B_\mathfrak{s}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{s}$, de sorte que v se factorise à travers l'homomorphisme naturel $h : B \rightarrow \overline{B}$ et une unique valuation $v_{\overline{B}}$ de $\overline{B}$ (voir l'exercice 8.9). Noter que $\overline{f} := h \circ f : A \rightarrow \overline{B}$ est injectif, et $\mathfrak{p} = \text{Supp}(v_A) = \overline{f}^{-1}(\mathfrak{s}\overline{B})$; évidemment il suffit d'exhiber $w_{\overline{B}} \in \text{Spv } \overline{B}$ telle que $w_{\overline{B}} \succeq_p v_{\overline{B}}$ et $\text{Spv}(\overline{f})(w_{\overline{B}}) = w_A$. Pour cela, soit $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation de $E := \text{Frac } \overline{B}$ qui domine l'anneau local intègre $(\overline{B}, \mathfrak{s}\overline{B})$ (théorème 8.21); soit $\pi_V : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection, et noter que $k(v) = k(v_{\overline{B}}) = k(\mathfrak{s}) \subset k(\mathfrak{m})$. Evidemment les valuations résiduelles de v et $v_{\overline{B}}$ coïncident, et se prolongent en une valuation $\overline{w}$ de $k(\mathfrak{m})$ (exercice 8.25(ii)). Par l'exercice 8.18, le sous-anneau $W := \pi_V^{-1}(k(\overline{w})^+) \subset V$ est l'anneau de valuation d'une valuation w_E de E . Montrons que la restriction de w_E au sous-anneau $\overline{B}$ est la valuation $w_{\overline{B}}$ souhaitée. Pour cela, noter que $\mathfrak{m} = \text{Ker}(\pi_V|_W)$ est un idéal premier de W avec $V = W_\mathfrak{m}$; la proposition 8.14(i) associe alors à $\mathfrak{m}$ le sous-groupe convexe $\Delta' := \Delta(\mathfrak{m})$ de Γ_{w_E} , et puisque $\overline{B} \subset V$, d'après le lemme 8.107(ii,iv) on a

$$c\Gamma_{w_{\overline{B}}} \subset \Delta' \quad \text{et} \quad k(w_{\overline{B}}^\Delta)^+ = k(\mathfrak{s}) \cap k(\overline{w})^+ = k(v_{\overline{B}})^+$$

d'où $w_{\overline{B}}^\Delta = v_{\overline{B}}$. D'autre part, avec $(*)$ il vient aisément $W \cap \overline{f}(A) = \overline{f}(k(w_A)^+)$, d'où $\text{Spv}(\overline{f})(w_{\overline{B}}) = w_A$.

(ii) découle de (i), du lemme 8.111(ii) et de la proposition 8.109. $\square$

Théorème 8.113. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme entier d'anneaux, v et v' deux valuations de B , et posons $w := \text{Spv}(f)(v)$, $w' := \text{Spv}(f)(v')$. On a :

(i) Si v' est une spécialisation de v et si $w = w'$, alors $v = v'$.

(ii) $\text{Spv } f$ induit une bijection

$$S_v := \{u \in \text{Spv } B \mid v \succeq_p u\} \xrightarrow{\sim} S_w := \{u' \in \text{Spv } A \mid w \succeq_p u'\}.$$

(iii) L'application $\text{Spv } f$ est fermée.

(iv) Si f est injectif, l'application $\mathrm{Spv} f$ est surjective et la topologie de $\mathrm{Spv} A$ coïncide avec la topologie induite par $\mathrm{Spv} B$ via $\mathrm{Spv} f$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ les supports de v et v' .

(i) : Par hypothèse on a $\mathrm{Supp}(w) = f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}')$, et $\mathfrak{q}'$ est une spécialisation de $\mathfrak{q}$ dans $\mathrm{Spec} B$ (remarque 8.103(iii)) donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ (corollaire 6.18(ii)). D'après le problème 8.108(i), v' est alors une spécialisation secondaire de v , et noter que $k(v) = k(v')$ est une extension algébrique de $k(w)$, car f est entier. D'après l'exercice 8.15(ii,iii), l'inclusion $j : \Gamma_w \rightarrow \Gamma_{v'}$ induit une bijection $\mathrm{Spec} j : \mathrm{Spec} \Gamma_{v'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec} \Gamma_w$; d'autre part, le noyau de la projection $\pi : \Gamma_{v'} \rightarrow \Gamma_v$ est un sous-groupe convexe Δ avec $\Delta \cap \Gamma_w = \{0\}$, car aussi $\pi \circ j : \Gamma_w \rightarrow \Gamma_v$ est injective. D'où $\Delta = \{0\}$, et $v = v'$.

(ii) : Par définition, on a une surjection

$$\pi_v : \mathrm{Spec}(\Gamma_v/c\Gamma_v) \rightarrow S_v \quad \Delta/c\Gamma_v \mapsto v^\Delta$$

et de même pour S_w ; en outre, ces surjections sont des morphismes d'ensembles partiellement ordonnés, pour l'ordre induit par spécialisation de valuations. Comme les spectres des groupes abéliens ordonnés sont totalement ordonnés (voir l'exemple 8.4), il en est alors de même pour S_v et S_w ; compte tenu de (i), il s'ensuit déjà que $\mathrm{Spv} f$ se restreint en une injection $\mathrm{Spv}(f)|_{S_v} : S_v \rightarrow S_w$.

Affirmation 8.114. Pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ avec $w(a) \leq v(b)$.

Preuve : Soient $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$; on alors $v(b^n) \geq v(a_i b^{n-i})$ pour quelque $i > 0$. Si $v(b) \geq 0$, l'assertion est triviale; sinon, on déduit $v(b) > v(b^i) \geq w(a_i)$. $\diamond$

Noter le diagramme commutatif d'ensembles totalement ordonnés :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\Gamma_v/c\Gamma_v) & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(\bar{j})} & \mathrm{Spec}(\Gamma_w/c\Gamma_w) \\ \pi_v \downarrow & & \downarrow \pi_w \\ S_v & \xrightarrow{\mathrm{Spv}(f)|_{S_v}} & S_w \end{array}$$

où l'homomorphisme $\bar{j} : \Gamma_w/c\Gamma_w \rightarrow \Gamma_v/c\Gamma_v$ est induit par l'inclusion $j : \Gamma_w \rightarrow \Gamma_v$. Mais l'observation 8.114 implique aisément que $c\Gamma_w = c\Gamma_v \cap \Gamma_w$, et d'autre part on a déjà remarqué que $\mathrm{Spec} j : \mathrm{Spec} \Gamma_v \rightarrow \mathrm{Spec} \Gamma_w$ est une bijection; par suite $\mathrm{Spec}(\bar{j})$ est bijective, et finalement, $\mathrm{Spv}(f)|_{S_v}$ est une bijection.

(iii) : Il vient aussitôt de (ii), lemme 8.111(ii) et proposition 8.109 que $\mathrm{Spv} f$ est spécialisante. L'assertion suit alors de la proposition 4.69(i) et la remarque 8.103(ii).

(iv) : On a vu que $\mathrm{Spec} f$ est surjective sous ces hypothèses (corollaire 6.20(i)). Soit alors $w \in \mathrm{Spv} A$, et $\mathfrak{q} \subset B$ un idéal premier avec $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathrm{Supp}(w)$; donc $k(w)$ est un sous-corps de $k(\mathfrak{q})$, et d'après l'exercice 8.25(ii), la valuation résiduelle de w se prolonge en une valuation $\bar{v}$ de $k(\mathfrak{q})$. La composition $v : B \rightarrow \Gamma_v$ de la projection $B \rightarrow k(\mathfrak{q})$ avec $\bar{v}$ est une valuation telle que $\mathrm{Spv}(f)(v) = w$, d'où la surjectivité de $\mathrm{Spv} f$. L'assertion sur la topologie de $\mathrm{Spv} A$ découle avec la proposition 4.69(ii). $\square$

Exercice 8.115. Soient A un anneau intègre et intégralement clos, B la fermeture intégrale de A dans une extension normale E de $K := \mathrm{Frac} A$, et $j : A \rightarrow B$ l'inclusion. Tout K -automorphisme σ de E induit par restriction un A -automorphisme $\sigma|_B$ de B , d'où un homéomorphisme $\mathrm{Spv}(\sigma|_B) : \mathrm{Spv} B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spv} B$. On obtient ainsi une action du groupe G des K -automorphismes de E sur l'espace topologique $\mathrm{Spv} B$. Montrer que G agit transitivement sur $(\mathrm{Spv} j)^{-1}(w)$ pour tout $w \in \mathrm{Spv} A$.

Théorème 8.116. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif et entier d'anneaux, avec B intègre et A intégralement clos, et soit v une valuation de B . On a :

(i) $\mathrm{Spv} f$ induit une surjection :

$$\{u \in \mathrm{Spv} B \mid u \succeq_p v\} \rightarrow \{u' \in \mathrm{Spv} A \mid u' \succeq_p \mathrm{Spv}(f)(v)\}.$$

(ii) *L'application $\text{Spv } f$ est générissante.*

Démonstration. (i) : Soient $w := \text{Spv}(f)(v)$ et $w' \in \text{Spv } A$ avec $w' \succeq_p w$; on cherche $v' \in \text{Spv } B$ avec $v' \succeq_p v$ et $\text{Spv}(f)(v') = w'$. Pour cela, choisissons une extension normale E du corps $\text{Frac } A$ contenant $\text{Frac } B$, et soit C la fermeture intégrale de A dans E . Notons par $g : A \rightarrow C$ et $h : B \rightarrow C$ les inclusions ; d'après le théorème 8.113(iv) il existe $v_C, w'_C \in \text{Spv } C$ avec $\text{Spv}(g)(w'_C) = w'$ et $\text{Spv}(h)(v_C) = v$. D'après le théorème 8.113(ii) il existe $w_C \in \text{Spv } C$ avec $w'_C \succeq_p w_C$ et $\text{Spv}(g)(w_C) = w$. Par construction on a $\text{Spv}(g)(w_C) = \text{Spv}(g)(v_C)$; d'après l'exercice 8.115, il existe alors un automorphisme σ de la A -algèbre C tel que $\text{Spv}(\sigma)(w_C) = v_C$, et on voit aisément que la valuation $v' := \text{Spv}(\sigma \circ h)(w'_C)$ convient.

(ii) découle aussitôt de (i), lemme 8.111(ii) et proposition 8.109. $\square$

8.5. Complexes doubles. On a déjà observé (voir la remarque 7.64(i)) que pour tout $i \in \mathbb{N}$ l'association $(M, N) \mapsto \text{Tor}_i^A(M, N)$ définit un foncteur biadditif sur la catégorie $(A - \text{Mod}) \times (A - \text{Mod})$, qui pour $i = 0$ est isomorphe au foncteur $-\otimes_A -$ de la remarque 3.7. Cela étant, on peut se demander si l'isomorphisme canonique

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M$$

se prolonge pour tout $i \in \mathbb{N}$ en un système d'isomorphismes de foncteurs

$$\text{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(N, M).$$

Dans cette section on étudiera cette question à l'aide des complexes doubles, qui interviendront plus tard aussi en d'autres situations.

Définition 8.117. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ; un *complexe double* de $\mathcal{A}$ est “un complexe de complexes d'objets de $\mathcal{A}$ ”, i.e. la donnée $(M_{p,\bullet} \mid p \in \mathbb{Z})$ d'un système de complexes de $\mathcal{A}$ et de morphismes de complexes :

$$\cdots \rightarrow M_{p+1,\bullet} \xrightarrow{d_{p+1,\bullet}^p} M_{p,\bullet} \xrightarrow{d_{p,\bullet}^{p-1}} M_{p-1,\bullet} \rightarrow \cdots \quad \text{tel que } d_{p,\bullet}^p \circ d_{p+1,\bullet}^p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

De façon équivalente, un complexe double peut être vu comme un système $(M_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Z})$ d'objets de $\mathcal{A}$, muni de deux systèmes de différentielles

$$\begin{array}{ccc} M_{p,q} & \xrightarrow{d_{p,q}^h} & M_{p-1,q} \\ d_{p,q}^v \downarrow & & \downarrow d_{p-1,q}^v \\ M_{p,q-1} & \xrightarrow{d_{p,q-1}^h} & M_{p-1,q-1} \end{array}$$

tels que

$$d_{p,q}^h \circ d_{p+1,q}^h = 0 = d_{p,q}^v \circ d_{p,q+1}^v \quad \text{et} \quad d_{p-1,q}^v \circ d_{p,q}^h = d_{p,q-1}^h \circ d_{p,q}^v \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

On appelle $d_{\bullet\bullet}^h$ et $d_{\bullet\bullet}^v$ respectivement les *différentielles horizontales* et *verticales*.

• Le formalisme des complexes doubles est complètement analogue à celui des complexes (ordinaires) de $\mathcal{A}$: tout d'abord, un *morphisme de complexes doubles* $f_{\bullet\bullet} : M_{\bullet\bullet} \rightarrow N_{\bullet\bullet}$ est la donnée d'un système de morphismes de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{p+1,\bullet} & \xrightarrow{d_{p+1,\bullet}^M} & M_{p,\bullet} & \xrightarrow{d_{p,\bullet}^M} & M_{p-1,\bullet} \longrightarrow \cdots \\ & & f_{p+1,\bullet} \downarrow & & \downarrow f_{p,\bullet} & & \downarrow f_{p-1,\bullet} \\ \cdots & \longrightarrow & N_{p+1,\bullet} & \xrightarrow{d_{p+1,\bullet}^N} & N_{p,\bullet} & \xrightarrow{d_{p,\bullet}^N} & N_{p-1,\bullet} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

tels que $f_{p,\bullet} \circ d_{p+1,\bullet}^M = d_{p+1,\bullet}^N \circ f_{p+1,\bullet}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Ces morphismes peuvent être composés de la façon évidente.

• Pour un tel $f_{\bullet\bullet}$, le *noyau* $\text{Ker } f_{\bullet\bullet}$ est le complexe double $(\text{Ker } f_{p,\bullet} \mid p \in \mathbb{Z})$, dont les différentielles sont les restrictions des $d_{\bullet\bullet}^M$.

- Le *conoyau* $\text{Coker } f_{\bullet\bullet}$ et l'*image* $\text{Im } f_{\bullet\bullet}$ de $f_{\bullet\bullet}$ sont respectivement les suites

$$(\text{Coker } f_{p,\bullet} \mid p \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad (\text{Im } f_{p,\bullet} \mid p \in \mathbb{Z})$$

avec les différentielles induits par les $d_{\bullet\bullet}^N$.

- Si $f_{\bullet\bullet}, g_{\bullet\bullet} : M_{\bullet\bullet} \rightarrow N_{\bullet\bullet}$ sont deux morphismes de complexes doubles, une *homotopie* de $f_{\bullet\bullet}$ vers $g_{\bullet\bullet}$ est la donnée d'un système de morphismes de complexes

$$s_{p,\bullet} : M_{p,\bullet} \rightarrow N_{p+1,\bullet} \quad \text{tels que} \quad f_{p,\bullet} - g_{p,\bullet} = d_{p+1,\bullet}^N \circ s_{p,\bullet} + s_{p-1,\bullet} \circ d_{p,\bullet}^M \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

8.5.1. Evidemment les complexes doubles et leurs morphismes forment une catégorie ; avec la notation de la remarque 2.97(iii), il s'agit simplement de la catégorie $\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathcal{A}))$ (rappelons que $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, voir l'exercice 2.98(ii)). On peut bien sûr itérer ces définitions, et obtenir la notion de *complexe triple* qui sera un complexe de complexes doubles (et ainsi de suite). En particulier, une *suite exacte courte* de complexes doubles est la donnée de morphismes

$$\Sigma_{\bullet} : 0 \rightarrow M_{\bullet\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet\bullet}^1} N_{\bullet\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet\bullet}^2} P_{\bullet\bullet} \rightarrow 0$$

de complexes doubles, tels que $\text{Ker } f_{\bullet\bullet}^1 = \text{Coker } f_{\bullet\bullet}^2 = 0$ et $\text{Ker } f_{\bullet\bullet}^2 = \text{Im } f_{\bullet\bullet}^1$. Cela revient à dire que $\Sigma_{\bullet}$ est un système de suites exactes courtes de $\mathcal{A}$

$$0 \rightarrow M_{p,q} \xrightarrow{f_{p,q}^1} N_{p,q} \xrightarrow{f_{p,q}^2} P_{p,q} \rightarrow 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

Le deux opérations suivantes sur les complexes doubles n'ont pas des analogues pour les complexes ordinaires :

- En échangeant les lignes avec les colonnes d'un complexe double $P_{\bullet\bullet}$ (et les différentielles horizontales avec les verticales), on obtient un autre complexe double

$$\text{fl}(P)_{\bullet\bullet}$$

qu'on appellera le *flip* de $P_{\bullet\bullet}$: donc $\text{fl}(P)_{p,q} := P_{q,p}$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. De même, à tout morphisme de complexes doubles $f_{\bullet\bullet} : M_{\bullet\bullet} \rightarrow N_{\bullet\bullet}$ on associe son flip

$$\text{fl}(f)_{\bullet\bullet} : \text{fl}(M)_{\bullet\bullet} \rightarrow \text{fl}(N)_{\bullet\bullet} \quad \text{avec } \text{fl}(f)_{p,q} := f_{q,p} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

- Si $\mathcal{A}$ est cocomplète, on peut aussi associer à $(P_{\bullet\bullet}, d_{\bullet\bullet}^h, d_{\bullet\bullet}^v)$ un complexe ordinaire, appelé le *complexe total* de $P_{\bullet\bullet}$, en posant :

$$\text{Tot}(P)_n := \bigoplus_{p+q=n} P_{p,q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

La différentielle $d_n : \text{Tot}(P)_{\bullet\bullet} \rightarrow \text{Tot}(P)_{\bullet\bullet-1}$ est l'unique morphisme de $\mathcal{A}$ dont la restriction au facteur direct $P_{p,q}$ (pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p+q=n$) est :

$$d_{p,q}^h + (-1)^p \cdot d_{p,q}^v : P_{p,q} \rightarrow P_{p-1,q} \oplus P_{p,q-1} \subset \text{Tot}(P_{\bullet\bullet})_{n-1}.$$

Vérifions que l'on a bien $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Pour cela, il suffit de vérifier que la restriction $P_{p,q} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^2 P_{p-i,q-2+i}$ de $d_{n-1} \circ d_n$ est le morphisme nul pour chaque $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $p+q=n$; noter que la cocomplétude de $\mathcal{A}$ n'intervient pas dans cette assertion. En raisonnant comme dans la remarque 5.2 on peut ainsi supposer que $\mathcal{A}$ soit une sous-catégorie pleine et exacte de $A\text{-Mod}$, pour un anneau associatif unitaire A convenable ; on calcule alors pour tout $x \in P_{p,q}$:

$$\begin{aligned} d_{n-1} \circ d_n(x) &= d_{n-1}(d_{p,q}^h(x) + (-1)^p \cdot d_{p,q}^v(x)) \\ &= (d_{p-1,q}^h + (-1)^{p-1} d_{p-1,q}^v)(d_{p,q}^h(x)) + (d_{p,q-1}^h + (-1)^p d_{p,q-1}^v)(d_{p,q}^v(x)) \\ &= (-1)^{p-1} \cdot d_{p-1,q}^v \circ d_{p,q}^h(x) + (-1)^p \cdot d_{p,q-1}^h \circ d_{p,q}^v(x) = 0. \end{aligned}$$

Tout morphisme $f_{\bullet\bullet} : M_{\bullet\bullet} \rightarrow N_{\bullet\bullet}$ de complexes doubles induit un morphisme

$$\text{Tot}(f)_{\bullet} : \text{Tot}(M)_{\bullet} \rightarrow \text{Tot}(N)_{\bullet}$$

de complexes totaux : à savoir, $\text{Tot}(f)_n := \bigoplus_{p+q=n} f_{p,q}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 8.118. Soit $P_{\bullet\bullet}$ un complexe double de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

(i) S'il existe $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $P_{p,q} = 0$ pour tout $p \leq p_0$ et tout $q \leq q_0$, alors l'expression $\bigoplus_{p+q=n} P_{p,q}$ est une somme directe *finie* pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc le complexe $\text{Tot}(P)_{\bullet}$ est bien défini même si $\mathcal{A}$ n'est pas cocomplète.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, le corollaire 4.27 entraîne aisément que toute suite exacte courte $\Sigma_{\bullet}$ de complexes doubles comme au §8.5.1 induit une suite exacte courte de complexes totaux :

$$\text{Tot}(\Sigma)_{\bullet} : 0 \rightarrow \text{Tot}(M)_{\bullet} \xrightarrow{\text{Tot}(f^1)_{\bullet}} \text{Tot}(N)_{\bullet} \xrightarrow{\text{Tot}(f^2)_{\bullet}} \text{Tot}(P)_{\bullet} \rightarrow 0.$$

En outre, si les complexes doubles $M_{\bullet\bullet}, N_{\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}$ vérifient la condition de (i), la suite $\text{Tot}(\Sigma)_{\bullet}$ sera exacte courte même si $\mathcal{A}$ n'est pas de Grothendieck.

(iii) $P_{\bullet\bullet}$ et $\text{fl}(P_{\bullet\bullet})$ ne sont pas, en général, isomorphes ; néanmoins, on a :

Lemme 8.119. (i) Si $\mathcal{A}$ est cocomplète, alors pour tout complexe double $P_{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{A}$ il existe un isomorphisme naturel de complexes de $\mathcal{A}$:

$$\phi_{\bullet}^P : \text{Tot}(P)_{\bullet} \xrightarrow{\sim} \text{Tot}(\text{fl}(P))_{\bullet}.$$

(ii) En outre, tout morphisme de complexes doubles $f_{\bullet\bullet} : P_{\bullet\bullet} \rightarrow Q_{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{A}$ induit un diagramme commutatif de complexes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Tot}(P)_{\bullet} & \xrightarrow{\phi_{\bullet}^P} & \text{Tot}(\text{fl}(P))_{\bullet} \\ \text{Tot}(f)_{\bullet} \downarrow & & \downarrow \text{Tot}(\text{fl}(f))_{\bullet} \\ \text{Tot}(Q)_{\bullet} & \xrightarrow{\phi_{\bullet}^Q} & \text{Tot}(\text{fl}(Q))_{\bullet} \end{array}$$

(iii) Si $\mathcal{A}$ n'est pas cocomplète, les assertions (i) et (ii) sont encore vérifiées pour les complexes doubles $P_{\bullet\bullet}$ et $Q_{\bullet\bullet}$ satisfaisant la condition de la remarque 8.118(i).

Démonstration. (i) : En tout degré $n \in \mathbb{Z}$, les termes des ces complexes sont la somme directe des mêmes objets $P_{p,q}$ avec $p+q=n$, et l'isomorphisme cherché sera juste une somme directe de morphismes de la forme $(-1)^{s_{p,q}} \cdot \text{Id}_{P_{p,q}}$. La preuve consiste à déterminer les bons signes $(-1)^{s_{p,q}}$ qui produisent un morphisme de complexes totaux. Or, sur le facteur direct $P_{p,q}$, la différentielle de $\text{Tot}(P)_{\bullet}$ est donnée par $d_{p,q}^h + (-1)^p \cdot d_{p,q}^v$; sur ce même facteur direct $\text{fl}(P)_{q,p} = P_{p,q}$, la différentielle de $\text{Tot}(\text{fl}(P))_{\bullet}$ est donnée par $d_{p,q}^v + (-1)^q \cdot d_{p,q}^h$. Il faut donc choisir les entiers $s_{\bullet\bullet}$ de telle façon à obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P_{p,q} & \xrightarrow{d_{p,q}^h} & P_{p-1,q} & \xrightarrow{(-1)^{s_{p-1,q}}} & P_{p-1,q} \\ & \searrow (-1)^{s_{p,q}} & \downarrow d_{p,q}^v & \searrow (-1)^q \cdot d_{p,q}^h & \\ & P_{p,q-1} & & P_{p,q} & \xrightarrow{d_{p,q}^h} P_{p-1,q} \\ & \searrow (-1)^{s_{p,q-1}} & & \downarrow d_{p,q}^v & \\ & & & P_{p,q-1} & \end{array}$$

Cela conduit au système d'équations récursives

$$s_{0,0} = 0 \quad \text{et} \quad p + s_{p,q-1} = q + s_{p-1,q} = s_{p,q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

On a la solution $(s_{p,q} := pq \mid p, q \in \mathbb{Z})$. Les assertions (ii) et (iii) sont immédiates. $\square$

Exemple 8.120. Soient A un anneau (commutatif) et $(M_{\bullet}, d_{\bullet}^M), (N_{\bullet}, d_{\bullet}^N)$ deux complexes de A -modules. On obtient un complexe double

$$M_{\bullet} \boxtimes_A N_{\bullet}$$

dont le terme de bidegré $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est $M_p \otimes_A N_q$, et dont les différentielles sont

$$d_{p,q}^h := d_p^M \otimes_A N_q \quad d_{p,q}^v := M_p \otimes_A d_q^N.$$

Si $f_\bullet : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$ et $g_\bullet : N \rightarrow N'_\bullet$ sont deux morphismes de complexes de A -modules, on déduit un morphisme de complexes doubles

$$f_\bullet \boxtimes_A g_\bullet : M_\bullet \boxtimes_A N_\bullet \rightarrow M'_\bullet \boxtimes_A N'_\bullet \quad \text{avec : } (f_\bullet \boxtimes_A g_\bullet)_{p,q} := f_p \otimes_A g_q \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

On pose

$$M_\bullet \otimes_A N_\bullet := \text{Tot}(M_\bullet \boxtimes_A N_\bullet)_\bullet \quad \text{et} \quad f_\bullet \otimes_A g_\bullet := \text{Tot}(f_\bullet \boxtimes_A g_\bullet)_\bullet.$$

En général, $M_\bullet \boxtimes_A N_\bullet$ et $N_\bullet \boxtimes_A M_\bullet$ ne sont pas isomorphes, mais on a :

Corollaire 8.121. *Avec la notation de l'exemple 8.120, on a :*

(i) *Il existe un isomorphisme naturel de complexes de A -modules :*

$$M_\bullet \otimes_A N_\bullet \xrightarrow{\sim} N_\bullet \otimes_A M_\bullet.$$

(ii) *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet \otimes_A N_\bullet & \xrightarrow{\sim} & N_\bullet \otimes_A M_\bullet \\ f_\bullet \otimes_A g_\bullet \downarrow & & \downarrow g_\bullet \otimes_A f_\bullet \\ M'_\bullet \otimes_A N'_\bullet & \xrightarrow{\sim} & N'_\bullet \otimes_A M'_\bullet. \end{array}$$

Démonstration. D'abord, soit $C_{\bullet\bullet}$ le complexe double tel que $C_{p,q} := N_q \otimes_A M_p$, et dont les différentielles horizontales (resp. verticales) sont $d_{p,q}^h := N^q \otimes_A d_p^M$ (resp. $d_{p,q}^v := d_q^N \otimes_A M_p$) pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. Les isomorphismes canoniques $M_p \otimes_A N_q \xrightarrow{\sim} N_q \otimes_A M_p$ de la proposition 3.20 induisent un isomorphisme de complexes doubles

$$M_\bullet \boxtimes_A N_\bullet \xrightarrow{\sim} C_{\bullet\bullet}.$$

Evidemment $\text{fl}(C)_\bullet = N_\bullet \boxtimes_A M_\bullet$, donc on conclut avec le lemme 8.119. $\square$

Exemple 8.122. (i) Voici une variante de l'exemple 8.120 qui est parfois utile. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne; pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $n \in \mathbb{N}$ notons par $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n$ un objet fixé représentant la somme directe $X \oplus \cdots \oplus X$ de n copies de X (e.g. $X^1 = X$, et $X^0 = 0_{\mathcal{A}}$ est un objet zéro choisi de $\mathcal{A}$), et soient

$$X \xrightarrow{e_i^{X,n}} X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{p_i^{X,n}} X \quad \forall i = 1, \dots, n$$

les injections et projections canoniques. pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, toute application $\mathbb{Z}$ -linéaire $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ est une matrice d'entiers $f_{\bullet\bullet} := (f_{ij} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, et pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on dénote par $X \otimes_{\mathbb{Z}} f : X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \rightarrow X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m$ le morphisme de $\mathcal{A}$ donné par la matrice $(f_{ij} \cdot \mathbf{1}_X \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, i.e.

$$X \otimes_{\mathbb{Z}} f := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot e_i^{X,m} \circ p_j^{X,n}.$$

On voit aisément que $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}^n} = \mathbf{1}_{X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n}$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et $X \otimes_{\mathbb{Z}} (g \circ f) = (X \otimes_{\mathbb{Z}} g) \circ (X \otimes_{\mathbb{Z}} f)$ pour tout couple d'applications $\mathbb{Z}$ -linéaires $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^p$. En outre, pour tout morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{A}$ posons

$$\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n := \sum_{i=1}^n e_i^{Y,n} \circ \phi \circ p^{X,n} : X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \rightarrow Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie de même aussitôt que $(\psi \circ \phi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n = (\psi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n) \circ (\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n)$ pour tout couple de morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ de $\mathcal{A}$. Avec cette notation, soient alors $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ un complexe de $\mathbb{Z}$ -modules libres de rangs finis, et $(X_\bullet, d_\bullet^X) \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$; on obtient un complexe double de $\mathcal{A}$, noté :

$$X_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet$$

dont le terme de bidegré $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est $X_p \otimes_{\mathbb{Z}} C_q$ et dont les différentielles sont

$$d_{p,q}^h := d_p^X \otimes_{\mathbb{Z}} C_q \quad d_{p,q}^v := X_p \otimes_{\mathbb{Z}} d_q^C.$$

Si $\phi_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ est un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ est un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}$ -modules libres de rangs finis, on obtient de même un morphisme $\phi_\bullet \boxtimes f_\bullet : X_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet \rightarrow Y_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} D_\bullet$, comme dans l'exemple 8.120; on définit alors :

$$X_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet := \text{Tot}(X_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet) \quad \text{et} \quad \phi_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} f_\bullet := \text{Tot}(\phi_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} f_\bullet).$$

En outre, on pose $C_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} X_\bullet := \text{fl}(X_\bullet \boxtimes C_\bullet)$ et $C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X_\bullet := \text{Tot}(C_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} X_\bullet)$.

(ii) Par exemple, soit $(\Delta_\bullet, d_\bullet^\Delta)$ le complexe de $\mathbb{Z}$ -modules concentré aux degrés 0 et 1, tel que $\Delta_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\Delta_1 = \mathbb{Z}$, avec différentielle $\mathbb{Z} \xrightarrow{d_1^\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : a \mapsto (a, -a)$. On a deux morphismes évidents de complexes

$$t_\bullet^1, t_\bullet^2 : \mathbb{Z}[0]_\bullet \rightarrow \Delta_\bullet \quad \text{avec} \quad t_0^1(a) := (a, 0) \quad \text{et} \quad t_0^2(a) := (0, a) \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Noter aussi que $\mathbb{Z}[0]_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X_\bullet = X_\bullet$ pour tout $X_\bullet \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Or, la donnée d'un couple de morphismes $\phi_\bullet^1, \phi_\bullet^2 : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et d'une homotopie $s_\bullet$ de $\phi_\bullet^1$ vers $\phi_\bullet^2$ équivaut à celle d'un morphisme de complexes de $\mathcal{A}$

$$\psi_\bullet : \Delta_\bullet \otimes_A X_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}[0]_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Y_\bullet \quad \text{tel que} \quad \psi_\bullet \circ (t_\bullet^i \otimes_A X_\bullet) = \mathbb{Z}[0]_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \phi_\bullet^i \quad \forall i = 1, 2.$$

En effet, par définition on a

$$(\Delta_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X_\bullet)_n = (\Delta_0 \otimes_{\mathbb{Z}} X_n) \oplus (\Delta_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X_{n-1}) = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et sous ces identifications, la différentielle de $\Delta_\bullet \otimes_A X_\bullet$ en degré n est le morphisme $X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus X_{n-2}$ de $\mathcal{A}$ donné par la matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} d_n^X & 0 & \mathbf{1}_{X_{n-1}} \\ 0 & d_n^X & -\mathbf{1}_{X_{n-1}} \\ 0 & 0 & -d_{n-1}^X \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct que l'on confiera aux soins du lecteur montre que le système de morphismes $(\psi_n : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \rightarrow Y_n \mid n \in \mathbb{Z})$ donnés par les matrices en blocs :

$$\begin{pmatrix} \phi_n^1 & \phi_n^2 & s_{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

définissent le morphisme $\psi_\bullet$ souhaité. Réciproquement, si un tel $\psi_\bullet$ est donné, on en déduit une homotopie $s_\bullet$ de $\phi_\bullet^1$ vers $\phi_\bullet^2$: à savoir, on pose $s_n := \psi_{n+1} \circ i_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$, où $i_n : X_n \rightarrow X_{n+1} \oplus X_{n+1} \oplus X_n$ est l'injection naturelle, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.123. Soient $(M_\bullet, d_\bullet^M)$, $(N_\bullet, d_\bullet^N)$ et $(P_\bullet, d_\bullet^P)$ trois complexes de A -modules. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de complexes de A -modules

$$(M_\bullet \otimes_A N_\bullet) \otimes_A P_\bullet \xrightarrow{\sim} M_\bullet \otimes_A (N_\bullet \otimes_A P_\bullet).$$

Proposition 8.124. Soient A un anneau, et $(P_{\bullet\bullet}, d_{\bullet\bullet}^h, d_{\bullet\bullet}^v)$ un complexe double de A -modules vérifiant l'une des conditions suivantes :

(a) $P_{p,q} = 0$ si $p < 0$ et le complexe $(P_{p,\bullet}, d_{p,\bullet}^v)$ est exact pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) $P_{p,q} = 0$ si $q < 0$ et le complexe $(P_{\bullet,q}, d_{\bullet,q}^h)$ est exact pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Alors, le complexe total $(T_\bullet, d_\bullet^T) := \text{Tot}(P)_\bullet$ est exact.

Démonstration. On vérifie d'abord la proposition sous la condition (a). Soit donc $n \in \mathbb{Z}$ et $x_{\bullet\bullet} := (x_{p,q} \mid p+q = n) \in Z_n(T_\bullet)$; cela veut dire que tout $x_{p,q} \in P_{p,q}$, et il existe $q_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_{p,q} = 0$ pour tout $q < q_0$. De plus :

$$d_{p,q}^h(x_{p,q}) + (-1)^{p-1} \cdot d_{p-1,q+1}^v(x_{p-1,q+1}) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p+q = n.$$

Il faut trouver $y_{\bullet\bullet} := (y_{p,q} \mid p+q = n+1) \in T_{n+1}$ tel que $d_{n+1}^T(y_{\bullet\bullet}) = x_{\bullet\bullet}$ i.e.

$$(*) \quad d_{n+1-k,k}^h(y_{n+1-k,k}) + (-1)^{n-k} \cdot d_{n-k,k+1}^v(y_{n-k,k+1}) = x_{n-k,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

On va construire les $y_{n+1-k,k} \in P_{n+1-k,k}$ par récurrence sur k , de sorte que

$$(**) \quad z_k := x_{n-k,k} - d_{n+1-k,k}^h(y_{n+1-k,k}) \in \text{Ker } d_{n-k,k}^v.$$

On pose $y_{n+1-k,k} := 0$ pour tout $k \leq q_0$; comme $x_{p,q} = 0$ si $q < q_0$, la condition $(*)$ est trivialement vérifiée pour $k < q_0$, et $(**)$ est vérifiée pour $k \leq q_0$.

Ensuite, soit $r \geq q_0$ tel que les éléments $y_{n+1-k,k}$ ont déjà été exhibés pour tout $k \leq r$, de telle façon que $(*)$ est vérifiée pour tout $k < r$ et $(**)$ est vérifiée pour tout $k \leq r$. En particulier, comme $(P_{n-r,\bullet}, d_{n-r,\bullet}^v)$ est exact, la condition $(**)$ pour $k = r$ implique qu'il existe $y_{n-r,r+1} \in P_{n-r,r+1}$ tel que

$$z_r = (-1)^{n-r} \cdot d_{n-r,r+1}^v(y_{n-r,r+1}).$$

Avec ce choix, la condition $(*)$ est maintenant vérifiée pour tout $k \leq r$. Il reste à montrer que $(**)$ est vérifiée pour $k = r + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} d_{n-r-1,r+1}^v(z_{r+1}) &= d_{n-r-1,r+1}^v(x_{n-r-1,r+1}) - d_{n-r,r}^h \circ d_{n-r,r+1}^v(y_{n-r,r+1}) \\ &= d_{n-r-1,r+1}^v(x_{n-r-1,r+1}) - (-1)^{n-r} \cdot d_{n-r,r}^h(z_r) \\ &= d_{n-r-1,r+1}^v(x_{n-r-1,r+1}) + (-1)^{n-r-1} \cdot d_{n-r,r}^h(x_{n-r,r}) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $P_{p,q} = 0$ pour tout $p < 0$, on a trivialement $y_{n+1-k,k} = 0$ pour tout $k > n + 1$, donc la suite $(y_{p,q} \mid p + q = n + 1)$ est bien un élément de T_{n+1} avec $d_{n+1}^T(y_{\bullet,\bullet}) = x_{\bullet,\bullet}$. En dernier lieu, si $P_{\bullet,\bullet}$ vérifie la condition (b), son flip $\text{fl}(P_{\bullet,\bullet})$ vérifie (a), et compte tenu du lemme 8.119(i), on conclut par le cas précédent. $\square$

Remarque 8.125. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $P_{\bullet,\bullet}$ un complexe double de $\mathcal{A}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

- (a) le complexe $(P_{p,\bullet}, d_{p,\bullet}^v)$ est exact pour tout $p \in \mathbb{Z}$
- (b) le complexe $(P_{\bullet,q}, d_{\bullet,q}^h)$ est exact pour tout $q \in \mathbb{Z}$

ainsi que la condition de la remarque 8.118(i), de sorte que le complexe $\text{Tot}(P)_{\bullet}$ soit bien défini. Dans ce cas, la conclusion de la proposition 8.124 est encore assurée : le complexe $\text{Tot}(P)_{\bullet}$ est exact. Pour la preuve on se ramène, en raisonnant comme dans la remarque 5.2, au cas où $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine et exacte de $A - \text{Mod}$, et noter que la formation du complexe total $\text{Tot}(P)_{\bullet}$ commute avec le foncteur d'inclusion $\mathcal{A} \rightarrow A - \text{Mod}$, car elle ne fait intervenir que des sommes directes *finies* d'objets de $\mathcal{A}$. Par suite, on peut même supposer que $\mathcal{A} = A - \text{Mod}$, et dans ce cas l'assertion découle aussitôt de la proposition 8.124.

On est maintenant prêt pour répondre à la question posée ci-dessus :

Théorème 8.126. *Il existe un isomorphisme de foncteurs additifs*

$$\tau_M^i : \text{Tor}_i^A(M, -) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(-, M)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout A -module M . En outre, tout homomorphisme de A -modules $f : M \rightarrow M'$ induit un diagramme commutatif de morphismes de foncteurs :

$$(\square) \quad \begin{array}{ccc} \text{Tor}_i^A(M, -) & \xrightarrow{\tau_M^i} & \text{Tor}_i^A(-, M) \\ \text{Tor}_i^A(f, -) \downarrow & & \downarrow \text{Tor}_i^A(-, f) \\ \text{Tor}_i^A(M', -) & \xrightarrow{\tau_{M'}^i} & \text{Tor}_i^A(-, M'). \end{array}$$

Démonstration. Soit N un A -module, et choisissons des résolutions projectives $P_{M_{\bullet}} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$, $P_{N_{\bullet}} \xrightarrow{\varepsilon_N} N$. Notons $(\overline{P}_{M_{\bullet}}, d_{\bullet}^{\overline{P}_{M_{\bullet}}})$ le complexe augmenté de $(P_{M_{\bullet}}, \varepsilon_M)$ (voir la définition 5.6). On a une suite exacte courte de complexes évidente

$$0 \rightarrow M[1]_{\bullet} \rightarrow \overline{P}_{M_{\bullet}} \rightarrow P_{M_{\bullet}} \rightarrow 0$$

(avec $M[1]_{\bullet}$ comme dans la remarque 2.97(ii)) d'où une suite de complexes doubles

$$(*) \quad 0 \rightarrow M[1]_{\bullet} \boxtimes_A P_{N_{\bullet}} \rightarrow \overline{P}_{M_{\bullet}} \boxtimes_A P_{N_{\bullet}} \rightarrow P_{M_{\bullet}} \boxtimes_A P_{N_{\bullet}} \rightarrow 0.$$

Or, chaque A -module P_N^i est plat (corollaire 4.100(i)), donc la suite $(*)$ est exacte courte, et on déduit une suite exacte courte de complexes totaux :

$$(**) \quad 0 \rightarrow M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \rightarrow \bar{P}_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \rightarrow P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \rightarrow 0$$

(voir l'exemple 8.120). En outre, le complexe $\bar{P}_{M\bullet}$ est exact, donc $\bar{P}_{M\bullet} \otimes_A P_{N,p}$ est exact pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par la proposition 2.102(iii); compte tenu de la proposition 8.124, on déduit que $\bar{P}_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}$ est exact. Remarquons aussi que le terme en degré $i \in \mathbb{Z}$ du complexe $M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}$ est simplement $M \otimes_A P_{N,i+1}$, et la différentielle de ce complexe en degré i est $(-1)^{i+1} \cdot Id_M \otimes_A d_{i+1}^N$; par suite

$$H_i(M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) = \text{Tor}_{i+1}^A(M, N) \quad \forall i \geq -1.$$

Si maintenant on considère la suite exacte longue d'homologie associée à $(**)$ on trouve les suites exactes

$$0 \rightarrow H_{i+1}(P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) \xrightarrow{\partial_i} H_i(M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) \rightarrow 0 \quad \forall i \geq -1.$$

Autrement dit, on a obtenu un isomorphisme naturel

$$(\dagger) \quad H_i(P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(M, N) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si l'on échange les rôles de M et N , on obtient de même un isomorphisme naturel

$$(\dagger\dagger) \quad H_i(P_{N\bullet} \otimes_A P_{M\bullet}) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(N, M) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

De l'autre côté, l'isomorphisme naturel $P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \xrightarrow{\sim} P_{N\bullet} \otimes_A P_{M\bullet}$ du corollaire 8.121 induit des isomorphismes de A -modules

$$(\dagger \dagger \dagger) \quad H_i(P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) \xrightarrow{\sim} H_i(P_{N\bullet} \otimes_A P_{M\bullet}) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Finalement, on peut combiner ces isomorphismes, pour obtenir

$$\tau_i^{M,N} : \text{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(N, M) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En dernier lieu, soient $f : M \rightarrow M'$ et $g : N \rightarrow N'$ deux homomorphismes de A -modules; comme d'habitude, on choisit des résolutions $P_{M'\bullet} \xrightarrow{\varepsilon_{M'}} M'$, $P_{N'\bullet} \xrightarrow{\varepsilon_{N'}} N'$ et des morphismes de complexes $f_{\bullet} : P_{M\bullet} \rightarrow P_{M'\bullet}$ et $g_{\bullet} : P_{N\bullet} \rightarrow P_{N'\bullet}$, qui se prolongent en des morphismes $\bar{f}_{\bullet} : \bar{P}_{M\bullet} \rightarrow \bar{P}_{M'\bullet}$ et $\bar{g}_{\bullet} : \bar{P}_{N\bullet} \rightarrow \bar{P}_{N'\bullet}$, tels que $\bar{f}_{-1} := f$ et $\bar{g}_{-1} := g$. On déduit un diagramme de A -modules

$$\begin{array}{ccccc}
 H_i(P_{N\bullet} \otimes_A P_{M\bullet}) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \text{Tor}_i^A(N, M) \\
 \downarrow H_i(g_{\bullet} \otimes_A f_{\bullet}) & \swarrow & H_i(P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) \xrightarrow{\quad} \text{Tor}_i^A(M, N) & \xrightarrow{\tau_i^{M,N}} & \downarrow \text{Tor}_i^A(g, f) \\
 & & \downarrow H_i(f_{\bullet} \otimes_A g_{\bullet}) & & \downarrow \text{Tor}_i^A(f, g) \\
 & & H_i(P_{M'\bullet} \otimes_A P_{N'\bullet}) \xrightarrow{\quad} \text{Tor}_i^A(M', N') & \xrightarrow{\tau_i^{M',N'}} & \downarrow \text{Tor}_i^A(g', f') \\
 & \swarrow & & & \downarrow \text{Tor}_i^A(g', f') \\
 H_i(P_{N'\bullet} \otimes_A P_{M'\bullet}) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \text{Tor}_i^A(N', M')
 \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les isomorphismes $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$ et les deux flèches diagonales non étiquetées sont les isomorphismes $(\dagger \dagger \dagger)$. Pour montrer que l'application $N \mapsto \tau_i^{M,N}$ est un isomorphisme de foncteurs additifs, et établir la commutativité du diagramme de foncteurs additifs $(\square)$, il suffit de vérifier que le trapèze à droite commute. Or, les deux trapèzes centraux en haut et en bas commutent par définition, et le trapèze à gauche commute en vertu du corollaire 8.121(ii). On est donc ramené à montrer que

les deux rectangles à l'intérieur et à l'extérieur commutent. Mais on a un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} & \longrightarrow & \bar{P}_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} & \longrightarrow & P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f[1]_{\bullet} \otimes_A g_{\bullet} & & \downarrow \bar{f}_{\bullet} \otimes_A g_{\bullet} & & \downarrow f_{\bullet} \otimes_A g_{\bullet} \\
 0 & \longrightarrow & M'[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N'\bullet} & \longrightarrow & \bar{P}_{M'\bullet} \otimes_A P_{N'\bullet} & \longrightarrow & P_{M'\bullet} \otimes_A P_{N'\bullet} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes ; compte tenu de la remarque 2.111, on déduit la commutativité du rectangle intérieur, et quitte à échanger les rôles de M et N et de M' et N' , le même argument s'applique au rectangle extérieur. $\square$

Remarque 8.127. On peut aussi montrer que l'isomorphisme $\tau_i^{M,N}$ du théorème 8.126 ne dépend pas -- à isomorphisme canonique près -- du système de résolutions $\mathcal{P} := ((P_{M\bullet}, \varepsilon_M) \mid M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}))$ choisi pour construire nos foncteurs dérivés. En effet, soit $\mathcal{P}' := ((Q_{M\bullet}, \varepsilon'_M) \mid M \in \text{Ob}(A - \text{Mod}))$ un autre tel système ; on notera $\text{Tor}_{i,\mathcal{P}}^A(-, -)$ et $\text{Tor}_{i,\mathcal{P}'}^A(-, -)$ les foncteurs dérivés de $M \otimes_A -$, obtenus avec $\mathcal{P}$ et respectivement avec $\mathcal{P}'$. Il vient un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Tor}_{i,\mathcal{P}}^A(M, -) & \xrightarrow{\tau_{i,\mathcal{P}}^M} & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}}^A(-, M) \\
 \omega_{i,(M,-)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \downarrow & & \downarrow \omega_{i,(-,M)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \\
 \text{Tor}_{i,\mathcal{P}'}^A(M, -) & \xrightarrow{\tau_{i,\mathcal{P}'}^M} & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}'}^A(-, M)
 \end{array}$$

où l'application $\tau_{i,\mathcal{P}}^M$ est l'isomorphisme τ_i^M construit dans la preuve du théorème à l'aide des résolutions $P_{M\bullet}$ et $P_{N\bullet}$, et $\tau_{i,\mathcal{P}'}^M$ est l'isomorphisme analogue obtenu avec $Q_{M\bullet}$ et $Q_{N\bullet}$. Les applications $\omega_{i,(M,-)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'}$ et $\omega_{i,(-,M)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'}$ sont les isomorphismes canoniques fournis par la remarque 7.61(iv). En effet, on sait qu'il existe des morphismes de complexes $\beta_{\bullet}^M : P_{M\bullet} \rightarrow Q_{M\bullet}$ et $\beta_{\bullet}^N : P_{N\bullet} \rightarrow Q_{N\bullet}$ tels que

$$\varepsilon'_M \circ \beta_0^M = \varepsilon_M \quad \text{et} \quad \varepsilon'_N \circ \beta_0^N = \varepsilon_N$$

d'où un diagramme de A -modules

$$\begin{array}{ccc}
 H_i(Q_{M\bullet} \otimes_A Q_{N\bullet}) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}'}^A(M, N) \\
 \swarrow H_i(\beta_{\bullet}^M \otimes_A \beta_{\bullet}^N) & & \nwarrow \omega_{i,(M,N)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \\
 H_i(P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}}^A(M, N) \\
 \downarrow & & \downarrow \tau_{i,\mathcal{P}}^M \\
 H_i(P_{N\bullet} \otimes_A P_{M\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}}^A(N, M) \\
 \swarrow H_i(\beta_{\bullet}^N \otimes_A \beta_{\bullet}^M) & & \nwarrow \omega_{i,(N,M)}^{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \\
 H_i(Q_{N\bullet} \otimes_A Q_{M\bullet}) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \text{Tor}_{i,\mathcal{P}'}^A(N, M) \\
 & & \downarrow \tau_{i,\mathcal{P}'}^M
 \end{array}$$

dont les quatre flèches horizontales sont les isomorphismes $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$ (et les analogues isomorphismes obtenus remplaçant $P_{M\bullet}$ et $P_{N\bullet}$ par $Q_{M\bullet}$ et $Q_{N\bullet}$). Les autres deux flèches verticales sont les isomorphismes $(\dagger \dagger \dagger)$. Avec ces notations, notre objectif est de montrer que le diagramme en forme de trapèze à droite commute. Or, les rectangles intérieurs et extérieurs commutent par définition, et le trapèze de gauche commute en vertu du corollaire 8.121(ii). Il suffit donc de montrer la commutativité des deux trapèzes centraux, en haut et en bas du diagramme. Pour cela, on remarque que $\beta_{\bullet}^M$ se prolonge en un

morphisme de complexes augmentés

$$\bar{\beta}_{\bullet}^M : \bar{P}_{M\bullet} \rightarrow \bar{Q}_{M\bullet} \quad \text{tel que} \quad \bar{\beta}_{-1}^M = Id_M$$

et compte tenu de la suite exacte correspondante $0 \rightarrow M[1]_{\bullet} \rightarrow \bar{Q}_{M\bullet} \rightarrow Q_{M\bullet} \rightarrow 0$, on obtient le diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M[1]_{\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} & \longrightarrow & \bar{P}_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} & \longrightarrow & P_{M\bullet} \otimes_A P_{N\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow M[1]_{\bullet} \otimes_A \beta_{\bullet}^N & & \downarrow \bar{\beta}_{\bullet}^M \otimes_A \beta_{\bullet}^N & & \downarrow \beta_{\bullet}^M \otimes_A \beta_{\bullet}^N \\ 0 & \longrightarrow & M[1]_{\bullet} \otimes_A Q_{N\bullet} & \longrightarrow & \bar{Q}_{M\bullet} \otimes_A Q_{N\bullet} & \longrightarrow & Q_{M\bullet} \otimes_A Q_{N\bullet} \longrightarrow 0. \end{array}$$

La commutativité du trapèze en haut s'ensuit aussitôt, par la remarque 2.111. Quitte à échanger M et N , il vient de même la commutativité du trapèze en bas.

Exemple 8.128. Comme première application, on peut donner une nouvelle solution du problème 4.24(ii) : soit Σ une suite exacte courte comme dans la partie (i) de ce problème ; pour tout A -module N , on déduit une suite exacte longue

$$(*) \quad \text{Tor}_1^A(N, M_2) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N, M_3) \rightarrow N \otimes_A M_1 \xrightarrow{N \otimes_A \phi} N \otimes_A M_2 \rightarrow N \otimes_A M_3 \rightarrow 0$$

(voir l'exemple 7.69). De l'autre côté, le théorème 8.126 nous fournit un isomorphisme $\text{Tor}_1^A(N, M_3) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_1^A(M_3, N)$; si M_3 est plat, on a $\text{Tor}_1^A(M_3, N) = 0$ (proposition 7.70), et cela montre que $N \otimes_A \Sigma$ est encore exacte courte.

De même, si M_2 est plat et si Σ est universellement exacte, on a $\text{Tor}_1^A(N, M_2) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_1^A(M_2, N) = 0$, et on extrait de $(*)$ la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(N, M_3) \rightarrow \text{Ker}(N \otimes_A \phi) = 0$$

d'où $0 = \text{Tor}_1^A(N, M_3) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_1^A(M_3, N)$ pour tout A -module N ; d'après la proposition 7.70, cela montre que M_3 est un A -module plat ; avec l'exercice suivant on déduit aussi la platitude de M_1 .

Exercice 8.129. (i) Soient A un anneau, $\Sigma := (0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de A -modules, et on suppose que M'' soit un A -module plat. Montrer que M est un A -module plat si et seulement s'il en est de même pour M' .

(ii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que f est fidèlement plat $\Leftrightarrow f$ est injectif et $B_{[f]}/f(A)$ est un A -module plat.

(iii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux fidèlement plat. Montrer que si B est intègre (resp. intègre et intégralement clos), il en est de même pour A .

Problème 8.130. (Résolutions F -acycliques) Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, et supposons que $\mathcal{A}$ ait assez d'objets projectifs ; soient en outre $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact à droite, $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et $(Q_{\bullet}, d_{\bullet}^Q) \xrightarrow{\varepsilon} M$ une *résolution F -acyclique* de M , i.e. telle que $L_i F Q_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i > 0$. Exhiber un isomorphisme naturel :

$$L_i F M \xrightarrow{\sim} H_i(F Q_{\bullet}) \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8.131. (i) Soit $(P^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet})$ un complexe double de A -modules avec *indexation cohomologique*, i.e. avec différentielles A -linéaires $d_h^{p,q} : P^{p,q} \rightarrow P^{p+1,q}$ et $d_v^{p,q} : P^{p,q} \rightarrow P^{p,q+1}$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. On associe à $P^{\bullet\bullet}$ le complexe total

$$(\text{Tot}^{\Pi}(P)^{\bullet}, d^{\bullet}) \quad \text{tel que} \quad \text{Tot}^{\Pi}(P)^n := \prod_{p+q=n} P^{p,q} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et dont la différentielle est définie comme pour $\text{Tot}(P)_{\bullet}$: explicitement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x_{\bullet\bullet} := (x_{p,q} \mid p+q=n) \in \text{Tot}^{\Pi}(P)_n$ on pose

$$d^n(x_{\bullet\bullet}) := (d_h^{p,q}(x_{p,q}) - (-1)^p \cdot d_v^{p+1,q-1}(x_{p+1,q-1}) \mid p+q=n) \in \text{Tot}^{\Pi}(P)^{n+1}.$$

Montrer que $\text{Tot}^{\Pi}(P)^{\bullet}$ est exact dans chacun des deux cas suivants :

- (a) $P^{p,q} = 0$ si $p < 0$, et le complexe $(P^{p,\bullet}, d_v^{p,\bullet})$ est exact pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- (b) $P^{p,q} = 0$ si $q < 0$, et le complexe $(P^{\bullet,q}, d_h^{\bullet,q})$ est exact pour tout $q \in \mathbb{N}$.
(ii) Soient M, N deux A -modules, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ notons par $L_i \text{Hom}_A(-, N)$ le i -ème foncteur dérivé à gauche du foncteur additif contravariant $\text{Hom}_A(-, N)$. Exhiber un isomorphisme de foncteurs biadditifs :

$$\text{Ext}_A^i(M, N) \xrightarrow{\sim} L_i \text{Hom}_A(M, N) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(Choisir une résolution projective $P_\bullet \rightarrow M$ et une résolution injective $N \rightarrow I^\bullet$ et adapter la preuve du théorème 8.126 à l'aide de (i)).

8.5.2. *Une application au complexe de Čech.* Revenons à la situation du §5.1.8 : on considère un espace topologique T , un préfaisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur T , une partie ouverte $U \subset T$, et deux recouvrements $\mathcal{U} := (U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \mathcal{V} := (V_\mu \mid \mu \in \Sigma)$ de U . À cette donnée on associe maintenant un complexe double :

$$\check{C}^{p,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}) := \prod_{\lambda \in \Lambda^{p+1}, \underline{\mu} \in \Sigma^{q+1}} \mathcal{F}(U_\lambda \cap V_{\underline{\mu}}, \mathcal{F}) \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

où, comme d'habitude, on pose $U_\lambda := U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_p}$ pour tout $\lambda := (\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \Lambda^{p+1}$, et de même on définit $V_{\underline{\mu}}$ pour tout $\underline{\mu} \in \Sigma^{q+1}$. Les différentielles horizontales et verticales sont les applications telles que :

$$\begin{aligned} d_h^{p,q}(f_{\bullet\bullet})_{\lambda, \underline{\mu}} &:= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{i+q} \cdot (f_{\tau_i(\lambda), \underline{\mu}})_{U_\lambda \cap V_{\underline{\mu}}} \\ d_v^{p,q}(f_{\bullet\bullet})_{\lambda, \underline{\mu}} &:= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{p+j} \cdot (f_{\lambda, \tau_j(\underline{\mu})})_{U_\lambda \cap V_{\underline{\mu}}} \end{aligned} \quad \forall f_{\bullet\bullet} \in \check{C}^{p,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}).$$

Par inspection directe des définitions, on trouve des isomorphismes de complexes :

$$\begin{aligned} (\check{C}^{\bullet,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}), d_h^{\bullet,q}) &\xrightarrow{\sim} \prod_{\underline{\mu} \in \Sigma^{q+1}} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}, \mathcal{F}) \\ (\check{C}^{p,\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}), d_v^{p,\bullet}) &\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda^{p+1}} \check{C}^\bullet(\mathcal{V} \wedge U_\lambda, \mathcal{F}) \end{aligned} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

où $\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}} := (U_\lambda \cap V_{\underline{\mu}} \mid \lambda \in \Lambda)$ est un recouvrement de $V_{\underline{\mu}}$, pour tout $\underline{\mu} \in \Sigma^{q+1}$, et de même pour $\mathcal{V} \wedge U_\lambda$; rappelons aussi que les produits de complexes se calculent terme à terme (exercice 2.98(ii)). De plus, les augmentations des complexes de Čech fournies par la remarque 5.26(i) induisent des augmentations

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^q &:= \prod_{\underline{\mu} \in \Sigma^{q+1}} \varepsilon_{\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}, \mathcal{F}} : \check{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \rightarrow (\check{C}^{\bullet,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}), d_h^{\bullet,q}) \\ \varepsilon_v^p &:= \prod_{\lambda \in \Lambda^{p+1}} \varepsilon_{\mathcal{V} \wedge U_\lambda, \mathcal{F}} : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow (\check{C}^{p,\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}), d_v^{p,\bullet}) \end{aligned} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

et les systèmes $(\varepsilon_h^q \mid q \in \mathbb{N})$ et $(\varepsilon_v^p \mid p \in \mathbb{N})$ définissent des morphismes

$$\mathbb{Z}[0]^\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon_h} \check{C}^{\bullet\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F}) \xleftarrow{\varepsilon_v} \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]^\bullet$$

de complexes doubles. Avec cette notation, on a :

Proposition 8.132. *Supposons que pour tous $\lambda \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^{p+1}$ et $\underline{\mu} \in \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \Sigma^{q+1}$ les recouvrements $\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}$ et $\mathcal{V} \wedge U_\lambda$ soient $\mathcal{F}$ -acycliques (voir la remarque 5.26(i)). Alors $\mathcal{U}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{V}$.*

Démonstration. Soit $(C^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet})$ le complexe double tel que $C^{p,q} := 0$ si $p < -1$ ou $q < -1$, dont la colonne $(C^{-1,\bullet}, d_v^{-1,\bullet})$ coïncide avec le complexe de Čech augmenté $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, la ligne $(C^{\bullet,-1}, d_h^{\bullet,-1})$ coïncide avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, et avec $C^{p,q} := \check{C}^{p,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F})$ pour tout $p \geq 0$ et tout $q \geq 0$. Les différentielles $d_h^{p,q}$ et $d_v^{p,q}$ coïncident avec les différentielles du complexe double $\check{C}^{\bullet\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F})$ pour tout $p \geq 0$ et tout $q \geq 0$. Les différentielles $d_h^{-1,q}$ et $d_v^{p,-1}$ sont respectivement les applications ε_h^q et ε_v^p pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. (Donc, $C^{-1,-1} = \mathcal{F}(U)$, et les différentielles $d_h^{-1,-1}$ et $d_v^{-1,-1}$ sont les augmentations $\varepsilon_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{V}, \mathcal{F}}$ de la remarque 5.26(i).)

Soit de plus $\check{C}_{\text{h.aug}}^{\bullet\bullet}$ (resp. $\check{C}_{\text{v.aug}}^{\bullet\bullet}$) le complexe double obtenu de $C^{\bullet\bullet}$ après *troncature de la ligne* $C^{-1,\bullet}$ (resp. *troncature de la colonne* $C^{\bullet,-1}$); donc $\check{C}_{\text{h.aug}}^{p,q} = C^{p,q}$ si $p \geq 0$, et

$\check{C}_{\text{h.aug}}^{-1,q} = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. De même $\check{C}_{\text{v.aug}}^{p,q} = C^{p,q}$ si $q \geq 0$ et $\check{C}_{\text{v.aug}}^{p,-1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Il vient des suites exactes de complexes doubles :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{C}_{\text{v.aug}}^{\bullet\bullet} &\rightarrow C^{\bullet\bullet} \rightarrow \mathbb{Z}[0]^{\bullet} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \check{C}_{\text{h.aug}}^{\bullet\bullet} &\rightarrow C^{\bullet\bullet} \rightarrow \check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]^{\bullet} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

induisant des suites exactes de complexes :

$$(*) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Tot}^{\Pi}(\check{C}_{\text{v.aug}})^{\bullet} &\rightarrow \text{Tot}^{\Pi}(C)^{\bullet} \rightarrow \check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{Tot}^{\Pi}(\check{C}_{\text{h.aug}})^{\bullet} &\rightarrow \text{Tot}^{\Pi}(C)^{\bullet} \rightarrow \check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or, les hypothèses de la proposition entraînent que les complexes $\check{C}_{\text{v.aug}}^{p,\bullet}$ et $\check{C}_{\text{h.aug}}^{\bullet,q}$ soient exacts pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Les complexes $\text{Tot}^{\Pi}(\check{C}_{\text{v.aug}})^{\bullet}$ et $\text{Tot}^{\Pi}(\check{C}_{\text{h.aug}})^{\bullet}$ sont alors exacts, d'après l'exercice 8.131(i). Les suites exactes longues d'homologie associée aux suites (*) nous fournissent ainsi des isomorphismes :

$$H^p(\check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{V}, \mathcal{F})) \xleftarrow{\sim} H^p(\text{Tot}^{\Pi}(C)^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} H^p(\check{C}_{\text{aug}}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 8.133. Si $\mathcal{V} \wedge U_{\underline{\lambda}}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique pour tout $\underline{\lambda} \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^{p+1}$, on a :

- (i) $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} := (U_{\underline{\lambda}} \cap V_{\underline{\mu}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda, \underline{\mu} \in \Sigma)$ est $\mathcal{F}$ -acyclique $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique.
- (ii) Si de plus $\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique $\Leftrightarrow \mathcal{V}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique.

Démonstration. (ii) : Au vu de la proposition 8.132, il suffit de montrer que $\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique pour tout $\underline{\mu} \in \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \Sigma^{q+1}$. Mais noter que $\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}$ raffine le recouvrement trivial $\{V_{\underline{\mu}}\}$, et d'autre part $\{V_{\underline{\mu}}\}$ raffine $\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}$ (car $\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur). D'après le lemme 5.30(iii), il s'ensuit que $\rho^i(\{V_{\underline{\mu}}\}, \mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}})$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$ (son inverse est $\rho^i(\mathcal{U} \wedge V_{\underline{\mu}}, \{V_{\underline{\mu}}\})$). L'assertion suit alors du lemme 5.30(iv).

(i) : On voit aisément que $\mathcal{V}_{\underline{\lambda}} := \mathcal{V} \wedge U_{\underline{\lambda}}$ raffine $\mathcal{W}_{\underline{\lambda}} := (\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}) \wedge U_{\underline{\lambda}}$, et $\mathcal{W}_{\underline{\lambda}}$ raffine $\mathcal{V}_{\underline{\lambda}}$, pour tout $\underline{\lambda} \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^{p+1}$. Ainsi $\rho^i(\mathcal{V}_{\underline{\lambda}}, \mathcal{W}_{\underline{\lambda}})$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$ (lemme 5.30(iii)) ; il en est de même pour $\rho^i(\{U_{\underline{\lambda}}\}, \mathcal{V}_{\underline{\lambda}})$, d'après le lemme 5.30(iv). Donc, $\rho^i(\{U_{\underline{\lambda}}\}, \mathcal{W}_{\underline{\lambda}}) = \rho^i(\mathcal{V}_{\underline{\lambda}}, \mathcal{W}_{\underline{\lambda}}) \circ \rho^i(\{U_{\underline{\lambda}}\}, \mathcal{V}_{\underline{\lambda}})$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$, et alors $\mathcal{W}_{\underline{\lambda}}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique pour tout $\underline{\lambda} \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^{p+1}$, toujours par le lemme 5.30(iv). Or, $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$, donc l'assertion suit maintenant de (ii). $\square$

Remarque 8.134. Les résultats de ce paragraphe, ainsi que l'essentiel du §5.1.8 remontent au célèbre article [65] de J.-P. Serre : la cohomologie des faisceaux inventée dans ce travail fondateur a radicalement transformé la géométrie algébrique moderne.

8.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 8.2, partie (i) : La réflexivité et symétrie de la relation $\sim$ sont claires. Pour la transitivité, soient $(v_i : A \rightarrow \Gamma_{i\circ} \mid i = 1, 2, 3)$ des valuations avec $v_1 \sim v_2 \sim v_3$, de sorte qu'il existe des valuations $v'_i : A \rightarrow \Delta_{i\circ}$ pour $i = 1, 2$ et des morphismes injectifs de groupes ordonnés $f_i : \Delta_i \rightarrow \Gamma_i$ et $g_i : \Delta_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ pour $i = 1, 2$ avec

$$v_1 = f_{1\circ} \circ v'_1 \quad v_2 = g_{1\circ} \circ v'_1 = f_{2\circ} \circ v'_2 \quad v_3 = g_{2\circ} \circ v'_2.$$

On pose $\Delta := \Delta_1 \times_{\Gamma_2} \Delta_2 := \{(\delta, \delta') \in \Delta_1 \times \Delta_2 \mid g_1(\delta) = f_2(\delta')\}$; on voit aisément que Δ est un sous-groupe du groupe $\Delta_1 \times \Delta_2$, et comme g_1 et f_2 sont injectifs, il en est de même pour les projections $p_i : \Delta \rightarrow \Delta_i$, pour $i = 1, 2$. Il existe alors sur Δ une unique structure de groupe ordonné $(\Delta, \leq)$ telle que p_1 soit un morphisme de groupes ordonnés, et on vérifie aisément que p_2 est elle aussi un morphisme de groupes ordonnés pour cette même structure sur Δ . De plus, il existe une unique application $v' : A \rightarrow \Delta_{\circ}$ telle que $p_{i\circ} \circ v' = v'_i$ pour $i = 1, 2$, et on voit aisément que v' est une valuation de A . Donc $f'_1 := f_1 \circ p_1$ et $g'_2 := g_2 \circ p_2$ sont des morphismes injectifs de groupes ordonnés avec $f'_1 \circ v' = v_1$ et $g'_2 \circ v' = v_3$, d'où $v_1 \sim v_3$, CQFD.

Partie (ii) : Posons $w := f_{\circ} \circ v \circ \phi : B \rightarrow \Gamma'_{\circ}$; évidemment $w(0) = +\infty$ et $w(1) = 0$. Ensuite, soient $b, b' \in B$; on a :

$$w(b + b') = f_{\circ} \circ v(\phi(b) + \phi(b')) \geq f_{\circ}(\min(v \circ \phi(b), v \circ \phi(b'))) = \min(w(b), w(b')).$$

On voit de même que $w(b \cdot b') = w(b) + w(b')$, d'où l'assertion.

Exercice 8.5, partie (i) : En effet, soient $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ et $n > 1$ un entier tel que $n \cdot \gamma = 0$; quitte à remplacer γ par $-\gamma$ on peut supposer que $\gamma > 0$, d'où $-k \cdot \gamma < 0$ pour tout entier $k > 0$; d'autre part on a $\gamma = (1 - n) \cdot \gamma$, contradiction. Ensuite, évidemment le sous-groupe trivial $\{0\}$ est convexe; si en outre le rang convexe de Γ est 0, le seul sous-groupe convexe doit être $\{0\}$, d'où $\Gamma = \{0\}$.

Partie (ii) : Si $(\Gamma/\Delta, \leq)$ est un groupe ordonné et si la projection $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta$ est un morphisme de groupes ordonnés, $\Delta = \text{Ker}(\pi)$ est convexe. Réciproquement, si Δ est convexe, on définit une relation $\leq$ sur Γ/Δ en posant

$$\pi(\gamma) \leq \pi(\gamma') \quad \Leftrightarrow \quad \exists \delta \in \Delta \text{ tel que } \gamma \leq \gamma' + \delta$$

pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. On voit aisément que $\leq$ est bien définie sur le quotient Γ/Δ , i.e. ne dépend pas du choix des représentants γ, γ' des classes $\pi(\gamma), \pi(\gamma')$. Ensuite, si $\pi(\gamma) \leq \pi(\gamma')$ et $\pi(\gamma') \leq \pi(\gamma'')$, il existe $\delta, \delta' \in \Delta$ tels que $\gamma \leq \gamma' + \delta$ et $\gamma' \leq \gamma'' + \delta'$, d'où $\gamma \leq \gamma'' + \delta + \delta'$, et donc $\pi(\gamma) \leq \pi(\gamma'')$. Pour montrer que $\leq$ est une relation d'ordre, il ne reste qu'à montrer que si $\pi(\gamma) \leq \pi(\gamma')$ et $\pi(\gamma') \leq \pi(\gamma'')$, on a $\pi(\gamma) = \pi(\gamma')$; or, par hypothèse il existe $\delta, \delta' \in \Delta$ tels que $\gamma \leq \gamma' + \delta$ et $\gamma' \leq \gamma + \delta'$, d'où $-\delta' \leq \gamma - \gamma' \leq \delta$, autrement dit $0 \leq \gamma - \gamma' + \delta' \leq \delta + \delta'$, et la convexité de Δ donne $\gamma - \gamma' + \delta' \in \Delta$, d'où l'identité souhaitée. Il est aussi évident que si $\pi(\gamma) \leq \pi(\gamma')$, alors $\pi(\gamma) + \pi(\gamma'') \leq \pi(\gamma') + \pi(\gamma'')$ pour tout $\gamma'' \in \Gamma$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Pour tout sous-groupe convexe Δ' de Δ , notons :

$$c(\Delta')$$

le plus petit sous-groupe convexe de Γ contenant Δ' (i.e. l'intersection des sous-groupes convexes $\Gamma' \subset \Gamma$ contenant Δ'). Noter que $c(\Delta')$ est l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels qu'il existe $\delta \in \Delta'$ avec $-\gamma, \gamma \leq \delta$; en effet, évidemment si γ satisfait cette condition, alors $\gamma \in c(\Delta')$, et de l'autre côté, on voit aisément que l'ensemble des éléments γ satisfaisant cette condition est un sous-groupe convexe de Γ , d'où l'assertion. Il suffit de montrer que $c(\Delta') \cap \Delta = \Delta'$ pour tout $\Delta' \in \text{Spec } \Delta$. Or, évidemment $\Delta' \subset c(\Delta') \cap \Delta$; de l'autre côté, si $\delta \in c(\Delta') \cap \Delta$, par ce qui précède il existe $\delta' \in \Delta'$ tel que $-\delta, \delta \leq \delta'$, d'où $\delta \in \Delta'$, car Δ' est convexe dans Δ .

Ensuite, montrons que $\text{Spec}(i)$ est injective si Γ/Δ est de torsion. En effet, soient $\Gamma'' \subset \Gamma'$ deux sous-groupes convexes de Γ avec $\Gamma'' \cap \Delta = \Gamma' \cap \Delta$, on déduit un homomorphisme de groupes surjectif $\Gamma'/(\Gamma' \cap \Delta) \rightarrow \Gamma''/(\Gamma'' \cap \Delta)$, et de l'autre côté $\Gamma'/(\Gamma' \cap \Delta) \subset \Gamma/\Delta$; en particulier, Γ'/Γ'' est de torsion. Mais (ii) nous dit que Γ'/Γ'' est un groupe ordonné, d'où $\Gamma' = \Gamma''$, compte tenu de (i).

Exercice 8.9 : On peut supposer que S soit une partie multiplicative. On pose

$$w(a/s) := v(a) - v(s) \quad \forall a \in A, \forall s \in S.$$

Montrons d'abord que $w(a/s)$ ne dépend que de la classe de a/s dans $S^{-1}A$: en effet, si $a' \in A$ et si $s' \in S$, on a $a/s = a'/s'$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $as't = a'st$, d'où $v(a) + v(s') + v(t) = v(a') + v(s) + v(t)$. Or, par hypothèse $v(t) \neq +\infty$; il s'ensuit aisément que $v(a) - v(s) = v(a') - v(s')$, d'où l'assertion. Ensuite, pour tous $a, b \in A$ et tous $s, t \in S$ on calcule

$$\begin{aligned} w(s^{-1}a + t^{-1}b) &= v(at + bs) - v(st) \\ &\geq \min(v(a) + v(t), v(b) + v(s)) - v(st) \\ &\geq \min(v(a) - v(s), v(b) - v(t)) = \min(w(a/s), w(b/t)). \end{aligned}$$

On voit aussi aisément que $w((a/s) \cdot (b/t)) = w(a/s) + w(b/t)$, ce qui achève de montrer que w est une valuation, et évidemment c'est l'unique valuation sur $S^{-1}A$ telle que $w(a/1) = v(a)$ pour tout $a \in A$, comme souhaité.

Exercice 8.11, partie (i) : Noter que $|\cdot|_{a,\rho}$ est la composition de $|\cdot|_{0,\rho} : A[X] \rightarrow \Gamma_0$ avec l'automorphisme $A[X] \xrightarrow{\sim} A[X] : P(X) \mapsto P(X+a)$. Par l'exercice 8.2(ii), on peut donc prendre $a = 0$. Si $P(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ et si $Q(X) = \sum_{i=0}^n c_i X^i$, il vient :

$$v(b_k + c_k) + k\rho \geq \min(v(b_k), v(c_k)) + k\rho = \min(v(b_k) + k\rho, v(c_k) + k\rho) \quad \forall k \leq n$$

d'où $|P+Q|_{0,\rho} \geq \min(|P|_{0,\rho}, |Q|_{0,\rho})$. Ensuite, disons que $PQ = \sum_{k=0}^m d_k X^k$, et soit i (resp. j) le plus petit des entiers $k = 0, \dots, n$ tel que $|P|_{0,\rho} = v(b_k) + k\rho$ (resp. tel que $|Q|_{0,\rho} = v(c_k) + k\rho$). Il vient $d_k = \sum_{t=0}^k b_t c_{k-t}$, pour tout $k = 0, \dots, m$, et on a

$$v(b_t c_{k-t}) + k\rho = (v(b_t) + t\rho) + (v(c_{k-t}) + (k-t)\rho) \geq \gamma := |P|_{0,\rho} + |Q|_{0,\rho}$$

d'où $|d^k X^k|_{0,\rho} \geq \gamma$ pour $k = 0, \dots, m$, et ainsi $|PQ|_{0,\rho} \geq \gamma$. D'autre part, on a $v(b_t c_{i+j-t}) + (i+j)\rho > \gamma$ si $t \neq i$, et $v(b_i c_j) + (i+j)\rho = \gamma$, d'où $v(d_{i+j}) + (i+j)\rho = \gamma$ (remarque 8.8(ii)), et finalement $|PQ|_{0,\rho} = \gamma$, d'où l'assertion. Il est clair que $\text{Supp}(|\cdot|_{(a,\rho)}) = \mathfrak{p}[X]$, d'où l'existence et unicité de l'extension de $|\cdot|_{(a,\rho)}$ à $k(X)$.

Partie (ii) : D'après (i), $|\cdot|_{(a_\lambda, \rho_\lambda)}^v$ est une valuation sur $A[X]$, et il en est de même pour l'application $A[X] \rightarrow \Gamma_0 : P(X) \mapsto w(P(x))$; par suite, il suffit de montrer l'assertion pour $P(X) = X - a$, avec $a \in A$ arbitraire. Mais d'un côté, comme $w(x - a_\lambda) = w(a_\lambda - x)$ (remarque 8.8(i)), on a :

$$\min(w(x - a), w(x - a_\lambda)) = \min(w(x - a_\lambda), w(a_\lambda - a)) = |X - a|_{(a_\lambda, \rho_\lambda)}^v \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

et de l'autre côté, l'hypothèse sur $(a_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ entraîne qu'il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\min(w(x - a), w(x - a_\lambda)) = w(x - a)$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, d'où l'assertion.

Problème 8.12, partie (i) : On a $w(1) = w(1 \cdot 1) \geq w(1) + w(1) \geq 0 + 0 = 0$, d'où $w(1) \in \{0, +\infty\}$. Si $w(1) = +\infty$, on a $w(a) = w(1 \cdot a) \geq w(1) + \infty = +\infty$, i.e. $w(a) = +\infty$ pour tout $a \in A$. Ensuite, $w(-a) \geq \min(w(0), w(a)) = w(a)$ pour tout $a \in A$, donc aussi $w(a) \geq w(-a)$, d'où $w(a) = w(-a)$ pour tout $a \in A$. Il vient alors $w(a+b) \geq \min(w(a), w(b))$ pour tous $a, b \in A$, d'où la dernière assertion.

Partie (ii) : Soit $a \in A$, et posons $v_n := w(a^n)/n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; on doit vérifier la convergence dans $\mathbb{R}_0$ de la suite $(v_n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$. Si $v_k = +\infty$ pour quelque $k > 0$, il vient $v_n = +\infty$ pour tout $n \geq k$, d'où l'assertion, dans ce cas. Donc, on peut supposer que $v_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n > 0$. Noter que :

$$v_{kn} \geq v_n \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Par suite, pour tous $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $r = 0, \dots, n-1$, on a :

$$v_{kn+r} \geq \frac{1}{kn+r} (w(a^{kn}) + w(a^r)) = \frac{kn}{kn+r} \cdot v_{kn} + \frac{w(a^r)}{kn+r} \geq \frac{kn}{kn+r} \cdot v_n + \frac{w(a^r)}{kn+r}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ donnés, choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $r/(kn+r) < \varepsilon$ et $|w(a^r)/(kn+r)| < \varepsilon$ pour tout $r = 0, \dots, n-1$; il vient $v_t \geq \min(v_n, (1-\varepsilon) \cdot v_n) - \varepsilon$ pour tout $t \geq kn$. Par suite :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

d'où l'assertion. Ensuite, puisque $w(a^n) \geq n \cdot w(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $w^*(a) \geq w(a)$, et la définition de w^* entraîne aussitôt que $w^*(a^n) = n \cdot w^*(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vérifions que w^* est une semi-norme : soient $a, b \in A$ avec $w^*(b) \geq w^*(a)$, et $\varepsilon > 0$ un nombre réel; par ce qui précède, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$w(a^k)/k > w^*(a) - \varepsilon \quad w(b^k)/k > w^*(b) - \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Prenons un entier $t \geq 2k_0$ suffisamment grand, de sorte que :

$$w(a^i)/n > -\varepsilon \quad w(b^i)/n > -\varepsilon \quad \forall n \geq t, \forall i \leq k_0$$

et posons aussi $M := \min(w^*(a) - \varepsilon, (w^*(a) - \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon))$. D'un côté, avec (i) on a :

$$w((a+b)^n)/n \geq \min(w(a^i)/n + w(b^{n-i})/n \mid i = 0, \dots, n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

et de l'autre côté, pour tout entier $n \geq t$ avec $k_0/n < \varepsilon$, on a :

$$w(a^i)/n + w(b^{n-i})/n \geq \begin{cases} w^*(a) - \varepsilon & \text{si } i, n-i \geq k_0 \\ M - \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit aussitôt que $w^*(a+b) \geq w^*(a) = \min(w^*(a), w^*(b))$. En dernier lieu, l'inégalité $w^*(ab) \geq w^*(a) + w^*(b)$ découle aussitôt de la même inégalité pour $w(ab)$.

Partie (iii) : Soient (B, u) un anneau semi-normé uniforme, et $f : (A, w) \rightarrow (B, u)$ un morphisme d'anneaux semi-normés ; il existe alors $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(f(a)) \geq C + w(a)$ pour tout $a \in A$, d'où $u(f(a)) = u(f(a)^n)/n \geq C/n + w(a^n)/n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par suite, $u(f(a)) \geq w^*(a)$ pour tout $a \in A$, i.e. f est un morphisme $(A, w^*) \rightarrow (B, u)$ de $\mathbf{AnUni}$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (iv) : On vérifie aisément que A^+ est un sous-anneau de A , et que I est un idéal radical de A^+ ; de même, on voit aussitôt que J est un idéal radical de A et de A^+ : les détails sont confiés au lecteur. Ensuite, soient $x \in A$ et $a_1, \dots, a_n \in A^+$ tels que $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$; par suite, $n \cdot w(x) \geq \min(w(a_i) + (n-i) \cdot w(x) \mid i = 1, \dots, n)$, d'après (i). Soit alors $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $n \cdot w(x) \geq w(a_j) + (n-j) \cdot w(x)$; il vient $j \cdot w(x) \geq w(a_j) \geq 0$, d'où $w(x) \geq 0$, i.e. $x \in A^+$, et cela montre que A^+ est intégralement fermé dans A . En dernier lieu, il est clair que $w(a+b) = w(a)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in J$, donc w est la composition de la projection $A \rightarrow \bar{A}$ et d'une unique application $\bar{w} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}_0$, et on vérifie sans peine que $\bar{w}$ est une semi-norme p-multiplicative.

Exercice 8.15, partie (i) : Soient $x_1, \dots, x_r \in K' \setminus \{0\}$ tels que les classes des valeurs $v'(x_1), \dots, v'(x_r)$ dans Γ'/Γ sont deux à deux distinctes. et $y_1, \dots, y_s \in K'^+$ dont les images $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s \in k'$ soient k -linéairement indépendantes ; noter que $v'(y_1) = \dots = v'(y_s) = 0$. Il suffit de montrer que les éléments $(x_i y_j \mid i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s)$ sont K -linéairement indépendants. Soit donc $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij} x_i y_j = 0$ une relation K -linéaire (avec $a_{ij} \in K$ pour tous i, j) ; en vertu de la remarque 8.8(ii) on déduit aisément qu'il existe deux couples d'indices (i, j) et (i', j') tels que $a_{ij}, a_{i'j'} \neq 0$ et $v'(a_{ij} x_i y_j) = v'(a_{i'j'} x_{i'} y_{j'})$, donc $v(a_{ij}) + v'(x_i) = v(a_{i'j'}) + v'(x_{i'})$, contradiction.

Partie (ii) : Remarquons que Γ'/Γ est un groupe de torsion. En effet, si $\gamma \in K'$, il existe $x \in K'$ avec $v'(x) = \gamma$, et une sous-extension finie $E \subset K'$ de K avec $x \in E$; il vient $[v'(E^\times) : \Gamma] \leq [E : K]$, par la partie (i), d'où l'assertion. Soit $\Delta' \subset \Gamma'$ un sous-groupe convexe, et notons $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$; par inspection de la solution l'exercice 8.5(iii), on voit que Δ' est l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma'$ tels qu'il existe $\delta \in \Delta$ avec $-\gamma, \gamma \leq \delta$. Or, notons $\mathfrak{p}(\Delta') \in \text{Spec } K'$ et $\mathfrak{p}(\Delta) \in \text{Spec } K$ comme dans la proposition 8.14(i) ; on doit montrer que $\mathfrak{p}(\Delta) = K \cap \mathfrak{p}(\Delta')$, et l'inclusion $K \cap \mathfrak{p}(\Delta') \subset \mathfrak{p}(\Delta)$ vient aussitôt des définitions. Si $x \in \mathfrak{p}(\Delta)$, on a $\gamma < v(x)$ pour tout $\gamma \in \Delta$, donc aussi pour tout $\gamma \in \Delta'$, par ce qui précède, i.e. $x \in \mathfrak{p}(\Delta')$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Cela découle de (ii) et de l'exercice 8.5(iii).

Partie (iv) : Soit $\pi : K^+ \rightarrow k$ la projection, et $P(X) := X^n + \bar{a}_1 X^{n-1} + \dots + \bar{a}_n \in k[X]$ un polynôme unitaire ; choisissons $a_i \in K^+$ avec $\pi(a_i) = \bar{a}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et soit $\alpha \in K$ une racine du polynôme $Q(X) := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$. Si $v(\alpha) < 0$, il vient $v(a_i \alpha^{n-i}) > v(\alpha^n)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où $v(Q(\alpha)) = v(\alpha^n) \neq +\infty$ (remarque 8.8(ii)), contradiction. Ainsi, $\alpha \in K^+$, et $P(\pi(\alpha)) = 0$.

Exercice 8.18 : Soit $x \in K \setminus \pi^{-1}V'$; si $x \notin V$, on a $x^{-1} \in \mathfrak{m}$, d'où $x \in \pi^{-1}V'$, contradiction. Donc $x \in V$, et on doit avoir $x \in V^\times$, car sinon $x \in \mathfrak{m} \subset \pi^{-1}V'$, contradiction ;

or $\pi(x) \in k(\mathfrak{m}) \setminus V'$, d'où $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} \in V'$, i.e. $x^{-1} \in \pi^{-1}V'$, et l'assertion suit du lemme 8.16.

Exercice 8.19 : Evidemment, la condition est vérifiée si v et w sont équivalentes. Pour la réciproque, remarquons d'abord que la condition implique que pour tout $a \in A$ on a $v(a) = +\infty$ si et seulement si $w(a) = +\infty$, i.e. v et w ont le même support, donc $K := k(v) = k(w)$, et v et w se factorisent à travers des valuations uniques $\bar{v}$ et $\bar{w}$ de K . Il suffit alors de montrer que $\bar{v}$ est équivalente à $\bar{w}$, et on est ainsi ramené au cas où A est un corps. Dans ce cas, la condition implique que pour tout $a \in A$ on a $v(a) \geq v(1) = 0$ si et seulement si $w(a) \geq w(1) = 0$, donc v et w ont le même anneau de valuation. L'assertion découle alors de la remarque 8.17(i).

Exercice 8.23 : D'après le théorème 8.21, il existe un anneau de valuation $(W, \mathfrak{m}_W)$ de K avec $(A, \mathfrak{m}_A) \leq (W, \mathfrak{m}_W)$; posons $\mathcal{F} := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } W \mid \mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}_A\}$, et noter que $\mathfrak{m}_W \in \mathcal{F}$, et $\mathfrak{q} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{F}} \mathfrak{p}$ est l'élément minimal de $\mathcal{F}$ (pour l'ordre donné par inclusion d'idéaux). Soient alors $V := W_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{m}_V := \mathfrak{q}V$; d'après la remarque 8.17(ii), V est un anneau de valuation de K , et on a $\mathfrak{m}_V \cap A = \mathfrak{m}_V \cap W \cap A = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{m}_A$, i.e. $(V, \mathfrak{m}_V)$ domine $(A, \mathfrak{m}_A)$. Il reste à vérifier que $\dim V = 1$. Or, par hypothèse $\mathfrak{m}_A \neq 0$, donc $\mathfrak{m}_V \neq 0$, d'où $\dim V \geq 1$; soit alors $\mathfrak{p} \neq 0$ un idéal premier de V , et prenons $a \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Puisque $\text{Frac } A = K$, on a $a = b/b'$ pour certains $b, b' \in A \setminus \{0\}$, et alors $b \in \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}_A$; par suite, $\mathfrak{r} := \mathfrak{p} \cap W \in \mathcal{F}$, et ainsi $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{m}_V \subset \mathfrak{r}V = \mathfrak{p}$ (lemme 3.30(i)), i.e. $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_V$, d'où l'assertion.

Exercice 8.25, partie (i) : Au vu du corollaire 8.24, il suffit de montrer que pour tout anneau de valuation $(V, \mathfrak{m})$ de K contenant A , il existe un anneau de valuation V' de K tel que $V' \subset V$ et $A \leq V'$. Pour cela, soit $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{m}$; donc $A/\mathfrak{p} \in \mathcal{L}_{k(\mathfrak{m})}$, et par le théorème 8.21 il existe un anneau de valuation W de $k(\mathfrak{m})$ avec $A/\mathfrak{p} \leq W$. Soit $\pi : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection; $V' := \pi^{-1}W$ est un anneau de valuation de K (exercice 8.18), et on voit aisément que $A \leq V'$.

Partie (ii) : Soit $(V, \mathfrak{m}_V)$ l'anneau de valuation de v ; d'après le théorème 8.21, il existe un anneau de valuation $(W, \mathfrak{m}_W)$ de E avec $V \subset W$ et $\mathfrak{m}_V = \mathfrak{m}_W \cap V$. Montrons que $V = K \cap W$. Pour cela, il suffit de vérifier que $K \cap W \subset V$; on raisonne par l'absurde : si $x \in (K \cap W) \setminus V$, on a $x^{-1} \in \mathfrak{m}_V$ (lemme 8.16), d'où $x^{-1} \in \mathfrak{m}_W$, mais alors $x \notin W$, contradiction. On voit aisément que la valuation w de E d'anneau de valuation W convient (rappelons que $\Gamma_v = K^\times/V^\times$ et $\Gamma_w = E^\times/W^\times$, à isomorphisme de groupes ordonnés près : voir la preuve du lemme 8.16).

Partie (iii) : Si $|\cdot|_{(b,\rho)}^v = |\cdot|_{(b',\rho')}^v$, il vient :

$$\begin{aligned}\rho &= |X - b|_{(b,\rho)}^v = |X - b|_{(b',\rho')}^v = \min(v(b - b'), \rho') \\ \rho' &= |X - b'|_{(b',\rho')}^v = |X - b'|_{(b,\rho)}^v = \min(v(b - b'), \rho)\end{aligned}$$

d'où $\rho \leq \rho' \leq \rho$, i.e. $\rho = \rho'$; par suite $\rho = \min(v(b - b'), \rho)$, i.e. $v(b - b') \geq \rho$. Pour la réciproque, soit $k := k(v)$; d'après l'exercice 8.11(i), $|\cdot|_{(b,\rho)}^v$ et $|\cdot|_{(b',\rho)}^v$ ont le même support, et se factorisent à travers des valuations de Gauss $k(X) \rightarrow \Gamma_\circ$. Donc, on peut supposer que $B = k$. Soit K une clôture algébrique de k ; par (ii), il existe une valuation w de K prolongeant v , et notons par $|\cdot|_{(b,\rho)}^w$ et $|\cdot|_{(b',\rho)}^w$ les valuations de Gauss de $K[X]$ de rayon ρ et centres b et b' . Evidemment il suffit de montrer que si $v(b - b') \geq \rho$ alors $|\cdot|_{(b,\rho)}^w = |\cdot|_{(b',\rho)}^w$. Or, pour tout $\alpha \in K$ il vient

$$|X - \alpha|_{(b,\rho)}^w = \min(\rho, w(b - \alpha)) = \min(\rho, w((b - b') + (b' - \alpha))).$$

Si $|X - \alpha|_{(b,\rho)}^w = \rho$, on doit avoir $w(b' - \alpha) \geq \rho$ (remarque 8.8(ii)), d'où $|X - \alpha|_{(b',\rho)}^w = \rho$, et si $|X - \alpha|_{(a,\rho)}^w < \rho$, il vient $w(b' - \alpha) < \rho$, d'où $w(b - \alpha) = w(b' - \alpha)$, et à nouveau $|X - \alpha|_{(b,\rho)}^w = |X - \alpha|_{(b',\rho)}^w$. Mais tout polynôme de $K[X]$ est scindé, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Soit E une clôture algébrique de K ; d'après (ii) on trouve une valuation w' de $E(X)$ prolongeant w , et soient $(W', \mathfrak{m}_{W'})$ et $(E^+, \mathfrak{m}_E)$ les anneaux de valuation de w' et de $v' := w'_E$. L'exercice 8.15(i) entraîne aisément que $v'(E^\times) \subset \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} v(K^\times)$, et que $k(\mathfrak{m}_E)$ est une extension algébrique de $k(\mathfrak{m}_K)$. Ainsi, d'une part, s'il existe $a \in K$ tel que $v(a) = \rho$ et si l'image de $a^{-1}X$ dans $k(\mathfrak{m}_W)$ est transcendante sur $k(\mathfrak{m}_K)$, alors l'image de $a^{-1}X$ dans $k(\mathfrak{m}_{W'})$ est transcendante sur $k(\mathfrak{m}_E)$; d'autre part, si $\mathbb{Z}\rho \cap v(K^\times) = \{0\}$, on a $\mathbb{Z}\rho \cap v'(E^\times) = \{0\}$. Par suite, on peut remplacer K, v par E, w , et supposer que K soit algébriquement clos. Or, soit $\Lambda := \{w(X - b) \mid b \in K\}$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$, fixons $b_\lambda \in K$ tel que $w(X - b_\lambda) = \lambda$; d'après l'exercice 8.11(ii) il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $w(X) = |X|_{(b_\lambda, \lambda)}^v$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda \geq \lambda_0$. Si $\rho \notin v(K^\times)$, il vient aussitôt $\rho = \lambda$ et $v(b_\lambda) > \rho$ pour tout tel λ , i.e. $\rho = \lambda_0$ est l'élément maximal de Λ , et $|\cdot|_{(0,\rho)}^v = |\cdot|_{(b_\rho, \rho)}^v$, par (iii). Toujours avec l'exercice 8.11(ii), on déduit que $w(P(X)) = |P(X)|_{(0,\rho)}^v$ pour tout $P(X) \in K[X]$, d'où l'assertion, dans ce cas. En dernier lieu, supposons que $v(a) = \rho$ pour quelque $a \in K$, et que l'image $\bar{Y} \in k(\mathfrak{m}_W)$ de $Y := a^{-1}X$ soit transcendante sur $k(\mathfrak{m}_K)$; soit aussi $b \in K$. Si $v(b) \neq \rho$, il vient $w(X - b) = |X - b|_{(0,\rho)}^v$ (remarque 8.8(ii)); si $v(b) = \rho$, on a $w(X - b) \geq \rho = |X - b|_{(0,\rho)}^v$. Supposons par l'absurde, que $w(X - b) > \rho$; alors $w(Y - a^{-1}b) > 0$, et ainsi $\bar{Y}$ est l'image $\bar{x}$ de $x := a^{-1}b$ dans $k(\mathfrak{m}_W)$. Mais $\bar{x} \in k(\mathfrak{m}_K)$, alors que $\bar{Y}$ est transcendant sur $k(\mathfrak{m}_K)$, contradiction. Comme tout $P \in K[X]$ est scindé sur K , cela achève de montrer que $w = |\cdot|_{(0,\rho)}^v$.

Partie (v) : Soient $x_1, \dots, x_r \in E^+$ dont les images $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in k(\mathfrak{m}_E)$ sont algébriquement indépendantes sur $k(\mathfrak{m}_K)$, et $y_1, \dots, y_s \in E$ tels que les images de $w(y_1), \dots, w(y_s)$ dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Gamma_w / \Gamma_v)$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes. Posons $F := K(x_\bullet, y_\bullet) \subset E$. On montrera plus précisément :

- (a) les éléments $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ sont algébriquement indépendants sur K
- (b) le corps résiduel de l'anneau de valuation $F^+ := E^+ \cap F$ est $k(\mathfrak{m}_K)(\bar{x}_\bullet)$
- (c) le groupe des valeurs de $w|_F$ est $\Gamma_v \oplus \mathbb{Z}w(y_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}w(y_s) \subset \Gamma_w$.

Pour cela, on raisonne par récurrence sur $r + s \in \mathbb{N}$. Si $r + s = 0$, l'assertion est triviale. Ensuite, si $r = 1$ et $s = 0$ (resp. si $r = 0$ et $s = 1$), l'exercice 8.15(i) montre que x_1 (resp. y_1) est transcendant sur K ; de plus, (iv) entraîne que $w|_F = |\cdot|_{(0,\rho)}$ avec $\rho := 0$ (resp. $\rho := w(y_1)$), d'où (b) et (c). En dernier lieu, soient $r' \leq r, s' \leq s$ avec $1 \leq r' + s' < r + s$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour les suites $x'_\bullet := (x_1, \dots, x_{r'})$ et $y'_\bullet := (y_1, \dots, y_{s'})$. Posons $F' := K(x'_\bullet, y'_\bullet)$, $F'^+ := E^+ \cap F'$, $\mathfrak{m}_{F'} := \mathfrak{m}_E \cap F'^+$, et $\Gamma' := \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}w(y_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}w(y_{s'})$. Il suffit alors de vérifier que : (a') $x_{r'+1}, \dots, x_r, y_{s'+1}, \dots, y_s$ sont algébriquement indépendants sur F' , (b') $k(\mathfrak{m}_{F'})(x_{r'+1}, \dots, x_r)$ est le corps résiduel de F'^+ , et (c') le groupe des valeurs de $w|_F$ est $\Gamma' \oplus \mathbb{Z}w(y_{s'+1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}w(y_s)$. Cela nous ramène au cas où $r + s = 1$, déjà connu.

Problème 8.28, partie (i) : Remarquons d'abord que $\mathcal{V}_{E/V}$ est l'ensemble des anneaux de valuation W de E tels que $W \cap K = V$. En effet, si $\mathfrak{m}_V \subset V$ et $\mathfrak{m}_W \subset W$ sont les idéaux maximaux, la condition $W \cap K = V$ implique que $\mathfrak{m}_W \cap V = \mathfrak{m}_W \cap K = \mathfrak{m}_V$, d'où $V \leq W$; réciproquement, si $W \in \mathcal{V}_{E/V}$, évidemment $W \cap K$ est un anneau de valuation de K avec $V \leq W \cap K$, donc l'assertion suit du théorème 8.21. De plus, pour toute extension algébrique F de E on a une surjection

$$\pi_{F/E} : \mathcal{V}_{F/V} \rightarrow \mathcal{V}_{E/V} \quad W \mapsto W \cap E.$$

En effet, si $W \in \mathcal{V}_{F/V}$, on a $W \cap E \in \mathcal{V}_{E/V}$ par l'observation précédente. Réciproquement, si $W' \in \mathcal{V}_{E/V}$, on a $\mathcal{V}_{F/W'} \neq \emptyset$ (encore par le théorème 8.21), et pour tout $W \in \mathcal{V}_{F/W'}$ on a $W \cap E = W'$, d'où $W \in \mathcal{V}_{F/V}$. Remarquons aussi :

Lemme 8.135. Si $W, W' \in \mathcal{V}_{E/V}$ sont deux éléments distincts, on a $W \not\subseteq W'$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $W \subset W'$; notons par $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ les idéaux maximaux de W et W' , et posons $\mathfrak{p} := W \cap \mathfrak{m}'$. On sait que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, car sinon on aurait $W \leq W'$, d'où $W = W'$, par le théorème 8.21. Mais comme $V \leq W, W'$, il vient $V \cap \mathfrak{p} = V \cap \mathfrak{m}$, et d'autre part l'exercice 8.15(iii) nous dit que l'inclusion $V \rightarrow W$ induit une bijection $\text{Spec } W \xrightarrow{\sim} \text{Spec } V$, contradiction. $\square$

Or, soit F une extension finie et normale de K contenant E ; on est ramené à montrer que $\mathcal{V}_{F/V}$ est un ensemble fini, i.e. on peut supposer que E soit une extension normale finie de K , et dans ce cas il suffit de vérifier que l'action naturelle de $\text{Gal}(E/K)$ sur $\mathcal{V}_{E/V}$ est transitive. Pour cela, soit $W_1 \in \mathcal{V}_{E/V}$, et notons $\{W_1, W_2, \dots, W_k\} \subset \mathcal{V}_{E/V}$ l'orbite de W_1 sous l'action de $\text{Gal}(E/K)$, i.e. pour tout $i = 2, \dots, k$ il existe $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$ avec $W_i = \sigma(W_1)$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $W_{k+1} \in \mathcal{V}_{E/V} \setminus \{W_1, \dots, W_k\}$, on pose $B := W_1 \cap \dots \cap W_{k+1}$ et on dénote $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal de W_i , et $\mathfrak{p}_i := B \cap \mathfrak{m}_i$, pour tout $i = 1, \dots, k+1$.

Compte tenu du lemme 8.135 et du théorème 8.27, on a $\text{Max } B = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{k+1}\}$. En particulier, il existe $x \in (\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_k) \setminus \mathfrak{p}_{k+1}$ (lemme 1.55). Donc, $x \notin \mathfrak{m}_{k+1}$, mais $x \in \sigma^{-1}(\mathfrak{m}_1)$, i.e. $\sigma(x) \in \mathfrak{m}_1$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$; soit

$$P(T) := \prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/K)} (T - \sigma(x)) \in E[T].$$

On a $\sigma(P) = P$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$, donc il existe une puissance q de la caractéristique du corps K telle que $P(T)^q = T^r + a_1 T^{r-1} + \dots + a_r \in K[T]$. Il s'ensuit aisément que $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}_1 \cap K$, l'idéal maximal de V . Mais alors $x^r = -\sum_{i=1}^r a_i x^{r-i}$ n'est pas inversible dans W_{k+1} , i.e. $x \in \mathfrak{m}_{k+1}$, contradiction.

Partie (ii) : La preuve de (i) donne déjà l'assertion pour E une extension normale finie de K . Pour le cas général, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-extensions finies et normales du corps K contenues dans E ; évidemment $\mathcal{F}$ est un ensemble partiellement ordonné filtrant, pour l'ordre défini par l'inclusion de sous-extensions. De plus, à toute inclusion $F \subset F'$ d'éléments de $\mathcal{F}$ on a associé dans la preuve de (i) une application naturelle $\pi_{F'/F} : \mathcal{V}_{F'/V} \rightarrow \mathcal{V}_{F/V}$, et on voit aisément que $(\mathcal{V}_{F/V}, \pi_{F'/F} | F, F' \in \mathcal{F}, F \subset F')$ est un système d'ensembles finis indexé par $\mathcal{F}$ (voir l'exemple 2.23(i)). Avec cette notation, on a une bijection naturelle

$$\mathcal{V}_{E/K} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{V}_{F/V} \quad W \mapsto (W \cap F | F \in \mathcal{F}).$$

De l'autre côté on a un isomorphisme naturel de groupes

$$\text{Gal}(E/K) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F \in \mathcal{F}} \text{Gal}(F/K) \quad \sigma \mapsto (\sigma|_F | F \in \mathcal{F}).$$

Choisissons $W \in \mathcal{V}_{E/V}$; par (i), on a une surjection

$$\omega_F : \text{Gal}(F/K) \rightarrow \mathcal{V}_{F/V} \quad \sigma \mapsto \sigma(W \cap F) \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

et on voit aisément que $(\omega_F | F \in \mathcal{F})$ est un morphisme de systèmes indexés

$$(\text{Gal}(F/K) | F \in \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{V}_{F/V} | F \in \mathcal{F}).$$

L'assertion suit, par la remarque 2.33(ii).

Partie (iii) : Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-extensions finies de K contenues dans E . Pour tout $F \in \mathcal{G}$, soit A_F la fermeture intégrale de V dans F ; le théorème 8.27 et l'exercice 8.25(i) nous donnent une bijection canonique

$$\eta_F : \mathcal{V}_{F/V} \xrightarrow{\sim} \text{Max } A_F \quad (W, \mathfrak{m}_W) \mapsto \mathfrak{m}_W \cap A_F.$$

Si $F \subset F'$ sont deux éléments de $\mathcal{G}$, on a évidemment $A_F = F \cap A_{F'}$, et l'inclusion $i_{F'/F} : A_F \rightarrow A_{F'}$ est une extension entière d'anneaux. Par le corollaire 6.18(i), l'application

$\text{Spec } i_{F'/F}$ se restreint alors en une application $\text{Max } i_{F'/F} : \text{Max } A_{F'} \rightarrow \text{Max } A_F$, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{F'/V} & \xrightarrow{\eta_{F'}} & \text{Max } A_{F'} \\ \pi_{F'/F} \downarrow & & \downarrow \text{Max } i_{F'/F} \\ \mathcal{V}_{F/V} & \xrightarrow{\eta_F} & \text{Max } A_F. \end{array}$$

En raisonnant comme dans la solution de (ii) on voit que $\mathcal{V}_{E/V}$ représente la limite du système $(\mathcal{V}_{F/V}, \pi_{F'/F} | F, F' \in \mathcal{G}, F \subset F')$, et on déduit une bijection naturelle

$$\mathcal{V}_{E/V} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\leftarrow \\ F \in \mathcal{G}}} \text{Max } A_F.$$

D'autre part, aussi les inclusions $A_F \rightarrow A = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} A_G$ sont des extensions entières d'anneaux, d'où -- toujours grâce au corollaire 6.18(i) -- une application bien définie

$$\tau : \text{Max } A \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ F \in \mathcal{G}}} \text{Max } A_F \quad \mathfrak{m} \mapsto (\mathfrak{m} \cap A_F | F \in \mathcal{F}).$$

Par une simple inspection des définitions, on est alors ramené à vérifier que τ est bijective. L'injectivité suit aussitôt des définitions : les détails seront laissés aux soins du lecteur. Pour la surjectivité, considérons une suite cohérente $\mathfrak{m}_\bullet := (\mathfrak{m}_F | F \in \mathcal{F})$ telle que $\mathfrak{m}_F$ est un idéal maximale de A_F pour tout $F \in \mathcal{G}$; on voit aisément que $\mathfrak{m} := \bigcup_{F \in \mathcal{G}} \mathfrak{m}_F$ est un idéal de A , et on a $\mathfrak{m} \cap A_F = \mathfrak{m}_F$ pour tout $F \in \mathcal{G}$, d'où $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, encore par le corollaire 6.18(i), et en outre $\tau(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_\bullet$, d'où l'assertion.

Exercice 8.29, partie (i) : On montrera plus précisément que tout système *minimal* $x_1, \dots, x_n$ de générateurs de M est une base. Pour cela, il suffit de vérifier que la seule solution $(a_1, \dots, a_n) \in V^n$ de l'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est $(0, \dots, 0)$. On raisonne par l'absurde, et notons par $v : V \rightarrow \Gamma_{\text{vo}}$ la valuation de V ; si $(a_1, \dots, a_n)$ est une solution non nulle de cette équation, on peut supposer que $a_1 \neq 0$ et $v(a_1) \leq v(a_i)$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Dans ce cas, posons $b_i := a_i/a_1$ pour tout $i = 2, \dots, n$; on a $b_2, \dots, b_n \in V$ et $x_1 = -\sum_{i=2}^n b_i x_i$, car M est sans torsion. Donc, le système $x_2, \dots, x_n$ engendre M , une contradiction.

Partie (ii) : Tout V -module est la limite directe du système filtrant de ses sous-modules de type fini. Avec (i), il s'ensuit que tout V -module sans torsion est la colimite d'un système filtrant de V -modules libres, donc il est plat (exercice 3.76(iii)).

Partie (iii) : Evidemment $I := \text{Im}(\varepsilon)$ est un idéal de type fini de V , donc I est principal. Soit $t := \sum_{i=1}^n x_i \otimes \alpha_i \in N \otimes_V L^\vee$ tel que $\varepsilon(t)$ engendre I ; *a fortiori*, le système d'éléments $(\varepsilon(x_i \otimes \alpha_i) | i = 1, \dots, n)$ engendre I , et donc l'un de ces termes l'engendre déjà, d'où la première assertion. Ensuite, si $x \in N$ et $\alpha : L \rightarrow V$ sont choisis tels que $\alpha(x)$ engendre I , la restriction $\alpha|_N : N \rightarrow I$ est surjective, et I est un V -module libre de rang un ; la deuxième assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (iv) : Soit $x_1, \dots, x_n$ une base de L ; donc $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ pour certains éléments $a_1, \dots, a_n \in V$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit aussi $\pi_i : L \rightarrow V$ la forme linéaire telle que $\pi_i(x_i) = 1$ et $\pi_i(x_j) = 0$ pour tous $j \neq i$. Evidemment $\pi_i(x) = a_i \in I$, d'où $b_i := a_i/a \in V$ pour $i = 1, \dots, n$, et on pose $y := \sum_{i=1}^n b_i x_i$. Par suite $\alpha(y) = \alpha(x)/a = 1$, et donc $L = Vy \oplus \text{Ker } \alpha$.

Partie (v) : On raisonne par récurrence sur le rang n de L . Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $n > 0$, et que l'assertion soit déjà connue pour tout V -module libre L' de rang $n - 1$ et toute application V -linéaire surjective $L' \rightarrow M'$ avec M' de présentation finie. Par (iii),(iv) on trouve $y \in L$, $a \in V$ et $\alpha \in L^\vee$ avec

$$N = (Vy) \oplus (N \cap \text{Ker } \alpha) \quad \text{et} \quad L = Vy \oplus \text{Ker } \alpha.$$

Posons $N' := N \cap \text{Ker } \alpha$, $L' := \text{Ker } \alpha$ et $M' := L'/N'$. Noter que N' et L' sont de type fini, car il sont facteurs direct de N et respectivement L . De plus, L' est sans torsion,

donc libre, en vertu de (i), et $\text{rk}_V L' = n - 1$. Par suite M' est de présentation finie, et par hypothèse de récurrence, il existe une base $y_2, \dots, y_n$ de L' , un entier $k \leq n$ et des éléments $a_2, \dots, a_k \in V$ tels que $N' = (Va_2y_2) \oplus \dots \oplus (Va_ky_k)$. Si l'on pose $y_1 := y$ et $a_1 := a$, il est ainsi clair que $y_1, \dots, y_n$ est une base de L et $N = (Va_1y_1) \oplus \dots \oplus (Va_ky_k)$. La deuxième assertion suit aussitôt.

Exercice 8.35 : On peut supposer que S soit une partie multiplicative. Pour tout $a \in A$, soit $a^* := a$ si $a \geq 0$, et $a^* := -a$ si $a < 0$; la partie $S^* := \{s^* \mid s \in S\}$ est encore multiplicative, car tout produit d'éléments non négatifs de A est non négatif, et $S^{*-1}A = S^{-1}A$. Quitte à remplacer S par S^* , on peut ainsi supposer que tout $s \in S$ soit non négatif. On considère la relation binaire suivante sur $S^{-1}A$:

$$a/s \leq_S b/t \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in S \text{ tel que } uat \leq ub s.$$

La relation $\leq_S$ est évidemment réflexive. Pour vérifier la transitivité, supposons que $a/s \leq_S b/t \leq_S c/v$. Par définition, il existe $u_1, u_2 \in S$ tels que $u_1at \leq u_1bs$ et $u_2bv \leq u_2ct$. Comme $u_1, u_2, v, s \geq 0$, il vient $u_1u_2tav \leq u_1u_2vbs \leq u_1u_2tcs$, d'où $a/s \leq_S c/v$. De même, si $a/s \leq_S b/t \leq_S a/s$, on trouve $u_1, u_2 \in S$ tels que $u_1at \leq u_1bs$ et $u_2bs \leq u_2at$. Comme $u_1, u_2 \geq 0$, il vient $u_1u_2at \leq u_1u_2bs \leq u_1u_2at$, d'où $u_1u_2at = u_1u_2bs$, et finalement $a/s = b/t$. Cela achève de montrer l'antisymétrie de $\leq_S$. Noter que $a/s \geq 0$ si et seulement si il existe $u \in S$ tel que $au \geq 0$; comme $\leq$ est un ordre total, il en est alors de même pour $\leq_S$. Ensuite, soit $a/s \leq_S b/t$; pour tout $c/v \in S^{-1}A$ on a $a/s + c/v = (av + cs)/(sv)$ et $b/t + c/v = (bv + ct)/(tv)$, et on doit trouver $u \in S$ tel que $(av + cs)tvu \leq (bv + ct)svu$. Mais par hypothèse, il existe $u \in S$ tel que $uat \leq bsu$; comme $v^2 \geq 0$, l'inégalité souhaitée découle aussitôt. De même on vérifie aisément que si $a/s \leq b/t$ et si $uc \geq 0$ pour quelque $u \in S$ et $c \in A$, alors $(a/s) \cdot (c/v) \leq (b/t) \cdot (c/v)$ pour tout $v \in S$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Donc, $(S^{-1}A, \leq_S)$ est bien un anneau totalement ordonné, et on voit aussitôt que la localisation est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés $(A, \leq) \rightarrow (S^{-1}A, \leq_S)$. En dernier lieu, soit $\leq'$ un ordre total sur $S^{-1}A$ tel que la localisation est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés $(A, \leq) \rightarrow (S^{-1}A, \leq')$; soient aussi $a/s, b/t \in S^{-1}A$. S'il existe $u \in S$ tel que $uat \leq ub s$, il vient $a/s = (uat)/(ust) \leq' (ubs)/(ust) = b/s$, car $1/(ust) \geq 0$ (remarque 8.34(iii)). Réciproquement, supposons que $a/s \leq' b/t$; si $at \leq bs$, évidemment $a/s \leq_S b/t$. Sinon, on a $bs \leq at$, car l'ordre $\leq$ est total; mais alors $b/s = (bs)/(st) \leq' (at)/(st) = a/s$ (car $1/(st) \geq 0$), d'où $a/s = b/t$, et en particulier $a/s \leq_S b/t$. Cela achève de montrer que $\leq'$ coïncide avec $\leq_S$.

Exercice 8.36, partie (i) : On voit aisément que (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Soit donc I convexe; on définit comme dans l'exercice 8.5(ii) une structure d'ordre partiel sur A/I telle que π soit un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés et telle que si $\pi(a) \leq \pi(a')$, alors $\pi(a) + \pi(b) \leq \pi(a') + \pi(b)$ pour tous $a, a', b \in A$. Or, soient $a, a', b \in A$ avec $\pi(a) \leq \pi(a')$ et $\pi(b) \geq 0$; par inspection de la définition de l'ordre de A/I , on voit qu'il existe $c, c' \in I$ tels que $a \leq a' + c$ et $0 \leq b + c'$. Il vient $a \cdot (b + c') \leq (a' + c) \cdot (b + c')$, i.e.

$$ab \leq a'b + cb + a'c' + cc' - ac'$$

ce qui montre que $\pi(a) \cdot \pi(b) \leq \pi(a') \cdot \pi(b)$. En dernier lieu, l'universalité du couple $((A/I, \leq), \pi)$ suit aisément de la construction : les détails seront confiés au lecteur.

Partie (ii) : Posons $\bar{A} := A/I$; d'après (i), J est convexe si et seulement si $\bar{A}/J$ est muni d'un ordre partiel $\leq$ tel que la projection $\bar{\pi} : \bar{A} \rightarrow \bar{A}/J$ soit un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés, et par l'universalité du couple $((\bar{A}, \leq), \bar{\pi})$, cela est à son tour vérifié si et seulement si la projection $\bar{\pi} \circ \pi : A \rightarrow \bar{A}/J = A/\pi^{-1}J$ est un morphisme d'anneaux partiellement ordonnés. Mais toujours d'après (i), cette dernière condition

équivalent à la convexité de $\pi^{-1}J$.

Exercice 8.37, partie (i) : Comme Λ est filtrant, la limite directe A est (isomorphe à) l'anneau des classes d'équivalence $[\lambda, a]$ des couples (λ, a) avec $\lambda \in \Lambda$, $a \in A_\lambda$ (voir l'exercice 2.31(iv)); on pose

$$(\lambda, a) \leq (\lambda', a') \Leftrightarrow \exists \lambda'' \geq \lambda, \lambda' \text{ tel que } g_{\lambda\lambda''}(a) \leq g_{\lambda'\lambda''}(a').$$

Evidemment la relation $\leq$ ainsi définie sur l'ensemble des couples (λ, a) est réflexive; montrons qu'elle est aussi transitive : en effet, si $(\lambda, a) \leq (\lambda', a')$ et $(\lambda', a') \leq (\lambda'', a'')$, on peut trouver $\mu \geq \lambda, \lambda'$ et $\mu' \geq \lambda', \lambda''$ tels que

$$g_{\lambda\mu}(a) \leq g_{\lambda'\mu}(a') \quad \text{et} \quad g_{\lambda'\mu'}(a') \leq g_{\lambda''\mu'}(a'').$$

Or, soit $\mu'' \geq \mu, \mu'$; il vient $g_{\lambda\mu''}(a) = g_{\mu\mu''}g_{\lambda\mu}(a) \leq g_{\mu\mu''}g_{\lambda'\mu}(a') \leq g_{\mu\mu''}g_{\lambda'\mu'}(a') = g_{\lambda''\mu''}(a'')$, et ainsi :

$$g_{\lambda\mu''}(a) \leq g_{\lambda'\mu''}(a') = g_{\mu'\mu''}g_{\lambda'\mu'}(a') \leq g_{\mu'\mu''}g_{\lambda''\mu'}(a'') = g_{\lambda''\mu''}(a'')$$

d'où l'assertion. Ensuite, montrons que si $(\lambda, a) \leq (\lambda', a')$, $(\lambda, a) \sim (\mu, b)$ et si $(\lambda', a') \sim (\mu', b')$, alors $(\mu, b) \leq (\mu', b')$. En effet, par hypothèse il existe $\nu \geq \lambda, \mu$ et $\nu' \geq \lambda', \mu'$ tels que $g_{\lambda\nu}(a) = g_{\mu\nu}(b)$ et $g_{\lambda'\nu'}(a') = g_{\mu'\nu'}(b')$, ainsi que $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$ tel que $g_{\lambda\lambda''}(a) \leq g_{\lambda'\lambda''}(a')$. Choisissons $\rho \geq \lambda'', \nu, \nu'$; il vient

$$g_{\mu\rho}(b) = g_{\nu\rho}g_{\mu\nu}(b) = g_{\nu\rho}g_{\lambda\nu}(a) = g_{\lambda\rho}(a) = g_{\lambda'\rho}g_{\lambda\lambda''}(a) \leq g_{\lambda'\rho}g_{\lambda'\lambda''}(a') = g_{\lambda'\rho}(a')$$

et d'autre part $g_{\lambda'\rho}(a') = g_{\nu'\rho}g_{\lambda'\nu'}(a') = g_{\nu'\rho}g_{\mu'\nu'}(b') = g_{\mu'\rho}(b')$, d'où l'assertion. On conclut déjà que la relation $\leq$ induit une relation $\preceq$ réflexive et transitive sur A . Montrons que la relation $\preceq$ est antisymétrique : en effet, si $[\lambda, a] \preceq [\lambda', a']$ et si $[\lambda', a'] \preceq [\lambda, a]$, il existe $\mu, \mu' \geq \lambda, \lambda'$ tels que $g_{\lambda\mu}(a) \leq g_{\lambda'\mu}(a')$ et $g_{\lambda'\mu'}(a') \leq g_{\lambda\mu'}(a)$. Soit $\mu'' \geq \mu, \mu'$; il vient $g_{\lambda\mu''}(a) = g_{\mu\mu''}g_{\lambda\mu}(a) \leq g_{\mu\mu''}g_{\lambda'\mu}(a') \leq g_{\mu\mu''}g_{\lambda'\mu'}(a') = g_{\lambda'\mu''}(a')$, et ainsi :

$$g_{\lambda\mu''}(a) \leq g_{\lambda'\mu''}(a') = g_{\mu'\mu''}g_{\lambda'\mu'}(a') \leq g_{\mu'\mu''}g_{\lambda\mu'}(a) = g_{\lambda\mu''}(a)$$

d'où $g_{\lambda\mu''}(a) = g_{\lambda'\mu''}(a')$, en particulier $[\lambda, a] = [\lambda', a']$. Cela achève de montrer que $\preceq$ est un ordre partiel sur A , et on vérifie aisément que les homomorphismes canoniques $A_\lambda \rightarrow A$ sont des morphismes d'ensembles partiellement ordonnés.

Il reste à montrer que si $[\lambda, a] \leq [\lambda', a']$, alors $[\lambda, a] + [\mu, b] \leq [\lambda', a'] + [\mu, b]$, et que si $[\mu, b] \geq 0$, alors $[\lambda, a] \cdot [\mu, b] \leq [\lambda', a'] \cdot [\mu, b]$. Mais, par ce qui précède, on peut supposer que $\lambda = \lambda' = \mu$, auquel cas ces inégalités sont immédiates.

Pour vérifier l'universalité de $((A, \leq), i_\bullet)$, soit $(f_\lambda : (A_\lambda, \leq) \rightarrow (B, \leq) \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône; l'universalité de $(A, i_\bullet)$ nous donne un homomorphisme unique d'anneaux (non ordonnés) $f : A \rightarrow B$ avec $f \circ i_\lambda = f_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Rappelons que $f[\lambda, a] = f_\lambda(a)$ pour tout $[\lambda, a] \in A$ (voir l'exercice 2.31(iv)). Or, si $[\lambda, a] \leq [\lambda', a']$, il faut montrer que $f[\lambda, a] \leq f[\lambda', a']$; mais par ce qui précède, on peut supposer que $\lambda = \lambda'$, auquel cas l'assertion est immédiate.

Problème 8.45, partie (i) : Disons que $\phi_T(T) \subset V(f)$, pour quelque $f \in \mathcal{C}(T)$; cela revient à dire que $f(t) = 0$ pour tout $t \in T$, i.e. $f = 0$, donc $V(f) = \beta(T)$, ce qui montre que $\phi_T(T)$ est une partie dense de $\beta(T)$. Pour voir que $\beta(X) \in \text{Ob}(\text{csTop})$, il suffit d'invoquer la proposition 1.42, la remarque 8.39(ii) et le corollaire 4.80.

Partie (ii) : Evidemment tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier, donc si $\phi_T(T)$ est injective, et si la topologie de T est induite par $\beta(T)$ via ϕ_T , alors T est complètement régulier, au vu de (i). Réciproquement, si T est complètement régulier, soient $U \subset T$ une partie ouverte, et $t \in U$; on pose $Z := T \setminus U$. Par hypothèse, il existe une fonction continue $f : T \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(t) = 1$ et $f(Z) = 0$; ainsi $t \in U' := \phi_T^{-1}(D(f))$ et $U' \subset U$, donc la topologie de T est induite par $\beta(T)$, et comme T est séparé, il s'ensuit que ϕ_T est injective.

Partie (iii) : Joignant le corollaire 4.80 et la remarque 8.39(ii), on obtient pour tout espace topologique T une rétraction continue $r_T : \text{Spec } \mathcal{C}(T) \rightarrow \beta(T)$; on note aussi

par $j_T : \beta(T) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{C}(T)$ l'inclusion, et par $f^* : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(T)$ l'homomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres induit par f . Cela étant, on pose

$$\beta(f) := r_S \circ (\text{Spec } f^*) \circ j_T : \beta(T) \rightarrow \beta(S).$$

Donc, $\beta(f)$ est continue, et on voit aisément que $\beta(f) \circ \phi_T = \phi_S \circ f$ (détails laissés aux soins du lecteur). Pour montrer l'unicité de l'application $\beta(f)$ faisant commuter le diagramme (*), il suffit de noter que -- d'après (i) -- l'image de ϕ_T est dense dans $\beta(T)$, et $\beta(S)$ est séparé, et d'invoquer l'exercice 1.26(iv).

Partie (iv) : Si $g : S \rightarrow S'$ est une deuxième application continue d'espaces topologiques, la propriété d'unicité de $\beta(g \circ f)$ implique aisément que cette dernière coïncide avec $\beta(g) \circ \beta(f)$; aussi, on voit directement des définitions que $\beta(\text{Id}_T) = \text{Id}_{\beta(T)}$ pour tout espace topologique T , d'où l'assertion.

Partie (v) : Par le lemme de Stone, ϕ_T est un homéomorphisme pour T compact et séparé; on peut alors reproduire, *mutatis mutandis*, l'argument utilisé dans la solution du problème 4.77(ii.d) : les détails seront laissés au lecteur.

Partie (vi) : Par ce qui précède, ϕ induit par restriction une transformation naturelle $\psi : \mathbf{1}_{\text{Top}} \rightarrow j_{\text{cr}} \circ \gamma$, et ψ_T est un homéomorphisme pour $T \in \text{Ob}(\text{crTop})$, par (ii); on peut alors raisonner encore comme dans la solution du problème 4.77(ii.d).

Exercice 8.52 : En raisonnant sur la chaîne d'extensions de corps

$$K \subset K(X_1) \subset K(X_1, X_2) \subset \cdots \subset K(X_1, \dots, X_n)$$

on est ramené au cas où $n = 1$. Or, soit $E := K(X)$; par le théorème d'Artin-Schreier, il suffit de montrer que $-1 \notin \Sigma E^2$. Soient par l'absurde $Q, P_1, \dots, P_r \in K[X]$ non nuls avec $-1 = \sum_{i=1}^r (P_i/Q)^2$. Comme K est un corps infini, on trouve $a \in K$ tel que $Q(a) \neq 0$, d'où $-1 = \sum_{i=1}^r (P_i(a)/Q(a))^2$ dans K , contradiction.

Exercice 8.55, partie (i) : D'après la proposition 8.53, les facteurs irréductibles de P sur K sont soit du premier degré, soit de la forme :

$$(X - u - iv)(X - u + iv) = (X - u)^2 + v^2 \quad \text{avec } u, v \in K \text{ et } i^2 = -1.$$

Une somme de carrés étant toujours positive dans K , il s'ensuit que P admet un facteur linéaire $L(X) = X - c$ tel que $L(a)L(b) < 0$; cela entraîne que $a < c < b$, et évidemment $P(c) = 0$.

Partie (ii) : On se ramène aisément au cas où a et b sont deux racines consécutives de P , i.e. $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On a ainsi $P = (X - a)^m (X - b)^n Q_0$ pour des entiers $m, n > 0$ et un polynôme Q_0 tel que $Q_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$; d'après (i), cela entraîne que le signe de Q_0 est constant sur $[a, b]$. Il vient $P' = (X - a)^{m-1} (X - b)^{n-1} Q_1$, avec $Q_1 := m(X - b)Q_0 + n(X - a)Q_0 + (X - a)(X - b)Q_0'$. Donc $Q_1(a) = m(a - b)Q_0(a)$ et $Q_1(b) = n(b - a)Q_0(b)$ sont de signes opposés; d'après (i), le polynôme Q_1 a donc une racine $c \in]a, b[$, et évidemment $P'(c) = 0$.

Partie (iii) : On applique (ii) au polynôme $P - \lambda(X - a) - P(a)$, avec la constante $\lambda := (P(b) - P(a))/(b - a)$. La partie (iv) suit aussitôt de (iii).

Exercice 8.66, partie (i) : Il est clair que si $a, b \in \text{Supp } C$, alors $a + b \in \text{Supp } C$. Soit $a \in \text{Supp } C$ et $b \in A$; si $b \in C$, il vient $ab \in C$ et $(-a) \cdot b \in C$, d'où $ab \in \text{Supp } C$. Sinon $-b \in C$, et donc $a \cdot (-b) \in C$ et $(-a)(-b) \in C$, d'où encore $ab \in \text{Supp } C$.

Partie (ii) : Tout d'abord, il est clair que le cône positif de tout anneau totalement ordonné $(A/I, \leq)$ est un élément de $\mathcal{C}_A(I)$. De même, deux ordres totaux $\leq$ et $\leq'$ sur A/I ont le même cône positif si et seulement s'ils coïncident. Réciproquement, soit $C \in \mathcal{C}_A(I)$; pour tous $a, b \in A$, on pose $\pi_I(a) \leq_C \pi_I(b)$ si et seulement si $b - a \in C$; cette condition ne dépend que des images $\pi_I(a), \pi_I(b)$ de a et b dans A/I , car si $\pi_I(a) = \pi_I(a')$, $\pi_I(b) = \pi_I(b')$, et $b - a \in C$, on a $a' - a, b' - b \in \text{Supp } C$, d'où $b' - a' = (b' - b) + (b - a) + (a - a') \in C$.

On vérifie aisément que $(A/I, \leq_C)$ est un anneau totalement ordonné, et évidemment $C(A/I, \leq_C) = C$.

Partie (iii) : Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier ; d'après l'exercice 8.35, toute structure d'anneau totalement ordonné $(A/\mathfrak{p}, \leq)$ sur $A/\mathfrak{p}$ se prolonge en une unique structure de corps totalement ordonné $(k(\mathfrak{p}), \leq)$ sur le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$. Evidemment, si $C(\mathfrak{p}, \leq)$ est le cône positif de $(k(\mathfrak{p}), \leq)$, alors $(A/\mathfrak{p}) \cap C(\mathfrak{p}, \leq)$ est le cône positif de $(A/\mathfrak{p}, \leq)$. Au vu de (ii), on déduit que la bijection souhaitée est l'application :

$$\text{Spr } A \rightarrow \mathcal{C}_A^p \quad \lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \mapsto \pi_I^{-1}((A/\mathfrak{p}) \cap C(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)).$$

Partie (iv) : Si C est premier, soient, par l'absurde, $a, b \in A$ tels que $a, -b \notin C$ et $ab \in C$. Il vient $-a, b \in C$, d'où $ab \in C \cap (-C)$, mais a et b n'appartiennent pas à l'idéal premier $C \cap (-C)$; contradiction. Réciproquement, si C vérifie la condition de (iv), soient, par l'absurde, $a, b \in A$ avec $ab \in C \cap (-C)$ et $a, b \notin C \cap (-C)$. Si $b \notin C$, l'hypothèse entraîne que $-a \in C$, car $ab \in C$, et aussi $a \in C$, car $(-a)b \in C$; contradiction. On raisonne de même si $-b \notin C$: les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 8.72, partie (i) : Soient $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A/I$ et $\mathfrak{p}' := \text{Spec}(p)(\mathfrak{p}) = p^{-1}(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } A$; évidemment l'extension de corps résiduels $p_{(\mathfrak{p})} : k(\mathfrak{p}') \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est bijective. Par suite ϕ se restreint en une bijection entre $\sigma_{A/I}^{-1}(\mathfrak{p})$ et $\sigma_A^{-1}(\mathfrak{p}')$; l'injectivité de ϕ suit alors de celle de $\text{Spec}(p)$. De même on déduit aisément que l'image de ϕ est $\sigma_A^{-1}(V(I))$. En dernier lieu, noter que $D_+(p(a)) = \phi^{-1}(D_+(a))$ pour tout $a \in A$. Cela montre que la topologie de $\text{Spr } A/I$ est induite par celle de $\text{Spr } A$.

Partie (ii) : Evidemment on a $W(a) = \sigma_A^{-1}(V(Aa))$ pour tout $a \in A$. Au vu de (i), il suffit alors de rappeler que $V(I) = V(Ab_1) \cap \dots \cap V(Ab_n)$.

Exercice 8.73, partie (i) : Pour l'injectivité de ϕ et la détermination de son image, on raisonne, *mutatis mutandis*, comme dans la solution de l'exercice 8.72(i) : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Ensuite, soit $a/s^n \in S^{-1}A$; on a $a/s^n = (s^n a)/(s^{2n})$, et $s^{2n} \geq_\lambda 0$ pour tout $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } A$, donc $\text{Spr}(j)^{-1}(D_+(s^n a)) = D_+(a/s^n)$; cela montre que la topologie de $\text{Spr } S^{-1}A$ est induite par celle de $\text{Spr } A$.

Partie (ii) : Evidemment $\sigma_A^{-1}(D(f)) = D_\pm(f)$, d'où l'assertion, au vu de (i).

Problème 8.75, partie (i) : Si $\lambda \in Z_{ij}^{(1)}$ pour quelque $i, j \in \{1, \dots, q\}$, soient $a, b \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $a <_\lambda b$ et $P_i(a) = P_j(b)$, tels que pour tout $t = 1, \dots, q$ le polynôme P_t ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$ de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et $P_t(\frac{a+b}{2}) > 0$. Soit $p : A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ la projection, et $q : A[X] \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $q \circ f = p$ et $q(X) = (a + b)/2$. On pose $\mathfrak{q} := \text{Ker}(q)$; évidemment q se factorise à travers un homomorphisme $k(\mathfrak{q}) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et on munit $k(\mathfrak{q})$ de l'ordre total $\leq_\mu$ induit par celui de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$. Il vient :

$$(*) \quad (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in D_+(P_1, \dots, P_q) \quad \text{et} \quad \pi(\mathfrak{q}, \leq_\mu) = \lambda.$$

Ensuite, si $\lambda \in Z_i^{(2)}$ pour quelque $i \in \{1, \dots, q\}$, soit $a \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec $P_i(a) = 0$, tel que pour tout $t = 1, \dots, q$ le polynôme P_t ne s'annule pas sur la demi-droite $]a, +\infty[$ de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et $P_t(a + 1) > 0$. Soit $q : A[X] \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $q \circ f = p$ et $q(X) = a + 1$; on pose encore $\mathfrak{q} := \text{Ker}(q)$, et on munit le corps résiduel $k(\mathfrak{q})$ de l'ordre total $\leq_\mu$ induit comme ci-dessus par celui de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$. Avec cette notation, la condition $(*)$ est encore vérifiée. On raisonne de même si $\lambda \in Z_j^{(3)}$ pour quelque $j \in \{1, \dots, q\}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. En dernier lieu, si $\lambda \in Z^{(4)}$, soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A[X]$ l'idéal premier engendré par X et $\mathfrak{p}$; l'extension de corps résiduels $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{q})$ est bijective, et on munit $k(\mathfrak{q})$ de l'ordre $\leq_\mu$ induit par $\leq_\lambda$; la condition $(*)$ est toujours vérifiée dans ce cas.

Réciproquement, soit $\lambda \in \pi(D_+(P_1, \dots, P_q))$; notons par $a_1 < \dots < a_N$ les racines dans $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ des polynômes $P_1, \dots, P_q$. Soit $(\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in D_+(P_1, \dots, P_q)$ avec $\lambda = \pi(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$; par abus de notation, on peut identifier $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ avec un sous-corps de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, via l'homomorphisme induit $\bar{f}_{(\mathfrak{q})} : \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ (remarque 8.70(ii)). Soit $x \in k(\mathfrak{q})$ la classe de X ; noter que $x \notin \{a_1, \dots, a_N\}$. Noter aussi que si $y \in \bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ est racine de l'un des polynômes $P_1, \dots, P_q$, alors y est algébrique sur le sous-corps $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)[y] \subset \bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ est un corps réel; comme $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ est formellement réel clos, il vient $y \in \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$. Supposons d'abord que l'on ait

$$a_l <_\mu x <_\mu a_{l+1} \quad \text{pour quelque } l \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Les polynômes $P_1, \dots, P_t$ ont signe constant dans l'intervalle $]a_l, a_{l+1}[$ de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, car ils n'ont aucune racine dans cet intervalle (exercice 8.55(i)). Comme $P_t(x) >_\mu 0$ pour $t = 1, \dots, q$, il vient

$$P_t((a_l + a_{l+1})/2) >_\lambda 0 \quad \forall t = 1, \dots, q.$$

Si a_l est racine de P_i et si a_{l+1} est racine de P_j , on a ainsi $\lambda \in Z_{ij}^{(1)}$. Ensuite, supposons que $x >_\mu a_N$; les polynômes $P_1, \dots, P_q$ n'ont aucune racine dans la demi-droite $]a_N, +\infty[$ de $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, donc ils ont signe constant sur cette demi-droite, et par hypothèse $P_t(x) >_\mu 0$ pour $t = 1, \dots, q$. Il vient $P_t(a_N + 1) >_\lambda 0$ pour $t = 1, \dots, q$, et en particulier $\lambda \in Z_i^{(2)}$, si $P_i(a_N) = 0$. De même, si $x <_\mu a_1$ et $P_j(a_1) = 0$, on voit aisément que $\lambda \in Z_j^{(3)}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. En dernier lieu, si $N = 0$, i.e. si aucun des $P_1, \dots, P_q$ ne s'annule sur $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, alors ces polynômes ne s'annulent non plus sur $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$, donc ils ont signe constant sur ce corps, et $P_t(x) >_\mu 0$ pour $t = 1, \dots, q$. Il vient $P_t(0) >_\lambda 0$ pour $t = 1, \dots, q$, d'où $\lambda \in Z^{(4)}$.

Problème 8.87, partie (i) : Soit $Z \subset \text{Spr } A$ une partie constructible non vide; on doit montrer que Z rencontre $X(K)$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme surjectif de K -algèbres $f : B := K[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$; soient

$$Y := \text{Spec } B \quad j := \text{Spec } f : X \rightarrow Y \quad i := \text{Spr } f : \text{Spr } A \rightarrow \text{Spr } B.$$

Avec la notation de la remarque 5.49(iv,vi), on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X(K) & \xrightarrow{j(K)} & Y(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spr } A & \xrightarrow{i} & \text{Spr } B. \end{array}$$

Or, la partie $i(Z)$ est constructible dans $\text{Spr } B$ (théorème 8.76), et on voit aisément que $i(Z) \cap Y(K) = i(X(K))$; il suffit alors de montrer que $i(Z)$ rencontre $Y(K)$, et on peut donc supposer du départ que $A = K[T_1, \dots, T_n]$. On raisonne par récurrence sur n ; l'assertion est triviale pour $n = 0$. Soit ensuite $n = 1$; on est ramené aussitôt au cas où $Z = R_{K[T]}^+(Q; P_\bullet)$ pour des polynômes $Q, P_1, \dots, P_r \in K[T]$. Supposons d'abord que $Q \neq 0$; dans ce cas, pour tout $(\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in Z$ on a $Q \in \mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal et $(k(\mathfrak{p}), \leq_\lambda)$ est à la fois un corps formellement réel et une extension finie de K . Comme K est formellement réel clos, il vient $k(\mathfrak{p}) = K$, d'où l'assertion. Si $Q = 0$, on a $Z = D_+(P_\bullet)$, et on doit exhiber $x \in K$ avec $P_1(x), \dots, P_r(x) > 0$; ceci est fourni par le problème 8.75.

En dernier lieu, soit $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute partie constructible de $A' := K[T_1, \dots, T_{n-1}]$. Soit $g : A' \rightarrow A$ l'inclusion et $\pi := \text{Spr } g : \text{Spr } A \rightarrow \text{Spr } A'$. D'après le théorème 8.76, la partie $\pi(Z)$ est constructible dans $\text{Spr } A'$; par hypothèse de récurrence, $\pi(Z)$ contient alors un K -point $\mathfrak{m}$ de $\text{Spec } A'$. Soient $p : A' \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection, $q := p \otimes_{A'} A : A \rightarrow C := k(\mathfrak{m}) \otimes_{A'} A$, et $i_{\mathfrak{m}} := \text{Spr}(p), j_{\mathfrak{m}} :=$

$\text{Spr}(q)$. Il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spr } C & \xrightarrow{j_{\mathfrak{m}}} & \text{Spr } A \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spr } k(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{i_{\mathfrak{m}}} & \text{Spr } A'. \end{array}$$

Evidemment l'image de $i_{\mathfrak{m}}$ est la partie $\{(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}})\}$; de l'autre côté, la partie $Z' := j_{\mathfrak{m}}^{-1}(Z)$ est constructible dans $\text{Spr } C$, et comme $i_{\mathfrak{m}}$ est une immersion constructible, on a $Z \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m}, \leq_{\mathfrak{m}}) = j_{\mathfrak{m}}(Z')$ (remarque 8.74(ii)). En particulier, $Z' \neq \emptyset$, et il suffit de montrer que Z' rencontre l'ensemble des $k(\mathfrak{m})$ -points du $k(\mathfrak{m})$ -schéma $\text{Spec } C$. Mais on a un isomorphisme de $k(\mathfrak{m})$ -algèbres $k(\mathfrak{m})[T] \xrightarrow{\sim} C$; donc on est finalement ramené au cas où $A = K[T]$, qui vient d'être traité.

Partie (ii) : La condition est nécessaire, d'après le théorème 8.51(ii). Réciproquement, supposons que $0 \notin \mathcal{Q}$, de sorte que $B := \mathcal{Q}^{-1}A \neq 0$; soient $\mathfrak{m} \subset B$ un idéal maximal, et $\mathfrak{p} \subset A$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}$. Notons par $\overline{\mathcal{Q}}$ l'image de $\mathcal{Q}$ dans $\overline{A} := A/\mathfrak{p}$, et soit $\overline{X} := \text{Spec } \overline{A}$; par construction, on a $0 \notin \overline{\mathcal{Q}}$, et il suffit de montrer que $\overline{X}(K) \neq \emptyset$. Donc, on est ramené au cas où A est intègre, et $E := \mathcal{Q}^{-1}A$ est son corps des fractions; d'après (i), il suffit de vérifier que $\text{Spr } A \neq \emptyset$, et pour cela, on va montrer que E est formellement réel, i.e. que $-1 \notin \Sigma E^2$. En effet, soit par l'absurde $-1 = \sum_{i=1}^r (a_i/b)^2$ pour certains $a_1, \dots, a_r \in A$ et $b \in \mathcal{Q}$; il vient $c := b^2 + \sum_{i=1}^r a_i^2 = 0$ dans A , mais noter que $c \in \mathcal{Q}$, contradiction.

Partie (iii) : D'après le corollaire 4.68(i), la partie $\sigma_A(\text{Spr } A) \subset X$ est pro-constructible et contient $X(K)$; si $X(K)$ est dense dans X , alors le point générique de X est dans $\sigma_A(\text{Spr } A)$ (corollaire 4.67(ii)), i.e. E est formellement réel. Si $X(K)$ n'est pas dense dans X , il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $X(K) \subset V(a)$, et donc l'image de $X(K)$ dans $\text{Spr } A$ est contenue dans la partie fermée $W(a)$; d'autre part, d'après (i) l'image de $X(K)$ est dense dans $\text{Spr } A$, donc $\text{Spr } A = W(a)$, et en particulier, E ne peut pas être formellement réel.

Partie (iv) : La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, si $P(x_{\bullet}) = 0$ pour tout $x_{\bullet} \in V_K(I)$, on pose $B := (A/I)_P$, $X := \text{Spec } A$, et $T := \text{Spec } B$; comme d'habitude on identifie T avec une partie constructible de X , et noter que $X(K) = K^n$ et $T(K) = \{x_{\bullet} \in V_K(I) \mid P(x_{\bullet}) \neq 0\} = \emptyset$. Soit $b \in A/I$ la classe de P ; d'après (ii), on trouve alors $a_1, \dots, a_r \in A/I$ et $t \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^r (a_i/b^t)^2 = -1$ dans B . On déduit que $b^{2t'}(b^{2t} + \sum_{i=1}^r a_i^2) = 0$ dans A/I pour quelque $t' \in \mathbb{N}$; on peut alors faire $s := t + t'$, et prendre pour $Q_1, \dots, Q_r$ des représentants quelconques des classes de $b^{t'}a_1, \dots, b^{t'}a_r$.

Exercice 8.89 : pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, soit $j_{\lambda\mu} : A_{\lambda} \rightarrow A_{\mu}$ l'homomorphisme de transition du système filtrant d'anneaux $A_{\bullet}$, et soit aussi $(j_{\lambda} : A_{\lambda} \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel; rappelons que la limite X du système cofiltrant d'espaces topologiques $(\text{Spr } A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ est représentée par l'ensemble des suites cohérentes $((\mathfrak{p}_{\lambda}, \leq_{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ avec $(\mathfrak{p}_{\lambda}, \leq_{\lambda}) \in \text{Spr } A_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $(\mathfrak{p}_{\lambda}, \leq_{\lambda}) = \text{Spr}(j_{\lambda\mu})(\mathfrak{p}_{\mu}, \leq_{\mu})$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$ (voir le problème 2.25(iii)); la topologie de X est induite par l'inclusion $X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spr } A_{\lambda}$. On déduit une application continue unique $\omega : \text{Spr } A \rightarrow X$ dont la composition avec la projection $\pi_{\lambda} : X \rightarrow \text{Spr } A_{\lambda}$ coïncide avec $\text{Spr}(j_{\lambda})$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, et il reste à montrer que ω est un homéomorphisme. Explicitement, pour tout $(\mathfrak{p}, \leq) \in \text{Spr } A$ on a $\omega(\mathfrak{p}, \leq) = ((j_{\lambda}^{-1}\mathfrak{p}, \leq_{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$, où $\leq_{\lambda}$ est l'ordre sur le corps $k(j_{\lambda}^{-1}\mathfrak{p})$ induit par l'ordre $\leq$ de $k(\mathfrak{p})$ via l'extension de corps résiduels $j_{\lambda,(\mathfrak{p})} : k(j_{\lambda}^{-1}\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p})$. Comme A est la réunion du système filtrant de sous-anneaux $(j_{\lambda}(A_{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$, on voit aisément que $k(\mathfrak{p})$ est la réunion du système filtrant de ses sous-corps $(k(j_{\lambda}^{-1}\mathfrak{p}) \mid \lambda \in \Lambda)$; par suite l'ordre $\leq$ de $k(\mathfrak{p})$ est déterminé par la famille de ses restrictions $\leq_{\lambda}$ à tous les sous-corps $k(\mathfrak{p}_{\lambda})$. Cela montre l'injectivité de ω . Pour la surjectivité, soit $((\mathfrak{p}_{\lambda}, \leq_{\lambda}) \mid \lambda \in$

$\Lambda) \in X$; la solution du problème 2.51(ii) montre que la réunion filtrante

$$\mathfrak{p} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(\mathfrak{p}_\lambda)$$

est l'unique idéal premier de A tel que $j_\lambda^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors $k(\mathfrak{p}_\lambda)$ s'identifie via $j_{\lambda,(\mathfrak{p})}$ avec un sous-corps de $k(\mathfrak{p})$, et on voit aisément qu'il existe un unique ordre total $\leq$ sur $k(\mathfrak{p})$ dont la restriction à $k(\mathfrak{p}_\lambda)$ coïncide avec $\leq_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Pour conclure, il reste à vérifier que la topologie de $\text{Spr } A$ est moins fine que celle induite par X via ω ; pour cela, il suffit de montrer que :

$$D_+(j_\lambda(a)) = \omega^{-1}(\pi_\lambda^{-1}D_+(a)) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall a \in A_\lambda.$$

Il s'agit d'un calcul direct : cf. la solution du problème 2.51(ii).

Problème 8.90, partie (i) : Comme K est formellement réel clos, et que E et F sont formellement réels, il est clair que K est algébriquement fermé dans E et F , donc $E \otimes_K F$ est intègre (problème 6.119(iii,iv)) ; il reste à montrer que son corps de fractions L est formellement réel. Or, soient $(E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(F_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ les systèmes partiellement ordonnés filtrants des extensions finiment engendrés de K contenues dans E et respectivement F , et notons $L_{\lambda\lambda'} := \text{Frac}(E_\lambda \otimes_K F_{\lambda'})$ pour tout $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$. L'exercice 3.14 nous dit que L est la réunion filtrante du système de ses sous-corps $(L_{\lambda\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$. Au vu du théorème d'Artin-Schreier 8.51(ii), on déduit que L est formellement réel si et seulement si $L_{\lambda\lambda'}$ est formellement réel pour tout $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$. On est ainsi ramené au cas où E et F sont les corps des fractions de K -algèbres intègres de type fini A et B , et noter que $A \otimes_K B$ est un sous-anneau de $E \otimes_K F$, en particulier il est intègre et son corps des fractions est L . Compte tenu du problème 8.87(iii), on est ramené à montrer :

Lemme 8.136. *Soient K un corps et A, B deux K -algèbres de type fini. On pose $X := \text{Spec } A$, $Y := \text{Spec } B$, $Z := \text{Spec } A \otimes_K B$. Si $X(K)$ et $Y(K)$ sont des parties denses de X et Y , alors $Z(K)$ est une partie dense de Z .*

Démonstration. L'homomorphisme naturel $A \rightarrow A \otimes_K B$ est plat et de présentation finie, donc il induit une application ouverte $\pi : Z \rightarrow X$ (corollaire 6.116(ii)). Soit alors $U \subset Z$ une partie ouverte non vide ; par hypothèse, $\pi(U)$ contient un point $\mathfrak{m} \in X(K)$, et la fibre $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } k(\mathfrak{m}) \otimes_A (A \otimes_K B)$ est un $k(\mathfrak{m})$ -schéma naturellement identifié au K -schéma Y , au vu de l'isomorphisme de corps résiduels $K \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{m})$. Par suite $Z(K) \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ est dense dans $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$, et comme $U \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$, on a ainsi $U \cap Z(K) \neq \emptyset$, comme souhaité. $\square$

Partie (ii) : Soient $\mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in \text{Spr } B$ et $\nu := (\mathfrak{q}', \leq_\nu) \in \text{Spr } C$ avec

$$\text{Spr}(f)(\mu) = \text{Spr}(g)(\nu) := \lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$$

et notons par $\pi_{(\mathfrak{q})} : B \rightarrow k(\mathfrak{q})$, $\pi_{(\mathfrak{q}')} : C \rightarrow k(\mathfrak{q}')$ les projections et $f_{(\mathfrak{q})} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{q})$, $g_{(\mathfrak{q}')} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{q}')$ les extensions de corps résiduels ; on doit exhiber un point $\alpha \in \text{Spr } D$ tel que $\text{Spr}(g')(\alpha) = \mu$ et $\text{Spr}(f')(\alpha) = \nu$. Pour cela, il suffit de trouver un corps totalement ordonné $(K, \leq_\beta)$ avec des morphismes de corps ordonnés $h_\mu : (k(\mathfrak{q}), \leq_\mu) \rightarrow (K, \leq_\beta)$ et $h_\nu : (k(\mathfrak{q}'), \leq_\nu) \rightarrow (K, \leq_\beta)$ tels que $h_\mu \circ f_{(\mathfrak{q})} = h_\nu \circ g_{(\mathfrak{q}')}$; car on déduira ensuite un homomorphisme unique d'anneaux $h : D \rightarrow K$ tel que $h \circ g' = h_\mu \circ \pi_{(\mathfrak{q})}$ et $h \circ f' = h_\nu \circ \pi_{(\mathfrak{q}')}$, et on pourra prendre $\beta := \text{Spr}(h)(0, \leq_\beta)$.

Or, soient $\bar{k}(\mathfrak{p}), \bar{k}(\mathfrak{q}), \bar{k}(\mathfrak{q}')$ des clôtures formellement réelles de $(k(\mathfrak{p}), \leq_\lambda)$, de $(k(\mathfrak{q}), \leq_\mu)$ et de $(k(\mathfrak{q}'), \leq_\nu)$, et rappelons qu'il existe des homomorphismes de corps uniques $\bar{f}_{(\mathfrak{q})} : \bar{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{q})$, $\bar{g}_{(\mathfrak{q}')} : \bar{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow \bar{k}(\mathfrak{q}')$ prolongeant $f_{(\mathfrak{q})}$ et $g_{(\mathfrak{q}')}$; il suffit de trouver un corps formellement réel K avec des homomorphismes de corps

$$\bar{h}_\mu : \bar{k}(\mathfrak{q}) \rightarrow K \quad \text{et} \quad \bar{h}_\nu : \bar{k}(\mathfrak{q}') \rightarrow K \quad \text{tels que} \quad \bar{h}_\mu \circ \bar{f}_{(\mathfrak{q})} = \bar{h}_\nu \circ \bar{g}_{(\mathfrak{q}')}$$

car $\bar{h}_\mu$ et $\bar{h}_\nu$ sont alors des morphismes de corps ordonnés, pour tout ordre total de K . D'après (i), on peut prendre pour K le corps des fractions de $\bar{k}(\mathfrak{q}) \otimes_{\bar{k}(\mathfrak{p})} \bar{k}(\mathfrak{q}')$.

Exercice 8.97, partie (i) : Soit $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda) \in \text{Spr } V$ et $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ une inclusion d'idéaux premiers de V ; on doit exhiber une générisation μ de λ dans $\text{Spr } V$ avec $\sigma_V(\mu) = \mathfrak{q}$. Quitte à remplacer V par $(V/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer que $\mathfrak{q} = 0$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ (remarque 8.17(ii,iii)). Notons par $\pi : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection, et soit

$$C := \{x \in K \mid \exists y \in K \exists z \in V^\times \text{ tels que } 0 <_\lambda \pi(z) \text{ et } x = y^2 z\}.$$

Montrons que C est un cône propre de K . En effet, il est clair que si $a, b \in C$, alors $ab \in C$, et $y^2 \in C$ pour tout $y \in K$. Supposons par l'absurde que $-1 \in C$; alors il existe $y \in K$ et $z \in V^\times$ avec $0 <_\lambda \pi(z)$ et $z = -1/y^2$. Si $y \in V^\times$, il vient $\pi(z) = -1/\pi(y)^2 <_\lambda 0$, contradiction ; sinon, il vient $1/y \in \mathfrak{m}$, d'où $\pi(z) = 0$, encore contradiction. Il reste à vérifier que si $a_1, a_2 \in C \setminus \{0\}$, alors $a_1 + a_2 \in C$; or, écrivons :

$$a_i = y_i^2 z_i \quad \text{avec} \quad y_i \in K, z_i \in V^\times \quad \text{et} \quad 0 <_\lambda \pi(z_i) \quad \forall i = 1, 2.$$

Quitte à échanger a_1 et a_2 , on peut supposer que $y_2 y_1^{-1} \in V$; il vient

$$a_1 + a_2 = z_1 y_1^2 (1 + t) \quad \text{avec} \quad t := z_1^{-1} z_2 y_1^{-2} y_2^2 \in V$$

et noter que $0 \leq_\lambda \pi(t)$, donc $0 <_\lambda \pi(z_1(1+t))$, d'où l'assertion. Il existe alors un ordre total $\leq_\mu$ de K dont le cône positif contient C (lemme 8.49). Par construction, on a $1+x \in C$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$, donc V est μ -convexe (lemme 8.93(iii)). En dernier lieu, il est clair que si $z \in V^\times$ et $0 <_\lambda \pi(z)$, alors $0 <_\mu z$; par suite $\mu \geq \lambda$.

Partie (ii) : D'après le lemme 8.93(iv), l'ordre de K induit un ordre $\leq_\lambda$ sur $k(\mathfrak{m})$; au vu de la proposition 8.53, il ne reste qu'à montrer que tout élément positif de $(k(\mathfrak{m}), \leq_\lambda)$ est un carré, et tout polynôme unitaire de degré impair $P(T) \in k(\mathfrak{m})[T]$ admet une racine dans $k(\mathfrak{m})$. Or, soit $\pi : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection ; si $x \in V^\times$ et si $0 <_\lambda \pi(x)$, on a $0 < x$, donc x est un carré dans le corps formellement réel clos K . Mais V est intégralement clos dans K (voir §8.1.1), donc x est un carré dans V , et finalement $\pi(x)$ est un carré dans $k(\mathfrak{m})$. De même, soit $Q(T) \in V[T]$ un polynôme unitaire dont l'image dans $k(\mathfrak{m})[T]$ coïncide avec $P(T)$; par la proposition 8.53, il existe $a \in K$ tel que $Q(a) = 0$, et comme V est intégralement clos dans K , on a $a \in V$, et donc $\pi(a)$ est une racine de P .

Problème 8.98, partie (i) : Soit $\lambda := (0, \leq_\lambda) \in \text{Spr } K(T)$, et fixons une clôture formellement réelle E de $(K(T), \leq_\lambda)$; d'après le problème 8.90(i), le corps des fractions F de $K' \otimes_K E$ est formellement réel, donc soit $\mu := (0, \leq_\mu) \in \text{Spr } F$. Soit aussi $f : K'[T] \rightarrow K' \otimes_K E$ l'unique homomorphisme de K' -algèbres tel que $f(T) = 1 \otimes T$; évidemment f est injectif, donc se prolonge en un homomorphisme de corps $g : K'(T) \rightarrow F$. Soient $j : K' \otimes_K E \rightarrow F$ l'inclusion, et $h : K(T) \rightarrow K' \otimes_K E$ l'homomorphisme de corps tel que $h(a) = 1 \otimes a$ pour tout $a \in K(T)$; on voit aisément que $j \circ h = g \circ i$. Avec $\nu := \text{Spr}(g)(\mu)$, il vient alors $\text{Spr}(i)(\nu) = \lambda$.

Partie (ii) : En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 6.116, on se ramène à montrer que $\phi := \text{Spr } f$ est générisante. Ensuite, comme une composition d'applications générisantes est générisante, une simple récurrence sur n nous ramène au cas où $n = 1$. Donc, soient $\lambda := (\mathfrak{p}, \leq_\lambda), \mu := (\mathfrak{q}, \leq_\mu) \in \text{Spr } A$ avec $\lambda \geq \mu$, et $\mu' := (\mathfrak{q}', \leq_{\mu'}) \in \text{Spr } A[T]$ tel que $\phi(\mu') = \mu$. Fixons une clôture formellement réelle $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ de $(k(\mathfrak{p}), \leq_\lambda)$ et $\bar{k}(\mathfrak{q}, \leq_\mu)$ de $(k(\mathfrak{q}), \leq_\mu)$, notons par $\bar{\lambda} := (0, \leq_{\bar{\lambda}})$ l'unique point de $\text{Spr } \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$, et soit $(V, \mathfrak{m}) \subset \bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ l'enveloppe $\bar{\lambda}$ -convexe de $B := (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$, qui est un anneau de valuation de $\bar{k}(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$ (lemme 8.93(i)) ; de plus, la preuve de la proposition 8.94(i) montre que l'idéal maximal de B est une partie convexe de $(B, \leq_\lambda)$, donc V domine B (lemme 8.93(ii)). Par l'exercice 8.97(ii), le corps $k(\mathfrak{m}_V)$ est formellement réel clos, et son ordre $\leq_{\bar{\lambda}^*}$ est induit par $\leq_{\bar{\lambda}}$.

• Supposons d'abord que l'extension de corps résiduels $f_{(q')} : k(q) \rightarrow k(q')$ soit algébrique, et notons $\pi_{(p)} : A \rightarrow k(p)$ la projection. Dans ce cas, l'inclusion $k(q) \subset k(m_V)$ se factorise à travers $f_{(q')}$ et un morphisme de corps ordonnés

$$i : (k(q'), \leq_{\mu'}) \rightarrow (k(m_V), \leq_{\bar{\lambda}^*}).$$

Soit $t \in k(q')$ la classe de T , et $\tau \in V$ un élément dont l'image dans $k(m_V)$ coïncide avec $i(t)$; soit $g : A[T] \rightarrow V$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $g(T) = \tau$ et $g(a) = \pi_{(p)}(a)$ pour tout $a \in A$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & A[T] & \xrightarrow{g} & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k(q) & \xrightarrow{f_{(q')}} & k(q') & \xrightarrow{i} & k(m_V) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les projections. Ainsi, $\text{Spr}(g)$ envoie $(m, \leq_{\bar{\lambda}^*}) \in \text{Spr } V$ sur μ' , et $\text{Spr}(g \circ f) : \text{Spr } V \rightarrow \text{Spr } A$ envoie $(0, \leq_{\bar{\lambda}}) \in \text{Spr } V$ sur λ ; par suite $\lambda' := \text{Spr}(g)(0, \leq_{\bar{\lambda}})$ est une générisation de μ' dans $\text{Spr } A[T]$ avec $\phi(\lambda') = \lambda$.

• Si $k(q')$ est une extension transcendante de $k(q)$, fixons aussi une clôture formellement réelle $\bar{k}(q', \leq_{\mu'})$ de $(k(q'), \leq_{\mu'})$; on a

$$k(q') = k(q)(T) \subset \bar{k}(q, \leq_{\mu})(T) \subset \bar{k}(q', \leq_{\mu'})$$

et l'unique ordre de $\bar{k}(q', \leq_{\mu'})$ induit par restriction un point

$$\nu := (0, \leq_{\nu}) \in \text{Spr } \bar{k}(q, \leq_{\mu})(T)$$

tel que $\leq_{\nu}$ prolonge l'ordre $\leq_{\mu'}$ de $k(q')$. D'autre part, l'inclusion $k(q) \subset k(m_V)$ se factorise à travers une extension de corps formellement réels clos $\bar{k}(q, \leq_{\mu}) \subset k(m_V)$; d'après (i), l'ordre $\leq_{\nu}$ se prolonge en un ordre $\leq_{\nu'}$ de $k(m_V)(T)$. Soit $\mathfrak{r} \subset V[T]$ le noyau de la projection $V[T] \rightarrow k(m_V)[T]$, et $W := V[T]_{\mathfrak{r}}$.

Lemme 8.137. *W est un anneau de valuation de $\bar{k}(p, \leq_{\lambda})(T)$.*

Démonstration. Noter que $\mathfrak{r} = m_V[T]$, l'ensemble des polynômes $P(T) \in V[T]$ à coefficients dans m_V . Or, disons que V est l'anneau de valuation d'une valuation $v : K \rightarrow \Gamma_0$ et soient $P := \sum_{i=0}^n a_i T^i$ et $Q := \sum_{i=0}^m b_i T^i$ deux polynômes non nuls de $V[T]$; soient aussi $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $v(a_j) = \min(v(a_0), \dots, v(a_n))$ et $v(b_k) = \min(v(b_0), \dots, v(b_m))$. Il vient $a_j^{-1}P, b_k^{-1}Q \in V[T] \setminus \mathfrak{r}$, et si $v(b_k) \leq v(a_j)$ on a $P/Q = (a_j/b_k) \cdot (a_j^{-1}P)/(b_k^{-1}Q) \in W$; de même, si $v(a_j) < v(b_k)$ on a $Q/P \in W$. L'assertion suit alors du lemme 8.16. $\square$

En résumé, on obtient un diagramme commutatif d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & A[T] & \xrightarrow{\pi} & B[T] & \xrightarrow{j} & W \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ k(q) & \longrightarrow & k(q') & \longrightarrow & & \longrightarrow & k(m_V)(T) \end{array}$$

et $(\mathfrak{r}W, \leq_{\nu'}) \in \text{Spr } W$ admet une générisation $\beta := (0, \leq_{\beta}) \in \text{Spr } W$ (exercice 8.97(i)); alors $\lambda' := \text{Spr}(j \circ \pi)(\beta) \in \text{Spr } A[T]$ est une générisation de μ' , et $\phi(\lambda') = \lambda$.

Exercice 8.104, partie (i) : En remarquant que $R_A(\frac{s}{t}) \cap R_A(\frac{t}{s}) = R_A(\frac{st}{st})$ pour tous $s, t \in S$, on se ramène aussitôt au cas où S est une partie multiplicative de A . Or, évidemment $Z = \{v \in \text{Spv } A \mid v(s) \neq +\infty \text{ pour tout } s \in S\}$; avec l'exercice 8.9, il s'ensuit que $\text{Spv}(i)$ induit une bijection continue $\phi : \text{Spv } S^{-1}A \xrightarrow{\sim} Z$. Pour voir que ϕ est un homéomorphisme, soient $x, y \in S^{-1}A$ et $R := R_{S^{-1}A}(\frac{x}{y})$; si $x = a/s, y = b/s$ avec $a, b \in A$ et $s \in S$, il est clair que $R = \phi^{-1}(Z \cap R_A(\frac{a}{b}))$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Avec la remarque 8.103(iv) on voit aussitôt que $\mathrm{Spv}(\pi)$ est injective et son image est Z . Ensuite, $R_{A/I}(\frac{\pi(a)}{\pi(b)}) = \mathrm{Spv}(\pi)^{-1}(Z \cap R_A(\frac{a}{b}))$ pour tous $a, b \in A$, donc $\mathrm{Spv}(\pi)$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spv} A/I \xrightarrow{\sim} Z$.

Partie (iii) : Soient $v_{A'} \in \mathrm{Spv} A'$ et $v_B \in \mathrm{Spv} B$ avec $v_A := \mathrm{Spv}(g)(v_{A'}) = \mathrm{Spv}(f)(v_B)$, et notons par $\bar{v}_A \in \mathrm{Spv} k(v_A)$, $\bar{v}_{A'} \in \mathrm{Spv} k(v_{A'})$ et $\bar{v}_B \in \mathrm{Spv} k(v_B)$ les respectives valuations résiduelles ; on cherche une valuation $v_{B'}$ de B' telle que $\phi(v_{B'}) = (v_{A'}, v_B)$. Les homomorphismes f et g induisent des extensions de corps $k(v_B) \leftarrow k(v_A) \rightarrow k(v_{A'})$, ainsi qu'un homomorphisme d'anneaux $h : B' \rightarrow C := k(v_{A'}) \otimes_{k(v_A)} k(v_B)$; or, si $v_C \in \mathrm{Spv} C$ est une valuation dont l'image dans $\mathrm{Spv} k(v_{A'}) \times_{\mathrm{Spv} k(v_A)} \mathrm{Spv} k(v_B)$ est le couple $(\bar{v}_{A'}, \bar{v}_B)$, on pourra prendre $v_{B'} := \mathrm{Spv}(h)(v_C)$. On est ainsi ramené au cas où A, B et A' sont des corps ; on notera par A^+, B^+ et A'^+ les anneaux de valuation de v_A, v_B et $v_{A'}$, et on pose $B'^+ := A'^+ \otimes_{A^+} B^+$. Les restrictions de f et g sont des homomorphismes injectifs $B^+ \leftarrow A^+ \rightarrow A'^+$, et en particulier A'^+ et B^+ sont des A^+ -modules sans torsion, donc plat (exercice 8.29(ii)) ; par suite l'homomorphisme naturel

$$B'^+ \rightarrow A' \otimes_{A^+} B^+ \rightarrow A' \otimes_{A^+} B \xrightarrow{\sim} B'$$

est injectif. Rappelons maintenant que l'application naturelle

$$\mathrm{Spec} B'^+ \rightarrow \mathrm{Spec} A'^+ \times_{\mathrm{Spec} A^+} \mathrm{Spec} B^+$$

est surjective (exercice 3.72) ; donc il existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} B'^+$ dont les images dans $\mathrm{Spec} A'^+$ et $\mathrm{Spec} B^+$ sont les idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}_{A'}$ et $\mathfrak{m}_B$. La localisation $B'_{\mathfrak{p}} \rightarrow B'_{\mathfrak{p}}$ est encore injective, ainsi $B'_{\mathfrak{p}} \neq 0$, et soit $\mathfrak{m} \subset B'_{\mathfrak{p}}$ un idéal maximal. L'image de $B'_{\mathfrak{p}}$ dans le corps résiduel $k(\mathfrak{m})$ est un anneau local $(D, \mathfrak{m}_D)$, et il existe une valuation v de $k(\mathfrak{m})$ dont l'anneau de valuation $(V, \mathfrak{m}_V)$ domine $(D, \mathfrak{m}_D)$ (théorème 8.21). Soit $\pi : B' \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection ; montrons que $v_{B'} := \mathrm{Spv}(\pi)(v)$ convient. En effet, par construction on a $v_{B'}(x) \geq 0$ pour tout $x \in B'_{\mathfrak{p}}$ et $v_{B'}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathfrak{p}B'_{\mathfrak{p}}$; par suite $v_{B'} \circ f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in A'^+$ et $v_{B'} \circ f'(a) > 0$ pour tout $a \in \mathfrak{m}_{A'}$. Au vu du lemme 8.16 il s'ensuit aisément que $v_{B'} \circ f'$ est équivalente à $v_{A'}$; de même on voit que $v_{B'} \circ g'$ est équivalente à v_B .

Problème 8.105, partie (i) : Supposons d'abord que $c\Gamma_v \subset \Delta$; soient $a, b \in A$, et vérifions que $v^\Delta(a+b) \geq \min(v^\Delta(a), v^\Delta(b))$. Cela est clair si $v(a), v(b) \in \Delta_\circ$, donc on peut supposer que $v(b) \notin \Delta_\circ$, le cas échéant on aura $v(b) > 0$, car $c\Gamma_v \subset \Delta$. Or, si $v(a) \in \Delta_\circ$, on doit avoir $v(b) > v(a)$, car Δ est convexe, d'où $v(a+b) = v(a)$ (remarque 8.8(ii)), et l'inégalité souhaitée s'ensuit. En dernier lieu, si $v(a), v(b) \notin \Delta_\circ$, on a $v(a), v(b) > 0$, et quitte à échanger les rôles de a et b , on peut supposer que $v(a+b) \geq v(a)$, d'où $v(a+b) \notin \Delta$, car Δ est convexe ; l'assertion suit aussitôt. Ensuite, vérifions que $v^\Delta(ab) = v^\Delta(a) + v^\Delta(b)$; à nouveau, cela est clair si $v(a), v(b) \in \Delta_\circ$, donc supposons que $v(b) \notin \Delta_\circ$. Si $v(a) \in \Delta_\circ$, on déduit aisément que $v(ab) \notin \Delta$, et l'égalité souhaitée suit aussitôt. En dernier lieu, si $v(a), v(b) \notin \Delta_\circ$, il vient $+\infty > v(a), v(b) > 0$, d'où $v(ab) > v(a) > 0$, et donc $v(ab) \notin \Delta$, car Δ est convexe ; l'assertion suit encore aussitôt.

Réciproquement, si $c\Gamma_v \not\subset \Delta$, il existe $a \in A$ avec $v(a) < 0$ et $v(a) \notin \Delta$; soit $b := 1 - a$. D'après la remarque 8.8(ii) il vient $v(b) = v(a)$, d'où $v^\Delta(a) = v^\Delta(b) = +\infty$, mais $v^\Delta(a+b) = v(1) = 0$, donc v^Δ n'est pas une valuation.

Partie (ii) : Soient $a, b \in A$ avec $v^\Delta \in R_A(\frac{a}{b})$; il faut montrer que $v \in R_A(\frac{a}{b})$. Par hypothèse on a $v^\Delta(a) \geq v^\Delta(b) \neq +\infty$, d'où $v(b) \in \Delta$. Or, si $v(a) \notin \Delta$, il vient $v(a) > 0$, car $c\Gamma_v \subset \Delta$, et alors $v(b) < v(a)$, car Δ est convexe, d'où l'assertion. Si $v(a) \in \Delta$, on a $v(a) = v^\Delta(a)$, et de même pour $v(b)$, d'où encore l'assertion.

Partie (iii) : Soient $a, b \in A$ avec $v \in R_A(\frac{a}{b})$; il faut montrer que $v_\Delta \in R_A(\frac{a}{b})$. Par hypothèse on a $v(a) \geq v(b) \neq +\infty$, d'où $v_\Delta(b) \neq +\infty$; pour conclure, il suffit de remarquer que π_0 est un morphisme d'ensembles ordonnés : les détails seront laissés aux

soins du lecteur.

Problème 8.108, partie (i) : Il est clair que $w \succeq_s v \Rightarrow \text{Supp}(v) = \text{Supp}(w)$. Pour la réciproque, au vu de la remarque 8.103(iv) on peut supposer que A soit un corps. Dans ce cas, soient V et W les anneaux de valuation de v et w ; noter que $V = \{a \in A \mid v \in R_A(\frac{a}{1})\}$, et de même pour W . Comme w est une généralisation de v , il vient $V \subset W$. D'autre part, les groupes des valeurs de v et w sont respectivement $\Gamma_v := A^\times / V^\times$ et $\Gamma_w := A^\times / W^\times$ (voir la preuve du lemme 8.16); ainsi, la projection $A^\times \rightarrow \Gamma_w$ se factorise à travers la projection $A^\times \rightarrow \Gamma_v$ et un morphisme surjectif de groupes ordonnés $\pi : \Gamma_v \rightarrow \Gamma_w$. Soit $\Delta := \text{Ker } \pi$; par inspection directe des définitions, on voit que $w = v_\Delta$.

Partie (ii) : Soit $\Delta \subset \Gamma_v$ un sous-groupe convexe contenant $c\Gamma_v$; soient aussi $a \in A$ et $b \in \text{Supp}(v^\Delta)$ tels que $v(a) \geq v(b)$. Il vient $v(b) \notin \Delta$, d'où $v(b) > 0$, car $c\Gamma_v \subset \Delta$; mais alors $v(a) \notin \Delta$, car Δ est convexe. Donc $a \in \text{Supp}(v^\Delta)$; cela montre que $\text{Supp}(v^\Delta)$ est v -convexe. Réciproquement, soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier v -convexe. En particulier, $v(x) \neq +\infty$ pour tout $x \in A \setminus \mathfrak{p}$, et on dénote par $\Delta_0 \subset \Gamma_v$ le sous-groupe engendré par $v(A \setminus \mathfrak{p})$. Montrons que $\gamma < v(x)$ pour tout $\gamma \in \Delta_0$ et tout $x \in \mathfrak{p}$. En effet, soient par l'absurde $\gamma \in \Delta_0$ et $x \in \mathfrak{p}$ avec $\gamma \geq v(x)$; comme $A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de A , on trouve $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$ tels que $\gamma = v(a) - v(b)$, d'où $v(a) \geq v(bx)$; comme $\mathfrak{p}$ est v -convexe, il vient $a \in \mathfrak{p}$, contradiction. Soit maintenant $\Delta \subset \Gamma_v$ le plus petit sous-groupe convexe contenant Δ_0 (i.e. l'intersection de tous les sous-groupes convexes de Γ_v contenant Δ_0); on voit aisément que l'on a toujours $\gamma < v(x)$ pour tout $\gamma \in \Delta$ et tout $x \in \mathfrak{p}$. De l'autre côté, par construction on a $v(A \setminus \mathfrak{p}) \subset \Delta$, donc $\mathfrak{p} = \{x \in A \mid v(x) > \gamma \text{ pour tout } \gamma \in \Delta\}$. En outre, si $a \in A$ et si $v(a) \leq 0 = v(1)$, on a $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, car $\mathfrak{p}$ est v -convexe et $1 \notin \mathfrak{p}$; donc $v(a) \in \Delta$, et cela montre que $c\Gamma_v \subset \Delta$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\text{Supp}(v^\Delta) = \mathfrak{p}$.

Partie (iii) : La valuation v se factorise à travers la projection $A \rightarrow A' := A/\mathfrak{p}$ et une valuation v' de A' ; quitte à remplacer A et v par A' et v' , on peut alors supposer que A soit intègre et $\mathfrak{p} = 0$. D'après le théorème 8.21, l'anneau local $A_{\mathfrak{q}}$ est dominé par un anneau de valuation $(V, \mathfrak{m})$ de $K := \text{Frac } A$; noter que $k(v) = k(\mathfrak{q}) \subset k(\mathfrak{m})$. D'après l'exercice 8.25(ii), la valuation résiduelle de v se prolonge alors en une valuation $\bar{w}$ de $k(\mathfrak{m})$. Soient $\bar{W}$ l'anneau de valuation de $\bar{w}$, et $\pi_V : V \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection; d'après l'exercice 8.18, le sous-anneau $W := \pi_V^{-1}(\bar{W})$ est l'anneau de valuation d'une valuation w_K de K , et soit w sa restriction à A . Noter que $\mathfrak{m} = \text{Ker}(\pi_V : W \rightarrow \bar{W})$ est un idéal premier de W avec $V = W_{\mathfrak{m}}$ et $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{m}$; la bijection de la proposition 8.14(i) lui associe le sous-groupe convexe $\Delta := \Delta(\mathfrak{m})$ de $\Gamma_w = \Gamma_{w_K}$, tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}(\Delta)$. D'après le lemme 8.107(ii,iv) on a $c\Gamma_w \subset \Delta$, $\text{Supp}(w^\Delta) = \mathfrak{q}$ et $k(w^\Delta)^+ = k(\mathfrak{q}) \cap \bar{W} = k(v)^+$, d'où $w^\Delta = v$.

Partie (iv) : Quitte à remplacer A par $A/\text{Supp}(v)$, on peut supposer que A soit intègre, et $k(v) = K := \text{Frac } A$, donc v est la restriction d'une valuation v_K de K . Soient $(K^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de v_K , et $\Delta \subset \Gamma_v$ un sous-groupe convexe tel que $c\Gamma_v \subset \Delta$ et $w = v^\Delta$. La proposition 8.14(i) associe à Δ l'idéal premier $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}(\Delta)$ de K^+ , et d'après le lemme 8.107(ii,iv) il vient :

$$A \subset K_{\mathfrak{p}}^+ \quad \text{Supp}(w) = \mathfrak{p} \cap A \quad k(w)^+ = k(w) \cap K^+/\mathfrak{p}.$$

D'autre part, $k(w') = k(w)$, et $k(w')^+ \subset k(w)^+$ (lemme 8.107(i)). Soient $\mathfrak{m}_w, \mathfrak{m}_{w'}$ respectivement les idéaux maximaux de $k(w)^+, k(w')^+$; il vient

$$k(w)^+ \cap \mathfrak{m}/\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_w \subset \mathfrak{m}_{w'}.$$

Ainsi, $\mathfrak{m}_w$ est un idéal de $k(w')^+$, et on a des homomorphismes injectifs d'anneaux :

$$C := k(w')^+/\mathfrak{m}_w \rightarrow k(\mathfrak{m}_w) \rightarrow k(\mathfrak{m}).$$

Or, C est un anneau de valuation de $K_C := \text{Frac } C$ (remarque 8.17(iii)), et d'après l'exercice 8.25(ii) il existe un anneau de valuation C' de $k(\mathfrak{m})$ avec $C = C' \cap K_C$. D'après l'exercice 8.18, l'image réciproque V' de C' dans K^+ est l'anneau de valuation d'une

valuation v'_K de K . Montrons que la restriction v' de v'_K au sous-anneau A convient. En effet, comme $V' \subset K^+$, on sait que K^+ est une localisation de V' (remarque 8.17(ii)), d'où $v_K \succeq_s v'_K$, donc $v \succeq_s v'$. Ensuite, noter que $\mathfrak{p}$ est aussi un idéal de V' , et $V'_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}^+$, de sorte que $A \subset V'_{\mathfrak{p}}$. La proposition 8.14(i) associe à $\mathfrak{p}$ un sous-groupe convexe $\Delta' := \Delta(\mathfrak{p}) \subset \Gamma_{v'}$, et d'après le lemme 8.107(ii,iv) on a

$$c\Gamma_{v'} \subset \Delta' \quad \text{Supp}(v'^{\Delta'}) = \mathfrak{p} \cap A \quad k(v'^{\Delta'})^+ = k(v'^{\Delta'}) \cap V'/\mathfrak{p}.$$

Par suite, $k(v'^{\Delta'}) = k(w)$ et $k(v'^{\Delta'})^+ = k(w) \cap V'/\mathfrak{p} = k(w')^+$, d'où $v'^{\Delta'} = w'$.

Exercice 8.115 : Soient $v, v' \in (\text{Spv } j)^{-1}(w)$, et notons $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ les supports de v et respectivement v' ; évidemment $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}'$, donc il existe $\sigma \in G$ tel que $\text{Spec}(\sigma|_B)(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$ (exercice 6.27(i)). Quitte à remplacer v' par $\text{Spv}(\sigma|_B)(v')$, on peut ainsi supposer que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. Soient $\bar{w}, \bar{v}$ et $\bar{v}'$ les valuations résiduelles de w sur $k(\mathfrak{p})$ et de v, v' sur $k(\mathfrak{q})$. Par hypothèse les restrictions de $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ au sous-corps $k(\mathfrak{p})$ sont équivalentes à $\bar{w}$, donc il existe $\tau \in \text{Gal}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p}))$ tel que $\text{Spv}(\tau)(\bar{v}') = \bar{v}$ (problème 8.28(ii)). D'après l'exercice 6.27(ii), il existe alors $\tau' \in \text{Gal}(E/K)$ avec $\text{Spec}(\tau')(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ et tel que l'action induite de τ' sur $k(\mathfrak{q})$ coïncide avec celle de τ . Evidemment, on obtient $\text{Spv}(\tau')(v') = v$, d'où l'assertion.

Exercice 8.123 : Notons $Q_{\bullet}^1 := (M_{\bullet} \otimes_A N_{\bullet}) \otimes_A P_{\bullet}$ et $Q_{\bullet}^2 := M_{\bullet} \otimes_A (N_{\bullet} \otimes_A P_{\bullet})$. Par définition, on a

$$Q_{\bullet}^1 := \bigoplus_{i+j+k=n} (M_i \otimes_A N_j) \otimes_A P_k \quad Q_{\bullet}^2 := \bigoplus_{i+j+k=n} M_i \otimes_A (N_j \otimes_A P_k) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En outre, la différentielle de $Q_{\bullet}^1$ en degré n est l'unique application A -linéaire $d_n^1 : Q_n^1 \rightarrow Q_{n-1}^1$ dont la restriction au facteur direct $(M_i \otimes_A N_j) \otimes_A P_k$ est

$$(d_i^M \otimes_A N_j) \otimes_A P_k + (-1)^i \cdot (M_i \otimes_A d_j^N) \otimes_A P_k + (-1)^{i+j} \cdot (M_i \otimes_A N_j) \otimes_A d_k^P.$$

De même, la différentielle de $Q_{\bullet}^2$ en degré n est l'unique application A -linéaire $d_n^2 : Q_n^2 \rightarrow Q_{n-1}^2$ dont la restriction au facteur direct $M_i \otimes_A (N_j \otimes_A P_k)$ est

$$d_i^M \otimes_A (N_j \otimes_A P_k) + (-1)^i \cdot M_i \otimes_A (d_j^N \otimes_A P_k) + (-1)^{i+j} \cdot M_i \otimes_A (N_j \otimes_A d_k^P).$$

On conclut que l'isomorphisme souhaité de complexes de A -modules $Q_{\bullet}^1 \xrightarrow{\sim} Q_{\bullet}^2$ est donné, en tout degré $n \in \mathbb{Z}$, par la somme directe des isomorphismes canoniques

$$(M_i \otimes_A N_j) \otimes_A P_k \xrightarrow{\sim} M_i \otimes_A (N_j \otimes_A P_k).$$

Exercice 8.129, partie (i) : Soit N un A -module arbitraire; en joignant l'exemple 7.69 et le théorème 8.126, on déduit de Σ la suite exacte :

$$\text{Tor}_2^A(M'', N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M', N) \xrightarrow{u} \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M'', N).$$

Comme M'' est plat, le premier et le dernier terme de cette suite sont nuls, donc u est un isomorphisme. L'assertion suit alors aussitôt de la proposition 7.70.

Partie (ii) : Supposons que f soit fidèlement plat; alors f est injectif, d'après le problème 3.83(i,c), et on obtient ainsi une suite exacte courte de A -modules :

$$\Sigma' : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B_{[f]} \xrightarrow{p} Q := B_{[f]}/f(A) \rightarrow 0.$$

Pour voir que Q est un A -module plat, il suffit de vérifier que $B \otimes_A Q$ est un B -module plat (problème 3.83(ii.b)). Or, comme B est une A -algèbre plate, $B \otimes_A \Sigma'$ est encore exacte courte, et $B \otimes_A B_{[f]}$ est un B -module plat (remarque 3.74(vi)); au vu de la remarque 3.74(iii), il suffira alors de montrer que la suite $B \otimes_A \Sigma'$ est scindée. Pour cela, soit $\mu : B \otimes_A B_{[f]} \rightarrow B$ l'application B -linéaire telle que $\mu(b \otimes b') := bb'$ pour tous $b, b' \in B$; évidemment $\mu \circ (B \otimes_A f) = \text{Id}_B$, d'où l'assertion.

Réciproquement, si f est injectif et si Q est un A -module plat, on déduit avec (i) que B est une A -algèbre plate, et que Σ' est une suite universellement exacte (exemple 8.128), i.e. $f \otimes_A M : M \rightarrow B_{[f]} \otimes_A M$ est injective pour tout A -module M . Noter que pour tout homomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ de A -modules, on a $(f \otimes_A N) \circ \phi = (B_{[f]} \otimes_A \phi) \circ (f \otimes_A M)$; en particulier, on obtient une injection :

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \quad \phi \mapsto B \otimes_A \phi$$

i.e. le foncteur $B \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ est fidèle, i.e. f est fidèlement plat.

Partie (iii) : Si B est intègre, il en est de même pour A , car f est injectif, d'après (ii). Supposons de plus que B soit intégralement clos, et soient K et L les corps des fractions de A et respectivement B . L'homomorphisme f se prolonge en une inclusion de corps $K \rightarrow L$, et pour vérifier que A est intégralement clos, il suffit de montrer que $A = K \cap B$ dans L . Or, la suite Σ' induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow j_B & & \downarrow j_Q & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{K \otimes_A f} & K \otimes_A B & \xrightarrow{K \otimes_A p} & K \otimes_A Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes courtes, d'après la preuve de (ii). De plus, Q est un A -module plat, toujours d'après (ii), donc $j_Q = j_A \otimes_A Q$ est injective, et $K \otimes_A B$ s'identifie naturellement à une localisation de B contenue dans L et contenant les images de B et de K (voir §3.4.2). Soient alors $x \in K$ et $b \in B$ tels que $y := (K \otimes_A f)(x) = j_B(b)$ dans $K \otimes_A B$; il vient $(K \otimes_A p)(y) = 0$, d'où $p(b) = 0$, car j_Q est injective. Donc $b \in f(A)$, CQFD.

Problème 8.130 : Soit $\varepsilon_M : P_{M\bullet} \rightarrow M$ une résolution projective de M ; il existe un morphisme de complexes $f_\bullet : P_{M\bullet} \rightarrow Q_\bullet$, unique à équivalence homotopique près, tel que $\varepsilon \circ f_0 = \varepsilon_M$ (théorème 5.9), et on va montrer que $f_\bullet$ induit un isomorphisme $H_i(Ff_\bullet) : L_i F(M) = H_i(FP_{M\bullet}) \xrightarrow{\sim} H_i(FQ_\bullet)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, mais la preuve sera quelque peu indirecte. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on construit un complexe $(\bar{P}_{n,\bullet}, d_{n,\bullet}^v)$ de $\mathcal{A}$ et un morphisme de complexes $d_{n+1,\bullet}^h : \bar{P}_{n+1,\bullet} \rightarrow \bar{P}_{n,\bullet}$, comme suit. On choisit d'abord des résolutions projectives $\varepsilon_0^R : R_{0,\bullet} \rightarrow M$, $\varepsilon_k^R : R_{k,\bullet} \rightarrow \mathrm{Im} d_k^Q$ de M et respectivement $\mathrm{Im} d_k^Q$, et soit $(\bar{R}_{k,\bullet}, d_{k,\bullet}^R)$ le complexe augmenté de $(R_{k,\bullet}, \varepsilon_k^R)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si l'on applique la proposition 7.65 à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathrm{Im} d_1^Q \rightarrow Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

on obtient une résolution $\varepsilon_0^P : P_{0,\bullet} \rightarrow Q_0$ et une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow \bar{R}_{1,\bullet} \xrightarrow{\alpha_0} \bar{P}_{0,\bullet} \xrightarrow{\beta_0} \bar{R}_{0,\bullet} \rightarrow 0$$

où $(\bar{P}_{0,\bullet}, d_{0,\bullet}^v)$ est le complexe augmenté de $(P_{0,\bullet}, \varepsilon_0^P)$. De même, pour tout $k > 0$ on a la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathrm{Im} d_{k+1}^Q \rightarrow Q_k \rightarrow \mathrm{Im} d_k^Q \rightarrow 0$, d'où une résolution $\varepsilon_k^P : P_{k,\bullet} \rightarrow Q_k$ et une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow \bar{R}_{k+1,\bullet} \xrightarrow{\alpha_k} \bar{P}_{k,\bullet} \xrightarrow{\beta_k} \bar{R}_{k,\bullet} \rightarrow 0$$

où $(\bar{P}_{k,\bullet}, d_{k,\bullet}^v)$ est le complexe augmenté de $(P_{k,\bullet}, \varepsilon_k^P)$. Cela posé, le morphisme $d_{n+1,\bullet}^h$ souhaité est la composition $\bar{P}_{n+1,\bullet} \xrightarrow{\beta_{n+1}} \bar{R}_{n+1,\bullet} \xrightarrow{\alpha_n} \bar{P}_{n,\bullet}$. Evidemment $d_{n+1,\bullet}^h \circ d_{n+2,\bullet}^h = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\bar{P}_{\bullet\bullet} := (\bar{P}_{n,\bullet}, d_{n,\bullet}^v, d_{n+1,\bullet}^h | n \in \mathbb{N})$ est un complexe double. De même, la donnée $P_{\bullet\bullet} := (P_{n,\bullet}, d_{n,\bullet}^v, d_{n+1,\bullet}^h | n \in \mathbb{N})$ est le complexe double obtenu de $\bar{P}_{\bullet\bullet}$ après *troncature de la ligne horizontale en degré -1* , i.e. des termes de bidegrés $(n, -1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette ligne horizontale contient le complexe $Q_\bullet$; avec

la notation de l'exemple 8.122(i), on aboutit alors à une suite exacte courte de complexes doubles :

$$(*) \quad 0 \rightarrow Q_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1]_\bullet \rightarrow \overline{P}_{\bullet\bullet} \rightarrow P_{\bullet\bullet} \rightarrow 0.$$

Soit $(\overline{T}_\bullet, d_\bullet^{\overline{T}})$ (resp. $(T_\bullet, d_\bullet^T)$) le complexe total de $\overline{P}_{\bullet\bullet}$ (resp. de $P_{\bullet\bullet}$), et noter que le complexe total de $Q_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1]_\bullet$ est naturellement isomorphe au décalage $Q_\bullet[1]$ du complexe $Q_\bullet$; il vient une suite exacte courte de complexes ordinaires

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow Q_\bullet[1] \rightarrow \overline{T}_\bullet \rightarrow T_\bullet \rightarrow 0.$$

De plus, par construction le complexe $\overline{P}_{k,\bullet}$ est exact pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\overline{T}_\bullet$ est exact (remarque 8.125); la suite exacte longue d'homologie associée à Σ nous donne alors des isomorphismes naturels

$$\partial_i^\Sigma : H_i(T_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_{i-1}(Q_\bullet[1]) = H_i(Q_\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, $T_\bullet$ est exact en tout degré homologique > 0 , et si l'on compose la projection $T_0 \rightarrow H_0(T_\bullet)$ avec $\partial_0^\Sigma : H_0(T_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_0(Q_\bullet)$ et ensuite avec l'isomorphisme $H_0(Q_\bullet) \xrightarrow{\sim} M$ induit par l'augmentation ε_M , on obtient une augmentation $\varepsilon'_M : T_0 \rightarrow M$ qui fait du couple $(T_\bullet, \varepsilon'_M)$ une résolution projective de M , d'où un morphisme $h_\bullet : P_{M,\bullet} \rightarrow T_\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ avec $\varepsilon'_M \circ h_0 = \varepsilon_M$, induisant des isomorphismes

$$H_i(Fh_\bullet) : L_i FM \xrightarrow{\sim} H_i(FT_\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

De l'autre côté, considérons la suite exacte de complexes doubles :

$$(\dagger) \quad 0 \rightarrow F(Q_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1]_\bullet) \rightarrow F\overline{P}_{\bullet\bullet} \rightarrow FP_{\bullet\bullet} \rightarrow 0$$

obtenue en appliquant F terme à terme dans $(*)$. Par inspection directe on trouve :

$$F(Q_\bullet \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1]_\bullet) = (FQ_\bullet) \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1]_\bullet.$$

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a par hypothèse $H_i(FP_{k,\bullet}) \simeq L_i FQ_k = 0$ si $i > 0$, et $F\varepsilon_k^P : FP_{k,0} \rightarrow FQ_k$ induit un isomorphisme $H_0(FP_{k,\bullet}) \simeq L_0 FQ_k \xrightarrow{\sim} FQ_k$, car F est exact à droite (exercice 7.62(ii)); autrement dit, $F\overline{P}_{k,\bullet}$ est un complexe exact, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc le complexe total $F\overline{T}_\bullet$ de $F\overline{P}_{\bullet\bullet}$ est exact, toujours d'après la remarque 8.125. Ainsi, $(\dagger)$ induit la suite exacte courte de complexes

$$F\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow FQ_\bullet[1] \rightarrow F\overline{T}_\bullet \rightarrow FT_\bullet \rightarrow 0$$

et la suite exacte longue d'homologie associée à cette dernière donne des isomorphismes naturels de $\mathcal{B}$:

$$\partial_i^{F\Sigma} : H_i(FT_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_{i-1}(FQ_\bullet[1]) = H_i(FQ_\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Il suffit alors de vérifier que $\partial_i^{F\Sigma} \circ H_i(Fh_\bullet) = (-1)^i \cdot H_i(Ff_\bullet)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour cela, soit $g_n : T_n \rightarrow Q_n$ la composition de ε_n^P avec la projection naturelle $T_n = \bigoplus_{p+q=n} P_{p,q} \rightarrow P_{n,0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit aisément que $g_\bullet : T_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ est un morphisme de complexes avec $\varepsilon'_M = \varepsilon \circ g_0$; par suite $g_\bullet \circ h_\bullet$ est homotopiquement équivalent à $f_\bullet$ (théorème 5.9), d'où $H_i(Fg_\bullet) \circ H_i(Fh_\bullet) = H_i(Ff_\bullet)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (remarque 5.5(iii,v)). On est ainsi ramené à montrer que $\partial_i^{F\Sigma} = (-1)^i \cdot H_i(Fg_\bullet)$.

Or, Σ est formé des suites exactes courtes $0 \rightarrow Q_{n+1} \xrightarrow{j_n} T_n \oplus Q_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} T_n \rightarrow 0$, où j_n et π_n sont respectivement les injections et projections naturelles, en tout degré $n \in \mathbb{N}$. Avec cette notation, la différentielle $d_n^{\overline{T}} : T_n \oplus Q_{n+1} \rightarrow T_{n-1} \oplus Q_n$ est donnée par la matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} d_n^T & 0 \\ (-1)^n g_n & d_{n+1}^Q \end{pmatrix}.$$

Puisque la différentielle de $F\overline{T}_\bullet$ en degré i est $F(d_i^{\overline{T}}) : FT_i \oplus FQ_{i+1} \rightarrow FT_{i-1} \oplus FQ_i$, l'assertion découle alors aisément de la définition du morphisme de bord dans la suite du serpent (proposition 2.106).

Exercice 8.131, partie (i) : On montre d'abord l'assertion sous la condition (a). Soit donc $n \in \mathbb{Z}$ et $x_{\bullet\bullet} := (x_{p,q} \mid p+q=n) \in \text{Tot}^\Pi(P)^n$ avec $d^n(x_{\bullet\bullet}) = 0$; on doit exhiber $y_{\bullet\bullet} := (y_{p,q} \mid p+q=n-1) \in \text{Tot}^\Pi(P)^{n-1}$ avec $d^{n-1}(y_{\bullet\bullet}) = x_{\bullet\bullet}$, i.e.

$$(*) \quad d_h^{k-1, n-k}(y_{k-1, n-k}) + (-1)^k \cdot d_v^{k, n-k-1}(y_{k, n-k-1}) = x_{k, n-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On va construire les $y_{k-1, n-k} \in P^{k-1, n-k}$ par récurrence sur k , de sorte que

$$(**) \quad z_k := x_{k, n-k} - d_h^{k-1, n-k}(y_{k-1, n-k}) \in \text{Ker } d_v^{k, n-k}.$$

On pose $y_{k-1, n-k} := 0$ pour tout $k \leq 0$. Evidemment $(*)$ est alors vérifiée pour $k < 0$, et $(**)$ est vérifiée pour $k \leq 0$. Ensuite, soit $r \geq 0$ tel que $y_{k-1, n-k}$ ait déjà été exhibé pour tout $k \leq r$, de telle façon que $(*)$ est vérifiée pour tout $k < r$ et $(**)$ est vérifiée pour tout $k \leq r$. En particulier, comme $(P^{r, \bullet}, d_v^{r, \bullet})$ est exact, la condition $(**)$ implique qu'il existe $y_{r, n-r-1} \in P^{r, n-r-1}$ tel que

$$z_r = (-1)^r \cdot d_v^{r, n-r-1}(y_{r, n-r-1}).$$

Avec ce choix, la condition $(*)$ est maintenant vérifiée pour tout $k \leq r$. Un calcul direct que l'on laissera aux soins du lecteur montre de même que $(**)$ est vérifiée pour $k = r+1$. En dernier lieu, si $P^{\bullet\bullet}$ satisfait la condition (b) du problème, on raisonne avec le flip de $P^{\bullet\bullet}$ pour se ramener au cas précédent, comme dans la preuve de la proposition 8.124.

Partie (ii) : Soient $(P_\bullet, d_\bullet^P) \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ une résolution projective, $N \xrightarrow{\varepsilon_N} (I^\bullet, d_I^\bullet)$ une résolution injective, et notons $(\bar{P}_\bullet, d_\bullet^{\bar{P}})$ et $(\bar{I}^\bullet, d_I^{\bar{I}})$ les complexes augmentés respectifs (définition 5.6 et remarque 5.10). Pour tout $i \geq -1$ on considère le complexe

$$(\bar{Q}^{i, \bullet}, d_v^{i, \bullet}) := \text{Hom}_A(\bar{P}_i, \bar{I}^\bullet).$$

La différentielle $d_i^{\bar{P}} : \bar{P}_i \rightarrow \bar{P}_{i-1}$ induit un morphisme de complexes

$$d_h^{i-1, \bullet} := \text{Hom}_A(d_i^{\bar{P}}, \bar{I}_\bullet) : \bar{Q}^{i-1, \bullet} \rightarrow \bar{Q}^{i, \bullet}$$

et la donnée $\bar{Q}^{\bullet\bullet} := (\bar{Q}^{i, \bullet}, d_h^{i, \bullet}, d_v^{i, \bullet} \mid i \in \mathbb{Z})$ est évidemment un complexe double. On dénote aussi par $\bar{Q}'^{\bullet\bullet}$ (resp. $\bar{Q}''^{\bullet\bullet}$) le complexe double obtenu à partir de $\bar{Q}^{\bullet\bullet}$ après troncature de la ligne horizontale (resp. verticale) en degré cohomologique -1 ; donc, $\bar{Q}'^{p, q} = 0$ pour $q < 0$ et $\bar{Q}''^{p, q} = 0$ pour $p < 0$. Soit en outre $Q^{\bullet\bullet}$ le complexe double obtenu à partir de $\bar{Q}'^{\bullet\bullet}$, après troncature de la ligne verticale en degré cohomologique -1 ; évidemment on peut obtenir ce complexe double aussi à partir de $\bar{Q}''^{\bullet\bullet}$, par troncature de la ligne horizontale en degré cohomologique -1 . Il vient des suites exactes courtes de complexes doubles

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Q^{\bullet\bullet} & \rightarrow & \bar{Q}'^{\bullet\bullet} & \rightarrow & A[1]^\bullet \boxtimes_A \text{Hom}_A(M, I^\bullet) \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & Q^{\bullet\bullet} & \rightarrow & \bar{Q}''^{\bullet\bullet} & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_\bullet, N) \boxtimes_A A[1]^\bullet \rightarrow 0. \end{array}$$

Or, le complexe $(\bar{Q}'^{q, \bullet}, d_h^{q, \bullet}) = \text{Hom}_A(\bar{P}_\bullet, I^q)$ est exact pour tout $q \in \mathbb{N}$, car $\bar{P}_\bullet$ est exact et I^q est injectif; donc $\bar{T}'^\bullet := \text{Tot}^\Pi(\bar{Q}'^{\bullet\bullet})$ est exact, d'après (i). De même, le complexe $(\bar{Q}''^{p, \bullet}, d_v^{p, \bullet}) = \text{Hom}_A(P_p, \bar{I}^\bullet)$ est exact pour tout $p \in \mathbb{N}$, car $P_\bullet$ est projectif et $\bar{I}^\bullet$ est exact, donc $\bar{T}''^\bullet := \text{Tot}^\Pi(\bar{Q}''^{\bullet\bullet})$ est exact, toujours d'après (i). De l'autre côté, $(*)$ induit des suites exactes de complexes totaux :

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & T^\bullet & \rightarrow & \bar{T}'^\bullet & \rightarrow & \text{Hom}_A(M, I^\bullet)[1] \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & T^\bullet & \rightarrow & \bar{T}''^\bullet & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_\bullet, N)[1] \rightarrow 0 \end{array}$$

avec $T^\bullet := \text{Tot}^\Pi(Q^{\bullet\bullet})$. Les suites exactes longues d'homologie associées à $(\dagger)$ nous donnent ainsi des isomorphismes naturels

$$\begin{array}{l} \text{Ext}_A^i(M, N) \xrightarrow{\sim} H^{i-1}(\text{Hom}_A(M, I^\bullet)[1]) \xrightarrow{\sim} H^i(T^\bullet) \\ L_i \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} H^{i-1}(\text{Hom}_A(P_\bullet, N)[1]) \xrightarrow{\sim} H^i(T^\bullet) \end{array} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

d'où l'isomorphisme souhaité $\text{Ext}_A^i(M, N) \xrightarrow{\sim} L_i \text{Hom}_A(M, N)$. En dernier lieu, en raisonnant comme dans la preuve du théorème 8.126 et dans la remarque 8.127, on voit

aisément que cet isomorphisme est naturel en M et N , et il ne dépend pas des choix auxiliaires : les détails sont laissés aux soins du lecteur.



AU §7.4.2 on a vu comment des simples considérations analytiques peuvent être utiles pour déterminer la dimension de la variété analytique complexe correspondant à une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, et pour calculer des invariants algébriques associés à l'algèbre elle-même. Dans cette leçon on développera des méthodes mélangeant algèbre et topologie, qui nous permettront d'étendre à des anneaux arbitraires ce genre d'arguments. Dans un premier temps, il s'agit de dégager de l'analyse complexe les aspects plus combinatoires, qui ne s'appuient que sur la manipulation formelle des développements en séries de puissances, et qui donc peuvent être reproduits sur l'anneau $\mathbb{C}[[T_1, \dots, T_n]]$ des séries de puissances à coefficients complexes. Mais on s'aperçoit rapidement qu'avec l'opération fondamentale de *complétion* d'un anneau topologique, les mêmes idées deviennent pertinentes dans des situations bien plus générales : notamment, les complétions *adiques* des corps de nombres sont depuis longtemps un outil efficace dans des nombreuses questions arithmétiques, ainsi qu'un sujet majeur de recherche en elles-mêmes.

La section 9.1 recueille les premières notions élémentaires concernant les anneaux et les modules topologiques : on s'intéresse surtout aux *topologies linéaires*, les plus utiles à l'algébriste ; on se penche en particulier sur une importante classe d'anneaux topologiques isolés par R. Huber, qui dans ses travaux [39, 40, 41] sont appelés *anneaux f -adiques*, mais on préfère ici les nommer simplement *anneaux de Huber* : voir la section 9.4. Les sections 9.2 et 9.3 expliquent la technique de complétion des anneaux linéairement topologisés, et présentent quelques propriétés remarquables des anneaux topologiques complets : signalons les problèmes 9.32 et 9.33, proposant des versions assez générales du théorème de Baire et respectivement du théorème de l'application ouverte de Banach, et l'exercice 9.57 sur le *lemme de Hensel* pour les anneaux locaux complets.

La section 9.5 considère le cas d'un anneau *noethérien* A muni d'une topologie *I -adique* (pour un idéal $I \subset A$ arbitraire) : on montre que la complétion de A est une A -algèbre plate et noethérienne (corollaire 9.103(i) et théorème 9.113). L'outil clef pour accéder à ce résultat majeur est un lemme élémentaire prouvé indépendamment par E. Artin et D. Rees, assurant que les topologies *I -adiques* des A -modules de type fini sont hérités par les sous-modules. On retrouvera notamment le lemme de Artin-Rees dans la section 10.4 et dans la leçon 11, lors de l'étude de la dimension des anneaux locaux noethériens.

9.1. Anneaux et modules topologiques. Tout d'abord, un *anneau topologique* est la donnée d'un anneau A et d'une topologie $\mathcal{T}_A$ sur A telle que l'addition et la multiplication de A soient des applications continues

$$A \times A \rightarrow A$$

où $A \times A$ est muni de la topologie du produit de l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ avec lui-même : voir l'exemple 2.20(iii). De même, un *A -module topologique* est la donnée d'un A -module M et d'une topologie $\mathcal{T}_M$ sur M telle que l'addition et la multiplication scalaire

de M soient des applications continues

$$M \times M \rightarrow M \quad A \times M \rightarrow M$$

pour les produits d'espaces topologiques $(M, \mathcal{T}_M) \times (M, \mathcal{T}_M)$ et $(A, \mathcal{T}_A) \times (M, \mathcal{T}_M)$. Les anneaux commutatifs topologiques et les A -modules topologiques forment des catégories

$$\mathbb{Z} - \text{AlgTop} \quad (A, \mathcal{T}_A) - \text{ModTop}$$

dont les morphismes sont les homomorphismes continus d'anneaux et respectivement les applications A -linéaires continues.

Exemple 9.1. (i) Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, munis des topologies standards, sont des exemples d'anneaux topologiques (et tout $\mathbb{R}$ -espace topologique au sens usuel est un $\mathbb{R}$ -module topologique), mais dans cette leçon on étudiera plutôt les topologies dont il s'agit dans la définition 9.2(ii) ci-dessous.

(ii) Noter que si A est l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers muni de sa topologie discrète $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}^d$, un $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}^d)$ -module topologique n'est rien d'autre qu'un *groupe abélien topologique*.

Définition 9.2. (i) Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, t un point de T , et $U_{\bullet} := (U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille de voisinages ouverts de t dans T .

(a) On dit que $U_{\bullet}$ est un *système fondamental de voisinages ouverts de t dans T* , si pour tout voisinage V de t dans T il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $U_{\lambda} \subset V$.

(b) On dit que $\mathcal{T}$ est à *voisinages dénombrables* si tout point de T admet un système fondamental *dénombrable* de voisinages ouverts.

(ii) Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, $(M, \mathcal{T}_M)$ un A -module topologique. On dit que la topologie $\mathcal{T}_M$ est *$\mathbb{Z}$ -linéaire* (resp. *A -linéaire*), si elle admet un *système fondamental de sous-groupes ouverts* (resp. *de A -sous-modules ouverts*), i.e. s'il existe un système fondamental de voisinages ouverts de l'élément neutre 0_M dans M , formé de sous-groupes additifs de M (resp. formé de A -sous-modules de M).

(iii) On a ainsi les sous-catégories pleines de $(A, \mathcal{T}_A) - \text{ModTop}$ et de $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$:

$$(A, \mathcal{T}_A) - \text{ModTop}_{B\text{-lin}} \quad \mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{\mathbb{Z}\text{-lin}}$$

dont les objets sont les A -modules topologiques avec topologie B -linéaire (pour $B = \mathbb{Z}$ ou $B = A$), et les anneaux topologiques avec topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire.

Remarque 9.3. Soient A un anneau topologique, $(M, \mathcal{T}_M)$ un A -module topologique, et $(U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0_M dans M .

(i) Noter que pour tout $x \in M$, la translation $M \rightarrow M : y \mapsto x + y$ est un homéomorphisme ; il s'ensuit aisément que toute partie ouverte de M est une réunion de parties de la forme $x + U_{\lambda} := \{x + u \mid u \in U_{\lambda}\}$. En particulier, la famille $(U_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ détermine complètement $\mathcal{T}_M$, et $\mathcal{T}_M$ est à voisinages dénombrables $\Leftrightarrow 0_M$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts.

(ii) De même, si N est un deuxième A -module topologique, et $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire, alors f est continue si et seulement si elle est continue au point 0_M . En effet, la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si f est continue en 0_M , soient $x \in M$ et V un voisinage de $f(x)$ dans N ; alors $V - f(x)$ est un voisinage de l'élément neutre 0_N de N , donc $f^{-1}(V - f(x))$ est un voisinage de 0_M , et $x + f^{-1}(V - f(x)) = f^{-1}V$ est un voisinage de x dans M . Comme x est arbitraire, cela montre que f est continue (exercice 1.21(i)).

(iii) Avec la notation de (ii), on voit aussi que f est une application ouverte si et seulement si $f(U_{\lambda})$ est une partie ouverte de N , pour tout $\lambda \in \Lambda$.

(iv) Soient $M' \subset M$ un sous-module, et $U \subset M$ un voisinage ouvert de 0_M , que l'on munit de la topologie induite par M . Alors M' est ouvert (resp. fermé) dans $M \Leftrightarrow M' \cap U$ est ouvert (resp. fermé) dans U . En effet, la condition est évidemment nécessaire ; réciproquement, si $M' \cap U$ est ouvert dans U , il est ouvert aussi dans M , donc $M' = \bigcup_{x \in M'} x + (M' \cap U)$ est ouvert dans M . Ensuite, si $M' \cap U$ est fermé dans U , soit $\overline{M'}$

l'adhérence de M' dans M , et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \overline{M'} \setminus M'$; alors on trouve $y \in (x - U) \cap M'$, d'où $x \in (y + U) \setminus M' = y + (U \setminus M')$, une partie ouverte de M qui ne rencontre pas M' , contradiction.

Exercice 9.4. (i) Pour tout anneau topologique $A := (A, \mathcal{T}_A)$, et pour $B = \mathbb{Z}$ ou A , montrer que les catégories $A - \text{ModTop}$, et $A - \text{ModTop}_{B-\text{lin}}$ sont complètes.

(ii) Montrer que les catégories $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$ et $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{\mathbb{Z}-\text{lin}}$ sont complètes.

Lemme 9.5. Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique, $N \subset M$ un sous-module, $I \subset A$ un idéal. On munit $\overline{M} := M/N$ et $\overline{A} := A/I$ des topologies $\mathcal{T}_{\overline{M}}, \mathcal{T}_{\overline{A}}$ induites par M, A via les projections $\pi_M : M \rightarrow \overline{M}, \pi_A : A \rightarrow \overline{A}$. On a :

(i) $(\overline{M}, \mathcal{T}_{\overline{M}})$ est un A -module topologique et $(\overline{A}, \mathcal{T}_{\overline{A}})$ est un anneau topologique.

(ii) Les applications π_M et π_A sont ouvertes.

(iii) L'adhérence $\overline{N}$ de N dans M est un sous-module de M .

Démonstration. (i,ii) : Si $U \subset M$ est une partie ouverte, il en est de même pour la partie $\pi_M^{-1}\pi_M(U) = \bigcup_{x \in N} x + U$, donc $\pi_M(U)$ est ouverte dans $\overline{M}$; cela montre que l'application π_M est ouverte, et de même pour π_A . Remarquons ensuite :

Affirmation 9.6. Soient M, M' deux A -modules topologiques, $N \subset M, N' \subset M'$ deux sous-modules; on munit $M'' := M \times M'$ de la topologie du produit, et on dénote $\pi_M : M \rightarrow \overline{M} := M/N, \pi_{M'} : M' \rightarrow \overline{M'} := M'/N'$ et $\pi_{M''} : M'' \rightarrow \overline{M''} := M''/(N' \times N'')$ les projections. Munissons aussi $\overline{M}, \overline{M'}, \overline{M''}$ des topologies induites par M, M' et M'' via $\pi_M, \pi_{M'}$ et $\pi_{M''}$, et $\overline{M} \times \overline{M'}$ de la topologie du produit. Alors $\pi_M \times \pi_{M'} : M'' \rightarrow \overline{M} \times \overline{M'}$ est la composition de $\pi_{M''}$ et d'un homéomorphisme :

$$\overline{M''} \xrightarrow{\sim} \overline{M} \times \overline{M'}.$$

Ainsi, la topologie de $\overline{M} \times \overline{M'}$ est induite par celle de $M \times M'$ via $\pi_M \times \pi_{M'}$.

Preuve : $\pi_M \times \pi_{M'}$ est continue, donc se factorise à travers $\pi_{M''}$ et une bijection A -linéaire continue $\omega : \overline{M''} \rightarrow \overline{M} \times \overline{M'}$; or, comme π_M et $\pi_{M'}$ sont des applications ouvertes, il en est de même pour $\pi_M \times \pi_{M'}$, et puisque $\pi_{M''}$ est continue, on conclut que ω est ouverte, d'où l'assertion. $\diamond$

Montrons que l'addition $\overline{\beta} : \overline{M} \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ est continue : si $U \subset \overline{M}$ est une partie ouverte, il faut que la partie $\overline{\beta}^{-1}U$ soit ouverte dans $\overline{M} \times \overline{M}$; d'après l'observation 9.6, il suffit alors de remarquer que la partie $(\pi_M \times \pi_M)^{-1}(\overline{\beta}^{-1}U) = \beta^{-1}(\pi_M^{-1}U)$ est ouverte dans $M \times M$ (où β est l'addition de M). Il reste à vérifier que la multiplication scalaire $\overline{\sigma}_M : A \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ est continue. Pour cela, soit $\sigma_M : A \times M \rightarrow M$ la multiplication scalaire de M ; d'après l'observation 9.6, la topologie de $A \times \overline{M}$ est induite par celle de $A \times M$ via $Id_A \times \pi_M$, et on a $\overline{\sigma}_M \circ (Id_A \times \pi_M) = \pi_M \circ \sigma_M$. Comme π_M et σ_M sont continues, l'assertion s'ensuit aussitôt.

Vérifions que $\overline{A}$ est un anneau topologique; par ce qui précède, il suffit de montrer que la loi de multiplication $\overline{\sigma}_A : \overline{A} \times \overline{A} \rightarrow \overline{A}$ est continue. Pour cela, soit $\sigma : A \times A \rightarrow A$ la loi de multiplication de A ; il vient $\pi_A \circ \sigma_A = \overline{\sigma}_A \circ (\pi_A \times \pi_A)$, et la topologie de $\overline{A} \times \overline{A}$ est induite par $A \times A$ via $\pi_A \times \pi_A$ (observation 9.6), d'où l'assertion.

(iii) : Si $\beta : M \times M \rightarrow M$ dénote la loi d'addition de M , la partie $\beta^{-1}\overline{N}$ contient $N \times N$, donc aussi son adhérence $\overline{N} \times \overline{N}$ dans $M \times M$, i.e. $\overline{N}$ est un sous-groupe additif de M ; de même, si $\sigma_M : A \times M \rightarrow M$ dénote la loi de multiplication scalaire, $\sigma_M^{-1}\overline{N}$ contient $A \times N$, donc aussi son adhérence $A \times \overline{N}$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 9.7. (i) Soient A un anneau topologique, $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme continu de A -modules topologiques, et munissons $Q := \text{Coker } f$ (resp. $P := \text{Ker } f$) de la topologie $\mathcal{T}_Q$ (resp. $\mathcal{T}_P$) induite par N via la projection naturelle $N \rightarrow Q$ (resp. par M via l'inclusion $P \rightarrow M$). On déduit aisément du lemme 9.5(i) que $(Q, \mathcal{T}_Q)$ représente le conoyau de f dans la catégorie $A - \text{ModTop}$: les détails sont laissés au lecteur. De même, $(P, \mathcal{T}_P)$ représente le noyau de f dans $A - \text{ModTop}$.

(ii) Par suite, l'image (resp. la coimage) de f est le A -module topologique $(f(M), \mathcal{T})$ (resp. $(f(M), \mathcal{T}')$), où $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$) est la topologie induite par N via l'inclusion $f(M) \rightarrow N$ (resp. par M via la projection $M \rightarrow f(M)$). En particulier f est un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$ (voir la définition 2.68) si et seulement si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Cela montre que $A - \text{ModTop}$ n'est pas une catégorie abélienne.

Exercice 9.8. Soient A un anneau topologique, M et N deux A -modules topologiques, $M_0 \subset M$ (resp. $N_0 \subset N$) un sous-module ouvert que l'on munit de la topologie induite par M (resp. par N), et $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire avec $f(M_0) \subset N_0$. Montrer que f est un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$ si et seulement s'il en est de même pour la restriction $f_0 : M_0 \rightarrow N_0$ de f .

Exercice 9.9. Soient A un anneau topologique et M un A -module topologique.

- (i) Montrer que M est séparé $\Leftrightarrow \{0_M\}$ est une partie fermée de M .
- (ii) Soit $\overline{\{0_M\}}$ l'adhérence de $\{0_M\}$ dans M . Le quotient maximal séparé de M

$$M^{\text{sep}} := M / \overline{\{0_M\}}$$

est un A -module (lemme 9.5(iii)), que l'on munit de la topologie induite par M via la projection $\pi_M : M \rightarrow M^{\text{sep}}$. Montrer que M^{sep} est un A -module topologique séparé. Tout homomorphisme continu de A -modules topologiques $M \rightarrow M'$ avec M' séparé se factorise par π_M et une unique application A -linéaire continue $M^{\text{sep}} \rightarrow M'$.

(iii) Montrer que tout homomorphisme continu d'anneaux topologiques $A \rightarrow B$ avec B séparé se factorise à travers la projection $A \rightarrow A^{\text{sep}} := A / \overline{\{0_A\}}$ et un unique homomorphisme continu d'anneaux topologiques $A^{\text{sep}} \rightarrow B$.

Exercice 9.10. Soient A un anneau topologique, $\Lambda \neq \emptyset$ un ensemble, M un A -module, $M_\bullet := (M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ une famille de sous-groupes additifs de M .

(i) Supposons que M soit un A -module topologique et $M_\bullet$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0_M dans M . Montrer que :

- (a) pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ il existe $\nu \in \Lambda$ tel que $M_\nu \subset M_\mu \cap M_\lambda$.
- (b) Pour tout $x \in M$, tout $a \in A$ et tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage U de 0_A dans A et $\mu \in \Lambda$ tels que $(a + U) \cdot (x + M_\mu) \subset ax + M_\lambda$.

(ii) Réciproquement, supposons que la famille $M_\bullet$ vérifie les conditions (a) et (b) ci-dessus. Montrer qu'alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}_M$ sur M qui fait de ce dernier un A -module topologique, et pour laquelle $M_\bullet$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0_M . On appelle $\mathcal{T}_M$ la topologie définie par la famille $M_\bullet$.

(iii) En particulier, en déduire que si A est un anneau, une famille $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ non vide de sous-groupes additifs de A est un système fondamental de voisinages de 0_A pour un anneau topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- (a) pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ il existe $\nu \in \Lambda$ tel que $I_\nu \subset I_\lambda \cap I_\mu$.
- (b) Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $a, b \in A$ il existe $\mu \in \Lambda$ tel que

$$(a + I_\mu) \cdot (b + I_\mu) \subset ab + I_\lambda.$$

Remarque 9.11. (i) Si $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est une famille d'idéaux de A , la condition (b) de l'exercice 9.10(iii) est superflue, car elle est toujours vérifiée avec $\mu = \lambda$.

(ii) De même, dans la situation de l'exercice 9.10(ii), si le système fondamental $M_\bullet$ est formé de A -sous-modules de M , la condition (b) peut être remplacée par :

- (c) pour tous $x \in M$ et $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage $U \subset A$ de 0_A avec $Ux \subset M_\lambda$.

En effet, évidemment (b) $\Rightarrow$ (c), et si (c) est vérifiée, alors (b) est vérifiée avec $\mu = \lambda$.

Proposition 9.12. Soient A un anneau topologique, $(M, \mathcal{T}_M)$ un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de M , et P un A -module quelconque.

(i) Tout sous-groupe additif ouvert N de M est aussi une partie fermée, et tout sous-groupe N' de M qui contient N est aussi ouvert.

(ii) Si $f : P \rightarrow M$ est une application A -linéaire, la topologie $\mathcal{T}_P$ induite sur P par M via f est $\mathbb{Z}$ -linéaire, $(P, \mathcal{T}_P)$ est un A -module topologique, et $(f^{-1}M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de P , pour la topologie $\mathcal{T}_P$.

(iii) Si $f : M \rightarrow P$ est une surjection A -linéaire, la topologie $\mathcal{T}_P$ sur P induite par M via f est $\mathbb{Z}$ -linéaire, $(P, \mathcal{T}_P)$ est un A -module topologique, et $(f(M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de $(P, \mathcal{T}_P)$.

Démonstration. (i) : En effet, le complémentaire de N dans M est la partie ouverte $\bigcup_{x \in M \setminus N} (x + N)$. De même, on a $N' = \bigcup_{x \in N'} (x + N)$, d'où la deuxième assertion.

(ii) : La dernière assertion est claire. Or, avec l'exercice 9.10(ii), on vérifie aisément qu'il existe une unique topologie $\mathcal{T}'_P$ sur P telle que $(P, \mathcal{T}'_P)$ soit un A -module topologique, et $(f^{-1}M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ soit un système fondamental de voisinages ouvert de 0 dans P ; pour voir que $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}'_P$, il suffit de remarquer que si $\lambda \in \Lambda$, $x \in M$, et $y \in f^{-1}(x + M_\lambda)$, on a $f^{-1}(x + M_\lambda) = y + f^{-1}M_\lambda$.

(iii) : D'après le lemme 9.5, $(P, \mathcal{T}_P)$ est un A -module topologique, et l'application $f : (M, \mathcal{T}_M) \rightarrow (P, \mathcal{T}_P)$ est ouverte. Ainsi, $f(M_\lambda)$ est un sous-groupe ouvert de P , pour tout $\lambda \in \Lambda$. D'autre part, si $U \subset P$ est un voisinage ouvert de 0, alors $M_\lambda \subset f^{-1}U$ pour quelque $\lambda \in \Lambda$, d'où $f(M_\lambda) \subset U$; donc $(f(M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $(P, \mathcal{T}_P)$. $\square$

Exemple 9.13. (i) Les topologies linéaires les plus importantes pour nous s'obtiennent de la façon suivante. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal. Par la remarque 9.11(i), il existe une topologie linéaire unique $\mathcal{T}_{A,I}$ sur A telle que la famille d'idéaux

$$(I^n \mid n \in \mathbb{N})$$

soit un système fondamental de voisinages ouverts de 0. On appelle $\mathcal{T}_{A,I}$ la *topologie I -adique* de A ; si $I = At$ est un idéal principal, on l'appelle aussi *topologie t -adique*. On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur A est *adique*, si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{A,I}$ pour un idéal $I \subset A$.

(ii) De même, soit M un A -module, et munissons A de la topologie I -adique; d'après la remarque 9.11(ii), on a le système fondamental de sous-groupes ouverts

$$(I^n M \mid n \in \mathbb{N})$$

pour une unique topologie A -linéaire I -adique $\mathcal{T}_{M,I}$ sur M .

Remarque 9.14. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module muni de sa topologie I -adique $\mathcal{T}_{M,I}$, et $N \subset M$ un sous-module.

(i) On déduit sur N deux topologies : d'un côté, la topologie I -adique $\mathcal{T}_{N,I}$; de l'autre côté, la topologie $\mathcal{T}'_N$ induite par $\mathcal{T}_{M,I}$ via l'inclusion de N dans M . Noter que $I^n N \subset I^n M \cap N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; compte tenu de la proposition 9.12(ii), la topologie $\mathcal{T}_{N,I}$ est alors plus fine de $\mathcal{T}'_N$.

(ii) Si N est un sous-module *ouvert* de M , on a $\mathcal{T}_{N,I} = \mathcal{T}'_N$, car dans ce cas il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n M \subset N$, d'où $I^{n+k} M \subset I^k N \subset I^k M \subset N$ pour tout $k \geq n$.

Si N n'est pas un sous-module ouvert, la topologie $\mathcal{T}_{N,I}$ est souvent strictement plus fine que $\mathcal{T}'_N$. Par exemple, prenons $A := \mathbb{Z}$, muni de la topologie t -adique, pour un entier $t \neq \pm 1$; évidemment la topologie t -adique du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Q}$ est triviale, i.e. $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},t\mathbb{Z}} = \{\emptyset, \mathbb{Q}\}$, et induit sur son $\mathbb{Z}$ -sous-module $\mathbb{Z}$ la topologie triviale, qui est strictement moins fine que la topologie t -adique de $\mathbb{Z}$.

Toutefois, on verra plus tard que si A est noethérien et si M est de type fini, on a l'égalité $\mathcal{T}'_N = \mathcal{T}_{N,I}$ pour tout sous-module N de M (proposition 9.100).

(iii) D'autre part, si $f : M \rightarrow P$ est une surjection A -linéaire, la proposition 9.12(iii) implique que $\mathcal{T}_{M,I}$ induit sur P via f la topologie I -adique de P .

(iv) Si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ pour une suite finie de A -modules $M_1, \dots, M_k$, on a

$$(M, \mathcal{T}_{M,I}) = (M_1, \mathcal{T}_{M_1,I}) \times \cdots \times (M_k, \mathcal{T}_{M_k,I})$$

(voir l'exemple 2.20(iii) pour le produit de topologies). En effet, on voit aisément que la topologie du produit ci-dessus admet le système fondamental de sous-groupes ouverts $(I^n M = (I^n M_1) \oplus \cdots \oplus (I^n M_k) \mid n \in \mathbb{N})$.

Exercice 9.15. Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique dont la topologie $\mathcal{T}_M$ est $\mathbb{Z}$ -linéaire, et $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de M . Montrer que la topologie $\mathcal{T}_M$ est séparée si et seulement si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = 0$. En particulier, dans la situation de l'exemple 9.13(ii), la topologie I -adique de M est séparée si et seulement si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$.

Exemple 9.16. (i) Soit A un anneau ; la topologie T -adique de $A[T]$ est séparée.

(ii) Pour tout entier $t \neq \pm 1$, la topologie t -adique de $\mathbb{Z}$ est séparée.

(iii) Si A est un anneau local artinien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^k = 0$, donc la topologie $\mathfrak{m}$ -adique de A est séparée.

Exercice 9.17. Soient $A := \mathcal{C}([0, 1])$, $t \in [0, 1]$, et $\mathfrak{m}_t \subset A$, l'idéal maximal des fonctions continues qui s'annulent au point t . Montrer que $\mathfrak{m}_t^2 = \mathfrak{m}_t$, et en déduire que la topologie $\mathfrak{m}_t$ -adique de A n'est pas séparée.

9.1.1. *Parties bornées.* Pour tout anneau A et tout $S, T \subset A$ on notera

$$S + T := \{s + t \mid (s, t) \in S \times T\} \quad S \cdot T := \{st \mid (s, t) \in S \times T\}.$$

Définition 9.18. Soit A un anneau topologique, $S \subset A$ une partie, et $a \in A$.

(i) On dit que S est *bornée* si pour tout voisinage U de 0 dans A il existe un voisinage V de 0 dans A tel que $S \cdot V \subset U$.

(ii) Notons $S(0) := \{1\}$ et $S(n+1) := S \cdot S(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que S est à *puissances bornées* si la partie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(n)$ est bornée.

(iii) On dit que a est à *puissances bornées* s'il en est de même pour la partie $\{a\}$.

(iv) On dit que a est *topologiquement nilpotent* si pour tout voisinage $U \subset A$ de 0 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^k \in U$ pour tout $k \geq n$.

(v) On dénote par A° l'ensemble des éléments de A à puissances bornées, et par $A^{\circ\circ}$ l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A .

(vi) On dit que A est *analytique*, si l'idéal engendré par $A^{\circ\circ}$ est A .

Remarque 9.19. Soient A un anneau topologique, et $S_1, S_2 \subset A$ deux parties.

(i) Si S_1 et S_2 sont bornées, il en est de même pour $S_1 \cup S_2$ et $S_1 S_2$. En effet, cela est clair pour $S_1 \cup S_2$. Pour $S_1 S_2$, soit $U \subset A$ un voisinage de 0 ; par hypothèse on trouve des voisinages $V, W \subset A$ de 0 avec $S_1 V \subset U$ et $S_2 W \subset V$, d'où $S_1 S_2 W \subset U$.

(ii) Si S_1 et S_2 sont à puissances bornées, il en est de même pour $S_1 \cup S_2$. En effet, pour $i = 1, 2$ posons $S'_i := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_i(n)$ (notation de la définition 9.18(ii)) ; par définition, $S_1 \cup S_2$ est à puissances bornées si et seulement si la partie $S'_1 S'_2$ est bornée, donc l'assertion découle de (i).

(iii) Si S_1 est bornée (resp. à puissances bornées), il en est de même pour son adhérence $\overline{S}_1$ dans A . Pour la preuve, supposons d'abord que S_1 soit bornée, et soit $U \subset A$ un voisinage de 0 ; on choisit un voisinage $U' \subset A$ de 0 avec $U' + U' \subset U$, et par hypothèse on trouve un voisinage $V \subset A$ de 0 tel que $S_1 V \subset U'$, d'où $\overline{S}_1 V \subset \overline{U}'$, l'adhérence de U' dans A . Mais noter que $\overline{U}' \subset U' + U'$: en effet, si $x \in \overline{U}'$, on a $(x - U') \cap U' \neq \emptyset$, d'où $x \in U' + U'$. Il vient ainsi $\overline{S}_1 V \subset U$, et cela achève de montrer que $\overline{S}_1$ est bornée. Ensuite, supposons que S_1 soit à puissances bornées, et soit S'_1 comme dans (ii) ; par définition S'_1 est bornée, donc de même pour son adhérence $\overline{S}'_1$, par ce qui précède. Mais noter que $T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{S}_1(n) \subset \overline{S}'_1$, donc T est bornée, i.e. $\overline{S}_1$ est à puissances bornées.

Exercice 9.20. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, $a \in A$, et $n > 0$ un entier.

- (i) Montrer que $a \in A^{\circ\circ} \Leftrightarrow a^n \in A^{\circ\circ}$, et que $a \in A^\circ \Leftrightarrow a^n \in A^\circ$.
- (ii) Montrer que $A^{\circ\circ} \subset A^\circ$ et que $A^\circ \cdot A^{\circ\circ} \subset A^{\circ\circ}$.
- (iii) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu et ouvert d'anneaux topologiques, tel que $\mathcal{T}_A$ induit la topologie discrète sur $\text{Ker } f$. Montrer que $A^\circ = f^{-1}(B^\circ)$.

Exercice 9.21. Soit A un anneau topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire.

- (i) Soit $T \subset A$ une partie. Montrer que si T est bornée (resp. à puissances bornées), il en est de même pour le sous-groupe additif $\langle T \rangle \subset A$ engendré par T .
- (ii) Montrer que A° est la réunion *filtrante* de tous les sous-anneaux *bornés* de A . En particulier, A° est un sous-anneau de A .
- (iii) Montrer que A° est intégralement fermé dans A .
- (iv) Montrer que $A^{\circ\circ}$ est un idéal radical de A° .
- (v) On dit que A est *topologiquement local* si $A^{\circ\circ} \subset \mathcal{J}(A^\circ)$ (notation de la définition 1.48(i)). Soit $B \subset A$ un sous-anneau ouvert. Montrer que A est topologiquement local si et seulement s'il en est de même pour B .

Proposition 9.22. Soient A un anneau topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, et $B, B' \subset A$ deux sous-anneaux, munis des topologies induites par A . On a :

- (i) Si B est une partie bornée de A , alors la topologie de B est B -linéaire.
- (ii) Si B est une partie ouverte de A , et si la topologie de B est B -linéaire, alors B est borné dans A .
- (iii) Si B et B' sont des sous-anneaux ouverts et bornés dans A , et si la topologie de B est adique, il en est de même pour la topologie de B' .

Démonstration. (i) : Soit $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de A , de sorte que $(B \cap U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de B ; pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'idéal $I_\lambda \subset B$ engendré par $B \cap U_\lambda$ est alors une partie ouverte de B (proposition 9.12(ii)). Vérifions que $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de B . Cela revient à montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $I_\mu \subset B \cap U_\lambda$; mais puisque B est borné dans A , il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $U_\mu \cdot B \subset U_\lambda$, donc U_λ contient le sous-groupe additif $\langle U_\mu \cdot B \rangle$ engendré par $U_\mu \cdot B$, et évidemment $I_\mu \subset \langle U_\mu \cdot B \rangle$, d'où l'assertion.

(ii) : Soit $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ comme ci-dessus; il suffit de montrer que pour tout idéal ouvert $J \subset B$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $U_\lambda \cdot B \subset J$. Mais J est un voisinage de 0 dans A , car B est ouvert dans A ; donc il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $U_\lambda \subset J$, d'où l'assertion.

(iii) : Soit $I \subset B$ un idéal tel que la topologie de B est I -adique; puisque B' est ouvert dans A , il existe un entier $n > 0$ tel que $I^n \subset B'$; soit alors $J := I^n B'$. Montrons que la topologie de B' induite par l'inclusion dans A coïncide avec la topologie J -adique. En effet, soit $U \subset B'$ un voisinage de 0; comme U est aussi un voisinage de 0 dans A , il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que $I^{nm_1} \subset U$, et comme B' est borné dans A , il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que $I^{nm_2} \cdot B' \subset I^{nm_1}$, d'où $J^{m_2} \subset U$. Il est aussi clair que J^k est un idéal ouvert de B' , pour tout $k \in \mathbb{N}$; donc $(J^k \mid k \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de B , d'où l'assertion. $\square$

9.1.2. Topologie canonique des modules de type fini. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, M un A -module de type fini, $n \in \mathbb{N}$, et $\pi : A^n \rightarrow M$ une surjection A -linéaire; posons $(A, \mathcal{T}_A)^n := (A, \mathcal{T}_A) \times \cdots \times (A, \mathcal{T}_A)$, le produit de n copies de $(A, \mathcal{T}_A)$. Munissons M de la topologie $\mathcal{T}_M^A$ induite par $(A, \mathcal{T}_A)^n$ via π .

Lemme 9.23. (i) La topologie $\mathcal{T}_M^A$ est indépendante du choix de π .

(ii) $(M, \mathcal{T}_M^A)$ est un $(A, \mathcal{T}_A)$ -module topologique.

(iii) L'application $\pi : (A, \mathcal{T}_A)^n \rightarrow (M, \mathcal{T}_M^A)$ est ouverte.

Démonstration. (i) : Soient $\pi' : A^m \rightarrow M$ une autre surjection A -linéaire, et $\mathcal{T}_M'$ la topologie de M induite par $(A, \mathcal{T}_A)^m$ via π' . Notons par $\pi'' : A^{n+m} = A^n \oplus A^m \rightarrow M$

la surjection A -linéaire qui coïncide avec π sur le facteur direct $A^n \oplus 0 \simeq A^n$, et avec π' sur le facteur direct $0 \oplus A^m \simeq A^m$. Il suffit de vérifier que $\mathcal{T}_M^A$ et $\mathcal{T}'_M$ coïncident avec la topologie $\mathcal{T}''_M$ de M induite par $(A, \mathcal{T}_A)^{n+m}$ via π'' . Ainsi, on est ramené à comparer $\mathcal{T}_M^A$ et $\mathcal{T}''_M$. Or, soit $e_1, \dots, e_{n+m}$ la base canonique de A^{n+m} , et pour tout $i = 1, \dots, m$ choisissons $f_i \in A^n$ tel que $\pi''(f_i, \underline{0}) = \pi(f_i) = \pi''(e_{i+n})$ (ici $\underline{0} := (0, \dots, 0) \in A^m$). On considère l'automorphisme A -linéaire

$$\omega : A^{n+m} \xrightarrow{\sim} A^{n+m} \quad e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{pour } j = 1, \dots, n \\ e_j - (f_{j-n}, \underline{0}) & \text{pour } j = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Evidemment ω est un automorphisme du A -module topologique $(A, \mathcal{T}_A)^{n+m}$, et la restriction à $A^n \oplus 0$ de $\pi'' \circ \omega$ coïncide toujours avec π . Quitte à remplacer π'' avec $\pi'' \circ \omega$, on peut alors supposer que $0 \oplus A^m \subset \text{Ker } \pi''$. Soit $U \subset M$ une partie; il vient $U \in \mathcal{T}_M^A \Leftrightarrow \pi^{-1}U$ est une partie ouverte de $(A, \mathcal{T}_A)^n \Leftrightarrow (\pi^{-1}U) \times A^m = \pi''^{-1}U$ est une partie ouverte de $(A, \mathcal{T}_A)^{n+m} \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}''_M$, d'où l'assertion.

(ii,iii) : On voit aussitôt que $(A, \mathcal{T}_A)^n$ est un A -module topologique; les assertions découlent alors du lemme 9.5(i,ii). $\square$

Définition 9.24. Dans la situation du §9.1.2, on appelle $\mathcal{T}_M^A$ la *topologie canonique* du A -module de type fini M .

Proposition 9.25. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, $M_1, \dots, M_k$ une suite finie de A -modules de type fini, et $(N, \mathcal{T}_N)$ un A -module topologique; soit aussi $\beta : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow N$ une application A -multilinéaire. Alors on a :

(i) La topologie canonique du A -module $M_1 \times \dots \times M_k$ est le produit des topologies canoniques $\mathcal{T}_{M_1}^A, \dots, \mathcal{T}_{M_k}^A$.

(ii) β est une application continue $(M_1, \mathcal{T}_{M_1}^A) \times \dots \times (M_k, \mathcal{T}_{M_k}^A) \rightarrow (N, \mathcal{T}_N)$.

Démonstration. (i) : Par récurrence sur k , on est ramené au cas où $k = 2$, pour lequel l'assertion découle de l'observation 9.6.

(ii) : Choisissons des surjections A -linéaires $\pi_i : A^{n_i} \rightarrow M_i$ pour $i = 1, \dots, k$; soient $n := \sum_{i=1}^k n_i$, et $\beta' := \beta \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_k)$. On voit aisément que $\beta' : (A, \mathcal{T}_A)^n \rightarrow (N, \mathcal{T}_N)$ est une application continue (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Or, soit $U \in \mathcal{T}_N$; alors $\beta'^{-1}U = (\pi_1 \times \dots \times \pi_k)(\beta'^{-1}U)$ est ouverte dans $M_1 \times \dots \times M_k$, car $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$ est une application ouverte (lemme 9.23(iii)). $\square$

Corollaire 9.26. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, M et N deux A -modules de type fini, $f : M \rightarrow N$ une surjection A -linéaire, et $I \subset A$ un idéal. Alors on a :

(i) $f : (M, \mathcal{T}_M^A) \rightarrow (N, \mathcal{T}_N^A)$ est une application continue et ouverte.

(ii) Si la topologie $\mathcal{T}_A$ est $\mathbb{Z}$ -linéaire (resp. I -adique), il en est de même pour $\mathcal{T}_M^A$.

Démonstration. (i) : La continuité de f découle du lemme 9.23(ii) et de la proposition 9.25(ii). Soit $\pi : A^n \rightarrow M$ la surjection A -linéaire choisie au §9.1.2; pour voir que f est ouverte, il suffit de vérifier que $f \circ \pi : A^n \rightarrow N$ est ouverte. Mais $f \circ \pi$ est surjective, donc l'assertion découle du lemme 9.23(i,iii).

(ii) suit aussitôt de la proposition 9.12(iii). $\square$

Remarque 9.27. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, B une A -algèbre finie, et munissons le A -module sous-jacent à B de sa topologie canonique $\mathcal{T}_B^A$. On déduit aussitôt de la proposition 9.25(ii) que $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est une A -algèbre topologique; en outre, si $I \subset A$ est un idéal, et si $\mathcal{T}_A$ est la topologie I -adique, alors $\mathcal{T}_B^A$ est la topologie IB -adique (corollaire 9.26(ii)).

Exercice 9.28. Dans la situation de la remarque 9.27, soit N un B -module de type fini, que l'on munit de sa topologie canonique $\mathcal{T}_N^B$ (relative à la topologie $\mathcal{T}_B^A$ de B); par restriction de scalaires, N est aussi un A -module de type fini, que l'on peut donc munir de la topologie canonique $\mathcal{T}_N^A$. Montrer que ces topologies coïncident.

9.2. Technique de complétion. On va maintenant développer les rudiments de l'analyse sur les modules topologiques :

Définition 9.29. Soient A un anneau topologique et M un A -module topologique.

(i) Un *filet* dans M est une famille $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'éléments de M , indexée par un ensemble partiellement ordonné *filtrant* $(\Lambda, \leq)$.

(ii) On dit qu'un filet $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dans M est *de Cauchy*, si pour tout voisinage U de 0 dans M il existe $\lambda \in \Lambda$ avec $x_\mu - x_\nu \in U$ pour tous $\mu, \nu \geq \lambda$.

(iii) On dit que deux filets $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $y_\bullet := (y_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ sont *équivalents* si pour tout voisinage U de 0 dans M il existe $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda' \in \Lambda'$ tels que $x_\mu - y_{\mu'} \in U$ pour tout $\mu \geq \lambda$ et tout $\mu' \geq \lambda'$. Dans ce cas, on écrit $x_\bullet \sim y_\bullet$.

(iv) On dit qu'un élément $l \in M$ est une *limite* du filet $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dans M , si $x_\bullet$ est équivalent au filet trivial $(l_\emptyset := l)$ indexé par l'ensemble partiellement ordonné $\{\emptyset\}$. Dans ce cas, on dit aussi que $x_\bullet$ converge vers l .

(v) On dit que M est un A -module topologique *complet*, si tout filet de Cauchy de M est convergent dans M . On dit que A est un anneau topologique *complet*, si A est un A -module topologique complet.

Remarque 9.30. Soient A et M comme dans la définition 9.29.

(i) Les filets dans M indexés par $(\mathbb{N}, \leq)$ sont appelés aussi *suites* dans M ; de même, une *suite de Cauchy* est un filet de Cauchy $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$.

(ii) La relation $\sim$ sur les filets *de Cauchy* de M est bien d'équivalence : en effet, plus précisément on voit qu'un filet $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est de Cauchy si et seulement si $x_\bullet \sim x_\bullet$. Ensuite, supposons que $x_\bullet \sim y_\bullet := (y_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$, et soit $U \subset M$ un voisinage de 0 ; alors $-U := \{-u \mid u \in U\}$ est aussi un voisinage de 0, donc il existe $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda' \in \Lambda'$ tels que $x_\mu - y_{\mu'} \in -U$ pour tous $\mu \geq \lambda$ et $\mu' \geq \lambda'$, i.e. $y_{\mu'} - x_\mu \in U$. Cela donne $y_\bullet \sim x_\bullet$. En dernier lieu, si l'on a $x_\bullet \sim y_\bullet \sim z_\bullet := (z_{\lambda''} \mid \lambda'' \in \Lambda'')$, soit $U' \subset M$ un voisinage de 0 avec $U' + U' := \{u + v \mid u, v \in U'\} \subset U$ (l'existence de U' suit de la continuité de l'addition de M) ; il existe $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda'_1 \in \Lambda'$ tels que $x_\mu - y_{\mu'} \in U'$ pour tous $\mu \geq \lambda$ et $\mu' \geq \lambda'_1$, et de même on trouve $\lambda'_2 \in \Lambda'$ et $\lambda'' \in \Lambda''$ tels que $y_{\mu'} - z_{\mu''} \in U'$ pour tous $\mu' \geq \lambda'_2$ et $\mu'' \geq \lambda''$. Prenons $\lambda' \in \Lambda'$ avec $\lambda' \geq \lambda'_1, \lambda'_2$; il vient $x_\mu - z_{\mu''} = (x_\mu - y_{\lambda'}) + (y_{\lambda'} - z_{\mu''}) \in U$ pour tous $\mu \geq \lambda$ et $\mu'' \geq \lambda''$, d'où $x_\bullet \sim z_\bullet$, CQFD.

(iii) Soient $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dans M , et $\Gamma \subset \Lambda$ une partie cofinale (voir l'exercice 2.35) ; alors $x_\bullet \sim (x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$: les détails sont confiés aux soins du lecteur.

(iv) Dans la situation de la définition 9.29(iv), il est clair que toute limite de $x_\bullet$ est un point de l'adhérence dans M de la partie $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

(v) Supposons de plus que la topologie de M soit séparée ; alors tout filet $x_\bullet$ dans M admet au plus une limite $l \in M$. En effet, soient $l, l' \in M$ deux limites de $x_\bullet$, et $U \subset M$ un voisinage de 0 ; noter que l'application

$$M \times M \rightarrow M \quad (z, z') \mapsto z - z'$$

est continue, donc il existe un voisinage U' de 0 dans M tel que $z - z' \in U$ pour tous $z, z' \in U'$. De l'autre côté, par hypothèse il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $l - x_\lambda, l' - x_\lambda \in U'$, d'où $l - l' \in U$. Comme U est arbitraire, il vient $l - l' = 0$.

(vi) Soient $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire continue de A -modules topologiques, et $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dans M . On voit aisément que le filet $f(x_\bullet) := (f(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est de Cauchy dans N , et si $y_\bullet := (y_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ est un autre filet dans M équivalent à $x_\bullet$, alors $f(x_\bullet) \sim f(y_\bullet)$. En particulier, si $x_\bullet$ converge vers $l \in M$, le filet $f(x_\bullet)$ converge vers $f(l)$. (D'autre part, si f est continue mais non A -linéaire, le filet $f(x_\bullet)$ n'est pas forcément de Cauchy : exercice !)

(vii) Supposons que M soit complet et séparé, et soit $N \subset M$ un sous-module, que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans M . Au vu de (iv), on voit aisément que N est complet (et séparé) si et seulement s'il est fermé dans M .

Exercice 9.31. Soient I une catégorie, A un anneau topologique, $M_\bullet : I \rightarrow A\text{-ModTop}$ et $B_\bullet : I \rightarrow \mathbb{Z}\text{-AlgTop}$ deux foncteurs ; supposons que M_i et B_i soient complets et séparés pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. Montrer que les limites M et B de $M_\bullet$ et respectivement $B_\bullet$ sont complets et séparés (voir l'exercice 9.4).

Problème 9.32. (Théorème de Baire) Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique *complet*, à *voisinages dénombrables* (définition 9.2(i.b)), et $(V_n \mid n \in \mathbb{N})$ une famille dénombrable de parties ouvertes et denses de M . Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est une partie dense de M .

Problème 9.33. (Théorème de l'application ouverte de Banach) Soient A un anneau topologique analytique, et M, N deux A -modules topologiques *complets*, *séparés*, et à *voisinages dénombrables*. Montrer que toute surjection continue A -linéaire $u : M \rightarrow N$ est ouverte. (Emprunté à [45, Th.1.1.9].)

Exemple 9.34. On voit aisément que tout filet convergent de M est de Cauchy. La réciproque est souvent fausse. En effet, reprenons les anneaux de l'exemple 9.16 :

(i) Dans $A[T]$ on a la suite de Cauchy $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ avec $x_n := \sum_{i=0}^n T^i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $A \neq 0$, cette suite ne converge pas dans $A[T]$, car si $P(T) \in A[T]$ est un polynôme de degré d , on a $x_n - P(T) \notin T^{d+2}A[T]$, pour tout $n \geq d+1$.

(ii) Dans $\mathbb{Z}$, muni de la topologie t -adique, avec $t \neq 0, 1, -1$, la suite $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ avec $a_n := \sum_{i=0}^n t^i$ est de Cauchy, mais on voit qu'elle ne converge pas, en raisonnant de manière analogue au cas précédent.

(iii) Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local artinien, la topologie $\mathfrak{m}$ -adique de A est trivialement complète, car on sait que $\mathfrak{m}^k = 0$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$, donc toute suite de Cauchy $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ est *stationnaire*, i.e. on a $n \in \mathbb{N}$ avec $a_i = a_n$ pour tout $i \geq n$.

Exercice 9.35. Si un filet de Cauchy $x_\bullet$ dans M ne converge pas, on peut essayer d'inclure M dans un A -module topologique M' contenant une limite de $x_\bullet$; e.g. :

(i) Soit $x_\bullet$ la suite de Cauchy dans $A[T]$ de l'exemple 9.34(i) ; on munit l'anneau $B := A[T, 1/(1-T)]$ de sa topologie T -adique. Montrer que la topologie de B est séparée et induit la topologie T -adique sur A , via l'inclusion $A \subset B$; en outre, la suite $x_\bullet$ converge dans B vers $1/(1-T)$.

(ii) De même, montrer que la suite $a_\bullet$ dans $\mathbb{Z}$ de l'exemple 9.34(ii) converge dans l'anneau topologique séparé $\mathbb{Z}[1/(1-t)]$, muni de la topologie t -adique, et l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[1/(1-t)]$ induit sur $\mathbb{Z}$ la topologie t -adique.

Problème 9.36. (i) Trouver un anneau topologique A dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, séparée et *non discrète*, et tel que *toute suite de Cauchy de A est stationnaire*. (Voir aussi la remarque 9.59(ii).)

(ii) Soit A comme dans (i) ci-dessus, et $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de A . Montrer que la cardinalité de Λ est $> \aleph_0$.

Remarque 9.37. (i) Le problème 9.36 montre que les topologies linéaires à voisinages non dénombrables sont, en général, assez exotiques, et peuvent exhiber des propriétés contre-intuitives : pour leur étude, les suites de Cauchy ne suffisent pas, et cela a motivé l'introduction de la notion plus générale de filet de Cauchy. D'autre part, notre cours s'intéressera surtout aux topologies adiques (exemple 9.13), ou aux topologies qui se déduisent d'une topologie adique (remarque 9.14).

(ii) Soit M un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, définie par une famille de sous-groupes $(M_n \mid n \in \mathbb{N})$; comme expliqué dans la solution du problème 9.36, on peut même supposer que $M_\bullet$ soit une *suite descendante* :

$$M_{n+1} \subset M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Soient M un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, et $\mathcal{N}$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de M . Noter que $\mathcal{N}$ est *cofiltrant* pour

la relation d'ordre induite par l'inclusion de sous-groupes : $N \leq N'$ si et seulement si $N \subset N'$, pour tous $N, N' \in \mathcal{N}$. Or, soit $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dans M , de sorte que pour tout $N \in \mathcal{N}$ il existe $\lambda(N) \in \Lambda$ avec $x_\lambda - x_\mu \in N$ pour tous $\lambda, \mu \geq \lambda(N)$. Alors $x_\bullet^* := (x_{\lambda(N)} \mid N \in \mathcal{N}^{\text{op}})$ est un filet de Cauchy : en effet, pour tous $N, N', N'' \in \mathcal{N}$ avec $N', N'' \subset N$, soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda \geq \lambda(N'), \lambda(N'')$; il vient $x_{\lambda(N')} - x_{\lambda(N'')} = (x_{\lambda(N')} - x_\lambda) + (x_\lambda - x_{\lambda(N'')}) \in N' + N'' \subset N$, d'où l'assertion. De plus $x_\bullet^* \sim x_\bullet$: car, pour tous $N, N' \in \mathcal{N}$ avec $N' \subset N$ et tout $\lambda \geq \lambda(N)$ on a $x_{\lambda(N')} - x_\lambda = (x_{\lambda(N')} - x_{\lambda(N)}) + (x_{\lambda(N)} - x_\lambda) \in N' + N = N$. Donc, *tout filet de Cauchy dans M est équivalent à un filet indexé par $\mathcal{N}^{\text{op}}$* .

(iv) Avec (ii) et (iii), on voit que si la topologie de M est $\mathbb{Z}$ -linéaire et à voisinages dénombrables, tout filet de Cauchy dans M est équivalent à une suite de Cauchy.

On utilisera les opérations suivantes sur les filets de Cauchy. Si $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $y_\bullet := (y_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda')$ sont deux filets de Cauchy dans M , et $a \in A$, posons :

$$x_\bullet + y_\bullet := (x_\lambda + y_{\lambda'} \mid (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda') \quad \text{et} \quad a \cdot x_\bullet := (ax_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

et munissons $\Lambda \times \Lambda'$ de l'ordre partiel tel que $(\lambda, \lambda') \leq (\mu, \mu')$ si et seulement si $\lambda \leq \lambda'$ et $\mu \leq \mu'$, pour tous $(\lambda, \lambda'), (\mu, \mu') \in \Lambda \times \Lambda'$. On vérifie aisément que $x_\bullet + y_\bullet$ et $a \cdot x_\bullet$ sont des filets de Cauchy : pour $x_\bullet + y_\bullet$, l'assertion est immédiate, et pour $a \cdot x_\bullet$ on invoque la remarque 9.30(vi) avec $f : M \rightarrow M$ la multiplication scalaire par a , qui est un endomorphisme continu de M .

Remarque 9.38. (i) Avec la notation ci-dessus, si $\Lambda \neq \Lambda'$, on a $\Lambda \times \Lambda' \neq \Lambda' \times \Lambda$, donc $x_\bullet + y_\bullet \neq y_\bullet + x_\bullet$. Toutefois, la bijection évidente $\Lambda \times \Lambda' \xrightarrow{\sim} \Lambda' \times \Lambda : (\lambda, \lambda') \mapsto (\lambda', \lambda)$ est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés, donc $x_\bullet + y_\bullet \sim y_\bullet + x_\bullet$ (notation de la définition 9.29(iii)).

(ii) Si $\Lambda = \Lambda'$, noter que la diagonale $\Delta := \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une partie cofinale de $\Lambda \times \Lambda$, donc $x_\bullet + y_\bullet \sim (x_\lambda + y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, d'après la remarque 9.30(iii).

(iii) De plus, si $x'_\bullet$ et $y'_\bullet$ sont deux autres filets de Cauchy dans M avec $x_\bullet \sim x'_\bullet$ et $y_\bullet \sim y'_\bullet$, alors $a \cdot x_\bullet \sim a \cdot x'_\bullet$ et $x_\bullet + y_\bullet \sim x'_\bullet + y'_\bullet$.

La prochaine étape est la construction de la complétion de M , empruntée à l'analyse, et formalisée par le théorème suivant :

Théorème 9.39. (i) Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire. Alors, il existe un couple

$$(\widehat{M}, j_M)$$

formé d'un A -module topologique $\widehat{M}$ complet et séparé pour une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire, et un homomorphisme continu $j_M : M \rightarrow \widehat{M}$ de A -modules, appelé application de complétion, caractérisés à isomorphisme unique près par la propriété suivante :

— Tout homomorphisme continu $f : M \rightarrow P$ de A -modules topologiques avec P complet et séparé pour une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire se factorise à travers j_M :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & P \\ j_M \downarrow & \nearrow \widehat{f} & \\ \widehat{M} & & \end{array}$$

pour une unique application A -linéaire et continue $\widehat{f}$.

(ii) $j_M(M)$ est dense dans $\widehat{M}$, et la topologie de M est induite par $\widehat{M}$, via j_M .

Démonstration. On souhaiterait définir $\widehat{M}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des filets de Cauchy de M , mais cela se heurte à des difficultés logiques, car ces classes d'équivalence ne sont pas des ensembles. On considère alors plutôt l'ensemble $\mathcal{C}_M$ des

filets de Cauchy de M indexés par $\mathcal{N}^{\text{op}}$, où $\mathcal{N}$ dénote un système fondamental de sous-groupes ouverts de M ; d'après la remarque 9.37(iii), tout filet de Cauchy $x_{\bullet} := (x_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ de M est équivalent à un élément de $\mathcal{C}_M$, donc sa classe d'équivalence $[x_{\bullet}]$ est bien définie dans le quotient :

$$\widehat{M} := \mathcal{C}_M / \sim.$$

En outre, compte tenu de la remarque 9.38(i,iii), on voit que $\widehat{M}$ est muni d'une structure de A -module telle que $[x_{\bullet}] + [y_{\bullet}] := [x_{\bullet} + y_{\bullet}]$ et $a \cdot [x_{\bullet}] := [a \cdot x_{\bullet}]$ pour tous $x_{\bullet}, y_{\bullet} \in \mathcal{C}_M$ et tout $a \in A$. On a une application naturelle $j_M : M \rightarrow \widehat{M}$ qui associe à tout $x \in M$ la classe du filet trivial ($x_{\varnothing} := x$) indexé par $\{\varnothing\}$. Pour tout sous-groupe additif ouvert $N \subset M$ on considère le sous-groupe additif

$$\widehat{N} \subset \widehat{M}$$

des classes des filets de Cauchy $z_{\bullet} := (z_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$ tels que $z_{\gamma} \in N$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Affirmation 9.40. Pour tout sous-groupe additif ouvert $N \subset M$ on a :

- (i) $[x_{\bullet}] \in \widehat{N} \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x_{\mu} \in N$ pour tout $\mu \geq \lambda$.
- (ii) $N = j_M^{-1}(\widehat{N})$.

Preuve : (i) : La condition est suffisante, par la remarque 9.30(iii). Réciproquement, soit $x_{\bullet} \sim z_{\bullet} := (z_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$ avec $z_{\gamma} \in N$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; alors il existe $\lambda \in \Lambda$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $x_{\mu} - z_{\nu} \in N$ pour tous $\mu \geq \lambda$ et $\nu \geq \gamma$, donc $x_{\mu} \in N$ pour $\mu \geq \lambda$.

(ii) : Cela découle aussitôt de (i). $\diamond$

• Vérifions que $(\widehat{N} \mid N \in \mathcal{N})$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour une (unique) topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}_{\widehat{M}}$ sur le A -module $\widehat{M}$. D'après l'exercice 9.10(ii), on doit exhiber pour tout $a \in A$, tout $N \in \mathcal{N}$ et tout filet de Cauchy $x_{\bullet} := (x_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ de M , un voisinage U de 0 dans A , et $N' \in \mathcal{N}$ tels que

$$(a + U) \cdot ([x_{\bullet}] + \widehat{N}') \subset [a \cdot x_{\bullet}] + \widehat{N}.$$

Or, soit $N' \in \mathcal{N}$ tel que $a \cdot N' \subset N$; quitte à remplacer Λ par une partie cofinale, on peut supposer que Λ admet un élément minimal λ_0 , et $x_{\lambda} \in x_{\lambda_0} + N'$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On peut alors choisir pour U un voisinage de 0 tel que $U \cdot (x_{\lambda_0} + N') \subset N$.

• Vérifions que $\mathcal{T}_{\widehat{M}}$ est séparée : soit $x_{\bullet} := (x_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dont la classe $[x_{\bullet}] \in \widehat{M}$ est dans $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} \widehat{N}$; il suffit de montrer que $[x_{\bullet}] = 0$. Mais d'après l'observation 9.40(i), l'hypothèse veut dire que pour tout $N \in \mathcal{N}$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x_{\mu} \in N$ pour tout $\mu \geq \lambda$; donc $x_{\bullet} \sim j_M(0)$, d'où l'assertion.

• Vérifions que $\mathcal{T}_{\widehat{M}}$ est complète : en effet, soit $[x_{\bullet}^{(\bullet)}] := ([x_{\bullet}^{(\lambda)}] \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dans $\widehat{M}$; donc, $[x_{\bullet}^{(\lambda)}]$ est la classe d'un filet de Cauchy $x_{\bullet}^{(\lambda)}$ de M , pour tout $\lambda \in \Lambda$. D'après la remarque 9.37(iii), on peut supposer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le filet $x_{\bullet}^{(\lambda)}$ soit indexé par l'ensemble filtrant $\mathcal{N}^{\text{op}}$, et que l'on a $x_{N'}^{(\lambda)} - x_{N''}^{(\lambda)} \in N$ pour tous $N, N', N'' \in \mathcal{N}$ avec $N', N'' \subset N$. De même, quitte à remplacer $[x_{\bullet}^{(\bullet)}]$ par un filet équivalent, on peut supposer que $\Lambda = \mathcal{N}$, et que l'on a $[x_{\bullet}^{(N')}] - [x_{\bullet}^{(N'')}] \in \widehat{N}$ pour tous N, N', N'' comme ci-dessus; d'après l'observation 9.40(i), cela revient à dire qu'il existe $P(N, N', N'') \in \mathcal{N}$ tel que $x_Q^{(N')} - x_Q^{(N'')} \in N$ pour tout $Q \in \mathcal{N}$ avec $Q \subset P(N, N', N'')$, et on peut supposer que $P(N, N', N'') \subset N' \cap N''$. Soit $z_{\bullet} := (z_N \mid N \in \mathcal{N})$ le filet avec $z_N := x_{P(N, N, N)}^{(N)}$ pour tout $N \in \mathcal{N}$. On écrit

$$z_{N'} - z_{N''} = (z_{N'} - x_{P(N, N', N'')}^{(N')}) + (x_{P(N, N', N'')}^{(N')} - x_{P(N, N', N'')}^{(N'')}) + (x_{P(N, N', N'')}^{(N'')} - z_{N''})$$

d'où $z_{N'} - z_{N''} \in N$ pour tous $N', N'' \subset N$. Cela montre que $z_{\bullet} \in \mathcal{C}_M$. De plus, pour tous $N, N' \in \mathcal{N}$ avec $N' \subset N$ on a :

$$z_{N'} - x_{N'}^{(N)} = (z_{N'} - x_{P(N, N', N)}^{(N')}) + (x_{P(N, N', N)}^{(N')} - x_{P(N, N', N)}^{(N)}) + (x_{P(N, N', N)}^{(N)} - x_{N'}^{(N)}) \in N$$

i.e. la classe de $z_\bullet - x_\bullet^{(N)}$ est dans $\widehat{N}$ pour tout $N \in \mathcal{N}$, et donc le filet $[x_\bullet^{(\bullet)}]$ converge vers la classe du filet de Cauchy $z_\bullet$, d'où l'assertion.

• Or, soit $f : M \rightarrow P$ une application A -linéaire continue vers un A -module P complet et séparé pour une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire; en vertu de la remarque 9.30(v,vi) on peut prolonger f en l'application

$$g : \mathcal{C}_M \rightarrow P \quad (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto \lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda)$$

qui se factorise à travers une application A -linéaire $\widehat{f} : \widehat{M} \rightarrow P$ telle que $\widehat{f} \circ j_M = f$. Vérifions que $\widehat{f}$ est continue; pour cela, on considère un sous-groupe ouvert $Q \subset P$, et il suffit de montrer que $\widehat{f}^{-1}Q$ est un voisinage de 0 dans $\widehat{M}$ (voir la remarque 9.3(ii)). Mais il existe $N \in \mathcal{N}$ tel que $N \subset f^{-1}Q$; par construction, il s'ensuit que $\widehat{f}(\widehat{N})$ est contenu dans l'adhérence de Q dans P ; d'autre part, Q est une partie fermée de P , d'après la proposition 9.12(i), donc $\widehat{f}(\widehat{N}) \subset Q$, d'où l'assertion.

• La continuité de j_M découle aussitôt de l'observation 9.40(ii). Pour voir que l'image de j_M est dense dans $\widehat{M}$, soient $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy de M , et $N \in \mathcal{N}$; ainsi, il existe $\lambda \in \Lambda$ tels que $x_\lambda - x_\mu \in N$ pour tout $\mu \geq \lambda$, et par suite $j_M(x_\lambda) \in [x_\bullet] + \widehat{N}$, d'où l'assertion. Cela achève de vérifier (ii).

• L'unicité du prolongement $\widehat{f}$ découle de (ii) et de l'exercice 1.26(iv). En dernier lieu, on voit comme d'habitude que le couple $(\widehat{M}, j_M)$ est caractérisé à isomorphisme unique près par sa propriété universelle. $\square$

Remarque 9.41. Soit $\mathcal{N}$ un système fondamental de sous-groupes ouverts de M ; en vertu de la remarque 9.37(iii), la cardinalité de $\widehat{M}$ est bornée par celle de $M^\mathcal{N}$. De plus, la topologie de $\widehat{M}$ est définie par la famille de sous-groupes $(\widehat{N} \mid N \in \mathcal{N})$.

Exercice 9.42. (i) Soient T un espace topologique, $Z \subset T$ une partie dense, U et V deux parties qui sont à la fois ouvertes et fermées dans T , et telles que $U \cap Z = V \cap Z$. Montrer que $U = V$.

(ii) Soient A, M et $(\widehat{M}, j_M)$ comme dans le théorème 9.39, et N, N' deux sous-groupes additifs ouverts de $\widehat{M}$ tels que $j_M^{-1}N = j_M^{-1}N'$. Dédurre de (i) que $N = N'$.

(iii) Dans la situation de (ii), soient $(Q, \mathcal{T}_Q)$ un A -module topologique avec topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}_Q$ complète et séparée, $f : M \rightarrow Q$ une application A -linéaire telle que $f(M)$ soit dense dans Q et la topologie de M soit induite par $\mathcal{T}_Q$ via f . Par le théorème 9.39(i), on a une unique application A -linéaire continue $\widehat{f} : \widehat{M} \rightarrow Q$ avec $\widehat{f} \circ j_M = f$; montrer que $\widehat{f}$ est un isomorphisme de A -modules topologiques.

Exercice 9.43. Soient A un anneau topologique, $((M_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I)$ une famille de A -modules topologiques dont les topologies $\mathcal{T}_i$ sont $\mathbb{Z}$ -linéaires, et on pose

$$(M, \mathcal{T}_M) := \prod_{i \in I} (M_i, \mathcal{T}_i).$$

D'après l'exercice 9.4(i), la topologie $\mathcal{T}_M$ est linéaire. Soient $(\widehat{M}, j_M : M \rightarrow \widehat{M})$ la complétion de M , et $(\widehat{M}_i, j_{M_i} : M_i \rightarrow \widehat{M}_i)$ la complétion de M_i pour tout $i \in I$; toujours en vertu de l'exercice 9.4(i), le produit $\prod_{i \in I} \widehat{M}_i$ est un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de A -modules topologiques

$$\psi : \widehat{M} \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \widehat{M}_i \quad \text{tel que} \quad \psi \circ j_M = \prod_{i \in I} j_{M_i}.$$

Corollaire 9.44. Soit $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fini de A -modules topologiques dont les topologies sont $\mathbb{Z}$ -linéaires, et notons par $j_\lambda : M_\lambda \rightarrow \widehat{M}_\lambda$ la complétion de M_λ , pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors, pour toute application A -multilinéaire continue $\phi : \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow P$

avec P complet et séparé pour une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire, il existe une unique application A -multilinéaire continue $\widehat{\phi}$ faisant commuter la diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda & \xrightarrow{\phi} & P \\ \Pi_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \downarrow & \nearrow \widehat{\phi} & \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \widehat{M}_\lambda & & \end{array}$$

Démonstration. L'assertion étant triviale si $\Lambda = \emptyset$, on supposera que $\Lambda \neq \emptyset$. Or, pour toute partie $\Delta \subsetneq \Lambda$ et tout $h_\bullet := (h_\lambda \mid \lambda \in \Delta) \in \prod_{\lambda \in \Delta} M_\lambda$, soit

$$i_{\Delta, h_\bullet} : \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} M_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

l'application telle que $i_{\Delta, h_\bullet}(k_\bullet) := (l_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ pour tout $k_\bullet := (k_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \Delta)$, où $l_\lambda := h_\lambda$ si $\lambda \in \Delta$, et $l_\lambda := k_\lambda$ si $\lambda \in \Lambda \setminus \Delta$. Montrons d'abord :

Affirmation 9.45. Pour toute application A -multilinéaire $\psi : \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow P$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) ψ est continue

(b) $\psi \circ i_{\Delta, h_\bullet}$ est continue en $(0, \dots, 0)$ pour tout $\Delta \subsetneq \Lambda$ et tout $h_\bullet \in \prod_{\lambda \in \Delta} M_\lambda$.

Preuve : Evidemment, toute telle application $i_{\Delta, h_\bullet}$ est continue, donc (a) $\Rightarrow$ (b). Pour la réciproque, soit $h_\bullet := (h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, et pour toute partie $\Delta \subsetneq \Lambda$ posons $i_\Delta := i_{\Delta, k_\bullet}$, avec $k_\bullet := (h_\lambda \mid \lambda \in \Delta)$; on voit aussitôt que :

$$\psi(h_\bullet + u_\bullet) = \psi(h_\bullet) + \sum_{\Delta \subsetneq \Lambda} \psi \circ i_\Delta(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \Delta) \quad \forall u_\bullet := (u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

et cela entraîne aisément que (b) $\Rightarrow$ (a) : les détails sont laissés au lecteur. $\diamond$

Or, l'unicité de $\widehat{\phi}$ est claire, car l'image de $\prod_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda$ est dense dans $\prod_{\lambda \in \Lambda} \widehat{M}_\lambda$ (exercices 1.26(iv) et 9.43). Pour l'existence de $\widehat{\phi}$, on se ramène aussitôt à exhiber pour tout $\mu \in \Lambda$ une application $\phi_\mu : \widehat{M}_\mu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda \rightarrow P$ continue et A -multilinéaire, telle que $\phi_\mu \circ (j_\mu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} Id_{M_\lambda}) = \phi$. Pour tout $h_\bullet \in \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda$, la composition $\phi_{h_\bullet} := \phi \circ i_{\Lambda \setminus \{\mu\}, h_\bullet} : M_\mu \rightarrow P$ est une application A -linéaire continue, qui par adjonction se factorise à travers j_μ et une unique application A -linéaire continue $\widehat{\phi}_{h_\bullet} : \widehat{M}_\mu \rightarrow P$; on pose :

$$\phi_\mu(x, h_\bullet) := \widehat{\phi}_{h_\bullet}(x) \quad \forall x \in \widehat{M}_\mu, \forall h_\bullet \in \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda.$$

Afin de vérifier que ϕ_μ est A -multilinéaire, soient

$$h_\bullet := (h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}) \in \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda \quad \nu \in \Lambda \setminus \{\mu\} \quad a \in A.$$

Posons $h'_\bullet := (h'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\})$, $h''_\bullet := (h''_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\})$ et $l_\bullet := (l_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\})$, avec $l_\lambda = h'_\lambda = h''_\lambda := h_\lambda$ si $\lambda \neq \nu$, et $h'_\nu := k$, $h''_\nu := h_\nu + h'_\nu$, $l_\nu := ah_\nu$. Puisque ϕ est A -multilinéaire, on a $\phi_{h''_\bullet} = \phi_{h_\bullet} + \phi_{h'_\bullet}$ et $\phi_{l_\bullet} = a\phi_{h_\bullet}$, d'où $\widehat{\phi}_{h''_\bullet} = \widehat{\phi}_{h_\bullet} + \widehat{\phi}_{h'_\bullet}$ et $\widehat{\phi}_{l_\bullet} = a\widehat{\phi}_{h_\bullet}$, de sorte que $\phi_\mu(x, h''_\bullet) = \phi_\mu(x, h_\bullet) + \phi_\mu(x, h'_\bullet)$ et $\phi_\mu(x, l_\bullet) = a\phi_\mu(x, h_\bullet)$, d'où l'assertion.

Ensuite, pour tout $x \in \widehat{M}_\mu$ soit aussi $\phi_{\mu, x} : \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda \rightarrow P$ l'application telle que $\phi_{\mu, x}(h_\bullet) := \phi_\mu(x, h_\bullet)$ pour tout $h_\bullet \in \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda$; afin de vérifier la continuité de ϕ_μ , par l'observation 9.45 et une simple récurrence sur la cardinalité c de Λ on se ramène à montrer que :

(a) ϕ_μ est continue en $(0, \dots, 0) \in \widehat{M}_\mu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda$

(b) Si $c \geq 2$, alors $\phi_{\mu, x}$ est continue en $(0, \dots, 0)$, pour tout $x \in \widehat{M}_\mu$.

Pour cela, pour tout sous-groupe additif ouvert N de M_μ soit $\widehat{N} \subset \widehat{M}_\mu$ comme dans la preuve du théorème 9.39, de sorte que $\widehat{N}$ est un sous-groupe ouvert de $\widehat{M}_\mu$, et $j_\mu(N)$ est une partie dense de $\widehat{N}$. Soit $V \subset P$ un sous-groupe ouvert; puisque ϕ est continue, il existe une famille $N_\bullet := (N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ telle que N_λ soit un sous-groupe ouvert de M_λ

pour chaque $\lambda \in \Lambda$, avec $\phi(\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \subset V$. Comme V est aussi une partie fermée de P , il vient alors $\phi_\mu(\widehat{N}_\mu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} N_\lambda) \subset V$, d'où (a).

En dernier lieu, soit $x \in \widehat{M}_\mu$ la classe d'un filet de Cauchy $(x_i | i \in I)$ de M_μ , et gardons $N_\bullet$ comme ci-dessus; soit $i \in I$ tel que $x_j - x_k \in N_\mu$ pour tous $j, k \in I$ avec $j, k \geq i$. Puisque ϕ est continue, il existe pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}$ un sous-groupe ouvert $N'_\lambda \subset N_\lambda$ tel que $\phi(\{x_i\} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} N'_\lambda) \subset V$. Par suite, $\phi(\{x_j\} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} N'_\lambda) \subset V$ pour tout $j \geq i$, et finalement $\phi_\mu(\{x\} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} N'_\lambda) \subset V$, d'où (b). $\square$

Exercice 9.46. Soient A un anneau topologique analytique, $(M_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ une famille finie de A -modules topologiques, et $\phi : \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow P$ une application A -multilinéaire à valeurs dans un A -module topologique P . Montrer que ϕ est continue $\Leftrightarrow \phi$ est continue en $(0, \dots, 0)$.

9.2.1. Complétion d'anneaux topologiques. Si la topologie de l'anneau A est $\mathbb{Z}$ -linéaire, on peut appliquer le corollaire 9.44 à $M = N := A$ et avec pour $\phi : A \times A \rightarrow A$ la multiplication de l'anneau A . Il en découle une opération A -bilinéaire $\widehat{A} \times \widehat{A} \rightarrow \widehat{A}$ qui munit $\widehat{A}$ d'une structure naturelle d'anneau topologique, telle que l'application de complétion $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ soit un homomorphisme continu d'anneaux.

De plus, si M est un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, on peut appliquer le corollaire 9.44 à la multiplication scalaire $A \times M \rightarrow M$, et on obtient une opération $\widehat{A} \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ qui définit une structure naturelle de $\widehat{A}$ -module topologique sur $\widehat{M}$: les détails seront laissés au lecteur.

Remarque 9.47. (i) Explicitement, si $a_\bullet := (a_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ et $b_\bullet := (b_{\lambda'} | \lambda' \in \Lambda')$ sont deux filets de Cauchy dans A , par inspection directe de la preuve du corollaire 9.44 on voit que $[a_\bullet] \cdot [b_\bullet]$ est la classe du filet de Cauchy $(a_\lambda b_{\lambda'} | (\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda')$. Si $\Lambda = \Lambda'$, la diagonale $\Delta := \{(\lambda, \lambda) | \lambda\}$ est cofinale dans $\Lambda \times \Lambda$, et donc $[a_\bullet] \cdot [b_\bullet]$ est aussi la classe de $(a_\lambda b_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ (remarque 9.30(iii)). De même, si $m_\bullet := (m_{\lambda''} | \lambda'' \in \Lambda'')$ est un filet de Cauchy dans M , le produit $[a_\bullet] \cdot [m_\bullet]$ est la classe de $(a_\lambda m_{\lambda''} | (\lambda, \lambda'') \in \Lambda \times \Lambda'')$ dans $\widehat{M}$.

(ii) Soient A un anneau topologique, M et N deux A -modules topologiques; on suppose que les topologies de A, M, N soient $\mathbb{Z}$ -linéaires, et on dénote $(\widehat{A}, j_A)$, $(\widehat{M}, j_M)$ et $(\widehat{N}, j_N)$ leurs respectives complétions. La propriété universelle de la complétion implique que toute application A -linéaire continue $f : M \rightarrow N$ induit une application $\widehat{A}$ -linéaire continue unique

$$\widehat{f} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{N} \quad \text{telle que} \quad \widehat{f} \circ j_M = j_N \circ f.$$

Explicitement, $\widehat{f}$ envoie la classe de tout filet de Cauchy $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ de M dans la classe du filet $(f(x_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$.

(iii) De même, si A et B sont deux anneaux topologiques dont les topologies sont $\mathbb{Z}$ -linéaires, tout homomorphisme continu d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ induit un homomorphisme continu d'anneaux complets

$$\widehat{\phi} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B} \quad \text{tel que} \quad \widehat{\phi} \circ j_A = j_B \circ \phi.$$

Exemple 9.48. (i) Soient A un anneau, $n > 0$ un entier, et munissons $B := A[T_1, \dots, T_n]$ de la topologie I -adique, où $I \subset B$ est l'idéal engendré par $T_1, \dots, T_n$. La complétion de B est (naturellement isomorphe à) l'anneau $A[[T_1, \dots, T_n]]$ des séries formelles de puissances à coefficients dans A (exercice!).

(ii) Soit $t > 1$ un entier, on munit $\mathbb{Z}$ de la topologie t -adique, et soit $\widehat{\mathbb{Z}}$ la complétion t -adique de $\mathbb{Z}$. On peut représenter $\widehat{\mathbb{Z}}$ comme l'anneau des séries formelles

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En effet, les sommes partielles de toute série $(*)$ donnent une suite $(\sum_{n=0}^k a_n t^n | k \in \mathbb{N})$ de Cauchy, et on voit aisément que toute suite de Cauchy est équivalente à une suite de

ce type. Avec cette notation, l'addition et la multiplication de deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n t^n$ sont définies comme dans $A[[T_1, \dots, T_n]]$: pour la somme on prend la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) t^n$, et le produit est $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n t^n$ avec $c_n := \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.49. (i) Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, et considérons une suite exacte courte de A -modules

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0.$$

Munissons M' et M'' des topologies induites par M via i et respectivement p . Montrer que la complétion de Σ est une suite exacte à gauche :

$$\widehat{\Sigma} \quad : \quad 0 \rightarrow \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{p}} \widehat{M''}$$

(voir la remarque 9.47(ii)), et en outre, la topologie de $\widehat{M'}$ est induite par $\widehat{M}$ via $\widehat{i}$.

(ii) Montrer aussi que $\widehat{i}(\widehat{M'})$ est l'adhérence de l'image de $i(M')$ dans $\widehat{M}$.

(iii) Si M' est un sous-module ouvert de M , montrer que $\widehat{i}$ identifie $\widehat{M'}$ avec un sous-module ouvert de $\widehat{M}$, et la complétion $M \rightarrow \widehat{M}$ induit un isomorphisme :

$$M/M' \xrightarrow{\sim} \widehat{M}/\widehat{M'}.$$

9.3. Complétion et limites inverses. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, M un A -module topologique dont la topologie est A -linéaire, et $\mathcal{N}$ un système fondamental de A -sous-modules de M . Pour tout $N \in \mathcal{N}$, la topologie de M induit via la projection $\pi_N : M \rightarrow M/N$ la topologie discrète $\mathcal{T}_{M/N}^d$ sur le quotient M/N , car $\pi_N^{-1}(\bar{x})$ est une partie ouverte de M , pour tout $\bar{x} \in M/N$ (voir l'exemple 1.20(iii)). De plus, pour tout $N' \in \mathcal{N}$ avec $N' \subset N$, la projection $\pi_{N'}$ se factorise à travers une application évidente $\pi_{N,N'} : M/N' \rightarrow M/N$, et la donnée $((M/N, \mathcal{T}_{M/N}^d) \mid N \in \mathcal{N}), \pi_{\bullet\bullet})$ est un système de A -modules topologiques indexé par l'ensemble cofiltrant $\mathcal{N}$ (voir l'exemple 2.23(i)); d'après l'exercice 9.4(i), le cône $(\pi_N \mid N \in \mathcal{N})$ induit un homomorphisme de A -modules topologiques

$$i_M : M \rightarrow (L, \mathcal{T}_L) := \lim_{N \in \mathcal{N}} (M/N, \mathcal{T}_N^d).$$

Si $(p_N : L \rightarrow M/N \mid N \in \mathcal{N})$ est le cône universel, $\mathcal{T}_L$ est la topologie A -linéaire définie par le système de sous-modules $(\text{Ker } p_N \mid N \in \mathcal{N})$. Soit aussi $j_M : M \rightarrow \widehat{M}$ l'application de complétion; par la remarque 9.41, la topologie de $\widehat{M}$ est A -linéaire, définie par le système de sous-modules $(\widehat{N} \mid N \in \mathcal{N})$, et chaque $\widehat{N}$ est aussi la complétion de N pour la topologie induite par M . Cela posé, on a :

Proposition 9.50. *Dans la situation ci-dessus, il existe un isomorphisme unique de A -modules topologiques*

$$\omega : \widehat{M} \xrightarrow{\sim} (L, \mathcal{T}_L) \quad \text{tel que} \quad \omega \circ j_M = i_M.$$

Démonstration. Toute topologie discrète est trivialement séparée et complète, ainsi L est complet et séparé (exercice 9.31); par suite il existe une unique application A -linéaire continue $\omega : \widehat{M} \rightarrow L$ avec $\omega \circ j_M = i_M$. Noter aussi que $i_M^{-1}(\text{Ker } p_N) = \text{Ker } \pi_N = N$ pour tout $N \in \mathcal{N}$, donc la topologie de M est induite par $\mathcal{T}_L$ via i_M (proposition 9.12(ii) et remarque 9.3(i)); d'après l'exercice 9.42(iii), il suffit alors de vérifier que $i_M(M)$ est dense dans L . Soit donc $x_\bullet := (x_N \mid N \in \mathcal{N}) \in L$; pour tout $N \in \mathcal{N}$ il vient $i_M(x_N) - x_\bullet \in \text{Ker } p_N$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 9.51. Soit A un anneau topologique dont la topologie est A -linéaire. La proposition 9.50 nous fournit un isomorphisme naturel de A -modules topologiques :

$$\omega : \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \lim_{I \in \mathcal{I}} A/I$$

où chaque quotient A/I est muni de sa topologie discrète $\mathcal{T}_{A/I}^d$. Mais $((A/I, \mathcal{T}_{A/I}^d) \mid I \in \mathcal{I})$ est aussi un système cofiltrant d'anneaux topologiques. Il s'ensuit aussitôt que ω est un isomorphisme d'anneaux topologiques.

Exemple 9.52. (i) Soient $A \neq 0$ un anneau, Σ un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre de Σ , i.e. une famille de parties de Σ soumise aux conditions suivantes : (a) pour tous $F, F' \in \mathcal{F}$, on a $F \cap F' \in \mathcal{F}$; (b) pour tous $F \subset F' \subset \Sigma$ avec $F \in \mathcal{F}$, on a $F' \in \mathcal{F}$. Munissons A de la topologie discrète, et $M := A^{(\Sigma)}$ de la topologie A -linéaire $\mathcal{T}_M$ définie par la famille de sous-modules $(A^{(F)} \mid F \in \mathcal{F})$ (on identifie naturellement $A^{(F)}$ avec un sous-module de $A^{(\Sigma)}$, pour tout $F \in \mathcal{F}$). Noter que $\mathcal{T}_M$ est séparée si et seulement si $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Noter aussi l'isomorphisme naturel de A -modules :

$$M/A^{(F)} \xrightarrow{\sim} A^{(\Sigma \setminus F)} \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

Pour $F' \subset F \subset \Sigma$, ces isomorphismes identifient la projection $M/A^{(F')} \rightarrow M/A^{(F)}$ avec l'application $\pi_{F, F'} : A^{(\Sigma \setminus F')} \rightarrow A^{(\Sigma \setminus F)} : (a_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \setminus F') \mapsto (a_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \setminus F)$. D'après la proposition 9.50, la complétion de M est alors naturellement isomorphe à la limite du système $((A^{(\Sigma \setminus F)} \mid F \in \mathcal{F}), \pi_{\bullet, \bullet})$. Si $\mathcal{T}_M$ est séparée, on voit aisément que cette limite est représentée par le sous-module L de A^Σ formé des suites $(a_\sigma \mid \sigma \in \Sigma)$ dont le Σ -support Λ (voir l'exemple 1.12(i)) vérifie la condition suivante : pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'ensemble $\Lambda \cap (\Sigma \setminus F)$ est fini : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(ii) Dans la situation de (i), supposons de plus que pour toute partie finie ou dénombrable $\Lambda \subset \Sigma$ il existe $F \in \mathcal{F}$ avec $F \cap \Lambda = \emptyset$. Alors $(M, \mathcal{T}_M)$ est complet et séparé. En effet, la condition entraîne que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, donc M est séparé. Pour vérifier la complétude de M , soit $a_\bullet := (a_\sigma \mid \sigma \in \Sigma) \in L$; si le Σ -support Λ de $a_\bullet$ n'est pas une partie finie, on trouve une partie dénombrable $\Lambda' \subset \Lambda$, et par hypothèse il existe $F \in \mathcal{F}$ avec $\Lambda' \cap F = \emptyset$. Mais alors $\Lambda' \subset \Lambda \cap (\Sigma \setminus F)$, et en particulier $\Lambda \cap (\Sigma \setminus F)$ n'est pas une partie finie, contradiction ; donc Λ est une partie finie de Σ , et ainsi $a_\bullet \in M$, d'où l'assertion.

Problème 9.53. Soient K un corps, $v : K \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation (avec $\Gamma = \Gamma_v$), et $(V, \mathfrak{m})$ son anneau de valuation. On pose $U_\gamma := \{x \in K \mid v(x) > \gamma\}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

(i) Montrer que le système de sous-groupes $(U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ définit une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}_K$ sur K , qu'on appellera la *v-topologie de K*. De même, la *v-topologie de V* est la topologie $\mathcal{T}_V$ induite par $\mathcal{T}_K$ sur V .

(ii) Soit $\mathcal{T}$ une topologie V -linéaire et séparée sur V ; montrer que $\mathcal{T}$ est soit la topologie discrète, soit la *v-topologie de V*. Montrer en outre que $(K, \mathcal{T}_K)$ et $(V, \mathcal{T}_V)$ sont topologiquement locaux (voir l'exercice 9.21(v)).

(iii) Soient $(\widehat{V}, \widehat{\mathcal{T}}_V)$ et $(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{T}}_K)$ les complétions de $(V, \mathcal{T}_V)$ et $(K, \mathcal{T}_K)$. Montrer que $\widehat{K}$ est un corps, et v admet un prolongement unique en une valuation $\widehat{v}$ de $\widehat{K}$:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{v} & \Gamma_\circ \\ j_K \downarrow & \nearrow \widehat{v} & \\ \widehat{K} & & \end{array}$$

En outre, $\widehat{V}$ s'identifie à l'anneau de valuation de $\widehat{v}$, et $\widehat{\mathcal{T}}_K$ est la $\widehat{v}$ -topologie de $\widehat{K}$.

(iv) Munissons $\mathfrak{m}$ de la topologie induite par l'inclusion dans V . Montrer que la complétion $\widehat{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\widehat{V}$, et que l'inclusion $V \rightarrow \widehat{V}$ induit un isomorphisme de corps résiduels : $k(\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} k(\widehat{\mathfrak{m}})$.

Exercice 9.54. Soient K un corps, $v : K \rightarrow \Gamma_\circ = \Gamma_{v_\circ}$ une valuation non triviale (définition 8.6(ii)), et munissons K de sa *v-topologie* $\mathcal{T}_K$ (problème 9.53).

(i) Soit E un K -espace vectoriel topologique séparé de dimension un (i.e. E est un $(K, \mathcal{T}_K)$ -module topologique). Montrer que toute application K -linéaire non nulle $\phi : K \rightarrow E$ est un isomorphisme de K -espaces vectoriels topologiques.

(ii) Soient E un K -espace vectoriel topologique, $H \subset E$ (resp. $L \subset E$) un K -sous-espace vectoriel de codimension un (resp. de dimension un, avec $H \cap L = 0$). On suppose que H soit une partie fermée de E , et on munit H et L des topologies induites par E , et $H \oplus L$ de la topologie du produit. Montrer que l'application $\psi : H \oplus L \rightarrow E : (h, l) \mapsto h + l$ est un isomorphisme de K -modules topologiques.

(iii) Supposons que la topologie $\mathcal{T}_K$ soit complète, et soit E un K -espace vectoriel topologique séparé de dimension finie n . Montrer que tout isomorphisme de K -espaces vectoriels $\omega : K^n \xrightarrow{\sim} E$ est un isomorphisme de K -modules topologiques.

(iv) Supposons que la topologie $\mathcal{T}_K$ soit complète, et soit E un K -espace vectoriel topologique séparé. Montrer que tout K -sous-espace vectoriel de dimension finie de E est une partie fermée de E .

Exemple 9.55. Pour tout nombre premier $p \in \mathbb{Z}$, soit $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation p -adique (voir l'exemple 7.41(i)); la v_p -topologie de son anneau de valuation $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ coïncide avec la topologie p -adique, et d'après le problème 9.53(iii), les complétions de $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ et de $\mathbb{Q}$ pour leurs v_p -topologies sont respectivement un anneau de valuation discrète et son corps des fractions, traditionnellement notés :

$$\mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_p.$$

Pour le théoricien des nombres, le corps valué $\mathbb{Q}_p$ revête la même importance que le corps ordonné $\mathbb{R}$, complétion de $\mathbb{Q}$ pour sa topologie (non linéaire) standard, engendrée par la famille des intervalles $]a, b[$, pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$.

Problème 9.56. (i) Avec la notation de l'exemple 9.55, munissons aussi $\mathbb{Z}$ de sa topologie p -adique $\mathcal{T}_p$, et soit $(\widehat{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathcal{T}}_p)$ la complétion de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_p)$. Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ induit un isomorphisme d'anneaux $\widehat{i} : \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$.

(ii) Soit $q > 1$ un entier tel que $\text{pgcd}(q, p) = \text{pgcd}(q, p - 1) = 1$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ l'équation $x^q = u$ admet une racine unique $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

(iii) Il est bien connu que le seul endomorphisme du corps $\mathbb{R}$ est l'identité (rappelons brièvement la preuve : soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un tel endomorphisme; comme tout élément de $\mathbb{Q}$ est fixé par ϕ , on est ramené à vérifier que ϕ respecte l'ordre de $\mathbb{R}$: si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a > b$, alors $\phi(a) > \phi(b)$. Mais si $a > b$ on a $a - b = c^2$ pour quelque $c \in \mathbb{R}$, donc $\phi(a) - \phi(b) = \phi(c)^2 > 0$, d'où l'assertion). Dédurre de (ii) qu'il en est de même pour les endomorphismes du corps $\mathbb{Q}_p$, pour tout premier p .

Exercice 9.57. (Lemme de Hensel) Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local dont la topologie $\mathfrak{m}$ -adique est complète et séparée, $k := A/\mathfrak{m}$, et $\pi : A[X] \rightarrow k[X]$ la projection naturelle. Soient aussi $F(X) \in A[X]$ et $g(X), h(X) \in k[X]$ des polynômes unitaires tels que $\pi(F) = g \cdot h$ et $\text{pgcd}(g, h) = 1$. Montrer qu'il existe des polynômes unitaires $G, H \in A[X]$ avec $F = G \cdot H$, $\pi(G) = g$ et $\pi(H) = h$.

Corollaire 9.58. Soit M un A -module topologique dont la topologie est A -linéaire et à voisinages dénombrables. Soit aussi

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de A -modules, et on munit M' et M'' des topologies induites via i et via p . Alors la suite induite d'homomorphismes de A -modules complets

$$(*) \quad 0 \rightarrow \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{p}} \widehat{M}'' \rightarrow 0$$

est exacte courte, et les topologies de $\widehat{M}'$ et $\widehat{M}''$ sont induites par $\widehat{M}$ via $\widehat{i}$ et $\widehat{p}$.

Démonstration. D'après la remarque 9.37(ii), la topologie de M est définie par une suite descendante de A -sous-modules $(M_n \mid n \in \mathbb{N})$, et par la proposition 9.50 on a un isomorphisme naturel ω de $\widehat{M}$ avec la limite inverse L du système $(M/M_n \mid n \in \mathbb{N})$. Comme les

familles

$$(M'_n := M' \cap i^{-1}(M_n) \mid n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad (M''_n := p(M_n) \mid n \in \mathbb{N})$$

définissent les topologies de M' et M'' (voir la proposition 9.12), on a de même des isomorphismes ω' de $\widehat{M'}$ avec la limite inverse L' du système $(M'/M'_n \mid n \in \mathbb{N})$ et ω'' de $\widehat{M''}$ avec la limite inverse du système $(M''/M''_n \mid n \in \mathbb{N})$. D'autre part, les applications i et p induisent une suite exacte courte de systèmes projectifs

$$0 \rightarrow (M'/M'_n \mid n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{i_\bullet} (M/M_n \mid n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{p_\bullet} (M''/M''_n \mid n \in \mathbb{N}) \rightarrow 0$$

(voir l'exercice 2.109(iii)). Comme les applications de transition $M'/M'_m \rightarrow M'/M'_n$ sont les projections évidentes pour tout $m \geq n$, la suite induite

$$(**) \quad 0 \rightarrow L' \xrightarrow{i_\infty} L \xrightarrow{p_\infty} L'' \rightarrow 0$$

est exacte courte (exercice 2.109(iv)). Pour montrer la première assertion, il suffit donc de remarquer que les isomorphismes ω , ω' et ω'' identifient la suite (*) avec la suite (**): les détails seront laissés aux soins du lecteur.

D'après l'exercice 9.49(i), la topologie de $\widehat{M'}$ est induite par $\widehat{M}$ via $\widehat{i}$; voici une preuve alternative: il suffit de vérifier que la topologie de L' est induite par L via i_∞ . Pour cela, on considère le diagramme commutatif à lignes exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{i_\infty} & L & \xrightarrow{p_\infty} & L'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow q'_n & & \downarrow q_n & & \downarrow q''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & M'/M'_n & \xrightarrow{i_n} & M/M_n & \xrightarrow{p_n} & M''/M''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les projections canoniques; la topologie de L est définie par $(\text{Ker } q_n \mid n \in \mathbb{N})$ et celle de L' est définie par $(\text{Ker } q'_n \mid n \in \mathbb{N})$. Mais on a

$$i_\infty^{-1}(\text{Ker } q_n) = \text{Ker } i_n \circ q'_n = \text{Ker } q'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où l'assertion. De même, la topologie de L'' est définie par $(\text{Ker } q''_n \mid n \in \mathbb{N})$, et si l'on applique le lemme du serpent au diagramme ci-dessus, on voit que

$$p_\infty(\text{Ker } q_n) = \text{Ker } q''_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Compte tenu de la proposition 9.12(iii), on conclut que la topologie de L'' est induite par celle de L , et donc la topologie de $\widehat{M''}$ est induite par celle de $\widehat{M}$. $\square$

Remarque 9.59. (i) Soient A un anneau topologique, $(M, \mathcal{T}_M)$ et $(M', \mathcal{T}_{M'})$ deux A -modules topologiques dont les topologies $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_{M'}$ sont $\mathbb{Z}$ -linéaires, et $f: M \rightarrow M'$ un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$. Supposons en outre que $\mathcal{T}_M$ soit à voisinages dénombrables; alors le corollaire 9.58 et l'exercice 9.49(i) entraînent aussitôt que la complétion $\widehat{f}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{M'}$ de f est un morphisme strict de $\widehat{A} - \text{ModTop}$.

(ii) Si en outre $\mathcal{T}_M$ est complète et séparée, tout sous-module $N \subset M$ est complet et séparé pour la topologie induite par M , et le corollaire 9.58 montre que M/N est de même complet et séparé pour la topologie induite par la projection $M \rightarrow M/N$. Si $\mathcal{T}_M$ n'est pas à voisinages dénombrables, M/N sera toujours séparé, mais pas forcément complet; voici un exemple que j'ai appris de O.Gabber:

Exemple 9.60. Soient $A_0 \neq 0$ un anneau, Λ l'ensemble des nombres ordinaux de cardinalité finie ou dénombrable (la cardinalité de Λ est $\aleph_1$), et $A := A_0[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$; pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $J_\lambda \subset A$ l'idéal engendré par $(X_\mu \mid \mu > \lambda)$. On munit A de la topologie définie par la famille d'idéaux $(J_\lambda^n \mid (\lambda, n) \in \Lambda \times \mathbb{N})$.

(i) L'anneau topologique A est évidemment séparé; montrons que A est aussi complet. En effet, A est le A_0 -module libre $A_0^{(\Sigma)}$, où Σ est l'ensemble des monômes unitaires des indéterminées $(X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$; autrement dit, Σ est l'ensemble des applications $\beta: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $\beta^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ est un ensemble fini. Noter que J_λ^n est engendré par les monômes

de la partie $\Sigma_{\lambda,n} := \Sigma \cap J_{\lambda}^n$, pour tout $(\lambda, n) \in \Lambda \times \mathbb{N}$; soit alors $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties $S \subset \Sigma$ telles qu'il existe $(\lambda, n) \in \Lambda \times \mathbb{N}$ avec $\Sigma_{\lambda,n} \subset S$. L'ensemble $\mathcal{F}$ vérifie les conditions (a) et (b) de l'exemple 9.52(i), et la topologie de A est définie par la famille de A_0 -sous-modules $(A_0^{(F)} \mid F \in \mathcal{F})$. D'après l'exemple 9.52(ii), il suffit alors de prouver que pour toute partie dénombrable $S \subset \Sigma$ il existe $\lambda \in \Lambda$ avec $S \cap \Sigma_{\lambda,1} = \emptyset$. Disons que $S = \{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ prenons $\lambda_n \in \Lambda$ tel que $\beta_n \in A_0[X_{\mu} \mid \mu \leq \lambda_n]$; alors $\lambda := \sup(\lambda_n \mid n \in \mathbb{N})$ convient : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(ii) Or, soit $I \subset A$ l'idéal engendré par $(X_{\lambda} - X_{\mu} \mid \lambda, \mu \in \Lambda)$; on a un isomorphisme naturel de A_0 -algèbres $A/I \xrightarrow{\sim} A_0[X]$, et on voit aussitôt que la projection $A \rightarrow A/I$ induit sur $A_0[X]$ la topologie X -adique, séparée mais non complète.

Corollaire 9.61. *Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module. Munissons A et M de leurs topologies I -adiques, et pour tout sous-module $N \subset M$, notons par $\widehat{N}$ la complétion de N pour la topologie induite par l'inclusion dans M . On a :*

(i) *Pour tout idéal $J \subset A$ ouvert et de type fini, l'inclusion $i : JM \rightarrow M$ induit une identification de A -modules topologiques $\widehat{JM} \xrightarrow{\sim} \widehat{JM}$, pour la topologie de $\widehat{JM}$ induite par l'inclusion dans $\widehat{M}$.*

(ii) *Si I est de type fini, la topologie du A -module $\widehat{M}$ est I -adique, et la complétion $M \rightarrow \widehat{M}$ induit un isomorphisme $M/I^n M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}/I^n \widehat{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Supposons que A soit complet et M séparé pour les topologies I -adiques; soit aussi $N \subset M$ un sous-module de type fini avec $N + IM = M$. Alors $N = M$.*

Démonstration. (i) : Soit $a_1, \dots, a_k \in A$ un système fini de générateurs de J . On munit M^k de sa topologie I -adique, et on considère l'application

$$\phi : M^k \rightarrow M \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_k x_k.$$

Comme $\phi(I^n M^k) = I^n JM$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi = i \circ \psi$ pour une surjection A -linéaire $\psi : M^k \rightarrow JM$ continue et ouverte pour la topologie I -adique de JM (remarque 9.3(ii,iii)). Donc, la topologie I -adique de JM est induite par celle de M^k via ψ ; en outre, elle est induite par l'inclusion dans M (remarque 9.14(ii)). D'après le corollaire 9.58, la complétion $\widehat{\psi} : \widehat{M^k} \rightarrow \widehat{JM}$ de ψ est encore surjective; aussi, $\widehat{i} : \widehat{JM} \rightarrow \widehat{M}$ est injective, et la topologie de $\widehat{JM}$ est induite par $\widehat{M}$ via $\widehat{i}$. Mais l'isomorphisme naturel $\widehat{M^k} \xrightarrow{\sim} (\widehat{M})^k$ (exercice 9.43 et remarque 9.14(iv)) identifie $\widehat{i} \circ \widehat{\psi} = \widehat{\phi}$ avec l'application

$$(\widehat{M})^k \rightarrow \widehat{M} \quad (y_1, \dots, y_k) \mapsto a_1 y_1 + \dots + a_k y_k.$$

Ainsi, l'image de $\widehat{i}$ est $\widehat{JM}$, d'où l'assertion.

(ii) : Soit $i_n : I^n M \rightarrow M$ l'inclusion; par (i), l'image de $\widehat{i}_n : \widehat{I^n M} \rightarrow \widehat{M}$ est $I^n \widehat{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(I^n \widehat{M} \mid n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de sous-modules ouverts de $\widehat{M}$ (remarque 9.41), d'où l'assertion, au vu de l'exercice 9.49(iii).

(iii) : Noter que l'on ne peut pas invoquer le corollaire 3.50, car on ne sait pas encore que M est de type fini. Soit $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs de N ; soit aussi $y \in M$. Par hypothèse, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $y - \sum_{i=1}^n a_i x_i \in IM$. On va exhiber par récurrence sur k des éléments $a_{k,1}, \dots, a_{k,n} \in A$ tels que :

$$y - \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i \in I^k M \quad \text{et} \quad a_{k+1,j} - a_{k,j} \in I^k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \dots, n$$

(avec $I^0 := A$). Pour cela, on fait d'abord $a_{0,i} := 0$ et $a_{1,i} := a_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Ensuite, soit $k > 0$, et supposons que l'on a déjà exhibé $a_{k,1}, \dots, a_{k,n} \in A$ tels que $a_{k,j} - a_{k-1,j} \in I^{k-1}$ pour tout $j = 1, \dots, n$, et $z := y - \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i \in I^k M$. Comme $I^k M = I^k(N + IM) = I^k N + I^{k+1} M$, il existe alors $b_1, \dots, b_n \in I^k$ tels que $z - \sum_{i=1}^n b_i x_i \in I^{k+1} M$, et on pose $a_{k+1,j} := a_{k,j} + b_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Pour tout $j = 1, \dots, n$ la suite $(a_{k,j} \mid k \in \mathbb{N})$ est de Cauchy dans A , et admet donc une limite $c_j \in A$; par construction, $y - \sum_{i=1}^n c_i x_i \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^k M = 0$, d'où $y \in N$. $\square$

Remarque 9.62. La partie (i) du corollaire 9.61 sera généralisée plus tard à tout idéal J , pourvu que A soit *noethérien* et M de *type fini* : voir le corollaire 9.114(ii).

Le résultat suivant est emprunté à l'article [29].

Proposition 9.63. *Soient A un anneau topologique, $(M, \mathcal{T})$ un A -module topologique complet et séparé, dont la topologie est A -linéaire, et $I \subset A$ un idéal tel que la topologie I -adique de M soit plus fine que $\mathcal{T}$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

- (a) $I^n M$ est une partie fermée de M pour la topologie $\mathcal{T}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) I est de type fini.

Alors M est complet et séparé pour la topologie I -adique.

Démonstration. Soit $(J_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de A -sous-modules ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$, et posons $N_{n,\lambda} := I^n M + J_\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Lambda$; la condition (a) revient à dire que $I^n M = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_{n,\lambda}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc l'application naturelle

$$\phi_n : M/I^n M \rightarrow \lim_{\lambda \in \Lambda} M/N_{n,\lambda}$$

est injective, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, la topologie I -adique $\mathcal{T}_{I,M}$ de M est séparé, car elle est plus fine que la topologie séparée $\mathcal{T}$, donc les deux applications

$$j_M : M \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} M/I^n M \quad \phi := \lim_{n \in \mathbb{N}} \phi_n : \lim_{n \in \mathbb{N}} M/I^n M \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\lambda \in \Lambda} M/N_{n,\lambda}$$

sont de même injectives (exercice 2.34(i)). D'autre part, soient

$$j'_M : M \rightarrow \lim_{\lambda \in \Lambda} M/J_\lambda \quad \psi_\lambda : M/J_\lambda \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} M/N_{n,\lambda}$$

les applications naturelles, et $\psi := \lim_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda$. Noter que l'isomorphisme naturel

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\lambda \in \Lambda} M/N_{n,\lambda} \xrightarrow{\sim} \lim_{\lambda \in \Lambda} \lim_{n \in \mathbb{N}} M/N_{n,\lambda}$$

de la proposition 2.57(ii) identifie $\phi \circ j_M$ avec $\psi \circ j'_M$. Puisque $\mathcal{T}_{I,M}$ est plus fine que $\mathcal{T}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_{n,\lambda} = J_\lambda$ pour tout $n \geq p$, donc ψ_λ est un isomorphisme, et par suite il en est de même pour ψ . Puisque la topologie $\mathcal{T}$ est complète et séparée, j'_M est un isomorphisme (proposition 9.50), ainsi finalement $\phi \circ j_M$ est un isomorphisme, donc de même pour j_M (car ϕ est injective), et l'assertion découle encore de la proposition 9.50.

Supposons ensuite que (b) soit vérifiée, et soit $a_1, \dots, a_r$ un système fini de générateurs de I . On sait déjà que $\mathcal{T}_{I,M}$ de M est séparée, donc il reste à vérifier que toute suite de Cauchy $x_\bullet := (x_n \mid n \in \mathbb{N})$ pour la topologie $\mathcal{T}_{I,M}$ converge vers un élément de M . Or, puisque $\mathcal{T}_{I,M}$ est plus fine que $\mathcal{T}$, la suite $x_\bullet$ est de Cauchy aussi pour la topologie $\mathcal{T}$, donc elle converge pour cette topologie vers un élément $x \in M$, et il suffit de vérifier que x est aussi une limite de $x_\bullet$ pour la topologie $\mathcal{T}_{I,M}$. Pour cela, on peut supposer que $x_n - x_m \in I^n M$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$; pour tout $\sigma := (j_1, \dots, j_r) \in \mathbb{N}^r$, posons

$$\delta(\sigma) := j_1 + \dots + j_r \quad \text{et} \quad a^\sigma := a_1^{j_1} \dots a_r^{j_r}.$$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}$ on trouve par récurrence un système $(y_{l,\sigma} \mid \sigma \in \delta^{-1}(k))$ d'éléments de M avec $y_{0,\sigma} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\sigma \in \delta^{-1}(k)$, et tels que :

$$x_{k+l} - x_k = \sum_{\sigma \in \delta^{-1}(k)} a^\sigma y_{l,\sigma} \quad \text{et} \quad y_{l',\sigma} - y_{l,\sigma} \in I^l M \quad \forall l' \geq l, \forall \sigma \in \mathbb{N}^r$$

(les détails sont confiés aux soins du lecteur). Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^r$, la suite $(y_{l,\sigma} \mid l \in \mathbb{N})$ converge alors pour la topologie $\mathcal{T}$ vers un élément $y_\sigma \in M$, et par construction il vient $x - x_k = \sum_{\sigma \in \delta^{-1}(k)} a^\sigma y_\sigma \in I^k M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion. $\square$

9.3.1. *Anneaux et modules filtrés.* Dans plusieurs questions, on rencontre la variante suivante de la situation considérée au début de la section 9.3. Soit d'abord $(G, +, 0)$ un groupe abélien quelconque; une *filtration (décroissante)* sur G est la donnée d'une famille $G_\bullet := (G_n \mid n \in \mathbb{Z})$ de sous-groupes de G avec $G_{n+1} \subset G_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On dira aussi que $(G, G_\bullet)$ est un *groupe filtré*, et on dénote :

$$\mathrm{gr}_n(G) := G_n / G_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}_\bullet(G) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{gr}_n(G).$$

On appelle $\mathrm{gr}_\bullet(G)$ le *groupe gradué associé* à $(G, G_\bullet)$. On dit que la filtration $G_\bullet$ est *exhaustive* (resp. *séparée*) si $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n = G$ (resp. si $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G_n = \{0\}$).

Soit $(H, H_\bullet)$ un deuxième groupe abélien filtré, et $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes; on dit que f est *filtré* si l'on a $f(G_n) \subset H_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Evidemment, un tel f induit des homomorphismes de groupes :

$$\mathrm{gr}_n(f) : \mathrm{gr}_n(G) \rightarrow \mathrm{gr}_n(H) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}_\bullet(f) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{gr}_n(f) : \mathrm{gr}_\bullet(G) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(H).$$

Définition 9.64. (i) Un *anneau filtré* est la donnée $(A, A_\bullet)$ d'un anneau A et d'une filtration $A_\bullet$ sur le groupe additif sous-jacent à A , telle que :

$$A_n \cdot A_m \subset A_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 1 \in A_0.$$

(ii) Soit $(A, A_\bullet)$ un anneau filtré. Un $(A, A_\bullet)$ -*module filtré* est la donnée $(M, M_\bullet)$ d'un A -module M et d'une filtration $M_\bullet$ sur le groupe additif de M , telle que

$$A_n \cdot M_m \subset M_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Un *morphisme d'anneaux filtrés* $f : (A, A_\bullet) \rightarrow (B, B_\bullet)$ est un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ qui est un homomorphisme filtré des groupes additifs sous-jacents $(A, +, 0) \rightarrow (B, +, 0)$. De même, un *morphisme* $u : (M, M_\bullet) \rightarrow (N, N_\bullet)$ de $(A, A_\bullet)$ -modules filtrés est une application A -linéaire $u : M \rightarrow N$ qui est un homomorphisme filtré des groupes additifs sous-jacents $(M, +, 0) \rightarrow (N, +, 0)$.

Soient maintenant $(A, A_\bullet)$ un anneau filtré, et $(M, M_\bullet)$ un $(A, A_\bullet)$ -module filtré; pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, la restriction $A_p \times M_q \rightarrow M_{p+q}$ de la loi de multiplication par scalaires induit une application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire bien définie :

$$\mu_{pq}^M : \mathrm{gr}_p(A) \times \mathrm{gr}_q(M) \rightarrow \mathrm{gr}_{p+q}(M) \quad (\bar{a}, \bar{m}) \mapsto \bar{a} \cdot \bar{m}$$

car si $a, a' \in A_p$ et $m, m' \in M_q$ sont deux couples d'éléments avec $a - a' \in A_{p+1}$ et $m - m' \in M_{q+1}$, il vient $am - a'm' = (a - a')m + a'(m - m') \in M_{p+q+1}$, i.e. la classe $\bar{a} \cdot \bar{m}$ de am dans $\mathrm{gr}_{p+q}(M)$ dépend seulement de la classe $\bar{a}$ de a dans $\mathrm{gr}_p(A)$ et de la classe $\bar{m}$ de m dans $\mathrm{gr}_q(M)$. En particulier, avec $(M, M_\bullet) = (A, A_\bullet)$, on obtient un système d'applications $(\mu_{p,q} : \mathrm{gr}_p(A) \times \mathrm{gr}_q(A) \rightarrow \mathrm{gr}_{p+q}(A) \mid p, q \in \mathbb{Z})$, dont la somme directe fournit la loi de multiplication

$$\mu_{\bullet\bullet}^A : \mathrm{gr}_\bullet(A) \times \mathrm{gr}_\bullet(A) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(A)$$

pour une structure d'anneau $\mathbb{Z}$ -gradué sur $\mathrm{gr}_\bullet(A)$ (voir §1.1.6). De même, la somme directe des μ_{pq}^M définit la loi de multiplication par scalaires

$$\mu_{\bullet\bullet}^M : \mathrm{gr}_\bullet(A) \times \mathrm{gr}_\bullet(M) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(M)$$

d'une structure de $\mathrm{gr}_\bullet(A)$ -module $\mathbb{Z}$ -gradué sur $\mathrm{gr}_\bullet(M)$. On appelle $\mathrm{gr}_\bullet(A)$ l'*anneau gradué associé* à la filtration $A_\bullet$, et $\mathrm{gr}_\bullet(M)$ le *module gradué associé* à $M_\bullet$.

Remarque 9.65. Soit $f : (A, A_\bullet) \rightarrow (B, B_\bullet)$ un morphisme d'anneaux filtrés; on voit aisément que $\mathrm{gr}_\bullet(f) : \mathrm{gr}_\bullet(A) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(B)$ est un homomorphisme d'anneaux gradués (voir §1.1.6). De même, tout morphisme $u : (M, M_\bullet) \rightarrow (N, N_\bullet)$ de $(A, A_\bullet)$ -modules filtrés induit un morphisme $\mathrm{gr}_\bullet(u) : \mathrm{gr}_\bullet(M) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(N)$ de $\mathrm{gr}_\bullet(A)$ -modules gradués.

Exemple 9.66. Soient A_0 un anneau, $n \in \mathbb{N}$, et $A := A_0[[X_1, \dots, X_n]]$, l'anneau des séries formelles à n indéterminées à coefficients dans A_0 ; soit aussi $I \subset A$ l'idéal engendré par $X_1, \dots, X_n$. Munissons A de sa *filtration I -adique* $A_\bullet$, avec $A_n := I^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $A_n := A$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Evidemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in A_n$ il existe un unique polynôme $f^* \in A_0[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré n tel que $f - f^* \in A_{n+1}$: i.e. f^* est la somme des termes de degré n de f . Il s'ensuit aussitôt que $\text{gr}_\bullet(A)$ est canoniquement isomorphe à l'anneau $A_0[X_1, \dots, X_n]$.

Remarque 9.67. (i) Soit $(A, A_\bullet)$ un anneau filtré dont la filtration $A_\bullet$ est exhaustive; ainsi, pour tous $a, b \in A$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a, b \in A_n$, et par suite $(a + A_p) \cdot (b + A_p) \subset ab + A_q$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et tout $p \geq \max(q - n, q/2)$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). D'après l'exercice 9.10(iii), $A_\bullet$ est alors un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour un unique anneau topologique $(A, \mathcal{T}_{A_\bullet})$; on appellera $\mathcal{T}_{A_\bullet}$ la *topologie induite par $A_\bullet$ sur A* .

(ii) Dans la situation de (i), soit aussi $(M, M_\bullet)$ un $(A, A_\bullet)$ -module filtré dont la filtration est exhaustive; de même, avec l'exercice 9.10(i) on voit aisément que $M_\bullet$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 d'un $(A, \mathcal{T}_{A_\bullet})$ -module topologique $(M, \mathcal{T}_{M_\bullet})$, et on dira que $\mathcal{T}_{M_\bullet}$ est la *topologie induite par $M_\bullet$ sur M* .

(iii) Dans la situation de (i) (resp. de (ii)), la topologie $\mathcal{T}_{A_\bullet}$ (resp. $\mathcal{T}_{M_\bullet}$) est séparée si et seulement si la filtration $A_\bullet$ (resp. $M_\bullet$) est séparée (exercice 9.15).

(iv) Avec la remarque 9.3(ii) et la proposition 9.12(i), on voit que tout morphisme d'anneaux filtrés $(A, A_\bullet) \rightarrow (B, B_\bullet)$ dont les filtrations sont exhaustives, est continu pour les respectives topologies induites $\mathcal{T}_{A_\bullet}$ et $\mathcal{T}_{B_\bullet}$; de même pour tout morphisme de $(A, A_\bullet)$ -modules filtrés avec filtrations exhaustives.

(v) Dans la situation de (i), soient $(\widehat{A}, \widehat{\mathcal{T}}_{A_\bullet})$ la complétion de l'anneau topologique $(A, \mathcal{T}_{A_\bullet})$, et $\widehat{A}_n$ l'adhérence de A_n dans $\widehat{A}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On voit aussitôt que $\widehat{A}_\bullet := (\widehat{A}_n | n \in \mathbb{Z})$ est une filtration exhaustive de $\widehat{A}$, et $(\widehat{A}, \widehat{A}_\bullet)$ est un anneau filtré; de plus, $\widehat{\mathcal{T}}_{A_\bullet}$ coïncide avec la topologie induite par $\widehat{A}_\bullet$ (remarque 9.41). De même, dans la situation de (ii), si $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}}_{M_\bullet})$ dénote la complétion de $(M, \mathcal{T}_{M_\bullet})$, et $\widehat{M}_n$ l'adhérence de M_n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\widehat{M}_\bullet := (\widehat{M}_n | n \in \mathbb{N})$ est une filtration exhaustive de $\widehat{M}$, et $(\widehat{M}, \widehat{M}_\bullet)$ est un $(\widehat{A}, \widehat{A}_\bullet)$ -module filtré; en outre, $\widehat{\mathcal{T}}_{M_\bullet}$ coïncide avec la topologie induite par $\widehat{M}_\bullet$. De plus, les complétions sont des morphismes

$$(A, A_\bullet) \rightarrow (\widehat{A}, \widehat{A}_\bullet) \quad \text{et} \quad (M, M_\bullet) \rightarrow (\widehat{M}, \widehat{M}_\bullet)$$

d'anneaux filtrés et respectivement de modules filtrés, induisant des isomorphismes des anneaux et modules gradués associés (voir l'exercice 9.49(iii)) :

$$\text{gr}_\bullet(A) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_\bullet(\widehat{A}) \quad \text{gr}_\bullet(M) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_\bullet(\widehat{M}).$$

Proposition 9.68. Soient $(A, A_\bullet)$ un anneau filtré, $(M, M_\bullet) \xrightarrow{u} (N, N_\bullet)$ un morphisme de $(A, A_\bullet)$ -modules filtrés, avec des filtrations exhaustives $A_\bullet, M_\bullet, N_\bullet$, et $\mathcal{T}_M$ (resp. $\mathcal{T}_N$) la topologie induite par $M_\bullet$ sur M (resp. par $N_\bullet$ sur N). Alors :

(i) $\text{gr}_\bullet(u)$ est injectif si et seulement si $u^{-1}(N_p) = M_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

(ii) Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :

(a) La topologie $\mathcal{T}_M$ est complète, et la filtration $N_\bullet$ est séparée.

(b) La topologie $\mathcal{T}_{N_\bullet}$ est discrète.

Alors $\text{gr}_\bullet(u)$ est surjectif si et seulement si $u(M_p) = N_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si la filtration $M_\bullet$ est séparée et si $\text{gr}_\bullet(u)$ est injectif, alors u est injectif.

(iv) Si la topologie $\mathcal{T}_{M_\bullet}$ est complète et séparée, si $\mathcal{T}_{N_\bullet}$ est séparée, et si $\text{gr}_\bullet(u)$ est bijectif, alors $u : (M, \mathcal{T}_{M_\bullet}) \rightarrow (N, \mathcal{T}_{N_\bullet})$ est un homéomorphisme.

Démonstration. (i) : Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, évidemment $\text{gr}_p(u)$ est injectif si et seulement si $M_p \cap u^{-1}(N_{p+1}) \subset M_{p+1}$. Donc, si $u^{-1}(N_p) = M_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'application $\text{gr}_\bullet(u)$

est injective. Réciproquement, si $\text{gr}_\bullet(u)$ est injectif, montrons que :

$$(*) \quad M_{p-k} \cap u^{-1}(N_{p+1}) \subset M_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}.$$

On raisonne par récurrence sur k : l'assertion pour $k = 0$ est déjà connue. Soit alors $k > 0$, et supposons que $M_{p-k+1} \cap u^{-1}(N_{p+1}) \subset M_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$; il vient

$$M_{p-k} \cap u^{-1}(N_{p+1}) = M_{p-k} \cap u^{-1}(N_p) \cap u^{-1}(N_{p+1}) \subset M_p \cap u^{-1}(N_{p+1}) \subset M_{p+1}$$

comme souhaité. Comme $M_\bullet$ est exhaustive, $(*)$ entraîne l'identité cherchée.

(ii) : Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, évidemment $\text{gr}_p(u)$ est surjectif si et seulement si $N_p = u(M_p) + N_{p+1}$. Donc, si $u(M_p) = N_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'application $\text{gr}_\bullet(u)$ est surjective. Réciproquement, supposons que $\text{gr}_\bullet(u)$ soit surjective, et soient $p \in \mathbb{Z}$ et $y \in N_p$; on va exhiber par récurrence sur q une suite $x_\bullet := (x_q \mid q \in \mathbb{N})$ avec :

$$x_q \in M_p \quad x_{q+1} - x_q \in M_{p+q} \quad u(x_q) - y \in N_{p+q} \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

On pose $x_0 := 0$; ensuite, soit $q > 0$, et supposons que l'on a déjà trouvé $x_0, \dots, x_{q-1}$ vérifiant les conditions ci-dessus. Il vient $u(x_{q-1}) - y \in u(M_{p+q-1}) + N_{p+q}$; i.e. il existe $z_q \in M_{p+q-1}$ avec $u(x_{q-1}) - y - u(z_q) \in N_{p+q}$. Ainsi, $x_q := x_{q-1} - z_q \in M_p$, $x_q - x_{q-1} \in M_{p+q-1}$, et $u(x_q) - y \in N_{p+q}$, comme souhaité. Or, si $\mathcal{T}_{N_\bullet}$ est la topologie discrète, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N_{p+q} = \{0\}$, d'où $u(x_q) = y$, et cela entraîne l'identité cherchée. En dernier lieu, si $M_\bullet$ induit une topologie complète sur M , et si $\mathcal{T}_{N_\bullet}$ est séparée, noter que $x_\bullet$ est une suite de Cauchy dans M_p ; d'autre part, M_p est une partie fermée de M (proposition 9.12(i)), donc $x_\bullet$ admet une limite $x \in M_p$ (remarque 9.30(iv)) ; ainsi, $u(x)$ est l'unique limite de la suite de Cauchy $u(x_\bullet) := (u(x_q) \mid q \in \mathbb{N})$ (remarques 9.30(vi) et 9.67(iv)). Mais par construction, y est une limite de $u(x_\bullet)$, donc $u(x) = y$, d'où encore l'identité cherchée.

(iii) : D'après (ii), si $\text{gr}_\bullet(u)$ est injectif, $\text{Ker } u \subset \bigcap_{p \in \mathbb{Z}} M_p$, d'où l'assertion.

(iv) : D'après (ii) et (iii), sous ces conditions u est bijectif, et $u(M_p) = N_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, donc l'application u est ouverte (remarque 9.3(iii)), d'où l'assertion. $\square$

Exercice 9.69. Soit $(A, A_\bullet)$ un anneau filtré dont la filtration $A_\bullet$ est exhaustive et séparée. Montrer que si $\text{gr}_\bullet(A)$ est un anneau intègre, il en est de même pour A .

9.4. Anneaux de Huber. La classe d'anneaux topologiques contemplée dans la définition suivante a été introduite par R.Huber dans [39].

Définition 9.70. Soit A un anneau topologique.

(i) On dit que A est un *anneau de Huber*, s'il existe un sous-anneau ouvert $A_0 \subset A$ et un idéal de type fini I_0 de A_0 tels que la topologie de A_0 induite par l'inclusion dans A coïncide avec la topologie I_0 -adique. Dans ce cas, on dit que A_0 est un *sous-anneau de définition* de A , et que I_0 est un *idéal de définition*.

(ii) A est un *anneau de Tate*, s'il est un anneau de Huber et si $A^\times \cap A^{\circ\circ} \neq \emptyset$.

(iii) Soient A, B deux anneaux de Huber, et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que f est *adique* s'il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A$ et $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et un idéal de définition $I_0 \subset A_0$ tel que $f(I_0)$ engendre un idéal de définition de B_0 (évidemment, f est alors une application continue).

Proposition 9.71. Soient A un anneau de Huber, $B \subset A$ un sous-anneau. Alors B est un sous-anneau de définition si et seulement s'il est ouvert et borné dans A .

Démonstration. Les deux conditions sont nécessaires, d'après la proposition 9.22(ii).

Réciproquement, soit B ouvert et borné dans A , et choisissons un sous-anneau de définition A_0 de A et un idéal de définition $I_0 \subset A_0$. Il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $I_0^n \subset B$, et la preuve de la proposition 9.22(iii) montre que la topologie $\mathcal{T}_B$ de B induite par l'inclusion dans A est J -adique, pour $J := I_0^n B$. Toutefois, J n'est pas forcément un idéal de type fini de B (sauf si $A_0 \subset B$) ; soient alors $T \subset A_0$ une partie finie engendrant

l'idéal I_0^n de A_0 , et $J' \subset B$ l'idéal engendré par T ; ainsi, $J' \subset J$ et $J^2 = J'I_0^n \subset J'$, donc $\mathcal{T}_B$ est aussi la topologie J' -adique. $\square$

Corollaire 9.72. *Soit A un anneau de Huber. On a :*

- (i) *Si A_0 et A_1 sont des sous-anneaux de définition de A , il en est de même pour $A_0 \cap A_1$ et pour $\langle A_0 A_1 \rangle$ (notation de l'exercice 9.21(i)).*
- (ii) *Soient $B \subset C$ deux sous-anneaux de A , avec B borné et C ouvert dans A . Alors il existe un sous-anneau de définition A_0 de A avec $B \subset A_0 \subset C$.*
- (iii) *A° est la réunion filtrante de tous les sous-anneaux de définition de A .*
- (iv) *La topologie de A est adique si et seulement si A est borné (dans lui-même).*

Démonstration. (i) : L'assertion pour $A_0 \cap A_1$ suit aussitôt de la proposition 9.71. Ensuite, la remarque 9.19(i) et l'exercice 9.21(i) montrent que $\langle A_1 A_2 \rangle$ est une partie bornée de A , et elle est ouverte dans A , d'après la proposition 9.12(i); donc $\langle A_1 A_2 \rangle$ est un sous-anneau de définition, encore par la proposition 9.71.

(ii) : Soit $A_1 \subset A$ un sous-anneau de définition; d'après la proposition 9.71, le sous-anneau $C_1 := A_1 \cap C$ est de définition pour A . Prenons $A_0 := \langle B C_1 \rangle$. On voit comme ci-dessus que A_0 est borné dans A , et il est ouvert, car $C_1 \subset A_0$ (proposition 9.12(i)), donc il est un sous-anneau de définition, toujours par la proposition 9.71.

(iii) : Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-anneaux bornés de A . D'après l'exercice 9.21(ii), l'ensemble $\mathcal{B}$ est filtrant pour l'ordre induit par l'inclusion de sous-anneaux, et $A^\circ = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Or, tout sous-anneau de A contenant un sous-anneau ouvert est ouvert (proposition 9.12(ii)), et $\mathcal{B}$ contient au moins un sous-anneau ouvert de A ; par suite la partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ formée des sous-anneaux ouverts et bornés est cofinale dans $\mathcal{B}$, donc elle est filtrante et $A^\circ = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ (exercice 2.35(i,iii)). Mais $\mathcal{C}$ est précisément l'ensemble des sous-anneaux de définition de A , par la proposition 9.71.

(iv) : Si la topologie de A est adique, A est évidemment borné dans lui-même. Réciproquement, si A est borné, il est un sous-anneau de définition (proposition 9.71), donc sa topologie est adique. $\square$

Corollaire 9.73. *Soient A un anneau topologique, $B \subset A$ un sous-anneau ouvert, que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans A . On a :*

- (i) *A est un anneau de Huber si et seulement s'il en est de même pour B .*
- (ii) *Si A est un anneau de Tate, et B un anneau de définition de A , alors :*
 - (a) $A^\times \cap B^{\circ\circ} \neq \emptyset$.
 - (b) *Pour tout $s \in A^\times \cap B^{\circ\circ}$, l'idéal sB est de définition pour B , et $B_s = A$.*
- (iii) *Réciproquement, soient C un anneau quelconque, $f \in C$, et D l'image de C dans la localisation C_f . Munissons C_f de la topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}_f$ définie par la famille de sous-groupes $(f^n D \mid n \in \mathbb{N})$. Alors $(C_f, \mathcal{T}_f)$ est un anneau de Tate.*

Démonstration. (i) : Si B est un anneau de Huber, évidemment il en est de même pour A . Réciproquement, si A est de Huber, et si $A_0 \subset A$ est un sous-anneau de définition, d'après la proposition 9.71, le sous-anneau $B \cap A_0$ est encore de définition pour A , et donc aussi pour B .

(ii) : Soit $a \in A^\times \cap A^{\circ\circ}$; comme B est ouvert dans A , on a $a^n \in B$ pour un entier $n > 0$, et $a^n \in A^\times \cap A^{\circ\circ}$, d'où (a). Ensuite, si $s \in A^\times \cap B^{\circ\circ}$, noter que l'automorphisme $A \rightarrow A : x \mapsto sx$ est un homéomorphisme, donc $s^n B$ est un sous-groupe ouvert de A , pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, si $U \subset A$ est un voisinage de 0, il existe un voisinage $V \subset A$ de 0 tel que $V \cdot B \subset U$, car B est borné dans A ; puis on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $s^n \in V$, d'où $s^n B \subset U$. Cela montre que $(s^n B \mid n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental d'idéaux ouverts de B . En dernier lieu, pour tout $x \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s^n x \in B$, car B est ouvert dans A , d'où $A = B_s$.

(iii) : D'après l'exercice 9.10(iii), pour montrer que $\mathcal{T}_f$ est une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire sur C_f il suffit de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in C_f$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(x + f^m D) \cdot (y + f^m D) \subset xy + f^n D$. Or, si $x = a/f^k$ et $y = b/f^k$, on pourra

prendre $m := n + k$. Par construction, $(C_f, \mathcal{T}_f)$ est alors un anneau de Huber, D est un sous-anneau de définition, et fD est un idéal de définition, d'où l'assertion. $\square$

Exercice 9.74. Soient A un anneau de Huber, et B une A -algèbre finie, que l'on munit de sa topologie canonique $\mathcal{T}_B^A$ (voir la remarque 9.27). Montrer que $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau de Huber, et que l'homomorphisme structurel $A \rightarrow B$ est adique.

Exercice 9.75. Soient K un corps muni d'une valuation v , et $\mathcal{T}_K$ la v -topologie de K (voir le problème 9.53). Montrer que $(K, \mathcal{T}_K)$ est un anneau de Tate si et seulement s'il est un anneau de Huber non discret.

Problème 9.76. (Emprunté à [10, lemma 11].) Soient $(\Gamma, +, 0)$ un groupe abélien sans torsion, A un anneau Γ -gradué (voir le §1.1.6), $A_0 \subset A$ un sous-anneau Γ -gradué, $I_0 \subset A_0$ un idéal Γ -gradué de type fini (de sorte que $A_{0,\gamma} = A_0 \cap A_\gamma$ et $I_{0,\gamma} = I_0 \cap A_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$), et $\mathcal{T}$ une topologie sur A , telle que $(A, \mathcal{T})$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition A_0 , et idéal de définition I_0 . Montrer que A° est un sous-anneau Γ -gradué de A .

Lemme 9.77. Soient A, B deux anneaux de Huber, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme adique d'anneaux, et $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition. On a :

- (i) Pour toute partie bornée $S \subset A$, la partie $f(S)$ est bornée dans B .
- (ii) Si $B_0 \subset B$ est un sous-anneau de définition avec $f(A_0) \subset B_0$, et si $I_0 \subset A_0$ est un idéal de définition, l'idéal $I_0 B_0$ est de définition pour B_0 .
- (iii) Si $C \subset B$ est un sous-anneau ouvert avec $f(A_0) \subset C$, il existe un sous-anneau de définition $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0 \subset C$.
- (iv) $f(A^\circ) \subset B^\circ$.

Démonstration. (i, iv) : Soient $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ des sous-anneaux de définition tels que $f(A_1) \subset B_1$, et $I_1 \subset A_1$ un idéal de définition tel que $f(I_1)$ engendre un idéal de définition J_1 de B_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_1^m \cdot S \subset I_1^n$; on déduit $J_1^m \cdot f(S) \subset J_1^n$, d'où (i). L'assertion (iv) en découle aussitôt.

(ii) : Soient A_1, B_1, I_1 et J_1 comme ci-dessus. Il existe $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $I_0^p \subset I_1^n \subset I_0$ et $J_1^m \subset B_0$; par suite $J_1^{m+n} = J_1^m \cdot f(I_1^n) \subset I_0 B_0$, et cela montre que $I_0 B_0$ est un idéal ouvert de B_0 . En outre, $(I_0 B_0)^{pq} \subset J_1^{nq}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, donc $((I_0 B_0)^r \mid r \in \mathbb{N})$ est un système fondamental d'idéaux ouverts dans B_0 , d'où l'assertion.

(iii) : D'après (i) et la proposition 9.71, le sous-anneau $f(A_0)$ est borné dans B ; l'assertion découle alors du corollaire 9.72(ii). $\square$

Proposition 9.78. Soient A, B, C trois anneaux de Huber, et $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux. On a :

- (i) Si f et g sont adiques, il en est de même pour $g \circ f$.
- (ii) Si f et g sont continus, et $g \circ f$ est adique, alors g est adique.
- (iii) Soient $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ des sous-anneaux ouverts avec $f(A_0) \subset B_0$. Alors f est adique si et seulement si sa restriction $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ est adique.
- (iv) Si f est une application continue et ouverte, alors f est adique.

Démonstration. (i) : Soient $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ des sous-anneaux de définition avec $f(A_0) \subset B_0$; par le lemme 9.77(iii), on a un sous-anneau de définition $C_0 \subset C$ avec $g(B_0) \subset C_0$, d'où $g \circ f(A_0) \subset C_0$, et il suffit ainsi d'invoquer le lemme 9.77(ii).

(ii) : Soient $A_0 \subset A, C_0 \subset C$ des sous-anneaux de définition avec $g \circ f(A_0) \subset C_0$, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition ; d'après le corollaire 9.72(ii) il existe un sous-anneau de définition B_0 de B tel que $B_0 \subset g^{-1}C_0$. Soient $K_0 \subset C_0$ l'idéal de définition engendré par $g \circ f(I_0)$, et $g_0 : B_0 \rightarrow C_0$ la restriction de g ; fixons un idéal de définition J_0 de B_0 avec $J_0 \subset g_0^{-1}K_0$, et un système fini de générateurs $S \subset A$ de l'idéal I_0 . Comme $S \subset A^\circ$ et que f est continu, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(S(n)) \subset J_0$ (notation de la définition

9.18(ii)). Il s'ensuit aisément que $K_0^n \subset g_0(J_0) \cdot C_0 \subset K_0$, donc $g_0(J_0)$ engendre un idéal de définition de C_0 .

(iii) : Comme il existe des sous-anneaux de définition A_1 de A et B_1 de B avec $A_1 \subset A_0$ et $B_1 \subset B_0$ (corollaire 9.72(ii)), il est clair que les inclusions $i_A : A_0 \rightarrow A$ et $i_B : B_0 \rightarrow B$ sont des homomorphismes adiques. Or, si f_0 est adique, il en est de même pour $i_B \circ f_0 = f \circ i_A$, d'après (i), et alors f est adique, d'après (ii). Réciproquement, supposons que f soit adique; pour A_1 comme ci-dessus, il existe un sous-anneau de définition B_1 de B avec $f(A_1) \subset B_1 \subset B_0$ (lemme 9.77(iii)), et comme A_1 et B_1 sont aussi des sous-anneaux de définition pour A_0 et respectivement B_0 , avec le lemme 9.77(ii) on conclut que f_0 est adique.

(iv) : Soient $B_1 \subset B$ un sous-anneau de définition, et $A_0 \subset f^{-1}B_1$ un sous-anneau de définition de A (corollaire 9.72(ii)); alors $B_0 := f(A_0)$ est un sous-anneau ouvert de B_1 , donc il est aussi un sous-anneau de définition de B (proposition 9.71). D'après (iii), il suffit de montrer que la restriction $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ de f est adique; mais comme f_0 est ouverte et surjective, pour tout idéal de définition $I_0 \subset A_0$, l'idéal $f(I_0)$ est de définition pour B_0 , d'où l'assertion. $\square$

Définition 9.79. Soit $(A, \mathcal{T})$ un anneau de Huber; on pose $X_A := \text{Spec } A$, et on dénote par $\underline{X}_A$ le schéma affine $(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ (voir la définition 5.38(i)). Les parties :

$$X_A^{\text{na}} := V(A^{\circ\circ}A) \subset X_A \quad \text{et} \quad X_A^{\text{an}} := X_A \setminus X_A^{\text{na}}$$

sont respectivement le *lieu $\mathcal{T}$ -non-analytique* et le *lieu $\mathcal{T}$ -analytique* de $\underline{X}_A$. Donc X_A^{na} est une partie fermée de X_A , et X_A^{an} est une partie ouverte; en outre

$$\underline{X}_A^{\text{an}} := X_A^{\text{an}} \times_{X_A} \underline{X}_A$$

est un sous-schéma ouvert de $\underline{X}_A$ qu'on appellera le *sous-schéma $\mathcal{T}$ -analytique* de $\underline{X}_A$. Quand cela ne donne pas lieu à des ambiguïtés, on omettra de mentionner la topologie $\mathcal{T}$, donc on appellera X_A^{an} et $\underline{X}_A^{\text{an}}$ simplement le *lieu analytique* et respectivement le *sous-schéma analytique* de $\underline{X}_A$. Evidemment, $X_A^{\text{na}} = \emptyset$ si et seulement si A est analytique (définition 9.18(vi)).

Proposition 9.80. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux de Huber, et $\phi := \text{Spec } f : \underline{X}_B \rightarrow \underline{X}_A$ le morphisme induit de schémas. On a :

- (i) $X_A^{\text{na}} = \{\mathfrak{p} \in X_A \mid \mathfrak{p} \text{ est ouvert dans } A\}$ et $\phi(X_B^{\text{na}}) \subset X_A^{\text{na}}$.
- (ii) Soit $J \subset A$ un idéal; alors J est ouvert dans A si et seulement si $V(J) \subset X_A^{\text{na}}$.
- (iii) Si A est un sous-anneau ouvert de B , et si f est l'inclusion, alors ϕ induit par restriction un isomorphisme des sous-schémas analytiques :

$$\underline{X}_B^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \underline{X}_A^{\text{an}}.$$

- (iv) f est adique si et seulement si $\phi^{-1}(X_A^{\text{na}}) = X_B^{\text{na}}$.

Démonstration. (i) : Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; d'un côté, $A^{\circ\circ}$ est une partie ouverte de A , donc si $A^{\circ\circ} \subset \mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ est ouvert dans A (proposition 9.12(i)). De l'autre côté, si $\mathfrak{p}$ est ouvert dans A , pour tout $a \in A^{\circ\circ}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \in \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$, car $\mathfrak{p}$ est premier. Cela montre que X_A^{na} est l'ensemble des idéaux premiers ouverts de A ; l'inclusion $\phi(X_B^{\text{na}}) \subset X_A^{\text{na}}$ en découle aussitôt, car f est continu.

(ii) : Si J est ouvert, tout $\mathfrak{p} \in V(J)$ est un idéal ouvert, d'où $V(J) \subset X_A^{\text{na}}$, par (i). Réciproquement, si $V(J) \subset X_A^{\text{na}}$, alors $A^{\circ\circ} \subset \text{rad}(J)$ (remarque 1.56(i)); soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. Il vient $I_0 \subset \text{rad}(J)$, et comme I_0 est de type fini, on a alors $I_0^n \subset J$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$: les détails sont laissés au lecteur; or, I_0^n est ouvert dans A , donc de même pour J .

Montrons ensuite que si f est adique, alors $\phi^{-1}(X_A^{\text{na}}) = X_B^{\text{na}}$. Pour cela, soient $A_0 \subset A$ et $B_0 \subset B$ des sous-anneaux de définition avec $f(A_0) \subset B_0$, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition tel que $f(I_0)$ engendre un idéal de définition J_0 de B_0 . Il vient $\phi^{-1}(V(I_0A)) =$

$V(J_0B)$, et d'autre part (i) entraîne aisément que $X_A^{\text{na}} = V(I_0A)$ et $X_B^{\text{na}} = V(J_0B)$, d'où l'assertion.

(iii) : Noter que l'inclusion f est adique (proposition 9.78(iii)) ; par ce qui précède, on sait alors déjà que $\phi^{-1}(X_A^{\text{na}}) = X_B^{\text{na}}$. Noter aussi que $X_A^{\text{an}} = \bigcup_{a \in A^\circ} D(a)$, et $\phi^{-1}D(a) = D(f(a))$ pour tout $a \in A$; donc $X_B^{\text{an}} = \bigcup_{a \in A^\circ} D(f(a))$, et on est ramené à vérifier que ϕ induit un isomorphisme de sous-schémas affines ouverts :

$$\phi_a : D(f(a)) \times_{X_B} \underline{X}_B \xrightarrow{\sim} D(a) \times_{X_A} \underline{X}_A \quad \forall a \in A^\circ.$$

Mais ϕ_a est naturellement identifié avec $\text{Spec } f_a : \text{Spec } B_{f(a)} \rightarrow \text{Spec } A_a$, où $f_a : A_a \rightarrow B_{f(a)}$ est la localisation de f ; on doit ainsi montrer que f_a est un isomorphisme pour tout $a \in A^\circ$. L'injectivité de f_a découle de celle de f (corollaire 3.43) ; en dernier lieu, pour tout $b \in B$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c := a^n b \in A$, donc $b = c/a^n \in A_a$, d'où la surjectivité de f_a .

(iv) : Par ce qui précède, on peut supposer que $\phi^{-1}(X_A^{\text{na}}) = X_B^{\text{na}}$, et on doit montrer que f est adique. Or, soit $B_0 \subset B$ un sous-anneau de définition, A_0 un sous-anneau de définition de A contenu dans le sous-anneau ouvert $f^{-1}B_0$ (corollaire 9.72(ii)), $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ la restriction de f , et $\phi_0 := \text{Spec } f_0 : \underline{X}_{B_0} \rightarrow \underline{X}_{A_0}$. On obtient un diagramme commutatif de schémas affines :

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}_B & \xrightarrow{\phi} & \underline{X}_A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X}_{B_0} & \xrightarrow{\phi_0} & \underline{X}_{A_0} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les morphismes de schémas induits par les inclusions $i_A : A_0 \rightarrow A$ et $i_B : B_0 \rightarrow B$. Par hypothèse, $\phi^{-1}(X_A^{\text{an}}) = X_B^{\text{an}}$; compte tenu de (iii) il vient alors $\phi_0^{-1}(X_{A_0}^{\text{an}}) = X_{B_0}^{\text{an}}$. Au vu de la proposition 9.78(iii), on peut ainsi remplacer A, B et f par A_0, B_0 et f_0 , et supposer que les topologies de A et B soient adiques, et en particulier A° et B° sont des idéaux radicaux de A et respectivement B (exercice 9.21(iv)). On a alors $\phi^{-1}(X_A^{\text{na}}) = V(f(A^\circ)) = V(B^\circ)$, d'où $\text{rad}(f(A^\circ) \cdot B) = B^\circ$. Soit $I \subset A$ un idéal de définition ; on déduit aisément que $\text{rad}(f(I) \cdot B) = B^\circ$, et alors $J := f(I) \cdot B$ est ouvert dans B , d'après (ii). Comme J est de type fini et que $J \subset B^\circ$, on conclut que J est un idéal de définition de B (les détails sont confiés aux soins du lecteur), d'où l'assertion. $\square$

Exercice 9.81. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau de Huber, et $I \subset A$ un idéal.

(i) Montrer que si A est topologiquement local, pour tout sous-groupe additif ouvert $U \subset A^\circ$ avec $U \cdot U \subset U$, la partie $1 + U$ est un sous-groupe de $A^\times$.

(ii) Montrer qu'il existe un anneau de Huber topologiquement local A_{loc} et un homomorphisme adique $j : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ d'anneaux topologiques, caractérisés à isomorphisme unique près par la propriété suivante. Tout homomorphisme continu $f : A \rightarrow B$ d'anneaux de Huber, avec B topologiquement local, admet une factorisation $f = f_{\text{loc}} \circ j$, pour un unique homomorphisme continu d'anneaux de Huber $f_{\text{loc}} : A_{\text{loc}} \rightarrow B$. On appelle A_{loc} la *localisation topologique* de A .

(iii) D'après le lemme 9.77(iv), l'homomorphisme j de (ii) se restreint en un homomorphisme adique $j^\circ : A^\circ \rightarrow (A_{\text{loc}})^\circ$, et d'autre part $(A_{\text{loc}})^\circ$ est topologiquement local pour la topologie induite par A_{loc} (exercice 9.21(v)), donc j° se factorise à travers un unique homomorphisme continu d'anneaux de Huber $j_{\text{loc}}^\circ : (A^\circ)_{\text{loc}} \rightarrow (A_{\text{loc}})^\circ$. Montrer que j_{loc}° est un isomorphisme.

(iv) De même, j se restreint en une application A° -linéaire $j^{\circ\circ} : A^{\circ\circ} \rightarrow (A_{\text{loc}})^{\circ\circ}$, qui se factorise à travers une application $(A_{\text{loc}})^\circ$ -linéaire $j_{\text{loc}}^{\circ\circ} : A^{\circ\circ} \cdot (A_{\text{loc}})^\circ \rightarrow (A_{\text{loc}})^{\circ\circ}$. Montrer que $j_{\text{loc}}^{\circ\circ}$ est un isomorphisme de $(A_{\text{loc}})^\circ$ -modules.

(v) Munissons $\bar{A} := A/I$ de la topologie $\mathcal{T}_{\bar{A}}$ induite par $\mathcal{T}_A$ via la projection $\pi_A : A \rightarrow \bar{A}$. Montrer que $(\bar{A}, \mathcal{T}_{\bar{A}})$ est un anneau de Huber, et que π est adique.

Proposition 9.82. Soient $(A, \mathcal{T}_A), (B, \mathcal{T}_B), (C, \mathcal{T}_C)$ trois anneaux de Huber, $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$ deux homomorphismes adiques d'anneaux. On a :

(i) Il existe une unique topologie $\mathcal{T}_D$ sur $D := B \otimes_A C$ telle que $(D, \mathcal{T}_D)$ soit un anneau de Huber, et le diagramme induit :

$$\begin{array}{ccc} (A, \mathcal{T}_A) & \xrightarrow{f} & (B, \mathcal{T}_B) \\ g \downarrow & & \downarrow B \otimes_A g \\ (C, \mathcal{T}_C) & \xrightarrow{f \otimes_A C} & (D, \mathcal{T}_D) \end{array}$$

soit un carré cocartésien de la catégorie $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{\mathbb{Z}\text{-lin}}$ (voir la définition 9.2(iii)).

(ii) Dans la situation de (i), les homomorphismes $B \otimes_A g$ et $f \otimes_A C$ sont adiques.

(iii) Si f est une application ouverte, alors il en est de même pour $f \otimes_A C$, et le diagramme de (i) est un carré cocartésien dans la catégorie $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$.

Démonstration. (i,ii) : L'unicité de $\mathcal{T}_D$ découle comme d'habitude de la propriété universelle. Pour l'existence, soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition ; par le lemme 9.77(iii), on a des sous-anneaux de définition $B_0 \subset B$ et $C_0 \subset C$ avec $f(A_0) \subset B_0$ et $g(A_0) \subset C_0$, et les restrictions $f_0 : A_0 \rightarrow B_0, g_0 : A_0 \rightarrow C_0$ de f et g sont adiques (proposition 9.78(iii)). Soit $D_0 \subset D$ l'image de l'homomorphisme naturel $B_0 \otimes_{A_0} C_0 \rightarrow D$, et munissons D_0 de sa topologie $I_0 D_0$ -adique ; il existe une unique topologie $\mathcal{T}_D$ sur D telle que $(D, \mathcal{T}_D)$ soit un groupe abélien topologique, et que l'inclusion $D_0 \rightarrow D$ soit continue et ouverte, et on doit vérifier que $(D, \mathcal{T}_D)$ est un anneau topologique. L'exercice 9.10(iii) nous ramène à montrer que pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \cdot I_0^m D_0 \subset I_0^n D_0$, et évidemment on peut supposer que $x = b \otimes c$ pour quelque $b \in B$ et $c \in C$. Mais comme f et g sont adiques, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que $b \cdot I_0^{m_1} B_0 \subset I_0^n B_0$ et $c \cdot I_0^{m_2} C_0 \subset C_0$; on déduit aussitôt que $m := m_1 + m_2$ convient. Par suite $(D, \mathcal{T}_D)$ est un anneau de Huber avec sous-anneau de définition D_0 ; il est clair que les homomorphismes naturels $B_0 \rightarrow D_0 \leftarrow C_0$ sont adiques, ainsi il en est de même pour $B \otimes_A g$ et $f \otimes_A C$ (proposition 9.78(iii)). En dernier lieu, soient $(E, \mathcal{T}_E) \in \text{Ob}(\mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{\mathbb{Z}\text{-lin}})$, et $g' : B \rightarrow E, f' : C \rightarrow E$ des homomorphismes continus d'anneaux avec $g' \circ f = f' \circ g$; on a un unique homomorphisme d'anneaux $h : D \rightarrow E$ avec $h \circ (B \otimes_A g) = g'$ et $h \circ (f \otimes_A C) = f'$ (voir la section 3.4), et il reste à vérifier que h est continu. Pour cela, il suffit de montrer que la restriction $h_0 : D_0 \rightarrow E$ de h est continue (remarque 9.3(ii)) ; mais la topologie de D_0 est induite par la topologie I_0 -adique $\mathcal{T}_{D'_0}$ de $D'_0 := B_0 \otimes_{A_0} C_0$ via la projection $p : D'_0 \rightarrow D$, donc il suffit de montrer que $h'_0 := h_0 \circ p : (D'_0, \mathcal{T}_{D'_0}) \rightarrow (E, \mathcal{T}_E)$ est continu au point 0. Ainsi, soit $U \subset E$ un voisinage de 0 ; comme la topologie de E est linéaire, on peut supposer que U soit un sous-groupe additif de E . De plus, il existe un voisinage U' de 0 dans E tel que $U' \cdot U' \subset U$; on trouve alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $g'(I_0^n B_0), f'(I_0^n C_0) \subset U'$, par suite $h'(I_0^{2n} D'_0) \subset U$, d'où l'assertion.

(iii) : Si f est ouvert, on peut prendre $B_0 := f(A_0)$ dans la preuve de (i) (proposition 9.71) ; alors f_0 est ouvert et surjectif, et il en est de même pour $f_0 \otimes_{A_0} C_0 : C_0 \rightarrow D'_0$, car ce dernier est adique. Mais aussi $p : D'_0 \rightarrow D_0$ est ouvert, donc de même pour $p' : p \circ (f_0 \otimes_{A_0} C_0) : C_0 \rightarrow D_0$, et finalement $f \otimes_A C$ est ouvert (remarque 9.3(iii)). En dernier lieu, soient E un anneau topologique, et f', g' et h comme dans la preuve de (ii) ; en raisonnant comme ci-dessus, on est ramené à vérifier que la restriction $h_0 : D_0 \rightarrow E$ de h est continue. Mais on vient de voir que la topologie de D_0 est induite par celle de C_0 via la restriction $p' : C_0 \rightarrow D_0$ de $f \otimes_A C$; ainsi, h_0 est continue si et seulement s'il en est de même pour $h_0 \circ p' : C_0 \rightarrow E$. Mais cette dernière est la restriction de f' , d'où l'assertion. $\square$

Définition 9.83. (i) Avec la notation de la proposition 9.82, on appelle $(D, \mathcal{T}_D)$ le *produit tensoriel topologique* des A -algèbres topologiques $(B, \mathcal{T}_B)$ et $(C, \mathcal{T}_C)$, noté

$$(B, \mathcal{T}_B) \otimes_A (C, \mathcal{T}_C) := (D, \mathcal{T}_D).$$

(ii) En outre, le *produit tensoriel complété* de $(B, \mathcal{T}_B)$ et $(C, \mathcal{T}_C)$, noté :

$$(B, \mathcal{T}_B) \widehat{\otimes}_A (C, \mathcal{T}_C) \quad \text{ou plus simplement} \quad B \widehat{\otimes}_A C$$

désignera la complétion de $(B, \mathcal{T}_B) \otimes_A (C, \mathcal{T}_C)$.

9.4.1. Topologies des anneaux de polynômes. Soient A un anneau de Huber, et $n \in \mathbb{N}$; on souhaite maintenant prolonger la topologie de A à l' A -algèbre de polynômes $A[X_\bullet] := A[X_1, \dots, X_n]$. On supposera donnée une suite $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ de parties de A , telles que $\langle T_i \cdot A \rangle$ soit un idéal ouvert de A pour tout $i = 1, \dots, n$ (rappelons que, pour toute partie $S \subset A$, on dénote par $\langle S \rangle \subset A$ le sous-groupe additif engendré par S). Avec la notation de la définition 9.18(ii), on pose

$$T(\nu_\bullet) := T_1(\nu_1) \cdots T_n(\nu_n) \subset A \quad \text{et} \quad X^{\nu_\bullet} := X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \in A[X_\bullet]$$

pour tout $\nu_\bullet := (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $\mathcal{U}$ l'ensemble des sous-groupes additifs ouverts de A . Pour tout $U \in \mathcal{U}$ posons :

$$U[T_\bullet X_\bullet] := \{ \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \in A[X_\bullet] \mid a_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle \forall \nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \}.$$

Lemme 9.84. $\langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ est ouvert dans A , pour tous $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$ et $U \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $I_0^N \subset \langle T_i \cdot A \rangle$ pour $i = 1, \dots, n$, et $I_0^N \subset U$; avec $k := \nu_1 + \dots + \nu_n$, il vient $I_0^{kN} \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot A \rangle$. Soit alors $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fini de générateurs de l'idéal I_0^{kN} de A_0 , et pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $S_\lambda \subset T(\nu_\bullet)$ une partie finie, et $(b_{\lambda,t} \mid t \in S_\lambda)$ une famille d'éléments de A avec $\sum_{t \in S_\lambda} t \cdot b_{\lambda,t} = a_\lambda$. On trouve $M \in \mathbb{N}$ tel que $b_{\lambda,t} I_0^M \subset A_0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $t \in S_\lambda$, d'où $I_0^{kN+M} \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot A_0 \rangle$, et finalement $I_0^{(k+1)N+M} \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$, d'où l'assertion. $\square$

Proposition 9.85. Avec la notation ci-dessus, on a :

(i) La famille $\mathcal{U}_{T_\bullet} := (U[T_\bullet X_\bullet] \mid U \in \mathcal{U})$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 d'un unique anneau topologique $A[X_\bullet]_{T_\bullet} := (A[X_\bullet], \mathcal{T}_{T_\bullet})$.

(ii) $A[X_\bullet]_{T_\bullet}$ est un anneau de Huber, $A_0[T_\bullet X_\bullet]$ est un sous-anneau de définition, et $I_0[T_\bullet X_\bullet] \subset A_0[T_\bullet X_\bullet]$ un idéal de définition.

(iii) L'homomorphisme structurel $h : A \rightarrow A[X_\bullet]_{T_\bullet}$ est adique, et la partie $\Theta := \bigcup_{i=1}^n \{tX_i \mid t \in T_i\}$ est à puissances bornées dans $A[X_\bullet]_{T_\bullet}$.

(iv) Pour tout anneau de Huber B , tout $b_1, \dots, b_n \in B$, et tout homomorphisme continu d'anneaux $g : A \rightarrow B$ tel que la partie $S := \bigcup_{i=1}^n \{g(t) \cdot b_i \mid t \in T_i\}$ est à puissances bornées dans B , il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux $f : A[X_\bullet]_{T_\bullet} \rightarrow B$ tel que $f \circ h = g$ et $f(X_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. (i) : Evidemment $U[T_\bullet X_\bullet]$ est un sous-groupe additif de $A[X_\bullet]$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Soient $P, Q \in A[X_\bullet]$ et $U \in \mathcal{U}$; d'après l'exercice 9.10(iii), il suffit alors de vérifier qu'il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $(P + V[T_\bullet X_\bullet]) \cdot (Q + V[T_\bullet X_\bullet]) \subset U[T_\bullet X_\bullet]$. Or, soit $W \in \mathcal{U}$ avec $W \cdot W \subset U$; on voit aisément que $W[T_\bullet X_\bullet] \cdot W[T_\bullet X_\bullet] \subset U[T_\bullet X_\bullet]$, donc on est ramené à montrer que pour tout $P \in A[X_\bullet]$ il existe $V \in \mathcal{U}$ avec $V \subset W$ tel que $P \cdot V[T_\bullet X_\bullet] \subset U[T_\bullet X_\bullet]$. Disons que $P = \sum_{\nu_\bullet \in \Omega} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$ pour une partie finie $\Omega \subset \mathbb{N}^n$; au vu du lemme 9.84, il existe $V' \in \mathcal{U}$ tel que $a_{\nu_\bullet} \cdot V' \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \Omega$, et on voit aussitôt que $V := V' \cap W$ convient.

(ii) : $A_0[T_\bullet X_\bullet]$ est un sous-anneau ouvert de $A[X_\bullet]_{T_\bullet}$, et $I_0[T_\bullet X_\bullet]$ est un idéal ouvert de $A_0[T_\bullet X_\bullet]$; en outre, il est clair que $I_0[T_\bullet X_\bullet]^k = I_0^k[T_\bullet X_\bullet]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{T}_{T_\bullet}$ induit la topologie $I_0[T_\bullet X_\bullet]$ -adique sur $A_0[T_\bullet X_\bullet]$.

(iii) : h se restreint en un homomorphisme $h_0 : A_0 \rightarrow A_0[T_\bullet X_\bullet]$, et $h_0(I_0) \cdot A_0[T_\bullet X_\bullet] = I_0[T_\bullet X_\bullet]$, par suite h est adique. Comme $\Theta \subset A_0[T_\bullet X_\bullet]$, il est clair que Θ est à puissances bornées.

(iv) : Il existe un unique homomorphisme d'anneaux $f : A[X_\bullet] \rightarrow B$ tel que $f \circ h = g$ et $f(X_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et on doit montrer que f est continu pour la topologie $\mathcal{T}_T$. Or, pour tout sous-groupe additif ouvert $U \subset B$, soient V un voisinage de 0 dans B avec $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S(k) \cdot V \subset U$, et $W := g^{-1}V$; il vient $f(W[T_\bullet X_\bullet]) \subset U$, d'où l'assertion, au vu de la remarque 9.3(ii). $\square$

9.4.2. Complétion d'anneaux de Huber. Soient A un anneau topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, et B un sous-anneau ouvert, muni de la topologie induite par A . Alors A est un B -module topologique, via l'inclusion $i : B \rightarrow A$, donc l'exercice 9.49(i,iii) nous dit que la complétion $\hat{i} : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ de i est injective et ouverte, et la topologie de $\hat{B}$ est induite par celle de $\hat{A}$, via $\hat{i}$; on identifie ainsi naturellement $\hat{B}$ avec un sous-anneau ouvert de $\hat{A}$.

Proposition 9.86. Soient A un anneau de Huber, $A_0 \subset A$ un sous-anneau ouvert, et $j_A : A \rightarrow \hat{A}$, $j_{A_0} : A_0 \rightarrow \hat{A}_0$ les complétions. On a :

- (i) $\hat{A}$ est un anneau de Huber, et j_A est un homomorphisme adique.
- (ii) Si A_0 est un sous-anneau de définition de A , alors $\hat{A}_0$ est un sous-anneau de définition de $\hat{A}$.
- (iii) L'application $\hat{A}_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow \hat{A} : x \otimes a \mapsto x \cdot j_A(a)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration. Comme d'habitude, on munit A_0 de la topologie induite par l'inclusion $i : A_0 \rightarrow A$; alors $\hat{i} : \hat{A}_0 \rightarrow \hat{A}$ identifie $\hat{A}_0$ avec un sous-anneau ouvert de $\hat{A}$, et si A_0 est un sous-anneau de définition avec idéal de définition I_0 , la topologie de $\hat{A}_0$ est $I_0 \hat{A}_0$ -adique (corollaire 9.61(ii)), d'où (i) et (ii).

(iii) : Supposons d'abord que A_0 soit un sous-anneau de définition de A , et posons $B := A/A_0$. La topologie induite sur le A_0 -module B par la projection $p : A \rightarrow B$ est discrète, car A_0 est ouvert dans A ; donc l'application de complétion $j_B : B \rightarrow \hat{B}$ est un isomorphisme, et on déduit un diagramme commutatif de $\hat{A}_0$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \hat{A}_0 & \xrightarrow{\hat{A}_0 \otimes_{A_0} i} & \hat{A}_0 \otimes_{A_0} A & \xrightarrow{\hat{A}_0 \otimes_{A_0} p} & \hat{A}_0 \otimes_{A_0} B \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow l_A & & \downarrow l_B \\
 0 & \longrightarrow & \hat{A}_0 & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{A} & \xrightarrow{\hat{p}} & \hat{B} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où l_A est l'application de (iii), et l_B est l'application analogue : $x \otimes b \mapsto x \cdot j_B(b)$. Or, la ligne horizontale en bas du diagramme est exacte, d'après le corollaire 9.58, et la ligne horizontale en haut est exacte à droite, d'après la proposition 3.11; mais alors, une chasse simple au diagramme montre que aussi cette ligne est exacte. Il suffit ainsi de montrer que l_B est un isomorphisme de $\hat{A}_0$ -modules (exercice 2.104). Pour cela, écrivons B comme la limite directe du système filtrant $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses A_0 -sous-modules de type fini, et munissons chaque B_λ de sa topologie discrète. Soit aussi $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition.

Affirmation 9.87. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^{n_\lambda} B_\lambda = 0$.

Preuve : Soit $x_1, \dots, x_k$ un système fini de générateurs de B_λ . Comme la topologie du A_0 -module topologique B est discrète, pour tout $i = 1, \dots, k$ il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^{n_i} x_i = 0$, et on peut prendre $n_\lambda := \max(n_1, \dots, n_k)$. $\diamond$

Rappelons que le foncteur d'extensions des scalaires suivant l'homomorphisme j_{A_0} admet un adjoint à droite (voir le §3.2.2), donc il commute avec toute colimite de $A_0\text{-Mod}$ (proposition 2.49(ii)); d'autre part, $\hat{B}$ est trivialement la colimite du système de ses sous-modules $(\hat{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, car chaque application de complétion $j_\lambda : B_\lambda \rightarrow \hat{B}_\lambda$ est encore un

isomorphisme. On est alors ramené à montrer que la restriction $l_\lambda : \widehat{A}_0 \otimes_{A_0} B_\lambda \rightarrow \widehat{B}_\lambda$ de l_B est un isomorphisme pour tout $\lambda \in \Lambda$. Or, soit n_λ comme dans l'observation 9.87, et notons $p_\lambda : \widehat{A}_0 \rightarrow \widehat{A}_\lambda := \widehat{A}_0 / I_0^{n_\lambda} \widehat{A}_0$ la projection ; il est clair que $\widehat{B}_\lambda$ est un $\widehat{A}_\lambda$ -module, et $l_\lambda = \bar{l}_\lambda \circ (p_\lambda \otimes_{A_0} B_\lambda)$, avec $\bar{l}_\lambda : \widehat{A}_\lambda \otimes_{A_0} B_\lambda \rightarrow \widehat{B}_\lambda$ l'application $\widehat{A}_0$ -linéaire telle que $\bar{x} \otimes b \mapsto \bar{x} \cdot j_\lambda(b)$. Le noyau de $p_\lambda \otimes_{A_0} B_\lambda$ est l'image de $I^{n_\lambda} \widehat{A}_0 \otimes_{A_0} B_\lambda$ dans $\widehat{A}_0 \otimes_{A_0} B_\lambda$; comme $I^{n_\lambda} B_\lambda = 0$, cette image est le sous-module nul, donc $p_\lambda \otimes_{A_0} B_\lambda$ est un isomorphisme, et on est ramené à vérifier que $\bar{l}_\lambda$ est un isomorphisme. Mais d'après le corollaire 9.61(ii), l'application naturelle $i_\lambda : A_0 / I_0^{n_\lambda} A_0 \rightarrow \widehat{A}_\lambda$ est bijective, donc il suffit de montrer que $\bar{l}_\lambda \circ (i_\lambda \otimes_{A_0} B_\lambda) : A_0 / I_0^{n_\lambda} A_0 \otimes_{A_0} B_\lambda \rightarrow \widehat{B}_\lambda$ est un isomorphisme ; par inspection directe, on voit que cette dernière est la composition de l'isomorphisme naturel $A_0 / I_0^{n_\lambda} A_0 \otimes_{A_0} B_\lambda \xrightarrow{\sim} B_\lambda$ (exercice 3.6(ii)) et de j_λ .

En dernier lieu, si $A_0 \subset A$ est un sous-anneau ouvert arbitraire, alors A_0 est un anneau de Huber (corollaire 9.73(i)) ; soit $A_1 \subset A_0$ un sous-anneau de définition, et noter que A_1 est aussi un sous-anneau de définition pour A . Par ce qui précède, on a les isomorphismes $l'_A : \widehat{A}_1 \otimes_{A_1} A \xrightarrow{\sim} \widehat{A}$ et $l''_A : \widehat{A}_1 \otimes_{A_1} A_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_0$. Par inspection directe, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}_1 \otimes_{A_1} A_0 \otimes_{A_0} A & \xrightarrow{\sim} & \widehat{A}_1 \otimes_{A_1} A \\ l'_A \otimes_{A_0} A \downarrow & & \downarrow l'_A \\ \widehat{A}_0 \otimes_{A_0} A & \xrightarrow{l_A} & \widehat{A} \end{array}$$

donc l_A est un isomorphisme, comme souhaité. $\square$

Exercice 9.88. (i) Soient A un anneau avec une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire, $B \subset A$ un sous-anneau ouvert, C la fermeture intégrale de B dans A . Munissons B et C des topologies induites par A , de sorte que les complétions $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de B et C s'identifient naturellement à des sous-anneaux ouverts de la complétion $\widehat{A}$ de A . Montrer que $\widehat{C}$ est la fermeture intégrale de $\widehat{B}$ dans $\widehat{A}$. En particulier, B est intégralement clos dans $A \Leftrightarrow \widehat{B}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}$.

(ii) Dans la situation de (i), munissons A° et $A^{\circ\circ}$ des topologies induites par les inclusions dans A . Montrer que les complétions de A° et $A^{\circ\circ}$ sont $(\widehat{A})^\circ$ et $(\widehat{A})^{\circ\circ}$.

(iii) Soit A un anneau topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire, complète et séparée. Montrer que A est topologiquement local (voir l'exercice 9.21(v)).

(iv) Soit A un anneau de Huber. Montrer que la localisation topologique $i_A : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ de l'exercice 9.81(ii) induit un isomorphisme d'anneaux topologiques complets

$$\widehat{i}_A : \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A_{\text{loc}}}.$$

Proposition 9.89. Soit $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau de Huber analytique, complet, séparé et noethérien (définition 9.18(vi)). Soient M, N des A -modules de type fini, que l'on munit des topologies canoniques $\mathcal{T}_M^A$ et $\mathcal{T}_N^A$ (définition 9.24). On a :

(i) $\mathcal{T}_M^A$ est complète et séparée, et tout sous-module de M est une partie fermée.

(ii) Si $(M, \mathcal{T})$ est un A -module topologique complet, séparé, et à voisinages dénombrables, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M^A$.

(iii) Toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ est un morphisme strict de la catégorie $A\text{-ModTop}$ (définition 2.68).

Démonstration. (i) : On considère d'abord le cas où $M = A^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $(M, \mathcal{T}_M^A) = (A, \mathcal{T}_A) \times \cdots \times (A, \mathcal{T}_A)$ est complet et séparé, par l'exercice 9.31. Soit $N \subset A^k$ un sous-module ; d'après le lemme 9.5(iii), l'adhérence $\overline{N}$ de N dans A^k est un sous-module, forcément de type fini, car A est noethérien. On trouve alors $n \in \mathbb{N}$ et une surjection A -linéaire $f : A^n \rightarrow \overline{N}$. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n , et posons $a_i := f(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. On voit aisément que f est continue pour la topologie du

produit de A^n et la topologie de $\overline{N}$ induite par l'inclusion dans A^k . Ces topologies sont complètes et séparées (remarque 9.30(vii) et exercice 9.31); d'après le problème 9.33, f est alors une application ouverte. Ainsi, la partie $U := f((A^\circ)^\circ)^n$ est ouverte dans $\overline{N}$, et pour $i = 1, \dots, n$ on trouve $b_i \in N \cap f(e_i + (A^\circ)^\circ)^n = N \cap (a_i + U)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, il vient $b_i = a_i + \sum_{j=1}^n x_{ij}a_j$ pour certains $x_{i1}, \dots, x_{in} \in A^\circ$. Donc, $X := (x_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n)$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, et si l'on pose $a_\bullet := (a_1, \dots, a_n)$ et $b_\bullet := (b_1, \dots, b_n)$, il vient $b_\bullet = (Id_n + X) \cdot a_\bullet$ (ici $Id_n := (\delta_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n)$ est la matrice diagonale de taille $n \times n$ avec $\delta_{ii} := 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$). Evidemment $\det(Id_n + X) \in 1 + A^\circ$, et comme A est complet, on déduit que $Id_n + X$ est une matrice inversible (exercice 9.88(iii)). Par suite, $b_\bullet$ engendre $\overline{N}$, i.e. $\overline{N} = N$.

Ensuite, soit M un A -module de type fini, et choisissons une surjection A -linéaire $\pi : A^k \rightarrow M$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$; alors $\mathcal{T}_M^A$ est la topologie induite par $(A, \mathcal{T}_A)^k$ via π . On vient de voir que $\text{Ker}(\pi)$ est un sous-module fermé de A^k , donc M est complet et séparé (remarque 9.59(ii)). Soit $N \subset M$ un sous-module; comme $\pi^{-1}N$ est un sous-module fermé de A^k , on déduit aisément que N est fermé dans M .

(ii) : D'après la proposition 9.25(ii), l'identité $Id_M : (M, \mathcal{T}_M^A) \rightarrow (M, \mathcal{T})$ est une application continue, et même ouverte, d'après le problème 9.33, d'où l'assertion.

(iii) : D'après la remarque 9.7(ii), il faut montrer que la topologie $\mathcal{T}'$ de $N' := f(M)$ induite par $\mathcal{T}_N^A$ via l'inclusion dans N coïncide avec la topologie induite par M via la surjection $f : M \rightarrow N'$. Or, d'après (i), le sous-module N' est fermé, donc complet et séparé pour la topologie $\mathcal{T}'$. De plus N' est un A -module de type fini, car M est de type fini (ou car A est noethérien); d'après (ii), il vient $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_N^A$, la topologie canonique de N' . L'assertion découle alors du corollaire 9.26(i). $\square$

Remarque 9.90. Les assertions (i) et (iii) de la proposition 9.89 seront généralisées plus tard au cas des anneaux de Huber *analytiquement noethériens* (et même pour la classe plus ample des A -modules *analytiquement bornés* : voir le §12.2.2). Par contre, l'assertion (ii) peut tomber en défaut, si A n'est pas analytique : e.g. soit K un corps, munissons $A := K[[X, Y]]$ de sa topologie X -adique $\mathcal{T}_X$, et soit aussi $\mathcal{T}_{X,Y}$ la topologie $(AX + AY)$ -adique; alors $(A, \mathcal{T}_X)$ est un anneau de Huber complet, séparé et on verra qu'il est noethérien (exemple 9.115), et $M := (A, \mathcal{T}_{X,Y})$ est un $(A, \mathcal{T}_X)$ -module topologique complet, séparé de type fini, mais $\mathcal{T}_M^A = \mathcal{T}_X \neq \mathcal{T}_{X,Y}$.

9.4.3. Topologies des anneaux de séries de puissances. Revenons à la situation du §9.4.1, et considérons l'anneau $A[[X_\bullet]] := A[[X_1, \dots, X_n]]$ des séries de puissances à coefficients dans l'anneau de Huber A , ainsi que sa partie

$$A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \subset A[[X_\bullet]]$$

formée des séries $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu$ telles que $\{\nu \in \mathbb{N}^n \mid a_\nu \notin \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle\}$ soit une partie finie de $\mathbb{N}^n$, pour tout $U \in \mathcal{U}$. Soit aussi

$$U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle := \{\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \mid a_\nu \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle \forall \nu \in \mathbb{N}^n\} \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

Rappelons que, par hypothèse, T_i engendre un idéal ouvert de A , pour $i = 1, \dots, n$. Si $T_i = \{1\}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on écrira simplement $A\langle X_\bullet \rangle$ au lieu de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$.

Proposition 9.91. *Avec la notation ci-dessus, on a :*

(i) La famille $\mathcal{U}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle} := (U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \mid U \in \mathcal{U})$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 d'un unique anneau topologique $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle})$.

(ii) $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle})$ est un anneau de Huber, $A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ est un sous-anneau de définition, et $I_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \subset A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ un idéal de définition.

(iii) L'homomorphisme structurel $h : A \rightarrow (A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle})$ est adique, et la partie $\Theta := \bigcup_{i=1}^n \{tX_i \mid t \in T_i\}$ est à puissances bornées dans $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle})$.

(iv) Supposons que T_i soit une partie bornée de A pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors A est séparé (resp. complet) si et seulement s'il en est de même pour $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet X_\bullet \rangle})$.

Démonstration. (i) : Remarquons d'abord :

Affirmation 9.92. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $\sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$. Alors il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $a_{\nu_\bullet} \cdot V \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$.

Preuve : Soient $V' \in \mathcal{U}$ avec $V' \cdot V' \subset U$, et $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ une partie finie telle que $a_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot V' \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Lambda$; alors, pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Lambda$ il vient $a_{\nu_\bullet} \cdot V' \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot V' \rangle \cdot V' \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$. Mais il existe $V'' \in \mathcal{U}$ tel que $a_{\nu_\bullet} \cdot V'' \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \Lambda$ (lemme 9.84). Ainsi, $V := V' \cap V''$ convient. $\diamond$

On voit aisément que $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ est un sous-groupe additif de $A[[X_\bullet]]$. Ensuite, soient $a := \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$, $b := \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$ des éléments de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, et $U \in \mathcal{U}$; posons $c := ab = \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} c_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$. D'après l'observation 9.92, il existe $V \in \mathcal{U}$ avec $a_{\nu_\bullet} \cdot V, b_{\nu_\bullet} \cdot V \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$. Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ une partie finie telle que $a_{\nu_\bullet}, b_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot V \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Lambda$. Alors, pour tous $\nu_\bullet, \mu_\bullet \in \mathbb{N}^n$ avec $\nu_\bullet \notin \Lambda$, on a $a_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot V \rangle$, d'où $a_{\nu_\bullet} b_{\mu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot V \rangle \cdot b_{\mu_\bullet} \subset \langle T(\nu_\bullet + \mu_\bullet) \cdot U \rangle$, et de même, si $\mu_\bullet \notin \Lambda$. Ainsi, $c_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus (\Lambda + \Lambda)$, et cela achève de montrer que $c \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$. Donc, $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ est un sous-anneau de $A[[X_\bullet]]$, et $\mathcal{U}_{\langle T_\bullet \rangle}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour un A -module topologique $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet \rangle})$; en outre, si $U, V \in \mathcal{U}$ et si $V \cdot V \subset U$, il est clair que $V\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \cdot V\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \subset U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$. En dernier lieu, soient a comme ci-dessus et $U \in \mathcal{U}$; d'après l'observation 9.92, il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $a_{\nu_\bullet} \cdot V \subset \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$, d'où $a \cdot V\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \subset U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$, et au vu de l'exercice 9.10(iii), on déduit aussitôt que $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet \rangle})$ est un anneau topologique.

(ii) Par construction, $A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ est un sous-anneau ouvert de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, et la famille $(I_0^k\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \mid k \in \mathbb{N})$ est un système fondamental d'idéaux ouverts de $A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$; il suffira alors de montrer que $I_0^k\langle T_\bullet X_\bullet \rangle = I_0^k \cdot A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et quitte à remplacer I_0 par I_0^k , on se ramène à vérifier que $I_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle \subset I_0 \cdot A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$. Soit alors $a_1, \dots, a_m$ un système fini de générateurs de I_0 ; pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$, tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $b \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot I_0^k \rangle$ il existe $b_1, \dots, b_m \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot I_0^{k-1} \rangle$ tels que $b = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$. Comme $(I_0^k \mid k \in \mathbb{N})$ est un système fondamental d'idéaux ouverts de A_0 , s'ensuit aussitôt que tout $x \in I_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ est une somme $x = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$ avec $x_1, \dots, x_m \in A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$.

(iii) La première assertion suit de la preuve de (ii). La deuxième assertion est claire, car $\Theta \subset A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$.

(iv) Si $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{\langle T_\bullet \rangle})$ est séparé, il en est de même pour A , car la topologie de A est induite par $\mathcal{T}_{\langle T_\bullet \rangle}$ via h . Réciproquement, si A est séparé et si chaque T_i est borné, alors $T(\nu_\bullet)$ est borné pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$ (remarque 9.19(i)), d'où $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle = 0$ pour tout tel $\nu_\bullet$; cela entraîne aussitôt que $\mathcal{T}_{\langle T_\bullet \rangle}$ est séparée (exercice 9.15). Ensuite, si $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ est complet, soit $p : A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \rightarrow A$ l'homomorphisme continu d'anneaux tel que $p(\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}) := a_{0_\bullet}$ pour tout $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ (avec $0_\bullet := (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$); pour tout filet de Cauchy $a_\bullet := (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A , le filet $(h(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est encore de Cauchy, donc il admet une limite $l \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, par suite $p(l)$ est une limite de $a_\bullet$ dans A (remarque 9.30(vi)), et cela montre que A est complet. En dernier lieu, si A est complet, soit $a_\bullet := (a_\lambda := \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\lambda, \nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$; comme $T(\nu_\bullet)$ est borné, il est clair que $a_{\bullet, \nu_\bullet} := (a_{\lambda, \nu_\bullet} \mid \lambda \in \Lambda)$ est un filet de Cauchy de A , pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$. Soit $b_{\nu_\bullet} \in A$ une limite de $a_{\bullet, \nu_\bullet}$, pour tout tel $\nu_\bullet$, et posons $b := \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$. Soit $U \in \mathcal{U}$, et choisissons $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $a_\lambda - a_\mu \in U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda, \mu \geq \lambda_0$. Au vu du lemme 9.84 et de la proposition 9.12(i), il vient $b_{\nu_\bullet} - a_{\lambda, \nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet$ et tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda \geq \lambda_0$. Soit $\Sigma \subset \mathbb{N}^n$ une partie finie telle que $a_{\lambda_0, \nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Sigma$; alors $b_{\nu_\bullet} \in \langle T(\nu_\bullet) \cdot U \rangle$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Sigma$, et par suite $b \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$. En outre, $b - a_\lambda \in U\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda \geq \lambda_0$, donc b est une limite de $a_\bullet$. $\square$

Rappelons que l'on a associé aussi à $T_\bullet$ un anneau topologique $(A[X]_{T_\bullet}, \mathcal{T}_{T_\bullet})$ dont l'anneau sous-jacent est $A[X_\bullet]$: voir la proposition 9.85.

Corollaire 9.93. Dans la situation du §9.4.3, soit $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ la complétion. Pour $i = 1, \dots, n$, soit $T_i \subset A$ une partie bornée, et $\overline{T}_i := j_A(T_i)$. On a :

(i) Il existe un unique morphisme de A -algèbres topologiques

$$h : A[X_\bullet]_{T_\bullet} \rightarrow \widehat{A\langle X_\bullet \rangle}_{\overline{T}_\bullet} \quad \text{tel que } h(X_1) = X_1, \dots, h(X_n) = X_n.$$

(ii) h se factorise à travers la complétion $A[X_\bullet]_{T_\bullet} \rightarrow \widehat{A[X_\bullet]_{T_\bullet}}$ et un isomorphisme d'anneaux topologiques $\widehat{A[X_\bullet]_{T_\bullet}} \xrightarrow{\sim} \widehat{A\langle X_\bullet \rangle}_{\overline{T}_\bullet}$.

(iii) Pour tout anneau de Huber B complet et séparé, tout $b_1, \dots, b_n \in B$, et tout homomorphisme continu d'anneaux $g : A \rightarrow B$ tel que $\bigcup_{i=1}^n \{g(t) \cdot b_i \mid t \in T_i\}$ soit à puissances bornées dans B , il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux $f : \widehat{A\langle X \rangle}_{T_\bullet} \rightarrow B$ tel que $f \circ h = g$ et $f(X_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. (i) : Cela découle des propositions 9.85(iv) et 9.91(ii,iii).

(ii) : Puisque j_A est adique (proposition 9.86(i)), chaque $\overline{T}_i$ est une partie bornée de $\widehat{A}$ (lemme 9.77(i)) ; par suite, $\widehat{A\langle X_\bullet \rangle}_{\overline{T}_\bullet}$ est complet et séparé (proposition 9.91(iv)). Par construction, l'image de h est dense dans $\widehat{A\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}$, et comme la topologie de A est induite par celle de $\widehat{A}$ via j_A (théorème 9.39(ii)), on voit aisément que $\mathcal{T}_{T_\bullet}$ est induite par $\mathcal{T}_{\overline{T}_\bullet}$ via h . Alors l'assertion découle de l'exercice 9.42(iii).

(iii) : D'abord, en vertu de la proposition 9.85(iv) on prolonge g en unique homomorphisme continu d'anneaux $f' : A[X_\bullet]_{T_\bullet} \rightarrow B$, et ensuite on factorise f' à travers un unique $f : \widehat{A\langle X \rangle}_{T_\bullet} \rightarrow B$, grâce à (ii). $\square$

Remarque 9.94. (i) Dans la situation de la définition 9.83, et compte tenu des propositions 9.82(i,ii) et 9.86(i), on voit que $B \widehat{\otimes}_A C$ est un anneau de Huber, et que les homomorphismes naturels $B \rightarrow B \widehat{\otimes}_A C \leftarrow C$ sont adiques.

(ii) Soient A un anneau de Huber complet et séparé, et $T'_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$, $T''_\bullet := (T_{n+1}, \dots, T_{n+m})$ deux suites de parties bornées de A , telles que $\langle T_i \cdot A \rangle$ soit un idéal ouvert de A , pour tout $i = 1, \dots, n+m$; posons aussi $T_\bullet := (T_1, \dots, T_{n+m})$. D'après la proposition 9.91, on a alors les morphismes adiques d'anneaux de Huber complets et séparés $A \rightarrow A\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet}$, $A \rightarrow A\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet}$, et $A \rightarrow A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$. Au vu de la propriété universelle de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, détaillée par le corollaire 9.93(iii), on déduit un unique isomorphisme de A -algèbres topologiques complètes et séparées :

$$A\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \widehat{\otimes}_A A\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet} \xrightarrow{\sim} A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \quad X'_i \otimes 1 \mapsto X_i \quad 1 \otimes X''_j \mapsto X_{n+j}.$$

Exemple 9.95. (i) Soit A un anneau de Huber complet et séparé, et notons

$$A\langle X^{\pm 1} \rangle$$

l'anneau des séries formelles $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k$ avec $a_k \in A$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et telles que pour tout voisinage U de 0 dans A il existe $k_U \in \mathbb{N}$ avec $a_k \in U$ pour tout $|k| \geq k_U$. Si $a := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k, b := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k X^k \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$, on définit

$$a + b := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k + b_k) X^k \quad \text{et} \quad a \cdot b := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k X^k$$

avec $c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (on voit aisément que cette série converge vers un unique $c_k \in A$). On vérifie aisément que $A\langle X^{\pm 1} \rangle$ est une A -algèbre bien définie avec ces lois d'addition et multiplication : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des sous-groupes additifs ouverts de A ; pour tout $U \in \mathcal{U}$, soit $U\langle X^{\pm 1} \rangle \subset A\langle X^{\pm 1} \rangle$ la partie des $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k$ avec $a_k \in U$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On munit $A\langle X^{\pm 1} \rangle$ de la topologie $\mathcal{T}$ telle que $(U\langle X^{\pm 1} \rangle \mid U \in \mathcal{U})$ soit un système fondamental de sous-groupes ouverts ; avec l'exercice 9.10(iii) on vérifie aisément que $(A\langle X^{\pm 1} \rangle, \mathcal{T})$ est un anneau topologique complet et séparé.

(ii) Munissons $B := A\langle X, Y \rangle / (1 - XY)$ de la topologie induite par la projection $A\langle X, Y \rangle \rightarrow B$; alors B est un anneau de Huber (exercice 9.81(v)), et on a un isomorphisme de A -algèbres topologiques :

$$\omega : A\langle X^{\pm 1} \rangle \xrightarrow{\sim} B \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \mapsto a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} (a_k X^k + a_{-k} Y^k).$$

En effet, soient $\mathcal{T}'$ la topologie de $A[X^{\pm 1}]$ induite par $\mathcal{T}$ via l'inclusion dans $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, et $\mathcal{T}''$ la topologie de $A[X, Y]$ induite par l'inclusion dans $A\langle X, Y \rangle$; soit en outre $\tau : A[X, Y] \rightarrow A[X^{\pm 1}]$ l'unique homomorphisme de A -algèbres avec $\tau(X) := X$ et $\tau(Y) := X^{-1}$. Puisque $A[X^{\pm 1}]$ est une partie dense de $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, ce dernier s'identifie naturellement avec la complétion de $(A[X^{\pm 1}], \mathcal{T}')$ (exercice 9.42(iii)), et de même, on sait que $A\langle X, Y \rangle$ est la complétion de $(A[X, Y], \mathcal{T}'')$ (corollaire 9.93(ii)). D'autre part, on voit aisément que τ est continue pour les topologies $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$, donc il se prolonge en un unique homomorphisme continu de A -algèbres topologiques $\hat{\tau} : A\langle X, Y \rangle \rightarrow A\langle X^{\pm 1} \rangle$ (remarque 9.47(iii)); explicitement, pour tout $f := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} X^i Y^j \in A\langle X, Y \rangle$ on a $\hat{\tau}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k X^k$ avec $b_k := \sum_{i-j=k} a_{ij}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (les détails sont laissés au lecteur). Evidemment, $\hat{\tau}(1 - XY) = 0$, donc $\hat{\tau}$ se factorise à travers un unique homomorphisme continu de A -algèbres topologiques $\lambda : B \rightarrow A\langle X^{\pm 1} \rangle$. Plus précisément, pour f comme ci-dessus, on a $\hat{\tau}(f) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i-j=k} a_{ij} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; si cette condition est vérifiée, définissons par récurrence : $c_{ij} := a_{ij}$ si $i = 0$ ou si $j = 0$, et $c_{i+1,j+1} := c_{ij} + a_{i+1,j+1}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. On voit aisément que $g := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} X^i Y^j \in A\langle X, Y \rangle$ et $f = (1 - XY) \cdot g$; par suite, λ est un isomorphisme d'anneaux. En dernier lieu, il vient aussitôt $\lambda \circ \omega = Id_{A\langle X, X^{-1} \rangle}$, et on voit aisément que ω est une application continue, d'où l'assertion. (Voir aussi l'exercice 10.20).

9.5. Le lemme d'Artin-Rees. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et M un A -module. Dans la section 9.1, on a déjà évoqué la question suivante :

- Si $N \subset M$ est un sous-module, la topologie I -adique de N est-elle induite par la topologie I -adique de M ? (Voir la remarque 9.14.)

On montrera dans cette section que cette question a réponse affirmative, si A est noethérien et si M est de type fini, et on en déduira plusieurs corollaires remarquables pour les complétions adiques des anneaux noethériens. Pour cela, on utilisera la notion auxiliaire suivante :

Définition 9.96. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, et $M_{\bullet} := (M_n \mid n \in \mathbb{N})$ une suite descendante de A -sous-modules de M . On dit que :

- $M_{\bullet}$ est une I -filtration de M , si $M_0 = M$ et $IM_n \subset M_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $M_{\bullet}$ est une I -filtration stable, si elle est une I -filtration, et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $IM_n = M_{n+1}$ pour tout $n \geq N$.

Par exemple, la filtration I -adique de M , i.e. la suite descendante $(I^n M \mid n \in \mathbb{N})$ est trivialement une I -filtration stable.

Lemme 9.97. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, et $M_{\bullet}, M'_{\bullet}$ deux I -filtrations stables de M . Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$M_{n+k} \subset M'_n \subset M_{n-k} \quad \forall n \geq k.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $M'_n = I^n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, une simple récurrence donne $M'_n \subset M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a $k \in \mathbb{N}$ tel que $M_{n+1} = IM_n$ pour tout $n \geq k$, d'où $M_{n+k} = I^n M_k \subset I^n M$ pour tout $n \geq 0$.

Ensuite, pour $M'_{\bullet}$ arbitraire, grâce au cas précédent on a $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$M_{n+k} \subset I^n M \subset M_{n-k} \quad M'_{n+k'} \subset I^n M \subset M'_{n-k'} \quad \forall n \geq k, k'.$$

D'où : $M_{n+k+k'} \subset I^{n+k'} M \subset M'_n \subset I^{n-k'} M \subset M_{n-k-k'}$ pour tout $n \geq k + k'$. $\square$

Soient maintenant A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, et $M_\bullet$ une I -filtration de M . On munit la somme directe

$$\mathcal{R}(A, I) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n$$

de la structure d'anneau gradué (voir §1.1.6) avec loi de multiplication donnée par l'unique application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire dont la restriction aux composantes homogènes de degrés n et m est la multiplication de l'anneau A :

$$I^n \times I^m \rightarrow I^{n+m} \quad (a, b) \mapsto ab \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

En particulier, la composante homogène de degré 0 de est $I^0 := A$, et ce dernier est donc naturellement un sous-anneau de $\mathcal{R}(A, I)$. On appelle $\mathcal{R}(A, I)$ l'*algèbre de Rees* de (A, I) . De même, on munit la somme directe

$$\mathcal{R}(M_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

de la structure de $\mathcal{R}(A, I)$ -module gradué pour laquelle la multiplication scalaire est l'unique application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire dont la restriction aux composantes homogènes

$$I^n \times M_m \rightarrow M_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

est donnée par la multiplication scalaire du A -module M . On appelle $\mathcal{R}(M_\bullet)$ le *module de Rees* de la I -filtration $M_\bullet$.

Remarque 9.98. (i) Noter que la A -algèbre $\mathcal{R}(A, I)$ est engendrée par sa composante homogène I de degré 1, qui est un A -module de type fini, si A est noethérien ; en particulier, si A est noethérien, $\mathcal{R}(A, I)$ est une A -algèbre de type fini, donc est aussi un anneau noethérien (théorème 6.65).

(ii) Soient M et N deux A -modules, $M_\bullet$ et $N_\bullet$ des I -filtrations de M et N respectivement. Soit aussi $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme *filtré* de A -modules (*i.e.* tel que $f(M_n) \subset N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: voir la définition 9.64(iii)). Alors f induit un morphisme évident de $\mathcal{R}(A, I)$ -modules gradués (voir §1.1.6) :

$$\mathcal{R}(f) : \mathcal{R}(M_\bullet) \rightarrow \mathcal{R}(N_\bullet)$$

dont la restriction aux composantes homogènes de degré n est $f|_{M_n} : M_n \rightarrow N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 9.99. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, M un A -module de type fini, $M_\bullet$ une I -filtration de M . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\mathcal{R}(M_\bullet)$ est un $\mathcal{R}(A, I)$ -module de type fini.
- (b) $M_\bullet$ est une I -filtration stable.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit le $\mathcal{R}(A, I)$ -sous-module de $\mathcal{R}(M_\bullet)$:

$$Q_n := \left(\bigoplus_{i=0}^n M_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} I^{j+1} M_n \right).$$

Evidemment, $Q_n \subset Q_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n = \mathcal{R}(M_\bullet)$. De plus, chaque Q_n est un $\mathcal{R}(A, I)$ -module de type fini, car il est engendré par $\bigoplus_{i=0}^n M_i$, et M_i est un A -module de type fini pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme on a déjà observé que $\mathcal{R}(A, I)$ est noethérien, il s'ensuit que (a) $\Leftrightarrow$ la suite $(Q_n \mid n \in \mathbb{N})$ est stationnaire $\Leftrightarrow$ (b). $\square$

Proposition 9.100. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, M un A -module de type fini, $M' \subset M$ un sous-module, $M_\bullet$ une I -filtration stable de M . Alors :

- (i) (Lemme d'Artin-Rees) $(M' \cap M_n \mid n \in \mathbb{N})$ est une I -filtration stable de M' .
- (ii) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M' \cap I^n M = I^{n-k}(M' \cap I^k M)$ pour tout $n \geq k$.

Démonstration. (i) : On voit aisément que $M'_\bullet := (M' \cap M_n \mid n \in \mathbb{N})$ est une I -filtration de M' . On a une inclusion évidente de $\mathcal{R}(A, I)$ -modules

$$\mathcal{R}(M'_\bullet) \subset \mathcal{R}(M_\bullet).$$

De plus, $\mathcal{R}(A, I)$ est noethérien, et par le lemme 9.99, on sait que $\mathcal{R}(M_\bullet)$ est un $\mathcal{R}(A, I)$ -module de type fini ; il s'ensuit que $\mathcal{R}(M'_\bullet)$ est un $\mathcal{R}(A, I)$ -module de type fini, et l'assertion découle encore du lemme 9.99.

(ii) découle de (i), quitte à prendre pour $M_\bullet$ la filtration I -adique de M . $\square$

Le lemme d'Artin-Rees fournit déjà la réponse à la question posée au début de la section : il nous dit en particulier que la filtration $(M' \cap I^n M \mid n \in \mathbb{N})$ est stable, et au vu du lemme 9.97, la topologie I -adique de M' est alors induite par celle de M . L'estimation plus précise de la proposition 9.100(ii) nous sera utile plus tard.

9.5.1. Complétions d'anneaux noethériens. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, et $n \in \mathbb{N}$; on munit A , M et I^n des topologies I -adiques. Dans cette situation, on a déjà remarqué que la complétion $\widehat{A}$ de A est naturellement une A -algèbre topologique, et la complétion $\widehat{M}$ de M (resp. $\widehat{I^n}$ de I^n) est naturellement un $\widehat{A}$ -module (resp. un idéal ouvert de $\widehat{A}$). Les applications de complétion $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ et $j_M : M \rightarrow \widehat{M}$ induisent une application $\widehat{A}$ -linéaire

$$\omega_M : \widehat{A} \otimes_A M \rightarrow \widehat{M} \quad a \otimes m \mapsto a \cdot j_M(m)$$

et toute application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} \otimes_A M & \xrightarrow{\omega_M} & \widehat{M} \\ \widehat{A} \otimes_A f \downarrow & & \downarrow \widehat{f} \\ \widehat{A} \otimes_A N & \xrightarrow{\omega_N} & \widehat{N} \end{array}$$

où $\widehat{N}$ est la complétion de N pour la topologie I -adique, et $\widehat{f}$ est la complétion de f , comme expliqué par la remarque 9.47(ii).

Lemme 9.101. *Dans la situation ci-dessus, soient I et M de type fini. Alors :*

- (i) $\widehat{I^n} = I^n \widehat{A} = (\widehat{I})^n$.
- (ii) L'application naturelle $I^n/I^{n+1} \rightarrow \widehat{I^n}/\widehat{I^{n+1}}$ est bijective.
- (iii) La topologie du $\widehat{A}$ -module $\widehat{M}$ est $I\widehat{A}$ -adique.
- (iv) $\widehat{I} \subset \mathcal{J}(\widehat{A})$.

Démonstration. (i) : La première identité suit du corollaire 9.61(i). On déduit que $\widehat{I^n} = (I\widehat{A})^n = I^n \widehat{A}$, d'où la deuxième identité.

(ii) : D'après l'exercice 9.49(iii) l'application naturelle $I^n/I^{n+1} \rightarrow \widehat{I^n}/\widehat{I^{n+1}}$ est bijective, donc il suffit d'appliquer (i).

(iii) : C'est un cas particulier du corollaire 9.61(ii).

(iv) : D'après (i) et (iii), la topologie de $\widehat{A}$ est $\widehat{I}$ -adique, donc $\widehat{I} \subset \widehat{A}^\circ$. L'assertion découle alors de l'exercice 9.88(iii). $\square$

Proposition 9.102. (i) *Dans la situation du §9.5.1, supposons en outre que A soit noethérien, et M de type fini. Alors ω_M est un isomorphisme de $\widehat{A}$ -modules.*

(ii) *Si A est noethérien, et si la topologie I -adique de A est complète et séparée, alors il en est de même pour la topologie I -adique de M .*

Démonstration. (i) : Choisissons une surjection A -linéaire $f : A^n \rightarrow M$, et munissons A^n de la topologie I -adique $\mathcal{T}_{A^n, I}$, et $M' := \text{Ker } f$ de la topologie $\mathcal{T}_{M'}$ induite par $\mathcal{T}_{A^n, I}$ via l'inclusion $M' \rightarrow A^n$. D'après la proposition 9.12(iii), la topologie I -adique de M est induite par $\mathcal{T}_{A^n, I}$ via f . De plus, $\mathcal{T}_{M'}$ est la topologie I -adique, d'après le lemme d'Artin-Rees. Soit $\widehat{M'}$ la complétion de M' ; compte tenu du corollaire 9.58 et de la proposition

3.11, on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{A} \otimes_A M' & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A A^n & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 \omega_{M'} \downarrow & & \downarrow \omega_{A^n} & & \downarrow \omega_M & & \\
 0 & \longrightarrow & \hat{M}' & \longrightarrow & \hat{A}^n & \longrightarrow & \hat{M} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

à lignes exactes. Or, on voit aisément que ω_{A^n} est un isomorphisme (e.g. en vertu de l'exercice 9.43), et par le lemme du serpent, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \omega_M \rightarrow \text{Coker } \omega_{M'} \rightarrow 0 \rightarrow \text{Coker } \omega_M \rightarrow 0$$

ce qui montre que $\text{Coker } \omega_M = 0$, et cela pour tout A -module M de type fini. En particulier, il vient aussi $\text{Coker } \omega_{M'} = 0$, et la même suite exacte montre alors que $\text{Ker } \omega_M = 0$, d'où l'assertion. L'assertion (ii) découle aussitôt de (i). $\square$

Corollaire 9.103. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, et munissons A de la topologie I -adique. On a :

- (i) La complétion $\hat{A}$ de A est une A -algèbre plate.
- (ii) $\hat{A}$ est une A -algèbre fidèlement plate si et seulement si $I \subset \mathcal{J}(A)$.

Démonstration. (i) : Soient $J \subset A$ un idéal, $i : J \rightarrow A$ l'inclusion, et munissons J de sa topologie I -adique $\mathcal{T}_J$; d'après la proposition 3.78, il suffit de montrer que l'application $\hat{A} \otimes_A i : \hat{A} \otimes_A J \rightarrow \hat{A} \otimes_A A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$ est injective. Mais cette dernière est identifiée naturellement avec la complétion $\hat{i} : \hat{J} \rightarrow \hat{A}$ de i , par la proposition 9.102(i). D'autre part, le lemme d'Artin-Rees identifie $\mathcal{T}_J$ avec la topologie induite via i par la topologie I -adique de A , donc l'assertion suit du corollaire 9.58.

(ii) : D'après le lemme 9.101(ii), l'application de complétion $j : A \rightarrow \hat{A}$ induit un isomorphisme $A/I \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\hat{I}$; en particulier, l'image de l'application induite $\phi : \text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } A$ contient la partie fermée $V(I)$. Si $I \subset \mathcal{J}(A)$, il s'ensuit que l'image de ϕ contient $\text{Max } A$ (corollaire 1.51(ii)), et alors ϕ est surjective, en vertu de (i) et du théorème 3.84(ii). Si $I \not\subset \mathcal{J}(A)$, soit $\mathfrak{m} \in \text{Max } A \setminus V(I)$; pour conclure, il suffit de montrer que $\mathfrak{m}$ n'est pas dans l'image de ϕ . Supposons par l'absurde, qu'il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \hat{A}$ tel que $\phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$, et soit $\mathfrak{n} \in \text{Max } \hat{A}$ une spécialisation de $\mathfrak{p}$; il vient $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, et d'autre part $\hat{I} \subset \mathcal{J}(\hat{A}) \subset \mathfrak{n}$ (exercice 9.88(iii)), d'où $I = j^{-1}(\hat{I}) \subset j^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, contradiction. $\square$

Corollaire 9.104. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, et $I \subset \mathfrak{m}$ un idéal. On munit A et $\mathfrak{m}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) des topologies I -adiques. Alors la complétion $\hat{A}$ de A est un anneau local dont l'idéal maximal est la complétion $\hat{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$, et on a

$$(*) \quad \widehat{\mathfrak{m}^n} = \hat{\mathfrak{m}}^n = \mathfrak{m}^n \hat{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On a $I \subset \mathcal{J}(A) = \mathfrak{m}$ et $\hat{I} \subset \mathcal{J}(\hat{A})$, d'après l'exercice 9.88(iii); d'autre part, l'application de complétion $j : A \rightarrow \hat{A}$ induit un isomorphisme d'anneaux $A/I \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\hat{I}$ (lemme 9.101(ii)). Au vu du corollaire 1.51(ii), $\text{Spec}(j)$ se restreint alors en un homéomorphisme $\text{Max } \hat{A} \xrightarrow{\sim} \text{Max } A$. Cela montre que $\hat{A}$ est un anneau local. En outre, $\mathfrak{m}$ est ouvert dans A , par la proposition 9.12(i), donc $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m}$ est un corps, par l'exercice 9.49(iii), i.e. $\hat{\mathfrak{m}}$ est l'idéal maximal de $\hat{A}$.

Ensuite, on a $I^n \hat{A} \subset \mathfrak{m}^n \hat{A} \subset \hat{\mathfrak{m}}^n \subset \widehat{\mathfrak{m}^n}$, donc $\mathfrak{m}^n \hat{A}$, $\hat{\mathfrak{m}}^n$ et $\widehat{\mathfrak{m}^n}$ sont des idéaux ouverts pour tout $n \in \mathbb{N}$, au vu du lemme 9.101(i); d'autre part, on a

$$\mathfrak{m}^n \subset j_A^{-1}(\mathfrak{m}^n \hat{A}) \subset j_A^{-1}(\hat{\mathfrak{m}}^n) \subset j_A^{-1}(\widehat{\mathfrak{m}^n}) = \mathfrak{m}^n$$

(la dernière égalité découle de l'observation 9.40(ii)) d'où $j_A^{-1}(\widehat{\mathfrak{m}^n}) = j_A^{-1}(\mathfrak{m}^n \hat{A}) = j_A^{-1}(\hat{\mathfrak{m}}^n)$, et il suffit d'utiliser l'exercice 9.42(ii) pour obtenir (*). $\square$

Proposition 9.105. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, M un A -module de type fini. On a :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = \bigcup_{a \in I} \text{Ann}_M(1 + a).$$

Démonstration. Posons $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M$, et soit $\mathcal{T}_E$ la topologie induite sur E par la topologie I -adique de M ; évidemment l'unique voisinage de 0 dans E est le module E lui-même. D'autre part le lemme d'Artin-Rees nous dit que $\mathcal{T}_E$ est aussi la topologie I -adique de E , donc $E = IE$. Il existe alors $a \in I$ tel que $(1 + a) \cdot E = 0$ (corollaire 3.48). Noter aussi que E est le noyau de l'application de complétion I -adique $j_M : M \rightarrow \widehat{M}$. Or, si $x \in M$ et si $(1 + a) \cdot x = 0$ pour quelque $a \in I$, on déduit $(1 + a) \cdot j_M(x) = 0$, d'où $j_M(x) = 0$, en vertu du lemme 9.101(iv) et du théorème 1.50(i); par suite, $x \in E$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 9.106. (Théorème d'intersection de Krull) Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, et M un A -module de type fini. Alors on a :

- (i) Si A est intègre et $I \neq A$, la topologie I -adique de A est séparée.
- (ii) Si $I \subset \mathcal{J}(A)$, la topologie I -adique de M est séparée, et tout sous-module de M est une partie fermée.

Démonstration. (i) : D'après l'exercice 9.15, on revient à montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = 0$; cela découle aussitôt de la proposition 9.105 (pour $M := A$).

(ii) : Soit $N \subset M$ un sous-module; alors N est une partie fermée si et seulement si la topologie I -adique de M/N est séparée. Donc, il suffit de vérifier que M est séparé. Cela revient à l'identité : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$; mais si $I \subset \mathcal{J}(A)$ on a $1 + I \subset A^\times$ (théorème 1.50(i)), et on conclut encore avec la proposition 9.105. $\square$

Problème 9.107. (Théorème de Chevalley) Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien complet pour sa topologie $\mathfrak{m}$ -adique, M un A -module de type fini. Montrer que toute topologie séparée et A -linéaire sur M est plus fine que la topologie $\mathfrak{m}$ -adique.

Exercice 9.108. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module fidèle de type fini, et $\mathcal{T}_{M,I}$ la topologie I -adique de M .

- (i) Montrer que si $\mathcal{T}_{M,I}$ est complète et séparée, alors $I \subset \mathcal{J}(A)$.
- (ii) Si en outre A est noethérien, montrer que $\mathcal{T}_{M,I}$ est complète et séparée si et seulement s'il en est de même pour la topologie I -adique de A .

9.5.2. Soient maintenant A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, et $M_\bullet := (M_n \mid n \in \mathbb{N})$ une I -filtration de M . On pose

$$G(A, I) := A/I \otimes_A \mathcal{R}(A, I) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1} \quad G(M_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n / M_{n+1}.$$

Remarque 9.109. (i) Noter que $G(A, I)$ coïncide avec l'anneau gradué $\text{gr}_\bullet(A)$ associé à la filtration I -adique $A_\bullet$ de A (voir §9.3.1); de même, $(M, M_\bullet)$ est un $(A, A_\bullet)$ -module filtré, et $G(M_\bullet)$ est le $\text{gr}_\bullet(A)$ -module gradué $\text{gr}_\bullet(M)$ associé à la filtration $M_\bullet$. Ainsi, $G(M_\bullet)$ est naturellement un $G(A, I)$ -module gradué.

(ii) Posons $M' := M_1$, et munissons M' de la I -filtration $M'_\bullet$ telle que $M'_n := M_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on déduit des inclusions de $\mathcal{R}(A, I)$ -modules :

$$I \cdot \mathcal{R}(M_\bullet) \subset \mathcal{R}(M'_\bullet) \subset \mathcal{R}(M_\bullet).$$

Ainsi, $G(M_\bullet) = \mathcal{R}(M_\bullet) / \mathcal{R}(M'_\bullet)$ est un quotient du $G(A, I)$ -module $A/I \otimes_A \mathcal{R}(M_\bullet)$.

(iii) Soit N un deuxième A -module muni d'une I -filtration $N_\bullet := (N_n \mid n \in \mathbb{N})$; d'après la remarque 9.65, tout homomorphisme filtré $f : (M, M_\bullet) \rightarrow (N, N_\bullet)$ de A -modules filtrés induit un morphisme de $G(A, I)$ -modules gradués

$$G(f) := \text{gr}_\bullet(f) : G(M_\bullet) \rightarrow G(N_\bullet).$$

Lemme 9.110. Avec la notation ci-dessus, supposons que A/I soit noethérien et que I soit de type fini. Munissons A et I des topologies I -adiques ; on a :

(i) $G(A, I)$ est un anneau noethérien.

(ii) La complétion $A \rightarrow \widehat{A}$ induit un isomorphisme : $G(A, I) \xrightarrow{\sim} G(\widehat{A}, \widehat{I})$.

Démonstration. (i) : Si $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ est un système fini de générateurs du A/I -module de type fini I/I^2 , on voit aisément que la A/I -algèbre $G(A, I)$ est engendré par $x_\bullet$, donc l'assertion suit du théorème 6.65.

(ii) découle aussitôt du lemme 9.101(ii). $\square$

Lemme 9.111. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M, N deux A -modules, $M_\bullet$ et $N_\bullet$ des I -filtrations sur M et N respectivement, $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme filtré de A -modules. On munit M et N des topologies $\mathbb{Z}$ -linéaires $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_N$ définies par les suites $M_\bullet$ et $N_\bullet$, et on dénote $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$ les respectives complétions. On a :

(i) $f : (M, \mathcal{T}_M) \rightarrow (N, \mathcal{T}_N)$ est continue, donc induit une application $\widehat{f} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$.

(ii) Si $G(f) : G(M_\bullet) \rightarrow G(N_\bullet)$ est injective, $\widehat{f} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$ est injective.

(iii) Si $G(f)$ est surjective, $\widehat{f}$ est surjective.

Démonstration. L'assertion (i) découle aisément de la remarque 9.3(ii) et la proposition 9.12(i). Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\widehat{M}_n$ (resp. $\widehat{N}_n$) la complétion de M_n (resp. de N_n) pour la topologie induite par $\mathcal{T}_M$ via l'inclusion $M_n \rightarrow M$ (resp. par $\mathcal{T}_N$ via l'inclusion $N_n \rightarrow N$) ; d'après la remarque 9.41, la filtration $\widehat{M}_\bullet := (\widehat{M}_n | n \in \mathbb{N})$ (resp. $\widehat{N}_\bullet := (\widehat{N}_n | n \in \mathbb{N})$) est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour la topologie de $\widehat{M}$ (resp. de $\widehat{N}$). Soit en outre $A_\bullet$ la filtration I -adique de A ; puisque $I^n M_k \subset M_{k+n}$, il vient $I^n \widehat{M}_k \subset \widehat{M}_{k+n}$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, donc $(\widehat{M}, \widehat{M}_\bullet)$ est un $(A, A_\bullet)$ -module filtré, et de même pour $(\widehat{N}, \widehat{N}_\bullet)$. Soient $\text{gr}_\bullet(\widehat{M})$ et $\text{gr}_\bullet(\widehat{N})$ les $\text{gr}_\bullet(A)$ -modules gradués associés respectifs. D'après l'exercice 9.49(iii), les complétions $M \rightarrow \widehat{M}$ et $N \rightarrow \widehat{N}$ induisent des isomorphismes

$$G(M_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_\bullet(\widehat{M}) \quad G(N_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_\bullet(\widehat{N})$$

qui identifient $G(f)$ avec $\text{gr}_\bullet(\widehat{f}) : \text{gr}_\bullet(\widehat{M}) \rightarrow \text{gr}_\bullet(\widehat{N})$. Les assertions (ii) et (iii) découlent alors de la proposition 9.68(ii,iii). $\square$

Proposition 9.112. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, M un A -module, $M_\bullet := (M_n | n \in \mathbb{N})$ une I -filtration de M . On suppose que :

- La topologie I -adique de A est complète.
- La topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire de M définie par $M_\bullet$ est séparée.
- $G(M_\bullet)$ est un $G(A, I)$ -module de type fini.

Alors M est un A -module de type fini.

Démonstration. Par hypothèse, il existe un système fini de générateurs $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ de $G(M_\bullet)$. On peut supposer chaque $\bar{x}_i$ homogène de degré $k(i)$ (cf. la solution de l'exercice 6.75(i)), et on choisit un représentant $x_i \in M_{k(i)}$ de la classe $\bar{x}_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. On pose $F^{(i)} := A$ pour $i = 1, \dots, n$, ainsi que

$$F_j^{(i)} := \begin{cases} A & \text{si } j \leq k(i) \\ I^{j-k(i)} & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

On munit $F := F^{(1)} \oplus \dots \oplus F^{(n)} = A^n$ de la I -filtration stable $F_\bullet$ telle que

$$F_j := F_j^{(1)} \oplus \dots \oplus F_j^{(n)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de F ; on considère l'application A -linéaire

$$\phi : F \rightarrow M \quad e_i \mapsto x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On voit aisément que $\phi(F_j) \subset M_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En outre, on a $e_i \in F_{k(i)}$, et l'application $G(\phi) : G(F_\bullet) \rightarrow G(M_\bullet)$ envoie la classe $\bar{e}_i \in F_{k(i)}/F_{k(i)+1}$ de e_i sur $\bar{x}_i \in M_{k(i)}/M_{k(i)+1}$, pour tout $i = 1, \dots, n$; en particulier, $G(\phi)$ est surjective. Munissons M et F des topologies $\mathbb{Z}$ -linéaires définies par les filtrations $M_\bullet$ et $F_\bullet$; on obtient un diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ j_F \downarrow & & \downarrow j_M \\ \widehat{F} & \xrightarrow{\widehat{\phi}} & \widehat{M} \end{array}$$

où j_F et j_M sont les applications de complétion, et $\widehat{\phi}$ est l'application induite par ϕ sur les complétions de F et M . Cette dernière est aussi surjective, en vertu du lemme 9.111(iii). D'autre part, la topologie de F coïncide avec la topologie I -adique, par le lemme 9.97, et comme A est complet pour la topologie I -adique, on voit que j_F est surjective. En outre, j_M est injective, car la topologie de M est séparée; on conclut que ϕ est aussi surjective, d'où la proposition. $\square$

Théorème 9.113. *Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, $\widehat{A}$ la complétion I -adique de A . Alors, si A/I est noethérien, il en est de même pour $\widehat{A}$.*

Démonstration. Il faut montrer que tout idéal $J \subset \widehat{A}$ est de type fini. Pour cela, rappelons que la topologie de $\widehat{A}$ est $\widehat{I}$ -adique (lemme 9.101(i,iii)), et munissons J de la $\widehat{I}$ -filtration $J_\bullet$ telle que $J_n := J \cap \widehat{I}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu du lemme 9.110(ii) il vient un homomorphisme injectif de $G(A, I)$ -modules :

$$G(J_\bullet) \rightarrow G(\widehat{A}, \widehat{I}) \simeq G(A, I)$$

et $G(A, I)$ est noethérien d'après le lemme 9.110(i), donc $G(J_\bullet)$ est un idéal de type fini de $G(A, I)$. En outre, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widehat{I}^n = 0$. L'assertion découle maintenant aussitôt de la proposition 9.112 et de l'exercice 9.15. $\square$

Corollaire 9.114. *Soient A un anneau noethérien, $I, J \subset A$ deux idéaux, et M un A -module de type fini. Munissons tout sous-module $N \subset M$ de sa topologie I -adique, et notons $i_N : N \rightarrow M$ l'inclusion, et $\widehat{N}$ la complétion de N . Alors :*

(i) *Pour tout tel N , la complétion $\widehat{i}_N : \widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$ de i_N est injective, la topologie de $\widehat{N}$ est induite via $\widehat{i}_N$ par $\widehat{M}$, et $\widehat{i}_N(\widehat{N})$ est l'adhérence de l'image de N dans $\widehat{M}$.*

(ii) *L'image de $\widehat{i}_{JM}$ est le sous-module $\widehat{JM}$, donc $\widehat{i}_{JM}$ induit une identification de A -modules topologiques $\widehat{JM} \xrightarrow{\sim} \widehat{JM}$, pour la topologie I -adique de $\widehat{JM}$.*

Démonstration. (i) : D'après le lemme d'Artin-Rees, la topologie de N est induite par M via i_N , donc les assertions suivent du corollaire 9.58 et de l'exercice 9.49(ii).

(ii) : Soit $\widehat{A}$ la complétion I -adique de A , et noter que $\widehat{M}$ est un $\widehat{A}$ -module de type fini (proposition 9.102(i)) et sa topologie est $I\widehat{A}$ -adique (lemme 9.101(iii)); en outre, $\widehat{A}$ est noethérien, par le théorème 9.113, et $I\widehat{A} \subset \mathcal{J}(\widehat{A})$ (lemme 9.101(i,iv)). Par le corollaire 9.106(ii), le $\widehat{A}$ -sous-module $\widehat{JM}$ est alors une partie fermée de $\widehat{M}$. En outre, la topologie de $\widehat{JM}$ est $I\widehat{A}$ -adique (lemme 9.101(iii)), et d'après (i), l'application $\widehat{i}_{JM}$ est injective, et son image est l'adhérence de l'image $\overline{JM}$ de JM dans $\widehat{M}$. Mais on voit aisément que $\overline{JM}$ est dense dans $\widehat{JM}$, d'où l'assertion. $\square$

Exemple 9.115. Soient A un anneau noethérien, et $I \subset A[T_\bullet] := A[T_1, \dots, T_n]$ l'idéal engendré par $T_1, \dots, T_n$. La topologie I -adique de $A[T_\bullet]$ est aussi appelée $T_\bullet$ -adique. L'anneau des séries formelles $A[[T_1, \dots, T_n]]$ est la complétion $T_\bullet$ -adique de $A[T_\bullet]$; il est donc noethérien (théorème 9.113), et sa topologie est $T_\bullet$ -adique.

Exercice 9.116. Soit A un anneau ; pour tout idéal $I \subset A$ notons par $\widehat{A}_I$ la complétion I -adique de A , et par $j_{A,I} : A \rightarrow \widehat{A}_I$ l'application de complétion.

(i) Si A est noethérien et si I est engendré par une suite $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de A , exhiber un isomorphisme d'anneaux topologiques

$$\psi : A[[T_1, \dots, T_n]] / (T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n) \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_I$$

où l'on munit $A[[T_\bullet]] := A[[T_1, \dots, T_n]]$ de sa topologie $T_\bullet$ -adique comme dans l'exemple 9.115, et son quotient $A[[T_\bullet]] / (T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$ de la topologie induite par $A[[T_\bullet]]$ via la projection. Cela fournit une description assez explicite de la complétion de A , en termes de *générateurs topologiques* et relations algébriques.

(ii) Soient $I \subset J \subset A$ deux idéaux. Montrer que $j_{A,J} : A \rightarrow \widehat{A}_J$ se factorise à travers $j_{A,I}$ et un unique homomorphisme continu d'anneaux

$$\phi_{I,J} : \widehat{A}_I \rightarrow \widehat{A}_J.$$

(iii) Soient $I, J \subset A$ deux idéaux. Par (ii) on déduit un diagramme commutatif d'homomorphismes continus d'anneaux

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{A}_{I \cap J} & \xrightarrow{\phi_{I \cap J, I}} & \widehat{A}_I \\ \phi_{I \cap J, J} \downarrow & & \downarrow \phi_{I, I+J} \\ \widehat{A}_J & \xrightarrow{\phi_{J, I+J}} & \widehat{A}_{I+J}. \end{array}$$

Montrer que si A est noethérien, $(*)$ est *cartésien* et *cocartésien* dans $A - \mathbf{Mod}$ et dans la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop}$ formée des anneaux topologiques *séparés*, i.e. :

- L'application induite $\hat{i} : \widehat{A}_{I \cap J} \rightarrow B := \widehat{A}_I \times \widehat{A}_J$ est injective et son image est le sous-anneau $C := \{(a, a') \in B \mid \phi_{I, I+J}(a) = \phi_{J, I+J}(a')\}$.
- L'application A -linéaire $\hat{p} : B \rightarrow \widehat{A}_{I+J} : (a, a') \mapsto \phi_{I, I+J}(a) - \phi_{J, I+J}(a')$ est surjective et son noyau est C .

Exercice 9.117. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini tel que A/I est noethérien, P un A -module plat, et M un A -module. On dénote $\widehat{A}, \widehat{P}, M \widehat{\otimes}_A P$ les complétions I -adiques de $A, P, M \otimes_A P$, et soit $f_{M,P} : M \otimes_A \widehat{P} \rightarrow M \widehat{\otimes}_A P$ l'homomorphisme $\widehat{A}$ -linéaire naturel. Montrer que :

- (i) Si M est de type fini, $f_{M,P}$ est un isomorphisme.
- (ii) $\widehat{P}$ est un $\widehat{A}$ -module plat. (Voir aussi l'exercice 10.52.)

Problème 9.118. Soient A un anneau noethérien, $I \subset J \subset A$ deux idéaux, M un A -module ; notons par $\mathcal{T}_{M,I}$ la topologie I -adique de M , et par $\mathcal{T}_{M,J}$ (resp. $\mathcal{T}_{\overline{M},J}$) la topologie J -adique de M (resp. de $\overline{M} := M/IM$). Supposons en outre que M soit plat ou de type fini. Montrer les assertions suivantes :

(i) Si $\mathcal{T}_{M,I}$ est complète et séparée, alors $\mathcal{T}_{M,J}$ est complète et séparée si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{T}_{\overline{M},J}$.

(ii) Soit $\widehat{M}_I$ (resp. $\widehat{M}_J$) la complétion I -adique (resp. J -adique) de M . Si $\mathcal{T}_{\overline{M},J}$ est complète et séparée, alors l'application naturelle $\alpha : \widehat{M}_I \rightarrow \widehat{M}_J$ est bijective.

9.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 9.4 : Soit I une catégorie, et considérons un foncteur

$$A_\bullet : I \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop} \quad i \mapsto (A_i, \mathcal{T}_i) \quad (\phi : i \rightarrow j) \mapsto (A_\phi : A_i \rightarrow A_j).$$

Notons aussi par $F_{\mathbf{Alg}} : \mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ et $F_{\mathbf{Top}} : \mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ les foncteurs d'oubli évidents : ainsi, à tout anneau topologique $(A, \mathcal{T}_A)$, le foncteur $F_{\mathbf{Alg}}$ associe l'anneau A , et le foncteur $F_{\mathbf{Top}}$ associe l'espace topologique sous-jacent $(A, \mathcal{T}_A)$. Rappelons que la limite de $F_{\mathbf{Alg}} \circ A_\bullet : I \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ est représentée par l'ensemble des suites cohérentes $L \subset A := \prod_{i \in \mathbf{Ob}(I)} A_i$, muni de la structure d'anneau héritée par celle du

produit A (exemple 2.22(iii)); de même, la limite de $F_{\text{Top}} \circ A_{\bullet} : I \rightarrow \text{Top}$ est représentée par l'ensemble L , muni de la topologie $\mathcal{T}_L$ induite par la topologie $\mathcal{T}_A$ du produit A des espaces topologiques $(A_i, \mathcal{T}_i)$ (problème 2.25(iii.a)). Soit $(q_i : L \rightarrow A_i \mid i \in \text{Ob}(I))$ le cône universel commun pour les limites de $F_{\text{Alg}} \circ A_{\bullet}$ et $F_{\text{Top}} \circ A_{\bullet}$; ainsi, pour tout cône $(f_i : (B, \mathcal{T}_B) \rightarrow (A_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in \text{Ob}(I))$ de base $A_{\bullet}$, il existe une unique application $f : (B, \mathcal{T}_B) \rightarrow (L, \mathcal{T}_L)$ avec $q_i \circ f = f_i$ pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, et telle que f soit à la fois un homomorphisme d'anneaux et une application continue des espaces topologiques sous-jacents. Il reste donc seulement à vérifier que $(L, \mathcal{T}_L)$ est un anneau topologique, et on est aussitôt ramené à montrer qu'il en est de même pour le couple $(A, \mathcal{T}_A)$. Soient alors $x_{\bullet} := (x_i \mid i \in \text{Ob}(I)), y_{\bullet} := (y_i \mid i \in \text{Ob}(I)) \in A$, et pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, soit $p_i : A \rightarrow A_i$ la projection canonique; pour tout voisinage U de $x_i + y_i$ dans A_i il existe des voisinages U' de x_i et U'' de y_i dans A_i tels que $u' + u'' \subset U$ pour tous $u' \in U'$ et $u'' \in U''$, d'où $u'_{\bullet} + u''_{\bullet} \in p_i^{-1}U$ pour tous $u'_{\bullet} \in p_i^{-1}U'$ et $u''_{\bullet} \in p_i^{-1}U''$. Cela montre la continuité de l'addition de A , et de même on vérifie la continuité de la multiplication, d'où l'assertion.

La preuve de la complétude de $A - \text{ModTop}$ est analogue, compte tenu de l'exemple 2.22(ii) : les détails sont laissés aux soins du lecteur. Avec la notation ci-dessus, afin de montrer que $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{\mathbb{Z}\text{-lin}}$ est complète, d'après le lemme 2.52(i) il suffit de vérifier que si $\mathcal{T}_i$ est une topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, alors $\mathcal{T}_L$ est $\mathbb{Z}$ -linéaire; mais cela découle aussitôt par simple inspection des constructions. On raisonne de même pour vérifier la complétude de $A - \text{ModTop}_{B\text{-lin}}$.

Exercice 9.8 : D'après la remarque 9.3(ii), f est continue si et seulement s'il en est de même pour f_0 , donc on peut supposer que f et f_0 soient continues. Munissons $\overline{M} := f(M)$ (resp. $\overline{M}_0 := f_0(M_0)$) de la topologie induite par M (resp. par M_0) via la projection $p : M \rightarrow \overline{M}$ (resp. $p_0 : M_0 \rightarrow \overline{M}_0$); d'après la remarque 9.7(ii), $\overline{M}$ et $\overline{M}_0$ sont des A -modules topologiques, et f (resp. f_0) est la composition de p (resp. de p_0) avec un unique morphisme $\overline{f} : \overline{M} \rightarrow N$ (resp. $\overline{f}_0 : \overline{M}_0 \rightarrow N_0$) de $A - \text{ModTop}$. On voit aussitôt que f (resp. f_0) est strict si et seulement s'il en est de même pour $\overline{f}$ (resp. pour $\overline{f}_0$); en outre, $\overline{M}_0$ s'identifie naturellement avec un sous-module ouvert de $\overline{M}$, et sous cette identification, la topologie de $\overline{M}_0$ est induite par celle de $\overline{M}$. Ainsi, quitte à remplacer M et M_0 par $\overline{M}$ et $\overline{M}_0$, on peut supposer que f et f_0 soient injectifs. Dans ce cas, soit $\mathcal{U}$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0_N dans N_0 , et noter que $\mathcal{U}$ est aussi un système fondamental de voisinages ouverts de 0_N dans N , car N_0 est un sous-module ouvert de N ; pour que l'injection continue f (resp. f_0) soit un morphisme strict il faut et suffit que $\mathcal{V} := \{f^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ (resp. $\mathcal{V}_0 := \{f_0^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$) soit un système fondamental de voisinages ouverts de 0_M dans M ; mais on a $f_0^{-1}U = M_0 \cap f^{-1}U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, et comme M_0 est un sous-module ouvert de M , la condition pour $\mathcal{V}$ équivaut à celle pour $\mathcal{V}_0$, d'où l'assertion.

Exercice 9.9, partie (i) : La condition est évidemment nécessaire. Pour la réciproque, soit $\delta : M \times M \rightarrow M$ l'application continue telle que $\delta(x, y) := x - y$ pour tous $x, y \in M$; si $\{0_M\}$ est une partie fermée, $\delta^{-1}(0_M)$ est une partie fermée de $M \times M$, et donc M est séparé, d'après l'exercice 2.21.

Partie (ii) : Comme $\pi_M^{-1}(0_{M^{\text{sep}}}) = \overline{\{0_M\}}$, la partie $\{0_{M^{\text{sep}}}\} \subset M^{\text{sep}}$ est fermée, donc M^{sep} est séparé, d'après (i), et il est un A -module topologique, d'après le lemme 9.5(i). La dernière assertion de (ii) est claire par construction.

Partie (iii) : Cela découle aussitôt de (ii) et du lemme 9.5(i).

Exercice 9.10, partie (i) : Comme $M_{\lambda} \cap M_{\mu}$ est un voisinage de 0 , la condition (a) est évidemment nécessaire, et la condition (b) suit aussitôt de la continuité de la multiplication scalaire $A \times M \rightarrow M$.

Partie (ii) : Soit $\mathcal{T}_M$ l'ensemble des parties de M qui s'écrivent comme réunions de parties de la forme $x + M_\lambda$, avec $\lambda \in \Lambda$ et $x \in M$ arbitraires. Montrons d'abord que $\mathcal{T}_M$ est une topologie : en effet, évidemment $\emptyset, M \in \mathcal{T}_M$, et si $(U_i \mid i \in I)$ est une famille arbitraire d'éléments de $\mathcal{T}_M$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_M$. Il reste à vérifier que $\mathcal{T}_M$ est stable par intersections finies, et pour cela on est ramené à montrer que $U := (x + M_\lambda) \cap (y + M_\mu) \in \mathcal{T}_M$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ et tous $x, y \in M$. Mais on voit aisément que si $z \in U$, on a $z + M_\lambda = x + M_\lambda$ et $y + M_\mu = z + M_\mu$; si maintenant $M_\nu \subset M_\lambda \cap M_\mu$, il vient $U = \bigcup_{z \in U} (z + M_\nu)$, d'où l'assertion. Ensuite, on voit aisément que l'addition de M est une application continue $(M, \mathcal{T}_M) \times (M, \mathcal{T}_M) \rightarrow (M, \mathcal{T}_M)$. La continuité de la multiplication scalaire $A \times M \rightarrow M$ est une conséquence directe de la condition (b). En dernier lieu, pour voir que $M_\bullet$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour $\mathcal{T}_M$, il suffit de remarquer que si $0 \in x + M_\lambda$, alors $x \in M_\lambda$, et donc $x + M_\lambda = M_\lambda$.

Partie (iii) : La preuve de (ii) donne déjà une unique topologie $\mathcal{T}_A$ sur A telle que l'addition de A soit une application continue $(A, \mathcal{T}_A) \times (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (A, \mathcal{T}_A)$, et telle que la famille $(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ soit un système fondamental de voisinages ouverts de 0. De plus, la condition (b) implique aisément la continuité de la multiplication de A . Donc, A est un anneau topologique et sa topologie $\mathcal{T}_A$ est évidemment linéaire.

Exercice 9.15 : Soit $N := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Si $x \in N \setminus \{0\}$, tout voisinage de 0 dans M contient aussi x , donc $\mathcal{T}_M$ n'est pas séparée. Réciproquement, supposons que $N = 0$, et soient $x, y \in M$ deux éléments distincts ; donc, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x - y \notin M_\lambda$, d'où $(x + M_\lambda) \cap (y + M_\lambda) = \emptyset$, ce qui montre bien que $\mathcal{T}_M$ est séparée.

Exercice 9.17 : Soit $f \in \mathfrak{m}_t$; pour tout $x \in [0, 1]$ on pose $f_1(x) := \max(0, f(x))$ et $f_2(x) := \min(0, f(x))$. Evidemment $f = f_1 + f_2$ et $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_t$. En outre, $f_1(x), -f_2(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $g_1 := f_1^{1/2}$ et $g_2 := (-f_2)^{1/2}$ sont bien définies et continues sur $[0, 1]$, avec $g_1, g_2 \in \mathfrak{m}_t$ et $f = g_1^2 - g_2^2$, d'où l'assertion.

Exercice 9.20, partie (i) : Si $a \in A^\circ$, évidemment $a^n \in A^\circ$. Réciproquement, supposons que $a^n \in A^\circ$, et soit $U \subset A$ un voisinage de 0 ; pour tout $r = 0, \dots, n-1$ on trouve un voisinage $V_r \subset A$ de 0 tel que $a^r V_r \subset U$, et on pose $V := \bigcap_{r=0}^{n-1} V_r$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^{jn} \in V$ pour tout $j \geq k$, d'où $a^{r+jn} \in U$ pour tous $j \geq k$ et $r = 0, \dots, n-1$; cela montre que $a \in A^\circ$. Ensuite, évidemment si $a \in A^\circ$, alors $a^n \in A^\circ$; réciproquement, si $a^n \in A^\circ$, la partie $S := \{a^{nk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ est bornée, et de même pour la partie finie $T := \{1, \dots, a^{n-1}\}$, donc aussi pour $S \cdot T = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (remarque 9.19(i)), i.e. $a \in A^\circ$.

Partie (ii) : Pour la première inclusion, soit $a \in A^\circ$ et $U \subset A$ un voisinage de 0 ; on a un voisinage $V \subset A$ de 0 tel que $V \cdot V \subset U$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^k \in V$ pour tout $k \geq n$. De plus, il existe un voisinage $V' \subset A$ de 0 tel que $\{1, a, \dots, a^{n-1}\} \cdot V' \subset U$; avec $V'' := V \cap V'$ il vient $\{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot V'' \subset U$, d'où $a \in A^\circ$. Ensuite, si $a \in A^\circ$ et $b \in A^\circ$, pour tout voisinage $U \subset A$ de 0 on trouve un voisinage $V \subset A$ de 0 avec $\{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot V \subset U$, et d'autre part il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a^k \in V$ pour tout $k \geq n$; ainsi $(ab)^k \in U$ pour $k \geq n$, d'où la deuxième inclusion.

Partie (iii) : D'abord, si $a \in A^\circ$ et si $U_B \subset B$ est un voisinage de 0, il existe un voisinage $U_A \subset A$ de 0 avec $f(U_A) \subset U_B$, et un voisinage $V \subset A$ de 0 tel que $V \cdot \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U_A$, d'où $f(V) \cdot \{f(a^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U_B$; par hypothèse, $f(V)$ est un voisinage de 0 dans B , donc $f(a) \in B^\circ$. Ensuite, soient $a \in f^{-1}(B^\circ)$ et $U \subset A$ un voisinage de 0 ; on doit exhiber un voisinage $V \subset A$ de 0 tel que $V \cdot \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U$. Or, comme $\mathcal{T}_A$ induit la topologie discrète sur $\text{Ker } f$, il existe un voisinage $W \subset A$ de 0 avec $W \cap \text{Ker } f = \{0\}$, et on trouve un voisinage $W' \subset A$ de 0 tel que $aW' - W' := \{ax - x' \mid x, x' \in W'\} \subset W$; quitte à remplacer U par $U \cap W'$, on peut alors supposer que $aU - U \subset W$. Par hypothèse, $f(U)$ est un voisinage de 0 dans B , donc on trouve un voisinage $V' \subset A$ de 0 tel

que $f(V') \cdot \{f(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset f(U)$, et on pose $V := U \cap V'$; pour conclure, on va vérifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $Va^n \subset U$. Cela est clair pour $n = 0$, car $V \subset U$. Soit alors $n > 0$, et supposons que $Va^{n-1} \subset U$; par construction, pour tout $x \in V$ il existe $y \in U$ tel que $f(xa^n) = f(y)$, i.e. $xa^n - y \in \text{Ker } f$. D'autre part, $xa^{n-1} \in U$, d'où $xa^n \in aU$, et ainsi $xa^n - y \in (aU - U) \cap \text{Ker } f$, i.e. $xa^n = y$, d'où $Va^n \subset U$.

Exercice 9.21, partie (i) : Si T est bornée, et si $U \subset A$ est un sous-groupe ouvert, il existe un voisinage $V \subset A$ de 0 avec $T \cdot V \subset U$; mais alors $\langle T \rangle \cdot V \subset U$, et comme la topologie de A est $\mathbb{Z}$ -linéaire, cela montre que $\langle T \rangle$ est borné. Ensuite, si T est à puissances bornées, posons $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(n)$ (notation de la définition 9.18(ii)); par hypothèse S est bornée, donc de même pour $\langle S \rangle$, par ce qui précède. Mais évidemment $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle T \rangle(n) = \langle S \rangle$, donc $\langle T \rangle$ est à puissances bornées.

Partie (ii) : D'après la remarque 9.19(i), l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties de A à puissances bornées est filtrant pour la relation d'ordre définie par l'inclusion de parties. Or, d'une part, si $T \in \mathcal{P}$, on déduit de (i) que le sous-anneau $\mathbb{Z}[T] \subset A$ engendré par T est une partie bornée de A ; d'autre part, pour tout sous-anneau borné $B \subset A$ on a $B = \mathbb{Z}[B] \in \mathcal{P}$. Il vient ainsi $A^\circ = \bigcup_{T \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}[T]$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Soit $x \in A$ entier sur A° . Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in A^\circ$ tels que $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$; on pose $B := \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n] \subset A$. D'après (ii), le sous-anneau B est borné dans A , et on a $B[x] = \langle B \cup Bx \cup \dots \cup Bx^{n-1} \rangle$, donc $B[x]$ est aussi borné d'après (i) et la remarque 9.19(i). Cela montre que $x \in A^\circ$.

Partie (iv) : Compte tenu de l'exercice 9.20, il ne reste qu'à montrer que $A^{\circ\circ}$ est un sous-groupe additif de A° . Or, soient $a, b \in A^{\circ\circ}$ et $U \subset A$ un sous-groupe additif ouvert; on trouve un voisinage $V \subset A$ de 0 avec $V \cdot V \subset U$, et $r \in \mathbb{N}$ tel que $a^i, b^j \in V$ pour tout $i \geq r$. Ensuite, on trouve un entier $s \geq r$ tel que $a^i b^j \in U$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i+j \geq s$ et $\min(i, j) < r$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. On déduit aisément que $(a+b)^n \in U$ pour tout $n \geq s$, d'où $a+b \in A^{\circ\circ}$.

Partie (v) : Supposons que B soit topologiquement local, et soit $a \in A^{\circ\circ}$; on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^{n+1} \in B^{\circ\circ}$, d'où $1 - a^{n+1} \in (B^\circ)^\times$ et on a :

$$(1 - a)^{-1} = (1 + a + \dots + a^n)/(1 - a^{n+1}) \in A^\circ$$

d'où $a \in \mathcal{J}(A)$. Cela montre que A est topologiquement local. Réciproquement, si A est topologiquement local, soit $b \in B^{\circ\circ}$; alors $1 - b \in (A^\circ)^\times$, et on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^{n+1}/(1 - b) \in B^\circ$. Il vient :

$$(1 - b)^{-1} = b^{n+1}/(1 - b) + 1 + b + \dots + b^n \in B^\circ$$

ce qui achève de montrer que $b \in \mathcal{J}(B)$, et donc B est topologiquement local.

Exercice 9.28 Soient $\pi : A^n \rightarrow B$ une surjection A -linéaire, et $\pi' : B^m \rightarrow N$ une surjection B -linéaire; il vient une surjection A -linéaire $\pi^m : A^{nm} \rightarrow B^m$, et d'après la proposition 9.25(i), la topologie de $B^m = (B, \mathcal{T}_B^A) \times \dots \times (B, \mathcal{T}_B^A)$ coïncide avec la topologie canonique $\mathcal{T}_{B^m}^A$, induite par A^{nm} via π^m . Par suite, $\mathcal{T}_N^B$ est aussi la topologie induite par A^{mn} via $\pi' \circ \pi^m$, d'où l'assertion.

Exercice 9.31 : Rappelons que la limite de $M_\bullet$ est représentée par la partie des suites cohérentes $M \subset P := \prod_{i \in \text{Ob}(I)} M_i$, avec la topologie induite par celle du produit P des espaces topologiques $(M_i \mid i \in \text{Ob}(I))$; de plus, M est fermé dans P , car chaque M_i est séparé (voir la solution du problème 2.25(iii)). Alors M est séparé, et d'après la remarque 9.30(vii), il suffit de montrer que P est complet. Soit donc $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de P , et pour tout $i \in \text{Ob}(I)$, soit $p_i : P \rightarrow M_i$ la projection; par inspection directe des définitions on voit que $x_\bullet$ est de Cauchy (resp. converge vers 0) dans $P \Leftrightarrow$ le filet $(p_i(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ est de Cauchy (resp. converge vers 0) dans M_i pour tout $i \in \text{Ob}(I)$. L'assertion en découle aussitôt. On raisonne de même pour montrer que B est complet

et séparé.

Problème 9.32 : Soit $U_\bullet := (U_n \mid n \in \mathbb{N})$ un système fondamental de voisinages ouverts de $0 \in M$. On construit par récurrence sur n une famille $U'_\bullet := (U'_n \mid n \in \mathbb{N})$ de parties ouvertes de M , comme suit. On pose $U'_0 := U_0$; ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $U'_0, \dots, U'_n$ ont déjà été exhibées; comme la loi d'addition $M \times M \rightarrow M$ est une application continue, on trouve un voisinage U''_{n+1} de 0 dans M tel que $U'_n + U''_n \subset U'_n$, et on pose $U'_{n+1} := U_{n+1} \cap U''_n$. Evidemment $U'_\bullet$ est encore un système fondamental de voisinages ouverts de $0 \in M$, et quitte à remplacer $U_\bullet$ par $U'_\bullet$, on peut ainsi supposer que :

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour toute partie $Z \subset M$, notons par $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans M ; montrons que :

$$(*) \quad \overline{U}_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $x \in \overline{U}_{n+1}$, on a $(x - U_{n+1}) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, i.e. il existe $y, z \in U_{n+1}$ avec $x - y = z$, d'où $x = y + z \in U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$. Or, on doit vérifier que pour tout $x \in M$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(x + U_n) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k \neq \emptyset$. Pour cela, on va exhiber par récurrence sur k une suite de Cauchy $x_\bullet := (x_k \mid k \in \mathbb{N})$, et une suite strictement croissante d'entiers $(n(k) \mid k \in \mathbb{N})$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'on ait :

$$(**) \quad (x_k + U_{n(k)-1}) \subset (x_{k-1} + U_{n(k-1)}) \cap V_{k-1}.$$

En effet, posons $n(0) := n$ et $x_0 := x$. Ensuite, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et supposons que l'on a déjà exhibé x_{k-1} et $n(k-1)$; comme V_{k-1} est une partie ouverte dense de M , il existe $x_k \in M$ et $n(k) \in \mathbb{N}$ vérifiant (**), et évidemment on peut supposer que $n(k) > n(k-1)$. Par construction, $x_{k+1} - x_k \in U_{n(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où :

$$x_{k+m+1} - x_k = (x_{k+m+1} - x_{k+m}) + \dots + (x_{k+1} - x_k) \in U_{n(k+m)} + \dots + U_{n(k)} \subset U_{n(k-1)}$$

pour tous $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cela montre que la suite $x_\bullet$ est de Cauchy, donc par hypothèse elle admet une limite $y \in M$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point y est dans l'adhérence de $x_k + U_{n(k)}$; compte tenu de (*), il suffit alors de remarquer :

$$y \in \overline{x_k + U_{n(k)}} \subset x_k + U_{n(k)-1} \subset (x + U_n) \cap V_{k-1} \quad \forall k > 0.$$

Problème 9.33 : Pour toute partie $Z \subset N$, notons comme d'habitude par $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans N . Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_k \in A^\circ$ tels que $\sum_{i=1}^k Aa_i = A$. Montrons d'abord que pour tout voisinage $V \subset M$ de 0 , la partie $\overline{u(V)}$ est un voisinage de 0 dans N . Pour cela, soit $V' \subset M$ un voisinage de 0 tel que $x_1 + \dots + x_k \in V$ pour tous $x_1, \dots, x_k \in V'$. Soit ensuite $V'' \subset M$ un voisinage de 0 tel que $V'' + V'' \subset V'$; quitte à remplacer V'' par $V'' \cap (-V'')$, on peut supposer que $V'' = -V''$. Il vient alors :

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M \mid a_1^n x, \dots, a_k^n x \in V''\}$$

d'où $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in N \mid a_1^n y, \dots, a_k^n y \in u(V'')\}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Noter en outre que la partie $Z_n := \{y \in N \mid a_1^n y, \dots, a_k^n y \in \overline{u(V'')}\}$ est fermée dans N , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Au vu du théorème de Baire (problème 9.32), il existe par suite $n \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur W de Z_n est non vide. Soit $x \in W$; comme $Z_n = -Z_n$, on déduit que $0 = x + (-x)$ est dans l'intérieur de $Z_n + Z_n \subset Z'_n := \{y \in N \mid a_1^n y, \dots, a_k^n y \in \overline{u(V')}\}$. Soient aussi $b_1, \dots, b_k \in A$ avec $a_1^n b_1 + \dots + a_k^n b_k = 1$; on trouve alors un voisinage T de 0 dans N , tel que $b_i T \subset Z'_n$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Il vient aussitôt $T \subset \overline{u(V)}$, d'où l'assertion. Soient maintenant $(U_n \mid n \in \mathbb{N})$ et $(V_n \mid n \in \mathbb{N})$ des systèmes fondamentaux de voisinages ouverts de 0 pour M et respectivement pour N ; en raisonnant comme dans la solution du problème 9.32, on peut supposer que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ et $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et quitte à remplacer U_n et V_n par $U_n \cap (-U_n)$ et $V_n \cap (-V_n)$, on peut

aussi supposer que $U_n = -U_n$ et $V_n = -V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$(*) \quad V_{k(n)} \subset \overline{u(U_n)}$$

et on peut supposer que la suite $(k(n) \mid n \in \mathbb{N})$ soit strictement croissante.

Lemme 9.119. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $V_{k(n+2)} \subset u(U_n)$.*

Démonstration. Soit $y \in V_{k(n+2)}$; on va exhiber une suite $x_\bullet := (x_i \mid i \in \mathbb{N})$ avec :

$$x_0 := 0 \quad x_{i+1} \in x_i + U_{n+i+2} \quad u(x_i) \in y + V_{k(n+i+2)} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

On raisonne par récurrence sur i : comme $V_{k(n+2)} = -V_{k(n+2)}$, on a bien $u(x_0) = u(0) = 0 \in y + V_{k(n+2)}$. Supposons ensuite que pour $i \in \mathbb{N}$ on a déjà exhibé x_i comme souhaité ; donc $y \in u(x_i) + V_{k(n+i+2)}$, car $V_{k(n+i+2)} = -V_{k(n+i+2)}$, et au vu de $(*)$ il vient

$$(y + V_{k(n+i+3)}) \cap u(x_i + U_{n+i+2}) \neq \emptyset.$$

On peut alors prendre $x_{i+1} \in x_i + U_{n+i+2}$ tel que $u(x_{i+1}) \in y + V_{k(n+i+3)}$. En raisonnant comme dans la solution du problème 9.32, on voit aisément que $x_\bullet$ est une suite de Cauchy dans M ; soit alors $l \in M$ la limite de cette suite ; la suite $(u(x_i) \mid i \in \mathbb{N})$ converge vers $u(l)$, et comme $y - u(x_i) \in V_{k(n+i+1)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, il vient $u(l) = y$. De plus :

$$x_{i+1} \in U_{n+i+2} + U_{n+i+1} + \cdots + U_{n+2} \subset U_{n+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

donc $l \in \overline{U_{n+1}} \subset U_n$ (cf. la solution du problème 9.32), d'où l'assertion. $\square$

Pour conclure, on doit montrer que $u(U_n)$ est ouvert dans N pour tout $n \in \mathbb{N}$ (remarque 9.3(iii)), i.e. que pour tout $x \in U_n$ il existe $t(x, n) \in \mathbb{N}$ avec $u(x) + V_{t(x, n)} \subset u(U_n)$. Mais comme U_n est une partie ouverte de M , il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $x + U_m \subset U_n$, et d'après le lemme 9.119 on peut alors prendre $t(x, n) := k(m+2)$.

Exercice 9.35, partie (i) : Au vu de l'exercice 9.15, on doit montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n B = 0$. Or, tout élément non nul $f(t)$ de B s'écrit sous la forme

$$f(t) = (1 - T)^{-k} \cdot T^n \cdot P(T) \quad \text{avec } k, n \in \mathbb{N} \text{ et } P(T) \in A[T] \text{ tel que } P(0) \neq 0.$$

Noter aussi que $1 - T$ et T ne sont pas diviseurs de zéro dans $A[T]$; si l'on a aussi $f(T) = T^m \cdot Q(T) \cdot (1 - T)^{-i}$ pour certains $i, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, il vient

$$P(T) \cdot (1 - T)^i = T^{m-n} \cdot Q(T) \cdot (1 - T)^k \quad \text{dans } A[T].$$

Si l'on évalue en 0 ces deux polynômes, on trouve que $m = n$ (et $Q(0) \neq 0$) ; d'où, $f(T) \notin T^{n+1}B$, comme souhaité. Le même argument montre aussi que

$$T^n B \cap A[T] = T^n A[T] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc B induit sur $A[T]$ la topologie T -adique. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(1 - T) \cdot ((1 - T)^{-1} - x_n) = 1 - (1 - T) \cdot x_n = 1 - 1 + T^{n+1} = T^{n+1}$$

d'où $(1 - T)^{-1} - x_n \in T^{n+1}B$, i.e. $(1 - T)^{-1}$ est l'unique limite de $x_\bullet$ dans B .

La partie (ii) de l'exercice est analogue : les détails seront laissés au lecteur.

Problème 9.36, partie (i) : Soit Λ l'ensemble totalement ordonné des nombres ordinaux dénombrables, et on considère l'anneau $A := \mathbb{Z}[T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ muni de la topologie A -linéaire qui admet le système fondamental d'idéaux ouverts

$$(I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad \text{avec} \quad I_\lambda := \sum_{\mu > \lambda} T_\mu A \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Or, soit $(P_n \mid n \in \mathbb{N})$ une suite de Cauchy de A . Comme la cardinalité de Λ est $\aleph_1$, on trouve $\mu \in \Lambda$ tel que $P_n \in \mathbb{Z}[T_\lambda \mid \lambda \leq \mu]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_i - P_j \in I_\mu$ pour tous $i, j \geq n$; mais alors $P_i = P_j$ pour tous $i, j \geq n$.

Partie (ii) : On raisonne par l'absurde; donc, supposons que la cardinalité c de Λ soit $\leq \aleph_0$. Si c est finie, $J := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est un sous-groupe ouvert de A ; d'autre part, $J = 0$, par l'exercice 9.15. Par suite la topologie de A est discrète, contradiction. Soit donc $c = \aleph_0$. Alors on peut supposer que $\Lambda = \mathbb{N}$, et quitte à remplacer chaque I_n par $\bigcap_{i \leq n} I_i$, on peut aussi supposer que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, la suite $I_\bullet := (I_n \mid n \in \mathbb{N})$ ne peut pas être stationnaire, car sinon la topologie de A ne pourrait pas être à la fois non discrète et séparée (toujours à cause de l'exercice 9.15). Donc, quitte à remplacer $I_\bullet$ par une sous-suite, on peut supposer que $I_n \neq I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve $x_n \in I_n \setminus I_{n+1}$. La suite $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ est non stationnaire et converge vers 0, contradiction.

Exercice 9.42, partie (i) : Il faut montrer que $U \setminus V = V \setminus U = \emptyset$; or, par hypothèse $U \setminus V$ est une partie ouverte de T , donc $U \setminus V = \emptyset \Leftrightarrow (U \setminus V) \cap Z = \emptyset$, car Z est dense dans T . D'autre part, on a $(U \setminus V) \cap Z = (U \cap Z) \setminus (V \cap Z) = \emptyset$, d'où $U \setminus V = \emptyset$. De même on voit que $V \setminus U = \emptyset$.

Partie (ii) : Posons $\overline{M} := j_M(M)$; d'après la proposition 9.12(i), N et N' sont des parties ouvertes et fermées dans $\widehat{M}$, et l'hypothèse revient à dire que $N \cap \overline{M} = N' \cap \overline{M}$. Comme $\overline{M}$ est dense dans $\widehat{M}$ (théorème 9.39(ii)), il suffit d'appliquer (i).

Partie (iii) : Soient $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_{\widehat{M}}$ les topologies de M et respectivement $\widehat{M}$. Comme $f(M)$ est dense dans Q , tout $q \in Q$ est l'unique limite d'un filet de Cauchy de la forme $(f(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$, pour quelque ensemble filtrant Λ , et un filet $x_\bullet := (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de M ; comme $\mathcal{T}_M$ est induite par $\mathcal{T}_Q$ via f , on voit aussitôt que $x_\bullet$ est un filet de Cauchy de M . Cela montre que $\widehat{f}$ est une surjection. Ensuite, soit $y_\bullet := (y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy dont la classe $[y_\bullet] \in \widehat{M}$ est dans $\text{Ker } \widehat{f}$; ainsi le filet $(f(y_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ converge vers 0 dans Q , et comme $\mathcal{T}_M$ est induite par $\mathcal{T}_Q$, il s'ensuit aussitôt que $y_\bullet$ converge vers 0 dans M , d'où $[y_\bullet] = 0$. Cela achève de vérifier que $\widehat{f}$ est un isomorphisme de A -modules, et il reste à prouver que la topologie induite sur $\widehat{M}$ par $\mathcal{T}_Q$ via $\widehat{f}$ est plus fine que $\mathcal{T}_{\widehat{M}}$. Soit alors $N \subset M$ un sous-groupe additif ouvert; par hypothèse il existe un sous-groupe additif ouvert $P \subset Q$ avec $f^{-1}P \subset N$. Alors $R := \widehat{f}^{-1}P$ est un sous-groupe additif ouvert de $\widehat{M}$, et évidemment $j_M^{-1}R \subset N$; avec $\widehat{N}$ comme dans la preuve du théorème 9.39, il vient : $j_M^{-1}(R \cap \widehat{N}) = j_M^{-1}(R) \cap j_M^{-1}(\widehat{N}) = j_M^{-1}(R) \cap N = j_M^{-1}(R)$ (observation 9.40(ii)), d'où $R \cap \widehat{N} = R$, d'après (ii), i.e. $R \subset \widehat{N}$, d'où l'assertion.

Exercice 9.43 : D'après l'exercice 9.31, la topologie de $P := \prod_{i \in I} \widehat{M}_i$ est complète et séparée, donc il existe un unique homomorphisme de A -modules topologiques $\psi : \widehat{M} \rightarrow P$ avec $\psi \circ j_M = j := \prod_{i \in I} j_{M_i}$. Rappelons que la topologie de chaque M_i est induite par celle de $\widehat{M}_i$ via j_{M_i} (théorème 9.39(ii)); il s'ensuit aisément que $\mathcal{T}_M$ est induite par la topologie de P via j . D'après l'exercice 9.42(iii), il suffit alors de vérifier que l'image de j est dense dans P . Soit donc $x_\bullet := (x_i \mid i \in I) \in P$, et $J \subset I$ une partie finie; pour tout $i \in J$, soit aussi $U_i \subset \widehat{M}_i$ un voisinage de 0. Comme chaque j_{M_i} a image dense dans $\widehat{M}_i$, pour tout $i \in J$ on trouve $y_i \in M_i$ avec $j_{M_i}(y_i) - x_i \in U_i$; soit alors $z_\bullet := (z_i \mid i \in I) \in M$ tel que $z_i = y_i$ si $i \in J$, et $z_i = 0$ si $i \in I \setminus J$. Il vient $j(z_\bullet) - x_\bullet \in (\prod_{i \in J} U_i) \times (\prod_{i \in I \setminus J} \widehat{M}_i)$, d'où l'assertion.

Exercice 9.46 : Evidemment, on peut supposer que ϕ soit continue en $(0, \dots, 0)$, et on doit vérifier que ϕ est continue; noter que l'assertion est déjà connue si la cardinalité c de Λ est 1, car dans ce cas ϕ est A -linéaire (remarque 9.3(ii)), donc on supposera que $c \geq 2$. Pour tout $\mu \in \Lambda$ et tout $h \in M_\mu$, soit $\phi_{\mu,h} : \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda \rightarrow P$ l'application telle que $\phi_{\mu,h}(k_\bullet) := \phi(k'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ pour tout $k_\bullet := (k_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\})$, avec

$k'_\lambda := k_\lambda$ si $\lambda \neq \mu$, et $k'_\mu := h$; d'après l'observation 9.45, et par une simple récurrence sur c , on est ramené à montrer que $\phi_{\mu,h}$ est continue en $(0, \dots, 0) \in \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda$, pour tous tels μ et h . Soit alors $V \subset P$ un voisinage de 0; par hypothèse il existe $a_1, \dots, a_n \in A^{\circ\circ}$ tels que $a_1 A + \dots + a_n A = A$; choisissons alors un voisinage $W \subset P$ de 0 tel que $w_1 + \dots + w_n \in V$ pour tous $w_1, \dots, w_n \in W$. Par la continuité de ϕ en $(0, \dots, 0)$, il existe une famille $(U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ telle que $U_\lambda \subset M_\lambda$ soit un voisinage de 0 pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $\phi(\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \subset W$. Soient $k \in \mathbb{N}$ tel que $h_i := a_i^k h \in U_\mu$ pour tous $i = 1, \dots, n$, et $b_1, \dots, b_n \in A$ tels que $a_1^k b_1 + \dots + a_n^k b_n = 1$; soit en outre $\nu \in \Lambda \setminus \{\mu\}$, et choisissons un voisinage $U'_\nu \subset M_\nu$ de 0 tel que $b_i U'_\nu \subset U_\nu$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Pour tout $u_\bullet := (u_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}) \in U'_\nu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu, \nu\}} U_\lambda$, il vient $\phi_{\mu,h}(u_\bullet) = \sum_{i=1}^n \phi_{\mu,h_i}(u'_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\})$, avec $u'_\lambda := u_\lambda$ si $\lambda \neq \nu$, et $u'_\nu := b_i u_\nu$; noter que $\phi_{\mu,h_i}(u'_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}) \in W$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Donc $\phi_{\mu,h}(U'_\nu \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu, \nu\}} U_\lambda) \subset V$, d'où l'assertion.

Exercice 9.49, partie (i) : Fixons un système fondamental $\mathcal{N}$ de sous-groupes ouverts de M , de sorte que $\mathcal{N}' := \{i^{-1}N | N \in \mathcal{N}\}$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de M' . Soient $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}_{M'}$ les ensembles des filets de Cauchy dans M et respectivement M' , indexés par $\mathcal{N}$; par définition, $\widehat{i} : \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M}$ est induite par l'application $\mathcal{C}_i : \mathcal{C}_{M'} \rightarrow \mathcal{C}_M : (x_N | N \in \mathcal{N}) \mapsto (i(x_N) | N \in \mathcal{N})$. Evidemment, si $x_\bullet, y_\bullet \in \mathcal{C}_{M'}$, on a $x_\bullet \sim y_\bullet \Leftrightarrow \mathcal{C}_i(x_\bullet) \sim \mathcal{C}_i(y_\bullet)$, d'où l'injectivité de $\widehat{i}$. Il est clair que $\widehat{p} \circ \widehat{i} = \widehat{p} \circ \widehat{i} = \widehat{0}$ est l'application nulle. Ensuite, soit $x_\bullet := (x_N | N \in \mathcal{N}) \in \mathcal{C}_M$ tel que $(p(x_N) | N \in \mathcal{N})$ converge vers 0; cela revient à dire que pour tout $N \in \mathcal{N}$ il existe $\lambda(N) \in \mathcal{N}$ tel que $p(x_{N'}) \in p(N)$ pour tout $N' \in \mathcal{N}$ avec $N' \subset \lambda(N)$, i.e. $x_{N'} \in N + i(M')$ pour tout tel N' , et on peut aussi supposer que $\lambda(N) \subset N$. En outre, d'après la remarque 9.37(iii), on peut supposer que :

$$(*) \quad x_{N'} - x_{N''} \in N \quad \forall N', N'' \subset N.$$

Pour tout $N \in \mathcal{N}$, soit alors $y_N \in M'$ tel que $x_{\lambda(N)} - i(y_N) \in N$; on voit aisément que $x'_\bullet := (x_{\lambda(N)} | N \in \mathcal{N})$ est un filet de Cauchy de M avec $x'_\bullet \sim x_\bullet$. Vérifions que $y_\bullet := (y_N | N \in \mathcal{N})$ est un filet de Cauchy de M' : en effet, pour tous $N, N', N'' \in \mathcal{N}$ avec $N', N'' \subset N$, noter que $x_{\lambda(N')} - x_{\lambda(N'')} \in N$, en vertu de $(*)$; par suite :

$$i(y_{N'}) - i(y_{N''}) = (i(y_{N'}) - x_{\lambda(N')}) + (x_{\lambda(N')} - x_{\lambda(N'')}) + (x_{\lambda(N'')} - i(y_{N''})) \in N$$

d'où l'assertion. De même, on voit aisément que $\mathcal{C}_i(y_\bullet) \sim x'_\bullet$, et cela achève de montrer que $\text{Ker}(\widehat{p}) = \text{Im}(\widehat{i})$. Pour la dernière assertion, rappelons que la topologie sur $\widehat{i}(\widehat{M}')$ induite par $\widehat{M}$ est définie par la famille de sous-groupes $(\widehat{i}(\widehat{M}') \cap \widehat{N} | N \in \mathcal{N})$; de l'autre côté la topologie de la complétion $\widehat{M}'$ est définie par $(i^{-1}\widehat{N} | N \in \mathcal{N})$ (rappelons que chaque $i^{-1}\widehat{N}$ est le sous-groupe des classes des filets de Cauchy $(x_{N'} | N' \in \mathcal{N}')$ dans M' tels que $x_{N'} \in i^{-1}N$ pour tout $N' \in \mathcal{N}'$, et de même on définit chaque $\widehat{N}$). Donc, on est ramené à montrer que

$$\widehat{i}(i^{-1}\widehat{N}) = \widehat{i}(\widehat{M}') \cap \widehat{N} \quad \forall N \in \mathcal{N}.$$

Cela découle aussitôt de l'observation 9.40(i).

Partie (ii) : Munissons $\widehat{i}(\widehat{M}')$ de la topologie induite par l'inclusion dans $\widehat{M}$; d'après (i), $\widehat{i}$ induit alors un isomorphisme de A -modules topologiques $\widehat{M}' \xrightarrow{\sim} \widehat{i}(\widehat{M}')$, donc $\widehat{i}(\widehat{M}')$ est complet et séparé, et il est alors une partie fermée de $\widehat{M}$. D'autre part, l'image de M' est dense dans $\widehat{M}'$ (théorème 9.39(ii)), donc l'image de $i(M')$ est dense dans $\widehat{i}(\widehat{M}')$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : L'image de $\widehat{i}$ est l'ensemble des classes des filets de Cauchy $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ avec $x_\lambda \in N$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; par inspection directe de la preuve du théorème 9.39, on voit qu'il s'agit d'une partie ouverte de $\widehat{M}$. Noter que M induit sur M/N la topologie

discrète via la projection $p : M \rightarrow M/N$ (proposition 9.12(iii)); en particulier, M/N est complet et séparé pour cette topologie, et donc p se factorise à travers une application A -linéaire continue unique $\widehat{p} : \widehat{M} \rightarrow M/N$. Comme p est surjective, il en est de même pour $\widehat{p}$. Ensuite, soit $K := \text{Ker}(\widehat{p})$; noter que

$$j_M^{-1}(K) = \text{Ker}(\widehat{p} \circ j_M) = \text{Ker}(p) = N = j_M^{-1}(\widehat{N})$$

(observation 9.40(ii)). D'après l'exercice 9.42(ii), il vient $\widehat{N} = K$, i.e. $\widehat{p}$ induit un isomorphisme $\widehat{M}/\widehat{N} \xrightarrow{\sim} M/N$, et l'isomorphisme souhaité est l'inverse de celui-ci.

Problème 9.53, partie (i) : Au vu de l'exercice 9.10(iii), pour tous $a, b \in K$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on doit exhiber $\gamma' \in \Gamma$ tel que $(a + U_{\gamma'}) \cdot (b + U_{\gamma'}) \subset ab + U_{\gamma}$. Pour cela, il suffit de prendre $\gamma' = \max(\gamma - v(a), \gamma - v(b), \gamma, 0)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (ii) : Soit $x \in V \setminus \{0\}$; comme $\mathcal{T}$ est séparée, il existe un idéal $I \subset V$ ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$, avec $x \notin I$. Alors $I \subset U_{\gamma}$, pour $\gamma := v(x)$, et cela montre que $\mathcal{T}$ est plus fine que la v -topologie de V . Si $\mathcal{T}$ n'est pas discrète, il existe $y \in I \setminus \{0\}$, et alors $U_{\gamma'} \subset I$, pour $\gamma' := v(y)$, donc dans ce cas $\mathcal{T} = \mathcal{T}_V$. Ensuite, noter que V est un sous-anneau ouvert de $(K, \mathcal{T}_K)$, donc $(V, \mathcal{T}_V)$ est topologiquement local si et seulement s'il en est de même pour $(K, \mathcal{T}_K)$ (exercice 9.21(v)); en outre, on voit aussitôt que $V = V^\circ$, et évidemment $1 \notin V^{\circ\circ}$, donc $V^{\circ\circ} \subset \mathfrak{m}$, i.e. $(V, \mathcal{T}_V)$ est topologiquement local.

Partie (iii) : La proposition 9.50 nous fournit un isomorphisme de groupes abéliens topologiques (voir l'exemple 9.1(ii)) :

$$\omega : \widehat{K} \xrightarrow{\sim} L_K := \lim_{\gamma \in \Gamma} K/U_{\gamma}$$

où chaque K/U_{γ} est muni de sa topologie discrète. Soit $\bar{x}_{\bullet} := (\bar{x}_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma) \in L_K$, i.e. $\bar{x}_{\bullet}$ est une suite cohérente avec $\bar{x}_{\gamma} \in K/U_{\gamma}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si $\bar{x}_{\gamma} = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose $\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet})) := +\infty$; sinon, soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\bar{x}_{\gamma} \neq 0$, et on pose $\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet})) := v(x_{\gamma})$, avec $x_{\gamma} \in K$ un représentant de la classe $\bar{x}_{\gamma}$. On vérifie aisément que cette définition ne dépend ni de γ , ni du représentant x_{γ} choisi. Soit $\bar{y}_{\bullet} \in L_K$ une autre suite cohérente; si $\bar{x}_{\bullet}, \bar{y}_{\bullet}, \bar{x}_{\bullet} + \bar{y}_{\bullet} \neq 0$, on trouve $\gamma \in \Gamma$ tel que $\bar{x}_{\gamma}, \bar{y}_{\gamma}, \bar{x}_{\gamma} + \bar{y}_{\gamma} \neq 0$, et si $x_{\gamma}, y_{\gamma} \in K$ représentent les classes $\bar{x}_{\gamma}, \bar{y}_{\gamma}$, alors $x_{\gamma} + y_{\gamma}$ représente $\bar{x}_{\gamma} + \bar{y}_{\gamma}$. Dans ce cas il vient

$$\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet} + \bar{y}_{\bullet})) = v(x_{\gamma} + y_{\gamma}) \geq \min(v(x_{\gamma}), v(y_{\gamma})) = \min(\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet})), \widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{y}_{\bullet}))).$$

On a trivialement la même inégalité si l'un de $\bar{x}_{\bullet}, \bar{y}_{\bullet}, \bar{x}_{\bullet} + \bar{y}_{\bullet}$ est égal à 0.

Ensuite, si $\delta := \widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet})) \leq \delta' := \widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{y}_{\bullet})) < +\infty$, prenons pour tout $\gamma \in \Gamma$ des représentants $x_{\gamma}, y_{\gamma} \in K$ des classes $\bar{x}_{\gamma}, \bar{y}_{\gamma} \in K/U_{\gamma}$; il existe alors $\gamma \in \Gamma$ avec

$$v(x_{\gamma'}) = \delta \quad \text{et} \quad v(y_{\gamma'}) = \delta' \quad \forall \gamma' \geq \gamma.$$

et posons :

$$z_{\gamma'} := \begin{cases} x_{\gamma} y_{\gamma} & \text{si } \gamma' \leq \gamma + \delta \\ x_{\gamma' - \delta} y_{\gamma' - \delta} & \text{si } \gamma' > \gamma + \delta. \end{cases}$$

pour tous $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$ avec $\gamma'' \geq \gamma' \geq \gamma + \delta$, il vient :

$$\begin{aligned} z_{\gamma'} - z_{\gamma''} &= x_{\gamma' - \delta} (y_{\gamma' - \delta} - y_{\gamma'' - \delta}) + (x_{\gamma' - \delta} - x_{\gamma'' - \delta}) y_{\gamma'' - \delta} \\ &\subset x_{\gamma' - \delta} U_{\gamma' - \delta} + y_{\gamma'' - \delta} U_{\gamma' - \delta} = U_{\gamma'}. \end{aligned}$$

Soit aussi $\bar{z}_{\gamma} \in K/U_{\gamma}$ la classe de z_{γ} , pour tout $\gamma \in \Gamma$, de sorte que $\bar{z}_{\bullet} := (\bar{z}_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$ est l'image dans L_K de la classe $[z_{\bullet}] \in \widehat{K}$ du filet de Cauchy $z_{\bullet} := (z_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$; en outre, $[z_{\bullet}] = [x_{\bullet}] \cdot [y_{\bullet}]$, le produit des classes des filets de Cauchy $x_{\bullet} := (x_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$, $y_{\bullet} := (y_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma)$. Par construction on a $\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{z}_{\bullet})) = \delta + \delta'$. Mais on a aussi $\omega^{-1}(\bar{z}_{\bullet}) = [z_{\bullet}]$, $\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet}) = [x_{\bullet}]$ et $\omega^{-1}(\bar{y}_{\bullet}) = [y_{\bullet}]$, d'où :

$$\widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet}) \cdot \omega^{-1}(\bar{y}_{\bullet})) = \widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{x}_{\bullet})) + \widehat{v}(\omega^{-1}(\bar{y}_{\bullet})).$$

Cela achève de montrer que $\widehat{v}$ est une valuation de $\widehat{K}$, et évidemment $\widehat{v} \circ j_K = v$. Pour prouver que $\widehat{K}$ est un corps, soient $\bar{x}_\bullet, x_\bullet$ et δ comme ci-dessus, avec $\bar{x}_\bullet \neq 0$ dans L_K ; pour tout $\gamma \in \Gamma$ on pose $y_\gamma := x_\gamma^{-1}$ si $\bar{x}_\gamma \neq 0$, et $y_\gamma := 0$ si $\bar{x}_\gamma = 0$. Noter que si $y_\gamma \neq 0$, on a $y_{\gamma'} \neq 0$ pour tout $\gamma' \geq \gamma$, et $y_{\gamma'} - y_\gamma = (x_\gamma x_{\gamma'})^{-1} \cdot (x_\gamma - x_{\gamma'}) \in U_{\gamma-2\delta}$. Cela montre que $y_\bullet := (y_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ est un filet de Cauchy dans K , et évidemment $[x_\bullet] \cdot [y_\bullet] = 1$ dans $\widehat{K}$, d'où l'assertion. Par construction, $\widehat{V}$ est l'anneau de valuation de $\widehat{v}$, et on voit aussi aisément que $\widehat{\mathcal{T}}_K$ est la $\widehat{v}$ -topologie de $\widehat{K}$.

Partie (iv) : Evidemment $\mathfrak{m}$ est ouvert dans V pour la v -topologie, donc $\widehat{\mathfrak{m}}$ est un idéal ouvert de $\widehat{V}$, et l'inclusion $V \rightarrow \widehat{V}$ induit un isomorphisme $V/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \widehat{V}/\widehat{\mathfrak{m}}$ (exercice 9.49(iii)); cela montre que $\widehat{\mathfrak{m}}$ est l'idéal maximal de $\widehat{V}$, d'où l'assertion.

Exercice 9.54, partie (i) : Soient $e := \phi(1)$, et $U_\gamma := \{x \in K \mid v(x) > \gamma\}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Evidemment ϕ est un isomorphisme continu de K -espaces vectoriels; il reste à vérifier que ϕ^{-1} est continue; cela revient à montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, la partie $\phi U_\gamma = \{ae \mid v(a) > 0\}$ est un voisinage de 0 dans E (remarque 9.3(ii)). Prenons $a_\gamma \in K$ avec $v(a_\gamma) = \gamma$; comme E est séparé, il existe un voisinage U' de 0 dans E tel que $a_\gamma e \notin U'$. Choisissons $\nu \in \Gamma$ et un voisinage U'' de 0 dans E tel que $U_\nu \cdot U'' \subset U'$, et noter que $K^\times \cap U_\nu \neq \emptyset$, car v est non triviale. Soit alors $b \in K^\times \cap U_\nu$; montrons que $bU'' \subset \phi U_\gamma$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $a \in K$ avec $v(a) \leq \gamma$ et $ae \in bU''$; il vient $v(a_\gamma a^{-1}b) = \gamma + v(b) - v(a) > \nu$, d'où $a_\gamma e = (a_\gamma a^{-1}b) \cdot (ab^{-1}e) \in U_\nu \cdot U''$, donc $a_\gamma e \in U'$, contradiction.

Partie (ii) : Munissons aussi E/H de la topologie induite par la projection $\pi_H : E \rightarrow E/H$; alors E/H est un K -espace vectoriel topologique séparé, car H est fermé (exercice 9.9(i) et proposition 9.12(iii)). Or, évidemment ψ est un isomorphisme continu de K -espaces vectoriels; il reste à vérifier que ψ^{-1} est continue. Soit $\pi_L : H \oplus L \rightarrow L$ la projection canonique; il existe un unique isomorphisme de K -espaces vectoriels $\omega : E/H \xrightarrow{\sim} L$ tel que $\omega \circ \pi_H = \lambda_L := \pi_L \circ \psi^{-1}$, et (i) entraîne aisément que ω est continu, donc de même pour $\lambda_L : E \rightarrow L$. Ainsi, l'application $\lambda_H : E \rightarrow H$ telle que $\lambda_H(e) := e - \lambda_L(e)$ pour tout $e \in E$ est continue, donc de même pour l'application $\lambda : E \rightarrow H \oplus L$ telle que $\lambda(e) := (\lambda_H(e), \lambda_L(e))$ pour tout $e \in E$. Mais on voit aussitôt que $\lambda = \psi^{-1}$.

Partie (iii) : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n \leq 1$ suit aussitôt de (i). Soit donc $n > 1$, et supposons que l'assertion soit connue pour tout K -espace vectoriel de dimension $n-1$. Munissons $H := \omega(K^{n-1} \times \{0\})$ et $L := \omega(\{(0, \dots, 0)\} \times K)$ des topologies induites par E ; par (i) et par hypothèse de récurrence, ω se restreint en des isomorphismes de K -espaces vectoriels topologiques $K^{n-1} \xrightarrow{\sim} H$ et $K \xrightarrow{\sim} L$. Alors, H est complet, car K est complet (exercice 9.31), donc H est une partie fermée de E ; d'après (ii), on déduit que ω est la composition d'isomorphismes de K -espaces vectoriels topologiques $K^{n-1} \oplus K \xrightarrow{\sim} H \oplus L \xrightarrow{\sim} E$.

Partie (iv) : Soit $F \subset E$ un K -sous-espace vectoriel de dimension finie il suffit de vérifier que F est complet, pour la topologie induite par E . Mais cela suit aussitôt de (iii) et de l'exercice 9.31, car K est complet.

Problème 9.56, partie (i) : Cela est un cas particulier du lemme général suivant :

Lemme 9.120. *Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal tel que $\mathfrak{m} := \text{rad}(I)$ est un idéal maximal. Munissons A (resp. $A_{\mathfrak{m}}$) de la topologie I -adique (resp. $IA_{\mathfrak{m}}$ -adique). La localisation $j : A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$ induit un isomorphisme d'anneaux topologiques complets*

$$\widehat{j} : \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_{\mathfrak{m}}.$$

Démonstration. D'après la proposition 9.50, on a des isomorphismes naturels d'anneaux topologiques

$$\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \lim_{n \in \mathbb{N}} A/I^n \quad \widehat{A}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \lim_{n \in \mathbb{N}} A_{\mathfrak{m}}/I^n A_{\mathfrak{m}}$$

et on voit aisément que ces isomorphismes identifient $\widehat{j}$ avec la limite du système projectif d'homomorphismes d'anneaux $(j \otimes_A A/I^n : A/I^n \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/I^n A_{\mathfrak{m}} \mid n \in \mathbb{N})$. Il suffit alors de montrer que $j \otimes_A A/I^n$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais l'isomorphisme naturel $A_{\mathfrak{m}}/I^n A_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} (A/I^n)_{\mathfrak{m}}$ identifie $j \otimes_A A/I^n$ avec la localisation $j_n : A/I^n \rightarrow (A/I^n)_{\mathfrak{m}}$; donc il suffit de montrer que pour tout $a \in A \setminus \mathfrak{m}$, la classe $\bar{a} \in A/I^n$ de a est un élément inversible. Mais comme $\text{rad}(I^n) = \mathfrak{m}$, le nilradical de A/I^n est l'idéal maximal $\mathfrak{m}/I^n$, donc ce dernier est l'unique idéal premier de A/I^n (corollaire 1.53), et l'assertion suit du corollaire 1.35(ii). $\square$

Partie (ii) : Noter que l'application $a \mapsto a^q$ est un automorphisme du groupe abélien $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ de cardinalité $p-1$. Noter aussi que l'inclusion $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ induit un isomorphisme de corps résiduels $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ (problème 9.53(iv)). Ainsi, il existe $x_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1^q \equiv u \pmod{p\mathbb{Z}_p}$. Or, soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x_n \in \mathbb{Z}_p$ vérifiant la congruence : $x_n^q \equiv u \pmod{p^n\mathbb{Z}_p}$. En particulier, $x_n \in \mathbb{Z}_p^\times$. Remarquons que :

$$(x_n + p^n a)^q \equiv x_n^q + qx_n^{q-1} p^n a \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p} \quad \forall a \in \mathbb{Z}_p.$$

Comme $q \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a $a_n := (u - x_n^q)/(p^n qx_n^{q-1}) \in \mathbb{Z}_p$, et si l'on pose $x_{n+1} := x_n + p^n a_n$, il vient ainsi : $x_{n+1}^q \equiv u \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$. Evidemment $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Z}_p$, et sa limite $x \in \mathbb{Z}_p$ vérifie l'identité $x^q = u$.

Il reste à prouver l'unicité de x dans $\mathbb{Z}_p$. Soient alors $x, y \in \mathbb{Z}_p$ avec $y^q = u = x^q$, et notons $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ les classes de x, y et u ; comme $\bar{x}^q = \bar{y}^q$, on a $\bar{x} = \bar{y}$; d'autre part, si $x \neq y$, le polynôme $P := T^q - u \in \mathbb{Z}_p[T]$ est divisible par $(T-x)(T-y)$, donc le polynôme $\bar{P} := T^q - \bar{u} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[T]$ est divisible par $(T-\bar{x})^2$. Mais $\bar{P}$ n'a aucune racine multiple, car $\text{pgcd}(\bar{P}, \bar{P}') = 1$; contradiction.

Partie (iii) : On déduit de (ii) que le groupe abélien $\mathbb{Z}_p^\times$ est q -divisible, i.e. l'application : $x \mapsto x^q$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}_p^\times$. Soit U le sous-groupe q -divisible maximal de $\mathbb{Q}_p^\times$; comme la valuation $\widehat{v}_p : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes, $\widehat{v}_p(U)$ est un sous-groupe q -divisible de $\mathbb{Z}$, i.e. $\widehat{v}_p(a) = 0$ pour tout $a \in U$. On a ainsi $U = \mathbb{Z}_p^\times$. Or, soit ϕ un endomorphisme du corps $\mathbb{Q}_p$; on voit aisément que $\phi(\mathbb{Z}_p^\times)$ est alors un sous-groupe q -divisible de $\mathbb{Q}_p^\times$, i.e. $\phi(\mathbb{Z}_p^\times) \subset \mathbb{Z}_p^\times$. Mais tout élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ s'écrit sous la forme $p^n u$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, donc $\phi(p^n u) = p^n \phi(u)$, i.e. $\widehat{v}_p \circ \phi = \widehat{v}_p$. En particulier, ϕ est continu pour la $\widehat{v}_p$ -topologie de $\mathbb{Q}_p$, et $\phi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{Q}_p$ pour la $\widehat{v}_p$ -topologie, il vient $\phi = \text{Id}_{\mathbb{Q}_p}$ (exercice 1.26(iv)).

Exercice 9.57 : On va exhiber une suite $((G_n, H_n) \mid n \in \mathbb{N})$ de couples de polynômes unitaires de $A[X]$ tels que :

$$F - G_n H_n, G_{n+1} - G_n, H_{n+1} - H_n \in \mathfrak{m}^{n+1} A[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On raisonne par récurrence sur n : choisissons d'abord deux polynômes unitaires arbitraires G_0, H_0 tels que $\pi(G_0) = g$ et $\pi(H_0) = h$; ainsi $F - G_0 H_0 \in \mathfrak{m} A[X]$. Supposons maintenant que pour $n \in \mathbb{N}$, on a déjà trouvé $((G_i, H_i) \mid i = 0, \dots, n)$ avec $F - G_i H_i \in \mathfrak{m}^{i+1} A[X]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $G_{i+1} - G_i, H_{i+1} - H_i \in \mathfrak{m}^{i+1} A[X]$ pour $i = 0, \dots, n-1$. Noter que les conditions entraînent les identités : $\deg_X G_n = \deg_X g$, $\deg_X H_n = \deg_X h$ et $\deg_X g + \deg_X h = d := \deg_X F$; écrivons donc :

$$F - G_n H_n = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1} \quad \text{avec } a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Comme $\text{pgcd}(g, h) = 1$, pour tout $j = 0, \dots, d-1$ il existe $p_j(X), q_j(X) \in k[X]$ tels que $p_j g + q_j h = X^j$; la division euclidienne fournit $b_j(X), r_j(X) \in k[X]$ tels que $p_j = b_j h + r_j$ et $\deg_X r_j < \deg_X h$, et si l'on remplace p_j par r_j et q_j par $q_j + b_j g$, on peut supposer que $\deg_X p_j < \deg_X h$ pour tout $j = 0, \dots, d-1$. Il vient : $\deg_X q_j h = \deg_X (X^j - p_j g) < \deg_X F$, d'où $\deg_X q_j < \deg_X g$, pour $j = 0, \dots, d-1$. Pour $j = 0, \dots, d-1$ prenons

$P_j, Q_j \in A[X]$ tels que

$$\deg_X P_j = \deg_X p_j \quad \deg_X Q_j = \deg_X q_j \quad \pi(P_j) = p_j \quad \pi(Q_j) = q_j.$$

Avec $G_{n+1} := G_n + \sum_{j=0}^{d-1} a_j Q_j$ et $H_{n+1} := H_n + \sum_{j=0}^{d-1} a_j P_j$, on voit aisément que $F - G_{n+1}H_{n+1} \in \mathfrak{m}^{n+2}A[X]$, et évidemment $G_{n+1} - G_n, H_{n+1} - H_n \in \mathfrak{m}^{n+1}A[X]$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Or, $(G_n \mid n \in \mathbb{N})$ et $(H_n \mid n \in \mathbb{N})$ sont des suites de Cauchy pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique de $A[X]$, et convergent vers $G, H \in A[X]$ unitaires, car A est $\mathfrak{m}$ -adiquement complet et séparé. Par construction, $F = GH$, $\pi(G) = g$ et $\pi(H) = h$.

Exercice 9.69 : Soient $a, b \in A \setminus \{0\}$; les hypothèses entraînent qu'il existe des uniques $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $a \in A_n \setminus A_{n+1}$ et $b \in A_m \setminus A_{m+1}$. Par suite, les images $\bar{a} \in \text{gr}_n A, \bar{b} \in \text{gr}_m A$ de a et b sont $\neq 0$. Puisque $\text{gr}_\bullet A$ est intègre, il vient $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq 0$, d'où $ab \neq 0$, et cela montre que A est intègre.

Exercice 9.74 : Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fini de générateurs de I_0 . Disons que $B = \sum_{i=1}^n A b_i$ pour une suite finie $b_1, \dots, b_n$ d'éléments de B , avec $b_1 = 1$, et soit $\pi : A^n \rightarrow B$ la surjection A -linéaire telle que $\pi(a_1, \dots, a_n) := \sum_{i=1}^n a_i b_i$ pour tous $a_1, \dots, a_n \in A$. On a un système $(c_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n)$ d'éléments de A avec :

$$b_i b_j = c_{ij1} b_1 + \dots + c_{ijn} b_n \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Quitte à remplacer I_0 par I_0^r pour un $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ convenable, on peut supposer que $I_0 c_{ijk} \subset A_0$ pour tous $i, j, k = 1, \dots, n$. Soit $B_0 \subset B$ le A_0 -sous-module engendré par $\{1\} \cup \{b_i x_\lambda \mid i = 2, \dots, n; \lambda \in \Lambda\}$; on vérifie aisément que B_0 est un sous-anneau de B , et de plus $J := \pi(I_0 \times \dots \times I_0) \subset B_0$, donc B_0 est une partie ouverte de $(B, \mathcal{T}_B^A)$ (proposition 9.12(i) et corollaire 9.26(i,ii)). On voit aisément que J est un idéal de B_0 , et évidemment $I_0 B_0 \subset J$. En dernier lieu, $(\pi(I_0^k \times \dots \times I_0^k) \mid k \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans B , et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\pi(I_0^{k+1} \times \dots \times I_0^{k+1}) = I_0^k J$; par suite, la topologie de B_0 induite par l'inclusion dans $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est $I_0 B_0$ -adique. Ainsi, $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau de Huber avec sous-anneau de définition B_0 et idéal de définition $I_0 B_0$, et l'homomorphisme structurel $A \rightarrow B$ se restreint en un homomorphisme adique d'anneaux $A_0 \rightarrow B_0$.

Exercice 9.75 : Evidemment, tout anneau de Tate $A \neq 0$ est un anneau de Huber non discret, car si la topologie de A est discrète, $A^\circ = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $(K, \mathcal{T}_K)$ soit un anneau de Huber; noter que V est un sous-anneau ouvert et borné pour la v -topologie de K , donc il est un sous-anneau de définition (proposition 9.71), et ainsi $\mathcal{T}_V$ coïncide avec la topologie I -adique, pour un idéal de type fini $I \subset V$. Un tel idéal est principal, disons $I = sV$, avec $s \neq 0$ si la topologie $\mathcal{T}_K$ est non discrète; mais alors $s \in K^\times \cap K^\circ$, donc K est un anneau de Tate.

Problème 9.76 : Soit $a \in A^\circ$, de sorte qu'il existe une partie finie $S \subset \Gamma$ et pour tout $\gamma \in S$ un élément homogène $a_\gamma \in A_\gamma$ avec $\sum_{\gamma \in S} a_\gamma = a$; il suffit de montrer que $a_\gamma \in A^\circ$ pour tout $\gamma \in S$, et pour cela on raisonne par récurrence sur la cardinalité c de S . L'assertion est triviale si $c \leq 1$. Soit donc $c > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout élément de A° qui est somme de $c - 1$ éléments homogènes. Puisque Γ est sans torsion, S engendre un sous-groupe Δ abélien libre, disons de rang r ; fixons alors un isomorphisme de groupes $\omega : \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\sim} \Delta$, munissons $\mathbb{Z}^r$ de son ordre lexicographique (voir l'exemple 8.4(i)), et Δ de l'ordre induit par $(\mathbb{Z}^r, \leq)$ via ω . Soit ensuite δ l'élément minimal de S ; on voit aussitôt que $a^n - a_\delta^n \in \bigoplus_{\gamma > n\delta} A_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, noter que I_0 admet un système fini de générateurs homogènes $f_1, \dots, f_k$, et par

hypothèse il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a^n f_i^m \in A_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Disons que $f_i \in A_{\gamma_i}$ pour $i = 1, \dots, k$; il vient $f_i^m(a^n - a_\delta^n) \in \bigoplus_{\gamma > m\gamma_i + n\gamma} A_\gamma$, donc $f_i^m a_\delta^n \in A_{0, m\gamma_i + n\delta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $a_\delta \in A^\circ$. Par suite $a - a_\delta \in A^\circ$; mais $a - a_\delta$ est un somme de $c - 1$ éléments homogènes, donc toutes ses composantes homogènes sont dans A° , par hypothèse de récurrence, et alors il en est de même pour a .

Exercice 9.81, partie (i) : Soient $a, b \in U$; il vient $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab \in 1+U$; ainsi, il ne reste qu'à montrer que $(1-a)^{-1} \in U$. Or, comme U est ouvert dans A° , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$1/(1-a) - (1+a+\dots+a^n) = a^{n+1}/(1-a) \in U$$

d'où l'assertion, car $a + \dots + a^n \in U$.

Partie (ii) : Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition; on pose $S := 1 + I_0$ et :

$$A_{0,\text{loc}} := S^{-1}A_0 \quad A_{\text{loc}} := S^{-1}A.$$

Munissons $A_{0,\text{loc}}$ de sa topologie $I_0 A_{0,\text{loc}}$ -adique $\mathcal{T}_{A_0}^{\text{loc}}$, et A_{loc} de l'unique topologie $\mathcal{T}_A^{\text{loc}}$ telle que l'inclusion $(A_{0,\text{loc}}, \mathcal{T}_{A_0}^{\text{loc}}) \rightarrow (A_{\text{loc}}, \mathcal{T}_A^{\text{loc}})$ soit un homomorphisme ouvert de groupes additifs. Autrement dit, la famille $(I_0^n A_{0,\text{loc}} \mid n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans A_{loc} . On doit vérifier que $(A_{\text{loc}}, \mathcal{T}_A^{\text{loc}})$ est un anneau topologique; d'après l'exercice 9.10(iii), cela revient à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in A_{\text{loc}}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$(*) \quad (x + I_0^m A_{0,\text{loc}}) \cdot (y + I_0^m A_{0,\text{loc}}) \subset xy + I_0^n A_{0,\text{loc}}.$$

Or, écrivons $x = a/(1+s), y = b/(1+t)$ avec $a, b \in A$ et $s, t \in I_0$; comme $I_0 \subset A^\circ$, et que I_0 est un idéal de type fini, on voit aisément qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $aI_0^k, bI_0^k \subset I_0^n$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. La condition $(*)$ est alors vérifiée avec $m := \max(k, n)$. Par construction, $A_{0,\text{loc}}$ et A_{loc} sont des anneaux de Huber, et la localisation $A_0 \rightarrow A_{0,\text{loc}}$ est adique, donc de même pour la localisation $j : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ (proposition 9.78(iii)). D'après l'exercice 9.21(v), pour vérifier que A_{loc} est topologiquement local, il suffit de montrer que $A_{0,\text{loc}}$ est topologiquement local. Soit donc $a \in A_{0,\text{loc}}^\circ$; il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a^{n+1} \in I_0 A_{0,\text{loc}}$, i.e. $a^{n+1} = b/(1+t)$ pour certains $b, t \in I_0$. Il vient

$$1 - a^{n+1} = (1+t-b)/(1+t) \in A_{0,\text{loc}}^\times$$

et en raisonnant comme dans la solution de l'exercice 9.21(v) on déduit que $1-a \in A_{0,\text{loc}}^\times$, d'où $a \in \mathcal{J}(A_{0,\text{loc}})$, comme souhaité. En dernier lieu, soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux topologiques, avec B topologiquement local; comme $I_0 \subset A^\circ$, on a $f(I_0) \subset B^\circ$, d'où $f(1+a) \in (B^\circ)^\times \subset B^\times$ pour tout $a \in I_0$. Donc f se factorise à travers un unique homomorphisme d'anneaux $f_{\text{loc}} : A_{\text{loc}} \rightarrow B$. Il reste à vérifier que f_{loc} est continu; pour cela, soit $V \subset B^\circ$ un sous-groupe additif ouvert tel que $V \cdot V \subset V$, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(I_0^k) \subset V$; noter que dans A_{loc} on a :

$$a/(1-t) = a(1+t+\dots+t^{k-1})/(1-t^k) \quad \forall a \in A, \forall t \in I_0$$

donc :

$$f_{\text{loc}}(S^{-1}I_0^k) = f_{\text{loc}}((1+I_0^k)^{-1} \cdot I_0^k) \subset (1+V)^{-1} \cdot V = (1+V) \cdot V \subset V$$

compte tenu de (i), d'où l'assertion.

Partie (iii) : Avec la notation de la solution de (ii), on a $(A^\circ)_{\text{loc}} = S^{-1}(A^\circ)$, qui est naturellement identifié à un sous-anneau de $A_{\text{loc}} = S^{-1}A$ contenu dans $(S^{-1}A)^\circ$, et sous cette identification, j_{loc}° correspond à l'inclusion. En particulier, j_{loc}° est injectif, et il reste à vérifier qu'il est surjectif. Soit ainsi $a/s \in (S^{-1}A)^\circ$, pour quelque $a \in A$ et $s \in S$; il suffit de montrer que $a \in A^\circ$. Mais par construction, $s \in A^\circ$, donc $s/1 \in S^{-1}(A^\circ) \subset (S^{-1}A)^\circ$, d'où $a/1 \in (S^{-1}A)^\circ$. Cela revient à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$I_0^m \cdot (a^k/1) \subset S^{-1}I_0^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on peut supposer que $m \geq n$. Soit $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fini de générateurs de I_0^m ; alors pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $k \in \mathbb{N}$ il existe $s_{\lambda,k} \in S$ tel que $s_{\lambda,k}x_\lambda a^k \in I_0^n$. D'autre part, en raisonnant comme dans la solution de (ii), pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $k \in \mathbb{N}$ on trouve $t_{\lambda,k} \in S$ et $b_{\lambda,k} \in I_0$ tel que $t_{\lambda,k}s_{\lambda,k}a^k = a^k + b_{\lambda,k}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur); ainsi $t_{\lambda,k}s_{\lambda,k}x_\lambda a^k = x_\lambda(a^k + b_{\lambda,k}) \in I_0^n$, d'où $x_\lambda a^k \in I_0^n$ pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $k \in \mathbb{N}$, et finalement $I_0^m \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset I_0^n$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Gardons la notation ci-dessus. On sait déjà que

$$A^{\circ\circ} \cdot (A_{\text{loc}})^\circ = A^{\circ\circ} \cdot (A^\circ)_{\text{loc}} = S^{-1}(A^{\circ\circ})$$

et $j_{\text{loc}}^{\circ\circ}$ est injective. Pour la surjectivité, soit $a/s \in (A_{\text{loc}})^{\circ\circ}$; comme $s \in A^\circ$, il vient $a/1 \in (A_{\text{loc}})^{\circ\circ}$. Cela revient à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k/1 \in S^{-1}I_0^n$, i.e. il existe $s \in S$ tel que $sa^k \in I_0^n$. Mais, en raisonnant comme dans la solution de (ii), on trouve $t \in S$ et $b \in I_0^n$ tel que $tsa^k = a^k + b$, par suite $a^k \in I_0^n$, d'où l'assertion.

Partie (v) : D'après le lemme 9.5(i,ii), $(\bar{A}, \mathcal{T}_{\bar{A}})$ est un anneau topologique, et π_A est une application ouverte; avec A_0 et I_0 comme ci-dessus, il s'ensuit que $\bar{A}_0 := \pi_A(A_0)$ est un sous-anneau ouvert de $\bar{A}$, l'image $\bar{I}_0$ de I_0 dans $\bar{A}_0$ est un idéal ouvert, et la topologie de $\bar{A}_0$ induite par $\mathcal{T}_{\bar{A}}$ est $\bar{I}_0$ -adique, d'où l'assertion.

Exercice 9.88, partie (i) : D'après l'exercice 9.49(ii), $\widehat{C}$ est l'adhérence de l'image $\bar{C}$ de C dans $\widehat{A}$; d'autre part, $\widehat{C}$ contient le sous-anneau ouvert et fermé $\widehat{B} \cdot \bar{C}$ de $\widehat{A}$ (proposition 9.12(i)), donc $\widehat{C} = \widehat{B} \cdot \bar{C}$. Cela montre que $\widehat{C}$ est entier sur $\widehat{B}$, et on est ramené à vérifier que B est intégralement clos dans $A \Leftrightarrow \widehat{B}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}$. Or, si B est intégralement clos dans A , soit $a \in \widehat{A}$ entier sur $\widehat{B}$; on choisit un polynôme unitaire $P(T) \in \widehat{B}[T]$ avec $P(a) = 0$. Comme B est un sous-anneau ouvert de A , on trouve $a' \in A$ et un polynôme unitaire $Q(T) \in B[T]$ tels que

$$j_A(a') - a, P(j_A(a')), j_A(Q(a')) - P(j_A(a')) \in \widehat{B}$$

(avec $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ l'application de complétion). Il vient $Q(a') \in j_A^{-1}(\widehat{B}) = B$ (observation 9.40(ii)). On pose $R(T) := Q(T) - Q(a')$; donc $R(T) \in B[T]$ et $R(a') = 0$, d'où, par hypothèse, $a' \in B$. On conclut que $a \in \widehat{B}$, comme souhaité. Réciproquement, si $\widehat{B}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}$, soit $a \in A$ entier sur B . On déduit aisément que $j_A(a)$ est entier sur $\widehat{B}$, d'où $j_A(a) \in \widehat{B}$, donc $a \in j_A^{-1}(\widehat{B}) = B$; cela montre que B est intégralement clos dans A .

Partie (ii) : Soient $a \in A$, $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et $U, V \subset A$ des sous-groupes ouverts; puisque $j_A^{-1}(\widehat{U}) = U$ (observation 9.40(ii)), on a $S \cdot V \subset U \Leftrightarrow j_A(S) \cdot \widehat{V} \subset \widehat{U}$. Cela entraîne que $A^\circ = j_A^{-1}((\widehat{A})^\circ)$. De même, il est clair que $A^{\circ\circ} = j_A^{-1}((\widehat{A})^{\circ\circ})$. Il suffit alors d'invoquer l'exercice 9.42(ii) et encore l'observation 9.40(ii).

Partie (iii) : Pour tout $a \in A^{\circ\circ}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge dans A vers un unique élément b tel que $b \cdot (1 - a) = 1$. Or, b est dans l'adhérence $\bar{B}$ du sous-anneau $B := \mathbb{Z}[a]$ de A , et noter que $\mathbb{Z}[a]$ est le sous-groupe additif de A engendré par $T := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme $a \in A^\circ$ (exercice 9.20(ii)), la partie T est évidemment à puissances bornées, donc de même pour $\bar{B}$ (exercice 9.21(i) et remarque 9.19(iii)); en particulier, $b \in A^\circ$, d'où l'assertion, compte tenu du théorème 1.50(i).

Partie (iv) : Soient $\mathcal{H}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$ dont les objets sont les anneaux de Huber, et $\mathcal{H}_{\text{cp.sép}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ des anneaux de Huber complets et séparés. La remarque 9.47(iii) et la proposition 9.86(i) entraînent que l'inclusion $F : \mathcal{H}_{\text{cp.sép}} \rightarrow \mathcal{H}$ est adjointe à droite du foncteur de complétion $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{cp.sép}} : A \mapsto \widehat{A}$. D'autre part, si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{H}$, avec B complet et séparé, d'après (iii) f se factorise à travers la localisation topologique $i_A : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ et un unique homomorphisme continu d'anneaux topologiques $f_{\text{loc}} : A_{\text{loc}} \rightarrow B$; à son tour, f_{loc} se factorise à

travers la complétion $j_{A_{\text{loc}}} : A_{\text{loc}} \rightarrow \widehat{A_{\text{loc}}}$ et un unique homomorphisme d'anneaux topologiques $\widehat{f_{\text{loc}}} : \widehat{A_{\text{loc}}} \rightarrow B$. Ainsi, l'association $A \mapsto \widehat{A_{\text{loc}}}$ pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{H})$ définit un autre adjoint à gauche de l'inclusion F . D'après l'exercice 2.14(i) (ou le lemme 2.4(i)) il existe un unique isomorphisme $\phi_A : \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A_{\text{loc}}}$ tel que $j_{A_{\text{loc}}} \circ i_A = \phi_A \circ j_A$, où $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ est la complétion ; par simple inspection, on trouve que $\phi_A = \widehat{\iota}_A$.

Problème 9.107 : Soit $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système fondamental de sous-modules ouverts de M pour une topologie $\mathcal{T}$ séparée et A -linéaire, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\pi_n : M \rightarrow M/\mathfrak{m}^n M$ la projection ; posons

$$J_{n,\lambda} := \pi_n(M_\lambda) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient $A/\mathfrak{m}^n$ est noethérien de dimension zéro, donc il est artinien (théorème 7.29), et par suite $M/\mathfrak{m}^n M$ est un A -module artinien (exercice 7.28(ii)) ; ainsi, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $J_n := J_{n,\lambda} \subset J_{n,\mu}$ pour tout $\mu \in \Lambda$, et il suffit de montrer que $J_n = 0$ pour tout tel n . Or, il est clair que la projection $A/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow A/\mathfrak{m}^n$ induit par restriction une *surjection* $J_{n+1} \rightarrow J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il suffira donc de vérifier que $J := \lim_{n \in \mathbb{N}} J_n = 0$. Mais J est un sous-module de la complétion $\mathfrak{m}$ -adique $\widehat{M}$ de M , et puisque A est complet pour sa topologie $\mathfrak{m}$ -adique, l'application de complétion $M \rightarrow \widehat{M}$ est un isomorphisme (proposition 9.102(ii)) ; on peut ainsi identifier J avec un sous-module de M , et par construction, si $x \in J$, on a $x \in M_\lambda + \mathfrak{m}^n M$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Mais d'après le corollaire 9.106(ii), M_λ est une partie fermée pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique de M , donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (M_\lambda + \mathfrak{m}^n M) = M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et finalement

$$J \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (M_\lambda + \mathfrak{m}^n M) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = 0$$

car $\mathcal{T}$ est séparée.

Exercice 9.108, partie (i) : Evidemment on peut supposer que $A \neq 0$; en outre, notons par $\widehat{A}$ la complétion I -adique de A , de sorte que M est naturellement un $\widehat{A}$ -module. Soit alors $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal, et supposons par l'absurde que $I \not\subset \mathfrak{m}$. Ainsi, il existe $a \in I$ et $b \in \mathfrak{m}$ avec $a + b = 1$, d'où $b \in (\widehat{A})^\times$, car $b^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n$. Par suite, $M/\mathfrak{m}M = 0$, d'où $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$, et alors $M_{\mathfrak{m}} = 0$ (corollaire 3.49) ; mais par hypothèse on a $\text{Ann}_A(M) = 0$, donc $\text{Ann}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = 0$, car M est de type fini (remarque 3.58(ii)), d'où $A_{\mathfrak{m}} = 0$, contradiction.

Partie (ii) : Si la topologie I -adique $\mathcal{T}_{A,I}$ de A est complète et séparée, il en est de même pour $\mathcal{T}_{M,I}$, d'après la proposition 9.102(ii). Réciproquement, soit $\mathcal{T}_{M,I}$ complète et séparée ; d'après (i), on a alors $I \subset \mathcal{J}(A)$. Soient $m_1, \dots, m_k$ un système fini de générateurs de M , et $\phi : A \rightarrow M^k$ l'application A -linéaire telle que $\phi(a) := (am_1, \dots, am_k)$ pour tout $a \in A$; puisque M est un A -module fidèle, ϕ est injective. En outre, la topologie I -adique $\mathcal{T}_{M^k,I}$ de M^k est évidemment complète et séparée, et $\phi(A)$ est une partie fermée de M^k pour la topologie $\mathcal{T}_{M^k,I}$ (corollaire 9.106(ii)) ; mais $\mathcal{T}_{M^k,I}$ induit la topologie I -adique sur le A -sous-module $\phi(A) \simeq A$ (proposition 9.100(ii)), donc $\mathcal{T}_{A,I}$ est complète et séparée (remarque 9.30(vii)).

Exercice 9.116, partie (i) : On munit $A[T_\bullet] := A[T_1, \dots, T_n]$ de sa topologie $T_\bullet$ -adique $\mathcal{T}_{T_\bullet}$, et on considère l'homomorphisme de A -algèbres

$$\psi_0 : A[T_\bullet] \rightarrow A \quad T_i \mapsto a_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Evidemment ψ_0 est surjectif, et $K := \text{Ker } \psi_0$ est l'idéal de $A[T_\bullet]$ engendré par la suite $T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n$; en outre, on voit aisément que la topologie I -adique sur A est induite par $\mathcal{T}_{T_\bullet}$ via ψ_0 , et d'après le lemme d'Artin-Rees, $\mathcal{T}_{T_\bullet}$ induit sur K la topologie $T_\bullet$ -adique. D'après le corollaire 9.58, il vient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \widehat{K} \rightarrow A[[T_\bullet]] \xrightarrow{\psi} \widehat{A_I} \rightarrow 0$$

et la topologie de $\widehat{A}_I$ est induite par celle de $A[[T_\bullet]]$ via ψ . En outre, comme $A[T_\bullet]$ est noethérien, $\widehat{K}$ est l'idéal de $A[[T_\bullet]]$ engendré par $T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n$ (corollaire 9.114(ii)), d'où l'assertion.

Partie (ii) : On a déjà observé que la topologie J -adique $\mathcal{T}_{A,J}$ de A est induite par la topologie de $\widehat{A}_J$ via $j_{A,J}$ (théorème 9.39(ii)). De l'autre côté, comme $I^n \subset J^n$, l'idéal J^n est ouvert dans la topologie I -adique $\mathcal{T}_{A,I}$ de A pour tout $n \in \mathbb{N}$ (proposition 9.12(i)), et donc l'identité $Id_A : (A, \mathcal{T}_{A,I}) \rightarrow (A, \mathcal{T}_{A,J})$ est continue (remarque 9.3(ii)). Par le théorème 9.39(i), on conclut que $j_{A,J}$ se factorise à travers $j_{A,I} : A \rightarrow \widehat{A}_I$ et une application unique $\widehat{A}_I \rightarrow \widehat{A}_J$ comme souhaité.

Partie (iii) : On munit le A -module $M := A \oplus A$ de la topologie linéaire $\mathcal{T}_M$ définie par la suite de sous-modules $(I^n \oplus J^n \mid n \in \mathbb{N})$. Soit $i : A \rightarrow M$ l'application A -linéaire telle que $i(a) := (a, a)$ pour tout $a \in A$, et munissons A et $N := \text{Coker } i$ des topologies $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_N$ induites par $\mathcal{T}_M$ respectivement via i et via la projection $p : M \rightarrow N$. Par le corollaire 9.58, on déduit une suite exacte de complétions

$$(**) \quad 0 \rightarrow \widehat{A} \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \widehat{N} \rightarrow 0.$$

Or, $\mathcal{T}_M$ est le produit des topologies I -adiques et J -adiques sur les deux facteurs respectifs de M . De plus, la topologie $\mathcal{T}_A$ est définie par la suite $(I^n \cap J^n \mid n \in \mathbb{N})$ et l'application $M \rightarrow A : (a, a') \mapsto a - a'$ induit un isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} A$ identifiant $\mathcal{T}_N$ avec la topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}'_A$ de A définie par $(I^n + J^n \mid n \in \mathbb{N})$. On remarque :

- $(I + J)^{2n} \subset I^n + J^n \subset (I + J)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{T}'_A$ est la topologie $(I + J)$ -adique de A .
- Par le lemme d'Artin-Rees, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $(I \cap J)^{n+k} \subset I^{n+k} \cap J^n \subset (IJ)^n \subset (I \cap J)^n$, donc $\mathcal{T}_A$ est la topologie $(I \cap J)$ -adique de A .

Finalement, on conclut que $(**)$ est naturellement isomorphe à la suite

$$0 \rightarrow \widehat{A}_{I \cap J} \xrightarrow{\hat{i}} \widehat{A}_I \oplus \widehat{A}_J \xrightarrow{\hat{p}} \widehat{A}_{I+J} \rightarrow 0$$

(exercice 9.43). On déduit aisément que le diagramme $(*)$ est cartésien ; il est en outre cocartésien dans la catégorie $A - \text{Mod}$. Pour vérifier qu'il est aussi cocartésien dans la catégorie des anneaux topologiques séparés, considérons un anneau topologique B séparé avec deux homomorphismes continus d'anneaux $f : \widehat{A}_I \rightarrow B$ et $g : \widehat{A}_J \rightarrow B$ tels que $f \circ \phi_{I \cap J, I} = g \circ \phi_{I \cap J, J}$; on sait déjà qu'il existe une unique application A -linéaire $h : \widehat{A}_{I+J} \rightarrow B$ telle que $f = h \circ \phi_{I, I+J}$ et $g = h \circ \phi_{J, I+J}$, et il reste à vérifier que h est un homomorphisme continu d'anneaux. Pour la continuité, soit $U \subset B$ un voisinage de 0, et choisissons un voisinage $U' \subset U$ de 0 dans B avec $U' + U' \subset U$; puisque f et g sont continus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(I^n \widehat{A}_I), g(J^n \widehat{A}_J) \subset U'$, et alors $K := \widehat{p}(I^n \widehat{A}_I \oplus J^n \widehat{A}_J)$ est un voisinage de 0 dans $\widehat{A}_{I+J}$ avec $h(K) \subset U$, d'où l'assertion. En dernier lieu, noter que l'image $\overline{A}$ de A est un sous-anneau dense de $\widehat{A}_{I+J}$, et par construction, h se restreint en un homomorphisme d'anneaux $\overline{A} \rightarrow B$; en vertu de l'exercice 1.26(iv) et de la continuité de h , il s'ensuit aisément que h est un homomorphisme d'anneaux.

Exercice 9.117, partie (i) : Soit $j : A \rightarrow \widehat{A}$ l'application de complétion ; montrons d'abord que $h_M := j \otimes_A M : M \rightarrow M^* := \widehat{A} \otimes_A M$ induit un isomorphisme $\widehat{A}$ -linéaire des complétions I -adiques $\widehat{h}_M : \widehat{M} \xrightarrow{\sim} \widehat{M^*}$. D'après la proposition 9.50, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme $A/I^n \otimes_A h_M : M/I^n M \rightarrow M^*/I^n M^*$ est bijectif, et on est ramené aussitôt à vérifier que $A/I^n \otimes_A j$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela suit du corollaire 9.61(ii). De même, $h_P : P \rightarrow P^* := \widehat{A} \otimes_A P$ induit un isomorphisme

des complétions I -adiques $\widehat{h}_P : \widehat{P} \xrightarrow{\sim} \widehat{P}^*$, et on déduit un diagramme commutatif de $\widehat{A}$ -modules dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A \widehat{P} & \xrightarrow{f_{M,P}} & M \widehat{\otimes}_A P \\ \downarrow M \otimes_A \widehat{h}_P & & \downarrow \widehat{h}_{M \otimes_A P} \\ M^* \otimes_{\widehat{A}} \widehat{P}^* & \xrightarrow{f_{M^*,P^*}} & M^* \widehat{\otimes}_{\widehat{A}} P^* \end{array}$$

(noter l'identification naturelle $M^* \otimes_{\widehat{A}} P^* \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A P)^*$). Il suffit donc de montrer que f_{M^*,P^*} est un isomorphisme, et compte tenu de la remarque 3.74(vi), on peut ainsi remplacer A, I, M et P par $\widehat{A}, I\widehat{A}, M^*$ et P^* , ce qui permet de supposer que A soit *noethérien*, d'après le théorème 9.113. Ensuite, considérons une suite exacte de A -modules de type fini

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0.$$

On va montrer d'abord que la suite induite de complétions I -adiques :

$$\Sigma \widehat{\otimes}_A P \quad : \quad 0 \rightarrow M_1 \widehat{\otimes}_A P \rightarrow M_2 \widehat{\otimes}_A P \rightarrow M_3 \widehat{\otimes}_A P \rightarrow 0$$

est encore exacte. En effet, la suite $\Sigma \otimes_A P$ est évidemment exacte, car P est un A -module plat ; au vu du corollaire 9.58 et de la proposition 9.12(iii), il suffit alors de montrer que la topologie I -adique de $M_1 \otimes_A P$ est induite par celle de $M_2 \otimes_A P$ via $i \otimes_A P$. Mais par la proposition 9.100(ii), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$I^n M_2 \cap M_1 \subset I^{n-k} M_1 \subset I^{n-k} M_2 \cap M_1 \quad \forall n \geq k.$$

Comme P est un A -module plat, il s'ensuit aussitôt que :

$$I^n (M_2 \otimes_A P) \cap (M_1 \otimes_A P) \subset I^{n-k} (M_1 \otimes_A P) \subset I^{n-k} (M_2 \otimes_A P) \cap (M_1 \otimes_A P) \quad \forall n \geq k$$

d'où l'assertion. Or, soient $\phi : A^n \rightarrow M$ une surjection A -linéaire, et $M' := \text{Ker } \phi$. Par ce qui précède, on obtient un diagramme commutatif de $\widehat{A}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} M' \otimes_A \widehat{P} & \longrightarrow & A^n \otimes_A \widehat{P} & \longrightarrow & M \otimes_A \widehat{P} & \longrightarrow & 0 \\ f_{M',P} \downarrow & & \downarrow f_{A^n,P} & & \downarrow f_{M,P} & & \\ 0 \longrightarrow & M' \widehat{\otimes}_A P & \longrightarrow & A^n \widehat{\otimes}_A P & \longrightarrow & M \widehat{\otimes}_A P & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est exacte courte, et dont la ligne horizontale en haut est exacte à droite. On voit aisément que $f_{A^n,P}$ est un isomorphisme, et on déduit aussitôt que $f_{M,P}$ est surjective, pour tout A -module M de type fini. Mais M' est un A -module de type fini, car A est noethérien (proposition 6.64), donc $f_{M',P}$ est surjective. D'autre part, le lemme du serpent fournit la suite exacte : $\text{Ker } f_{A^n,P} \rightarrow \text{Ker } f_{M,P} \rightarrow \text{Coker } f_{M',P}$. Cela montre que $f_{M,P}$ est bien un isomorphisme.

Partie (ii) : On vient de voir que $h_P : P \rightarrow P^*$ induit un isomorphisme des complétions I -adiques ; quitte à remplacer A et P par $\widehat{A}$ et P^* , on peut alors supposer que A soit noethérien, et il suffit de montrer que dans ce cas $\widehat{P}$ est un A -module plat. Pour cela, soit $i : J \rightarrow A$ l'inclusion d'un idéal ; par la proposition 3.78, on doit vérifier que $i \otimes_A \widehat{P} : J \otimes_A \widehat{P} \rightarrow \widehat{P}$ est une injection. Mais avec (i), cette application est naturellement identifiée avec la complétion I -adique $i \widehat{\otimes}_A P : J \widehat{\otimes}_A P \rightarrow \widehat{P}$ de $i \otimes_A P$, et comme J est de type fini, la preuve de (i) montre que $i \widehat{\otimes}_A P$ est injective.

Problème 9.118, partie (i) : Posons $\overline{A} := A/I$, et pour tout A -module N , notons par $\widehat{N}$ la complétion J -adique de N . Si M est plat, l'exercice 9.117(i) entraîne que l'application A -linéaire naturelle $\widehat{M}/I\widehat{M} \rightarrow \widehat{\overline{M}}$ est un isomorphisme, et de même si M est de type fini, d'après les corollaires 9.114(i,ii) et 9.58. Par suite, chaque de ces deux conditions entraîne que si $\mathcal{T}_{M,J}$ est complète et séparée, il en est de même pour

$\mathcal{T}_{\overline{M},J}$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{T}_{\overline{M},J}$ soit complète et séparée; si M est de type fini, posons $\overline{A}_0 := \overline{A}/\text{Ann}_{\overline{A}}(\overline{M})$. Alors $\overline{M}$ est un $\overline{A}_0$ -module fidèle de type fini, donc la topologie J -adique de $\overline{A}_0$ est complète et séparée (exercice 9.108(ii)), et par suite il en est de même pour la topologie J -adique de tout $\overline{A}_0$ -module de type fini (proposition 9.102(ii)). En particulier, noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\overline{A}$ -module $Q_n := I^n M / I^{n+1} M$ est un quotient du $\overline{A}_0$ -module $I^n / I^{n+1} \otimes_{\overline{A}} \overline{M}$, et donc sa topologie J -adique est complète et séparée; par suite, l'application naturelle $Q_n \rightarrow \widehat{A} \otimes_A Q_n$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$ (proposition 9.102(i)). Posons aussi $M_n := M / I^n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; compte tenu des suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow Q_n \rightarrow M_{n+1} \rightarrow M_n \rightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et puisque $\widehat{A}$ est une A -algèbre plate (corollaire 9.103(i)), par une simple récurrence on déduit que l'application naturelle $\phi_n : M_n \rightarrow \widehat{A} \otimes_A M_n \xrightarrow{\sim} \widehat{M} / I^n \widehat{M}$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, la limite ϕ du système $(\phi_n \mid n \in \mathbb{N})$ est un isomorphisme de la complétion I -adique de M avec la complétion I -adique de $\widehat{M}$; mais la topologie I -adique de $\widehat{M}$ est complète et séparée, d'après la proposition 9.63, donc ϕ est un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$, d'où l'assertion, dans ce cas.

En dernier lieu, si M est plat, il en est de même pour $\widehat{M}$ (exercice 9.117(ii)); compte tenu des suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow I_n := I^n / I^{n+1} \rightarrow A / I^{n+1} \rightarrow A / I^n \rightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccccccc} I_n \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & I_n \otimes_A \overline{M} & \rightarrow & I_n \otimes_A \widehat{M} / I \widehat{M} & \xrightarrow{\sim} & I_n \otimes_A \widehat{M} \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ Q_n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & & I^n \widehat{M} / I^{n+1} \widehat{M} & & \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. D'autre part, comme par hypothèse $\mathcal{T}_{\overline{M},J}$ est complète et séparée, l'exercice 9.117(i) nous dit que l'application naturelle $\overline{M} \rightarrow \widehat{M} / I \widehat{M}$ est un isomorphisme; ainsi, la composition des flèches horizontales en haut est un isomorphisme, donc de même pour la flèche horizontale en bas. Par une simple récurrence, on déduit alors que ϕ_n est encore un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on conclut comme dans le cas précédent.

Partie (ii) : Notons aussi par $\widehat{A}_I$ la complétion I -adique de A ; si M est de type fini (resp. si M est plat), $\widehat{M}_I$ est un $\widehat{A}_I$ -module de type fini, d'après la proposition 9.102(i) (resp. un $\widehat{A}_I$ -module plat, d'après l'exercice 9.117(ii)). En outre, d'après le corollaire 9.61(ii), l'application naturelle $M / IM \rightarrow \widehat{M}_I / I \widehat{M}_I$ est un isomorphisme, donc la topologie J -adique de $\widehat{M}_I / I \widehat{M}_I$ est complète et séparée, et alors il en est de même pour la topologie J -adique de $\widehat{M}_I$, d'après (i). Par le théorème 9.39(i), il existe alors une unique application A -linéaire $\beta : \widehat{M}_J \rightarrow \widehat{M}_I$ dont la composition avec la complétion J -adique $i_{M,J} : M \rightarrow \widehat{M}_J$ coïncide avec la complétion I -adique $i_{M,I} : M \rightarrow \widehat{M}_I$. De même, par définition on a $\alpha \circ i_{M,I} = i_{M,J}$, d'où :

$$\alpha \circ \beta \circ i_{M,J} = i_{M,J} \quad \text{et} \quad \beta \circ \alpha \circ i_{M,I} = i_{M,I}$$

et les propriétés universelles de $i_{M,I}$ et $i_{M,J}$ entraînent alors que $\alpha \circ \beta = Id_{\widehat{M}_J}$ et $\beta \circ \alpha = Id_{\widehat{M}_I}$, d'où l'assertion.



PLUSIEURS thèmes développés dans notre cours convergent et trouvent leur aboutissement ici. Le lemme d'Artin-Rees intervient crucialement dans la section 10.4, pour la preuve de l'important *critère local de platitude*. A son tour, ce dernier ouvre la voie à diverses questions portant sur le *lieu de platitude* d'un A -module M , surtout dans des situations *relatives*, *i.e.* lorsque M est de type fini sur une A -algèbre B . Notamment, pour A noethérien et B de type fini, on montrera que l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q} \subset B$ tels que $M_{\mathfrak{q}}$ soit un A -module plat, est une partie ouverte de $\text{Spec } B$ (proposition 10.56) ; puis, d'après le problème 10.61, on pourra relâcher les hypothèses noethériennes, quitte à supposer que M et B soient de présentation finie. On reconnaîtra en le théorème de platitude générique de la section 6.5 un précurseur de ces énoncés : comme celui-ci, ils ne sont qu'un aspect d'une plus ample avenue centrale de l'algèbre commutative, bâtie principalement par A.Grothendieck au milieu des années 60, et pour laquelle le chapitre IV de ses *Eléments* [16] est encore la seule référence systématique.

Un autre théorème important de la quatrième section établit la compatibilité du lieu de platitude avec les limites inductives de A -algèbres (théorème 10.59) ; les preuves de tous ces résultats font un usage intensif des méthodes homologiques ; en particulier, ils requièrent une investigation préalable du comportement des foncteurs $\text{Tor}_\bullet^A$ vis-à-vis des extensions des scalaires $A \rightarrow B$: la section 10.3 recueille ces préliminaires de nature assez technique.

La section 10.1 prolonge le thème du spectre valuatif amorcé dans les leçons précédentes : on associe à chaque anneau topologique A son *spectre des valuations continues* $\text{Cont}(A)$, un sous-espace du spectre valuatif de A , muni d'un *faisceau de fonctions algébriques* $\mathcal{O}_{\text{Cont}(A)}$ qui en fait un espace localement annelé ; cette construction est surtout intéressante quand A est un anneau de Huber, car dans ce cas $\text{Cont}(A)$ est un espace spectral. La section 10.2 associe un *spectre adique* $\text{Spa } \underline{A}$ à tout *anneau affinoïde*, *i.e.* à tout couple $\underline{A} := (A, A^+)$ constitué d'un anneau A de Huber, et d'un sous-anneau ouvert $A^+ \subset A$ d'éléments à puissances bornées ; il s'agit d'une partie pro-constructible dense de l'espace topologique $\text{Cont}(A)$, et il devient même un espace localement annelé, avec la restriction $\mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}$ du faisceau $\mathcal{O}_{\text{Cont}(A)}$. Ce faisceau admet le sous-faisceau $\mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}^+$ des *fonctions algébriques entières*, d'où encore un espace localement annelé $(\text{Spa } \underline{A}, \mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}^+)$; le dernier résultat de la section 10.2 établit un isomorphisme naturel entre un certain sous-espace annelé ouvert de cet espace et la limite inverse d'un système d'éclatements du schéma $\text{Spec } A^+$: voir la proposition 10.31 pour l'énoncé précis.

La cinquième section revisite d'abord un *lemme de pincement* déjà vu au §6.4.1 : encore une fois, la lumière apportée par la technologie homologique permet de le débarrasser de quelques hypothèses superflues. Ce lemme de pincement amélioré, les renseignements sur le lieu de platitude de la section précédente, et la présentation par éclatements de la partie analytique du spectre adique (proposition 10.31) sont les ingrédients principaux

pour démontrer le théorème 10.72 de Gruson et Raynaud, suivant une idée esquissée par K.Fujiwara il y a une vingtaine d'années [27]. On verra quelques applications de ce théorème dans la dernière leçon de notre cours.

10.1. Valuations continues. Cette section est consacrée à la théorie de R.Huber du *spectre des valuations continues* sur les anneaux topologiques.

Tout d'abord, soit $(\Gamma, +, 0, \leq)$ un groupe abélien ordonné quelconque ; on prolonge l'ordre et la loi d'addition de Γ à l'ensemble $\Gamma_\circ$ comme dans la définition 8.1(i), et on munit $\Gamma_\circ$ de sa $\circ$ -topologie, i.e. la topologie engendrée par les parties :

$$\{\gamma\} \quad \text{et} \quad U_\gamma := \{\delta \in \Gamma_\circ \mid \delta > \gamma\} \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Donc, toute partie de Γ est ouverte pour la $\circ$ -topologie, et une partie de $U \subset \Gamma_\circ$ avec $+\infty \in U$ est ouverte si et seulement s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $U_\gamma \subset U$.

Remarque 10.1. Soit $f : (\Gamma, \leq) \rightarrow (\Gamma', \leq')$ un morphisme de groupes ordonnés (définition 8.1(ii)) ; alors f se prolonge en un morphisme $f_\circ : \Gamma_\circ \rightarrow \Gamma'_\circ$ d'ensembles totalement ordonnés, avec $f_\circ(+\infty) := +\infty$, mais $f_\circ$ n'est pas forcément une application continue pour les $\circ$ -topologies ; par exemple on a :

- (a) Si f est l'inclusion d'un sous-groupe $\Gamma \subset \Gamma'$, soit Δ l'enveloppe convexe de Γ dans Γ' , i.e. l'intersection des sous-groupes convexes de Γ' contenant Γ ; alors $f_\circ$ est continue si et seulement si $\Delta = \Gamma'$. Si cette condition est vérifiée, la $\circ$ -topologie de Γ est induite via f par la $\circ$ -topologie de Γ' .
- (b) Si $\Gamma' = \Gamma/\Delta$ pour un sous-groupe propre convexe $\Delta \subset \Gamma$, et si f est la projection, alors $f_\circ$ est continue pour les $\circ$ -topologies (voir l'exercice 8.5(ii)).
- (c) D'autre part, si $\Gamma' = \{0\}$ et si $\Gamma \neq \{0\}$, alors $f_\circ$ n'est pas continue.
- (d) Signalons aussi que pour tout sous-groupe convexe $\Delta \subset \Gamma$, la rétraction $\rho_\circ : \Gamma_\circ \rightarrow \Delta_\circ$ de l'inclusion $\Delta_\circ \rightarrow \Gamma_\circ$ définie comme dans le problème 8.105, est trivialement continue pour les $\circ$ -topologies.

Les vérifications détaillées sont confiées aux soins du lecteur.

Définition 10.2. (i) Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, et $v : A \rightarrow \Gamma_\circ$ une valuation sur A . Rappelons que $\Gamma_v \subset \Gamma$ dénote le groupe des valeurs de v (définition 8.6(i)), et on dénote par $\mathcal{T}_v^\circ$ la $\circ$ -topologie de $\Gamma_{v\circ}$. On dit que v est une *valuation continue*, si elle est une application continue $v : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (\Gamma_{v\circ}, \mathcal{T}_v^\circ)$.

(ii) On voit aisément que si $v : A \rightarrow \Gamma_\circ$ et $v' : A \rightarrow \Gamma'_\circ$ sont deux valuations équivalentes (définition 8.1(v)), alors v est continue si et seulement s'il en est de même pour v' . Le *spectre des valuations continues* de $(A, \mathcal{T}_A)$ est alors :

$$\text{Cont}(A) := \{v \in \text{Spv } A \mid v \text{ est continue}\}$$

que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spv } A$.

Remarque 10.3. Soient $(A, \mathcal{T}_A)$ un anneau topologique, et v une valuation sur A .

(i) Soit $\bar{v} : k(v) \rightarrow \Gamma_{v\circ}$ la valuation résiduelle de v , et munissons $k(v)$ de sa $\bar{v}$ -topologie $\mathcal{T}_{\bar{v}}$ (voir le problème 9.53(i)) ; par inspection directe de définitions, on voit que $\bar{v}$ est une valuation continue du corps topologique $(k(v), \mathcal{T}_{\bar{v}})$. De plus, la valuation v est continue si et seulement s'il en est de même pour la projection naturelle $\pi : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (k(v), \mathcal{T}_{\bar{v}})$. En effet, si π est continue, il en est de même pour $v = \bar{v} \circ \pi$. Réciproquement, soit v continue ; il suffit de vérifier que π est continue en $0 \in A$ (remarque 9.3(ii)). Mais d'un côté, $(U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_v)$ est un système fondamental de voisinages ouverts de $+\infty$ dans $\Gamma_{v\circ}$, et de l'autre côté $(\bar{v}^{-1}U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_v)$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $k(v)$, d'où l'assertion.

(ii) On déduit aussitôt de (i) que v est continue si et seulement si elle est une application continue en $0 \in A$ pour les topologies $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_v^\circ$.

(iii) En particulier, (ii) montre que *toute valuation dont le support est une partie ouverte de A , est continue* ; une telle valuation est dite *non analytique*. Les valuations continues de A dont le support n'est pas ouvert dans A sont dites *analytiques*. La partie de $\text{Cont}(A)$ formée des valuations analytiques et celle formée des valuations non analytiques sont notées respectivement :

$$\text{Cont}(A)_{\text{an}} \quad \text{et} \quad \text{Cont}(A)_{\text{na}}$$

et on munit ces parties des topologies induites par les inclusions dans $\text{Cont}(A)$.

(iv) Soit w une généralisation secondaire *stricte* de v dans $\text{Spv } A$ (voir le problème 8.105(iii)). Compte tenu de la remarque 10.1(b,c), on voit que si v est continue, il en est de même pour w , pourvu que $\Gamma_w \neq \{0\}$; par contre, si $\Gamma_w = \{0\}$, la valuation w peut être non continue. De l'autre côté, si w est continue, il en est de même pour v : en effet, soit $\pi : \Gamma_v \rightarrow \Gamma_w$ la projection, de sorte que $w = \pi \circ v$; d'après (i) il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$ la partie $v^{-1}(U_\gamma)$ est un voisinage de 0 dans A . Or, par hypothèse, la partie $W := w^{-1}(U_{\pi(\gamma)})$ est ouverte dans A ; mais si $x \in W$, on a $\pi \circ v(x) > \pi(\gamma)$, d'où $v(x) > \gamma$, i.e. $W \subset v^{-1}(U_\gamma)$, d'où l'assertion.

(v) Au vu de (iv), de la remarque 10.1(d) et de la proposition 8.109, on conclut que $\text{Cont}(A)$ *contient toutes les spécialisations dans $\text{Spv } A$ de tous ses points*. D'autre part, en général $\text{Cont}(A)$ n'est pas une partie fermée de $\text{Spv } A$.

(vi) Soient $(B, \mathcal{T}_B)$ un autre anneau topologique, et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux. Evidemment l'application $\text{Spv } f : \text{Spv } B \rightarrow \text{Spv } A$ induit par restriction des applications continues :

$$\begin{aligned} \text{Cont}(f) : \text{Cont}(B) &\rightarrow \text{Cont}(A) \\ \text{Cont}(f)_{\text{na}} : \text{Cont}(B)_{\text{na}} &\rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{na}} \end{aligned} \quad v \mapsto v \circ f.$$

Les associations $(A, \mathcal{T}_A) \mapsto \text{Cont}(A)$ et $f \mapsto \text{Cont}(f)$ définissent ainsi un foncteur :

$$\text{Cont} : (\mathbb{Z} - \text{AlgTop})^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}.$$

10.1.1. Le spectre des valuations continues d'un anneau de Huber est particulièrement intéressant : on verra notamment qu'il est un espace spectral ; pour la preuve il nous faudra quelques observations préliminaires. Tout d'abord, soit $(\Gamma, +, 0, \leq)$ un groupe abélien ordonné, $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe, et $\gamma \in \Gamma_0$; on dira que γ est *cofinal dans Δ* si pour tout $\delta \in \Delta$ il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \cdot \gamma > \delta$. On remarque :

Lemme 10.4. *Soient A un anneau de Huber, et $v \in \text{Cont}(A)$. On a :*

- (i) $\text{Cont}(A) = \{w \in \text{Spv } A \mid w(a) \text{ est cofinal dans } \Gamma_w \text{ pour tout } a \in A^{\circ\circ}\}$.
- (ii) *Toute spécialisation primaire stricte de v dans $\text{Cont}(A)$ est non analytique.*

Démonstration. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $a_1, \dots, a_n$ une suite finie de générateurs de I_0 ; pour tout $w \in \text{Spv } A$ on pose $\gamma_w := \min(w(a_1), \dots, w(a_n))$.

(i) : Si w est continue, évidemment $w(a)$ est cofinal dans Γ_w pour tout $a \in A^{\circ\circ}$. Réciproquement, si w vérifie cette condition, au vu de la remarque 10.3(ii) il suffit de montrer que pour tout $\delta \in \Gamma_w$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $w(a) > \delta$ pour tout $a \in I_0^N$. Or, d'un côté on a $w(a) > 0$ pour tout $a \in I_0$, car $I_0 \subset A^{\circ\circ}$; de l'autre côté, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $k \cdot \gamma_w > \delta$. Mais tout $a \in I_0^{k+1}$ est une somme finie d'éléments de la forme $ba_{i_1} \cdots a_{i_k}$, pour certains $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ et $b \in I_0$; par suite $w(a) > k \cdot \gamma_w$ pour tout $a \in I_0^{k+1}$, donc $N := k + 1$ convient.

(ii) : Soient $\Delta \subsetneq \Gamma_v$ un sous-groupe convexe, et $w := v^\Delta$; évidemment $\gamma_v \notin \Delta$, donc $w(a_1) = \dots = w(a_n) = +\infty$, et ainsi $w(I_0) = \{+\infty\}$, d'où l'assertion. $\square$

Lemme 10.5. *Soient A un anneau de Huber, et $v \in \text{Spv } A$. On a :*

- (i) *Si $v(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$, il existe un plus grand sous-groupe convexe $\Delta \subset \Gamma_v$ tel que $v(a)$ soit cofinal dans Δ pour tout $a \in A^{\circ\circ}A$.*
- (ii) *Si en outre $v(A^{\circ\circ}) \neq \{+\infty\}$, alors $v(A^{\circ\circ}) \cap \Delta \neq \emptyset$.*

Démonstration. Rappelons que $c\Gamma_v$ dénote le sous-groupe caractéristique de v : voir le problème 8.105. Si $v(A^{\circ\circ}) = \{+\infty\}$, évidemment $\Delta = \Gamma_v$. Sinon, soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $a_1, \dots, a_n$ une suite finie de générateurs de I_0 ; on voit aisément que :

$$(*) \quad \text{rad}(I_0 A) = \text{rad}(A^{\circ\circ} A)$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). On pose $\gamma_v := \min(v(a_1), \dots, v(a_n))$; noter que $\gamma_v > 0$ et $\gamma_v \neq +\infty$, car $v(A^{\circ\circ} A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$ et $v(A^{\circ\circ}) \neq \{+\infty\}$. On dénote $\Delta \subset \Gamma_v$ le plus petit sous-groupe convexe contenant γ_v . Montrons que $v(a)$ est cofinal dans Δ pour tout $a \in A^{\circ\circ} A$. En effet, soit $\delta \in \Delta$; par construction, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \cdot \gamma_v > \delta$, et d'autre part, d'après (*) il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $a^N = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. On a $v(ax_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, n$, car $v(A^{\circ\circ} A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$, d'où $v(a^{N+1}) \geq \gamma_v$, et finalement $k(N+1) \cdot v(a) > \delta$, comme souhaité. Evidemment Δ vérifie la condition de (i), car il est le plus grand sous-groupe dans lequel γ_v est cofinal. L'assertion (ii) est claire par construction. $\square$

10.1.2. *La rétraction canonique.* Soit A un anneau de Huber ; en vertu du lemme 10.5, on peut associer à tout $v \in \text{Spv } A$ le sous-groupe

$$c\Gamma_v^* \subset \Gamma_v$$

défini comme suit. Si $v(A^{\circ\circ} A) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset$, on pose $c\Gamma_v^* := c\Gamma_v$; sinon, soit $c\Gamma_v^*$ le plus grand sous-groupe convexe de Γ_v dans lequel $v(a)$ est cofinal pour tout $a \in A^{\circ\circ} A$.

Lemme 10.6. *Soit A un anneau de Huber. Pour tout $v \in \text{Spv } A$ on a $c\Gamma_v \subset c\Gamma_v^*$, et les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\Gamma_v = c\Gamma_v^*$.
- (b) $\Gamma_v = c\Gamma_v$ ou $v(a)$ est cofinal dans Γ_v pour tout $a \in A^{\circ\circ} A$.
- (c) $\Gamma_v = c\Gamma_v$ ou $v(a)$ est cofinal dans Γ_v pour tout $a \in A^{\circ\circ}$.

Démonstration. L'équivalence de (a) et (b) suit aussitôt des définitions, et évidemment (b) $\Rightarrow$ (c). Pour montrer que (c) $\Rightarrow$ (b), il suffit vérifier que si $\Gamma_v \neq c\Gamma_v^*$, la partie

$$I := \{a \in A \mid v(a) \text{ est cofinal dans } \Gamma_v\}$$

est un idéal de A . Evidemment, si $a, a' \in I$, on a $a + a' \in I$. Ensuite, soient $a \in I$ et $b \in A$; si $v(b) > 0$, il est clair que $ab \in I$. Soit donc $v(b) < 0$, i.e. $v(b) \in c\Gamma_v$; comme $\Gamma_v \neq c\Gamma_v^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v(a^n) > \gamma$ pour tout $\gamma \in c\Gamma_v$, d'où $v(a^n b^j) > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Il vient $(n+k) \cdot v(ab) = k \cdot v(a) + v(a^n b^{n+k}) > k \cdot v(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi $ab \in I$.

Ensuite, pour montrer que $c\Gamma_v \subset c\Gamma_v^*$, on peut supposer que $v(A^{\circ\circ} A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$; or, si $v(A^{\circ\circ}) = \{+\infty\}$, on a $c\Gamma_v^* = \Gamma_v$, et l'inclusion est trivialement vérifiée. Sinon, $v(A^{\circ\circ}) \cap c\Gamma_v^* \neq \emptyset$ (lemme 10.5(ii)) ; soient alors $b \in A$ avec $v(b) < 0$ et $a \in A^{\circ\circ}$ avec $v(a) \in c\Gamma_v^*$. Comme $ab \in A^{\circ\circ} A$, la valeur $v(ab)$ est cofinale dans $c\Gamma_v^*$, et en particulier $v(ab) \geq 0$; ainsi $v(a) \geq -v(b) > 0$, et comme $c\Gamma_v^*$ est convexe, on conclut que $v(b) \in c\Gamma_v^*$, comme souhaité. $\square$

Définition 10.7. (i) Pour tout anneau de Huber A on pose

$$\text{Spv}^* A := \{v \in \text{Spv } A \mid \Gamma_v = c\Gamma_v^*\}$$

et on munit cette partie de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spv } A$. Noter que d'après les lemmata 10.4(i) et 10.6, on a $\text{Cont}(A) \subset \text{Spv}^* A$.

(ii) Un *sous-ensemble rationnel* de $\text{Spv}^* A$ est une partie de la forme

$$R_A\left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_k}{f_0}\right) \cap \text{Spv}^* A$$

pour une suite finie $f_0, \dots, f_k$ d'éléments de A qui engendre un idéal ouvert de A .

(iii) Un *sous-ensemble rationnel* de $\text{Cont}(A)$ est une partie de la forme

$$R \cap \text{Cont}(A)$$

où R est un sous-ensemble rationnel quelconque de $\mathrm{Spv}^* A$.

Exercice 10.8. (i) Soit A un anneau de Huber ; montrer que l'on a une rétraction :

$$r : \mathrm{Spv} A \rightarrow \mathrm{Spv}^* A \quad v \mapsto v^{c\Gamma_v^*}.$$

(ii) Montrer que pour tout $v \in \mathrm{Spv} A$ on a (notation de la définition 9.79) :

$$\mathrm{Supp}(v) \in (\mathrm{Spec} A)^{\mathrm{an}} \Leftrightarrow \mathrm{Supp}(r(v)) \in \mathrm{Spec}(A)^{\mathrm{an}}.$$

Proposition 10.9. Pour tout anneau A de Huber on a :

- (i) $\mathrm{Spv}^* A$ est un espace spectral.
- (ii) La rétraction r de l'exercice 10.8 est une application continue et compacte.
- (iii) Les sous-ensembles rationnels de $\mathrm{Spv}^* A$ sont constructibles dans $\mathrm{Spv}^* A$ et forment une base de la topologie de $\mathrm{Spv}^* A$ stable par intersections finies.

Démonstration. Noter d'abord que si $f_\bullet := (f_0, \dots, f_n)$ et $g_\bullet := (g_0, \dots, g_m)$ sont deux suites finies d'éléments de A , on a :

$$R_A\left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}\right) \cap R_A\left(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0}\right) = R_A\left(\frac{f_i g_j}{f_0 g_0} \mid i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\right)$$

(les détails sont laissés aux soins du lecteur). Or, soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition ; si $f_\bullet$ et $g_\bullet$ engendrent des idéaux ouverts J et J' de A , la suite $(f_i g_j \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ engendre JJ' , et il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $I_0^r \subset J$ et $I_0^s \subset J'$, d'où $I_0^{r+s} \subset JJ'$. Donc JJ' est un idéal ouvert de A ; cela montre que toute intersection finie de sous-ensembles rationnels de $\mathrm{Spv}^* A$ est encore un sous-ensemble rationnel de $\mathrm{Spv}^* A$. Pour la preuve des autres assertions de la proposition, on s'appuyera sur le critère du problème 4.79. Pour cela, on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples (v, w) de points de $\mathrm{Spv} A$ tels que :

- soit $v = w$
- soit v est une spécialisation primaire de w avec $v(A^{\circ\circ}) \neq \{+\infty\}$.

Ainsi $\mathcal{S}$ est un ensemble de spécialisations de $\mathrm{Spv} A$, et on remarque :

Affirmation 10.10. $\mathrm{Spv}^* A$ est la partie de $\mathrm{Spv} A$ formée des valuations qui n'admettent aucune spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible stricte dans $\mathrm{Spv} A$.

Preuve : Soit $v \in \mathrm{Spv}^* A$; si $\Gamma_v = c\Gamma_v$, évidemment v n'admet aucune spécialisation primaire stricte. Sinon, $v(a)$ est cofinal dans Γ_v pour tout $a \in A^{\circ\circ}$, d'après le lemme 10.6. Dans ce cas, soit $w := v^\Delta$ pour un sous-groupe convexe $\Delta \subsetneq \Gamma_v$; alors pour tout $a \in A^{\circ\circ}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\delta \in \Delta$ on a $n \cdot v(a) > \delta$. Mais alors $w(a) = +\infty$ pour tout $a \in A^{\circ\circ}$, i.e. w n'est pas une spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible de v . Réciproquement, si $v \in \mathrm{Spv} A$ n'admet aucune spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible stricte, alors pour tout sous-groupe convexe $\Delta \subsetneq \Gamma_v$ avec $c\Gamma_v \subset \Delta$, et tout $a \in A^{\circ\circ} A$ on a $v(a) \notin \Delta$; si de plus $v(A^{\circ\circ} A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$, alors $v(a) > 0$, et donc $v(a) > \delta$ pour tout $\delta \in \Delta$. Dans ce cas, le lemme 10.5(ii) entraîne que le plus grand sous-groupe convexe de Γ_v dans lequel $v(a)$ est cofinal pour tout $a \in A^{\circ\circ} A$ doit être Γ_v , d'où $v \in \mathrm{Spv}^* A$, d'après le lemme 10.6. En dernier lieu, s'il existe $a \in A^{\circ\circ} A$ avec $v(a) \in c\Gamma_v$, on vient de voir que $v(a) \notin \Delta$ pour tout sous-groupe convexe $\Delta \subsetneq \Gamma_v$. Mais alors $c\Gamma_v = \Gamma_v$, d'où encore $v \in \mathrm{Spv}^* A$, toujours par le lemme 10.6. $\diamond$

Le lemme 10.5(ii) entraîne aussitôt que $(v, r(v)) \in \mathcal{S}$ pour tout $v \in \mathrm{Spv} A$. Au vu du problème 4.79(ii,iii), la proposition découle alors de l'observation suivante :

Affirmation 10.11. (i) Soit $f_0, \dots, f_k$ une suite finie d'éléments de A qui engendre un idéal ouvert de A . Alors $R := R_A\left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_k}{f_0}\right)$ est une partie $\mathcal{S}$ -fermée de $\mathrm{Spv} A$.

(ii) Soit $v \in \mathrm{Spv}^* A$, et U un voisinage de v dans $\mathrm{Spv} A$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $f_0, \dots, f_k \in A$ qui engendrent un idéal ouvert, tels que $v \in R_A\left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_k}{f_0}\right) \subset U$.

Preuve : (i) : Soient $v \in R$ et $w \in \mathrm{Spv} A$ une spécialisation $\mathcal{S}$ -admissible de v . Si $v(A^{\circ\circ}) = \{+\infty\}$, on a $v = w$, et il n'y a rien à montrer. Si $v(A^{\circ\circ}) \neq \{+\infty\}$, on a aussi

$w(A^\circ) \neq \{+\infty\}$. Comme w est une spécialisation primaire de v , on a $w(f_i) \geq w(f_0)$ pour tout $i = 1, \dots, k$ (remarque 8.106(ii)). Si par l'absurde $w \notin R$, il vient $w(f_0) = +\infty$, et ainsi $w(f_i) = +\infty$ pour $i = 0, \dots, k$. Donc $\text{Supp}(w)$ est un idéal premier ouvert de A , et en particulier $A^\circ \subset \text{Supp}(w)$, contradiction.

(ii) : On peut supposer que $U = R_A(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_n}{g_0})$ pour une suite finie $g_0, \dots, g_n \in A$. Supposons d'abord que $\Gamma_v = c\Gamma_v$; dans ce cas, comme $v(g_0) \neq +\infty$, il existe $a, b \in A$ tels que $v(a), v(b) < 0$ et $v(g_0) = v(a) - v(b)$. Alors $v \in R_A(\frac{1}{g_0b}) \cap U$, et la suite $f_\bullet := (g_0b, \dots, g_nb, 1)$ convient. En dernier lieu, si $\Gamma_v \neq c\Gamma_v$, choisissons une suite finie $a_1, \dots, a_m$ d'éléments de A° qui engendre un idéal ouvert de A ; d'après le lemme 10.6 il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $v(a_i^r) \geq v(g_0)$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Ainsi $v \in R_A(\frac{a_1^r}{g_0}, \dots, \frac{a_m^r}{g_0}) \cap U$, et la suite $f_\bullet := (g_0, \dots, g_n, a_1^r, \dots, a_m^r)$ convient. $\square$

Théorème 10.12. *Pour tout anneau A de Huber on a :*

- (i) $\text{Cont}(A) = \{v \in \text{Spv}^* A \mid v(a) > 0 \text{ pour tout } a \in A^\circ\}$.
- (ii) $\text{Cont}(A)$ est un espace spectral.
- (iii) Les sous-ensembles rationnels de $\text{Cont}(A)$ sont constructibles dans $\text{Cont}(A)$, et forment une base de la topologie de $\text{Cont}(A)$ stable par intersections finies.

Démonstration. (i) : On a déjà remarqué que $\text{Cont}(A) \subset \text{Spv}^* A$; il reste à montrer que toute valuation $v \in \text{Spv}^* A$ avec $v(a) > 0$ pour tout $a \in A^\circ$ est continue. Pour cela, compte tenu des lemmata 10.4(i) et 10.6, on peut supposer que $\Gamma_v = c\Gamma_v$. Soient alors $\gamma \in \Gamma_v$ et $a \in A^\circ$; on doit exhiber $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot v(a) > \gamma$; mais comme $\Gamma_v = c\Gamma_v$, il existe $b, c \in A$ avec $v(b), v(c) \leq 0$ et $\gamma = v(b) - v(c)$. Or, la suite $(a^i c \mid i \in \mathbb{N})$ converge vers 0, et A° est un voisinage de 0 dans A , donc il existe $i \in \mathbb{N}$ avec $a^i c \in A^\circ$; ainsi, $v(a^i) > -v(c)$, et on peut prendre $n := i$.

(ii) : Avec (i), on voit que $\text{Cont}(A)$ est une partie fermée de $\text{Spv}^* A$; l'assertion découle alors de la proposition 10.9(i) et de l'exemple 4.58.

(iii) : De même, cela découle de la proposition 10.9(iii) et de l'exemple 4.58. $\square$

Exercice 10.13. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux de Huber.

(i) Montrer que si f est adique, alors pour tout sous-ensemble rationnel R de $\text{Cont}(A)$, la partie $\text{Cont}(f)^{-1}(R)$ est un sous-ensemble rationnel de $\text{Cont}(B)$. En déduire que l'application $\text{Cont}(f)$ est compacte et montrer en outre qu'elle induit par restriction des applications :

$$\text{Cont}(B)_{\text{an}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{an}} \quad \text{Cont}(B)_{\text{na}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{na}}.$$

(ii) Si A est un sous-anneau ouvert de B et si f est l'inclusion, montrer que :

(a) $\text{Cont}(B) = (\text{Spv } f)^{-1} \text{Cont}(A)$.

(b) $\text{Cont}(f)$ induit par restriction un homéomorphisme $\text{Cont}(B)_{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \text{Cont}(A)_{\text{an}}$.

(iii) Si B est topologiquement local (exercice 9.21(v)), montrer que f est adique $\Leftrightarrow \text{Cont}(f)$ induit par restriction une application $\text{Cont}(B)_{\text{an}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{an}}$.

(iv) Soit $j : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ la localisation topologique de A (voir l'exercice 9.81(ii)). Montrer que $\text{Cont}(j)$ est un homéomorphisme $\text{Cont}(A_{\text{loc}}) \xrightarrow{\sim} \text{Cont}(A)$ et induit par restriction un homéomorphisme $\text{Cont}(A_{\text{loc}})_{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \text{Cont}(A)_{\text{an}}$.

Corollaire 10.14. *Soit A un anneau de Huber. On a :*

(i) $\text{Cont}(A) = \emptyset$ si et seulement si $A^{\text{sep}} = 0$ (notation de l'exercice 9.9(ii)).

(ii) $\text{Cont}(A)_{\text{an}} = \emptyset$ si et seulement si la topologie de A^{sep} est discrète.

Démonstration. (ii) : Noter que la topologie de A^{sep} est discrète si et seulement si l'adhérence $\overline{\{0\}}$ de $\{0\}$ dans A est un idéal ouvert. Or, soit $v \in \text{Cont}(A)$, et notons par $\bar{v}$ la valuation résiduelle de $k(v)$; évidemment la $\bar{v}$ -topologie de $k(v)$ est séparée, et la projection $\pi : A \rightarrow k(v)$ est continue (remarque 10.3(i)). Donc π se factorise à travers un homomorphisme continu d'anneaux $\pi^{\text{sep}} : A^{\text{sep}} \rightarrow k(v)$, i.e. $\overline{\{0\}}$ contenu dans $\text{Supp}(v)$;

ainsi, si la topologie de A^{sep} est discrète, toute valuation continue de A est non analytique. Réciproquement, si $\text{Cont}(A)_{\text{an}} = \emptyset$, vérifions que $\{0\}$ est un idéal ouvert. Pour cela, soient $A_0 \subset A$ un anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition ; noter que $A_0 \cap \overline{\{0\}}$ est l'adhérence de 0 dans A_0 , et si $A_0 \cap \overline{\{0\}}$ est une partie ouverte de A_0 , alors elle est aussi ouverte dans A , et dans ce cas l'idéal $\overline{\{0\}}$ est ouvert dans A (proposition 9.12(i)). Ainsi, on est ramené à montrer que la topologie de A_0^{sep} est discrète, i.e. que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_0^n$ est un idéal ouvert (voir l'exercice 9.15). Pour cela, il suffira d'exhiber $k \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^k = I_0^{k+1}$. On remarque :

Affirmation 10.15. $I_0 A_{0,\text{loc}} \subset \mathcal{N}(A_{0,\text{loc}})$ (notation de l'exercice 9.21(v)).

Preuve : Soient par l'absurde $\mathfrak{p} \subset A_{0,\text{loc}}$ un idéal premier tel que $I_0 A_{0,\text{loc}} \not\subset \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{m} \subset A_{0,\text{loc}}$ un idéal maximal avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$; rappelons que la topologie de $A_{0,\text{loc}}$ est $I_0 A_{0,\text{loc}}$ -adique (exercice 9.81(ii)), et ainsi $I_0 A_{0,\text{loc}} \subset (A_{0,\text{loc}})^{\circ\circ} \subset \mathcal{J}(A_{0,\text{loc}}) \subset \mathfrak{m}$. Soit $\bar{w}$ une valuation de $k(\mathfrak{p})$ dominant le sous-anneau local $(A_{0,\text{loc}}/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}$ (théorème 8.21), et soit $w \in \text{Spv } A_{0,\text{loc}}$ la composition de $\bar{w}$ avec la projection $A_{0,\text{loc}} \rightarrow k(\mathfrak{p})$. Posons $u := w^{\text{cl}_w^*}$ (voir l'exercice 10.8) ; il vient $u \in \text{Cont}(A_{0,\text{loc}})$ (théorème 10.12(i)), et u est non analytique, car $I_0 A_{0,\text{loc}} \not\subset \text{Supp}(w)$ (exercice 10.8(ii)). Mais par l'exercice 10.13(ii,iii) on a $\text{Cont}(A_{0,\text{loc}})_{\text{an}} = \emptyset$, contradiction. $\diamond$

L'observation 10.15 et le théorème 1.50(ii) entraînent que tout élément de $I_0 A_{0,\text{loc}}$ est nilpotent ; comme cet idéal est de type fini, il s'ensuit aisément qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $I_0^k A_{0,\text{loc}} = 0$. Rappelons que $A_{0,\text{loc}} = S^{-1} A_0$, où $S := 1 + I_0$; on trouve alors $a \in I_0$ tel que $(1 + a) \cdot I_0^k = 0$, donc $I_0^k \subset a I_0^k \subset I_0^{k+1}$, comme souhaité.

(i) : On peut supposer que $\text{Cont}(A) = \emptyset$, donc l'adhérence $\overline{\{0\}}$ de $\{0\}$ est ouverte dans A , d'après (ii) ; or, si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et si $\overline{\{0\}} \subset \mathfrak{p}$, soit v la valuation triviale de A avec $\text{Supp}(v) = \mathfrak{p}$ (remarque 8.103(v)). Avec la remarque 10.3(iii) et la proposition 9.12(i), il vient $v \in \text{Cont}(A)$. La contradiction montre que $\overline{\{0\}}$ n'est contenu dans aucun idéal premier de A , d'où $\overline{\{0\}} = A$ (corollaire 1.35(i)), et ainsi $A^{\text{sep}} = 0$. $\square$

Problème 10.16. Soit A un anneau topologique dont la topologie est $\mathbb{Z}$ -linéaire.

(i) Montrer que l'application de complétion $j_A : A \rightarrow \hat{A}$ induit une bijection

$$\text{Cont}(j_A) : \text{Cont}(\hat{A}) \rightarrow \text{Cont}(A).$$

(ii) Montrer en outre que $\text{Cont}(j_A)$ induit par restriction des bijections :

$$\text{Cont}(\hat{A})_{\text{an}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{an}} \quad \text{Cont}(\hat{A})_{\text{na}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{na}}$$

ainsi qu'un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés :

$$(\text{Cont}(\hat{A}), \leq) \xrightarrow{\sim} (\text{Cont}(A), \leq)$$

pour les relations d'ordre sur $\text{Cont}(\hat{A})$ et $\text{Cont}(A)$ définies par les spécialisations.

(iii) Montrer que si A est un anneau de Huber, $\text{Cont}(j_A)$ est un homéomorphisme.

Exercice 10.17. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux de Huber. Montrer que : f est adique $\Rightarrow f_{\text{loc}} : A_{\text{loc}} \rightarrow B_{\text{loc}}$ est adique $\Leftrightarrow \hat{f} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ est adique.

Problème 10.18. (i) Soient A un anneau de Huber, $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I \subset A_0$ un idéal de définition. Posons $I^{-n} := \{a \in A \mid a I^n \subset A_0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; la fonction d'ordre associée au couple (A_0, I) est l'application :

$$w_I : A \rightarrow \mathbb{R}_o \quad a \mapsto \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid a \in I^n\}.$$

Montrer que (A, w_I) est un anneau semi-normé. D'après le problème 8.12(ii), l'uniformisation $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ de w est alors une semi-norme p-multiplicative, que l'on appelle parfois la fonction de Samuel asymptotique de l'idéal I .

(ii) Montrer que w_I^* ne dépend que de I : soit $A'_0 \subset A$ un deuxième anneau de définition tel que I soit aussi un idéal de définition de A'_0 , et soit $u : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction d'ordre associé à (A'_0, I) ; alors l'uniformisation u^* de u coïncide avec w_I^* .

(iii) Soient $A_{0,\text{loc}}$ (resp. A_{loc}) la localisation topologique de A_0 (resp. de A), et $I_{\text{loc}} := IA_{0,\text{loc}}$ (voir l'exercice 9.81(ii)). Montrer que w_I est la composition de la fonction d'ordre $w_{I_{\text{loc}}} : A_{\text{loc}} \rightarrow \mathbb{R}_o$ associé au couple $(A_{0,\text{loc}}, I_{\text{loc}})$ et de la localisation $i : A \rightarrow A_{\text{loc}}$. En déduire que $w_I^* = w_{I_{\text{loc}}}^* \circ i$.

(iv) Montrer que $A^\circ \subset A^+ := \{a \in A \mid w_I^*(a) \geq 0\}$, et que $I^+ := \{a \in A \mid w_I^*(a) > 0\}$ est le radical de l'idéal IA^+ de A^+ , et aussi le radical de l'idéal IA° de A° .

(v) Posons $J := \{a \in A \mid w_I^*(a) = +\infty\}$ et rappelons que $\bar{A} := A/J$ est un anneau de Huber, pour la topologie induite via la projection $\pi : A \rightarrow \bar{A}$, avec anneau de définition $\pi(A_0)$ et idéal de définition $\bar{I} := \pi(I)$ (exercice 9.81(v)). Notons par $w_{\bar{I}}^* : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction de Samuel asymptotique de $\bar{I}$; montrer que $w_I^* = w_{\bar{I}}^* \circ \pi$.

(vi) Posons $K_p := \text{Ann}_A(I^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $K := \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p$; de même, $R := A/K$ est un anneau de Huber pour la topologie induite via la projection $\pi_R : A \rightarrow R$, avec anneau de définition $R_0 := \pi_R(A_0)$ et idéal de définition IR_0 . Soit $w_{IR_0}^* : R \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction de Samuel asymptotique de IR_0 ; montrer que :

$$w_{IR_0}^* \circ \pi_R(a) \geq w_I^*(a) \quad \text{et} \quad w_I^*(a) \neq 0 \Rightarrow w_{IR_0}^* \circ \pi_R(a) = w_I^*(a) \quad \forall a \in A.$$

(vii) Soit Σ un système fini de générateurs de I et supposons que le lieu analytique $\text{Spec}(A)_{\text{an}}$ soit une partie dense de $\text{Spec}(A)$ (définition 9.79). Montrer que

$$\inf(w_I^*(ab) \mid b \in \Sigma) = 1 + w_I^*(a) \quad \forall a \in A.$$

(viii) Soit $q := \inf(w_I^*(b) \mid b \in \Sigma)$, et définissons $\bar{A}$ comme dans (v). Montrer que

$$q \in \{1, +\infty\} \quad \text{et} \quad q = +\infty \Leftrightarrow \bar{I}\bar{A}_{\text{loc}} = 0 \Leftrightarrow IA_{\text{loc}} \subset \mathcal{N}(A_{\text{loc}}).$$

(ix) Soient $\mathcal{R}_I$ l'ensemble des valuations $v : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ avec $\inf(v(b) \mid b \in I) = 1$, et $\mathcal{R}'_I$ l'ensemble des valuations $u : A \rightarrow \{0, +\infty\}$ avec $I \subset \text{Supp}(u)$. Montrer que

$$w_I^*(a) = \inf(v(a) \mid v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I) \quad \forall a \in A.$$

(x) En outre, si $\text{Spec}(A)_{\text{an}}$ est une partie dense de $\text{Spec}(A)$, montrer que

$$w_I^*(a) = \inf(v(a) \mid v \in \mathcal{R}_I) \quad \forall a \in A.$$

(xi) Soient $j_0 : A_0 \rightarrow \hat{A}_0$ et $j : A \rightarrow \hat{A}$ les complétions de A_0 et de A , et $w_{\hat{I}} : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction d'ordre associé au couple $(\hat{A}_0, \hat{I})$, avec $\hat{I} := I\hat{A}_0$. Montrer que

$$w_I = w_{\hat{I}} \circ j \quad \text{et} \quad w_I^* = w_{\hat{I}}^* \circ j.$$

(xii) En dernier lieu, soit $\mathcal{T}_A^\circ$ la topologie linéaire sur A telle que $(A, \mathcal{T}_A^\circ)$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition A° et idéal de définition IA° , et notons par $w_{IA^\circ}^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction de Samuel asymptotique de IA° . Montrer que $w_{IA^\circ}^* = w_I^*$; en outre, $(A, \mathcal{T}_A^\circ)^\circ = A^+$ et $A^{\circ\circ} = (A, \mathcal{T}_A^\circ)^{\circ\circ} = I^+$.

Problème 10.19. (i) Soient A un anneau de Huber complet et séparé, $w : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ une semi-norme réelle (problème 8.12) continue pour la $\circ$ -topologie de $\mathbb{R}_o$; posons

$$|f|_w := \inf(w(a_n) \mid n \in \mathbb{Z}) \quad \forall f := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$$

(voir l'exemple 9.95(i)). Montrer que $|\cdot|_w : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_o$ est une semi-norme réelle continue pour la $\circ$ -topologie de $\mathbb{R}_o$; en outre, si w est p -multiplicative, il en est de même pour $|\cdot|_w$. On appelle $|\cdot|_w$ la *semi-norme de Gauss induite par w* .

(ii) Dans la situation de (i), soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I \subset A_0$ un idéal de définition, $w : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction d'ordre associée à (A_0, I) (voir le problème 10.18), et $|\cdot|_w : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_o$ l'uniformisation de $|\cdot|_w$. Soient en outre

$$u := w^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o \quad u_{\langle X \rangle} : A\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{R}_o \quad \text{et} \quad u_{\langle X^{\pm 1} \rangle} : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_o$$

les fonctions de Samuel asymptotiques de I , de $I\langle X \rangle := IA_0\langle X \rangle$ et de $I\langle X^{\pm 1} \rangle := IA_0\langle X^{\pm 1} \rangle$. Montrer que :

$$|\cdot|_w^* = |\cdot|_u = u_{\langle X^{\pm 1} \rangle} \quad \text{et} \quad u_{\langle X \rangle} = (u_{\langle X^{\pm 1} \rangle})|_{A\langle X \rangle}.$$

Exercice 10.20. Soient A un anneau de Huber complet et séparé, $A_0 \subset A$ un idéal de définition, $I \subset A_0$ un idéal de définition, et $p, q \in \mathbb{N}$; par itération de la construction de l'exemple 9.95, on obtient la A -algèbre de Huber

$$A\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle := A\langle X_1^{\pm 1}, \dots, X_p^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_q \rangle$$

munie du sous-anneau de définition $A_0\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle \subset A\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ et de l'idéal de définition $I\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle := IA_0\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$. Soit en outre $f \in A_0\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$, et supposons que l'idéal de A_0 engendré par les coefficients de f contient 1. Montrer que la multiplication scalaire par f est injective sur $A\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$, et en outre :

$$fI^n\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle = I^n\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle \cap fA\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, $fA\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ est une partie fermée de $A\langle X_{\bullet}^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$.

10.2. Anneaux affinoïdes. Soit A un anneau de Huber; à toute partie $S \subset A$ on associe la partie pro-constructible de $\text{Cont}(A)$

$$Z_S := \{v \in \text{Cont}(A) \mid v(a) \geq 0 \text{ pour tout } a \in S\}$$

et on pose $\mathcal{F}_A := \{Z_S \mid S \subset A\}$; soit aussi $\mathcal{G}_A$ l'ensemble des sous-anneaux ouverts de A qui sont intégralement fermés dans A .

Proposition 10.21. (i) Avec la notation ci-dessus, l'association : $B \mapsto Z_B$ pour tout $B \in \mathcal{G}_A$ définit une bijection $\sigma : \mathcal{G}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_A$, dont l'inverse est l'application

$$\tau : \mathcal{F}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_A \quad Z \mapsto \{a \in A \mid v(a) \geq 0 \text{ pour tout } v \in Z\}.$$

(ii) Soit $B \in \mathcal{G}_A$ avec $B \subset A^\circ$. Alors tout point de $\text{Cont}(A)$ admet une génératisation secondaire dans $\sigma(B)$. En particulier, $\sigma(B)$ est une partie dense de $\text{Cont}(A)$.

Démonstration. (i) : Soient $S \subset A$ une partie, $\mathbb{Z}[S \cup A^{\circ\circ}] \subset A$, le plus petit sous-anneau de A contenant $S \cup A^{\circ\circ}$, et B la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[S \cup A^{\circ\circ}]$ dans A ; alors $B \in \mathcal{G}_A$, et noter que $Z_S = Z_B$, car $v(a) > 0$ pour tout $v \in \text{Cont}(A)$ et tout $a \in A^{\circ\circ}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Cela montre que σ est surjective. Ensuite, soit $B \in \mathcal{G}_A$; il reste à vérifier que $B' := \tau(\sigma(B)) = B$. Evidemment $B \subset B'$; soit par l'absurde $a \in B' \setminus B$. On pose $C := B[a^{-1}] \subset A[a^{-1}]$, on dénote $i : C \rightarrow A[a^{-1}]$ l'inclusion, et on remarque :

Affirmation 10.22. a^{-1} n'est pas inversible dans C .

Preuve : Sinon on aurait $a = b_0 + b_1 a^{-1} + \dots + b_n a^{-n}$ dans C pour certains $n \in \mathbb{N}$ et $b_0, \dots, b_n \in B$, d'où $a^{n+m+1} - b_0 a^{m+n} - b_1 a^{m+n-1} + b_n a^m = 0$ dans A pour un entier $m \in \mathbb{N}$; i.e. a serait entier sur B , et ainsi $a \in B$, contradiction. $\diamond$

D'après l'observation 10.22 et le corollaire 1.35(ii), il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } C$ avec $a^{-1} \in \mathfrak{p}$; soit aussi $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de C (exercice 1.61(ii)), et posons $\overline{C} := C/\mathfrak{q}$ et $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Prenons une valuation $\overline{v}$ du corps des fractions $k(\mathfrak{q})$ de $\overline{C}$ dont l'anneau de valuation domine l'anneau local $\overline{C}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ (théorème 8.21). Soit $v : C \rightarrow \Gamma_{\overline{v}}$ la composition de $\overline{v}$ avec la projection $C \rightarrow k(\mathfrak{q})$; donc $v \in \text{Spv } C$ est une valuation de support $\mathfrak{q}$, avec $v(b) \geq 0$ pour tout $b \in B$, et $v(a^{-1}) > 0$.

Affirmation 10.23. Il existe $w \in \text{Spv } A[a^{-1}]$ avec $\text{Spv}(i)(w) = v$.

Preuve : D'après l'exercice 3.37(i), il existe $\mathfrak{r} \in \text{Spec } A[a^{-1}]$ avec $\mathfrak{r} \cap C = \mathfrak{q}$, et soit $i_{\mathfrak{r}} : k(\mathfrak{q}) \rightarrow k(\mathfrak{r})$ l'extension de corps résiduels. D'après l'exercice 8.25(ii), la valuation $\overline{v}$ se prolonge en une valuation $\overline{w}$ de $k(\mathfrak{r})$, i.e. $\text{Spv}(i_{\mathfrak{r}})(\overline{w}) = \overline{v}$. La valuation w cherchée est la composition de $\overline{w}$ avec la projection $A[a^{-1}] \rightarrow k(\mathfrak{r})$. $\diamond$

Soit w comme dans l'observation 10.23, notons par $u : A \rightarrow \Gamma_{w^\circ}$ la composition de w avec la localisation $A \rightarrow A[a^{-1}]$, et soit $t := u^{c\Gamma_u^\circ} : A \rightarrow c\Gamma_{u^\circ}$. On remarque :

- (a) $t(a) < 0$ et $t(b) \geq 0$ pour tout $b \in B$
- (b) $t(b) > 0$ pour tout $b \in A^{\circ\circ}$
- (c) $t \in \text{Spv}^* A$ (voir la définition 10.7(i)).

En effet, (a) et (c) suivent aussitôt par construction de t . Ensuite, soit $b \in A^{\circ\circ}$; comme B est ouvert dans A , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n, b^n a \in B$, d'où $b \in B$, car B est intégralement fermé dans A , et avec $c := b^n a$ il vient $b^n = a^{-1}c$ dans C . Comme $a^{-1} \in \mathfrak{p}$, on a ainsi $b \in \mathfrak{p}$, d'où $v(b) > 0$, et finalement $t(b) > 0$.

D'après (b),(c) et le théorème 10.12(i), on a $t \in \text{Cont}(A)$; mais (a) nous dit que $t \in \sigma(B)$ et $a \notin B'$, contradiction.

(ii) : Soit $v \in \text{Cont}(A)$; si le support de v est ouvert dans A , alors $w := v_{\Gamma_v} \in \text{Cont}(A)$ (remarque 10.3(iii)), et évidemment $w \in \sigma(B)$. Supposons donc que la valuation v soit analytique; alors il existe $a \in A^{\circ\circ}$ avec $v(a) \neq +\infty$. Soit $\Delta \subset \Gamma_v$ le plus grand sous-groupe convexe avec $v(a) \notin \Delta$; on sait que $u := v_\Delta \in \text{Cont}(A)$ (remarque 10.3(iv)), et on va montrer que $u \in \sigma(B)$. Pour cela, soit $b \in B$, et supposons par l'absurde que $u(b) < 0$; comme $v(a)$ est cofinal dans Γ_v (lemme 10.4(i)), on voit aisément que le rang convexe de $\Gamma_u = \Gamma_v/\Delta$ est 1 (les détails sont laissés aux soins du lecteur) et $u(a) \neq +\infty$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u(b^n a) < 0$. Mais par hypothèse $b \in A^\circ$, d'où $b^n a \in A^{\circ\circ}$ (exercice 9.20(ii)), donc $u(b^n a) > 0$ (théorème 10.12(i)), contradiction. $\square$

Soit A un anneau de Huber; pour plusieurs applications, il est nécessaire de considérer des sous-espaces $Z \subset \text{Cont}(A)$ avec $Z \in \mathcal{F}_A$; mais on veut aussi pouvoir encore étudier ces sous-espaces à partir de la donnée de A , ainsi il faudrait que Z ne soit pas trop petit, et en particulier, il est naturel de demander que Z soit dense dans $\text{Cont}(A)$. Cela motive la définition suivante :

Définition 10.24. (i) Soit A un anneau de Huber. Un *sous-anneau d'éléments entiers* de A est un sous-anneau ouvert de A° qui est intégralement fermé dans A .

(ii) Un *anneau affinoïde* est un couple $\underline{A} := (A, A^+)$ où A est un anneau de Huber, et $A^+ \subset A^\circ$ est un sous-anneau d'éléments entiers de A . On munit la partie

$$\text{Spa } \underline{A} := \{v \in \text{Cont}(A) \mid v(a) \geq 0 \text{ pour tout } a \in A^+\}$$

de la topologie induite par celle de $\text{Cont}(A)$; il s'agit ainsi d'un espace spectral (théorème 10.12(ii) et exemple 4.58), appelé le *spectre adique de $\underline{A}$* . On dira que $\underline{A}$ est *topologiquement local* (resp. *complet*, resp. *séparé*) s'il en est de même pour A .

(iii) Soient $\underline{A} := (A, A^+)$, $\underline{B} := (B, B^+)$ deux anneaux affinoïdes; un *morphisme d'anneaux affinoïdes* $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ est un homomorphisme continu d'anneaux $f : A \rightarrow B$ avec $f(A^+) \subset B^+$. Noter que $\text{Cont}(f)$ se restreint en une application continue

$$\text{Spa}(f) : \text{Spa } \underline{B} \rightarrow \text{Spa } \underline{A}.$$

Evidemment les anneaux affinoïdes et leurs morphismes forment une catégorie :

$$\mathbf{Afd}$$

et on obtient ainsi un foncteur bien défini $\text{Spa} : \mathbf{Afd}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$.

(iv) Le *lieu analytique* et le *lieu non analytique* de $\text{Spa } \underline{A}$ sont respectivement

$$\text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}} := \text{Spa}(\underline{A}) \cap \text{Cont}(A)_{\text{an}} \quad \text{et} \quad \text{Spa}(\underline{A})_{\text{na}} := \text{Spa}(\underline{A}) \cap \text{Cont}(A)_{\text{na}}.$$

(v) Un *sous-ensemble rationnel* de $\text{Spa } \underline{A}$ est une partie de la forme

$$R \cap \text{Spa } \underline{A}$$

où R est un sous-ensemble rationnel quelconque de $\text{Cont}(A)$ (définition 10.7(iii)).

Remarque 10.25. (i) Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $a_1, \dots, a_n$ une suite finie d'éléments de $A^{\circ\circ}$ qui engendre un idéal ouvert de A ; on voit aisément que $\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} = \bigcup_{i=1}^n (\mathrm{Spa}(\underline{A}) \cap R_A(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}))$, donc le lieu analytique est une partie ouverte constructible de $\mathrm{Spa} \underline{A}$.

(ii) Si $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B} := (B, B^+)$ est un morphisme *adique* d'anneaux affinoïdes, *i.e.* si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme adique d'anneaux de Huber, alors l'exemple 4.58 et l'exercice 10.13(i) entraînent que $\mathrm{Spa}(f)$ est une application compacte.

Exercice 10.26. Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde.

- (i) Montrer que $\mathrm{Spa} \underline{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = 0$.
- (ii) Montrer que $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}} = \emptyset \Leftrightarrow$ la topologie de A^{sep} est discrète.
- (iii) Montrer que si $\underline{A}$ est topologiquement local, alors pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max} A$ il existe $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$ avec $\mathrm{Supp}(v) = \mathfrak{m}$.

Problème 10.27. (i) Montrer que le foncteur $\mathrm{Sv} : \mathbb{Z} - \mathrm{Alg}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Top}$ commute avec les limites cofiltrantes (voir le problème 2.51(ii)).

(ii) Soit $\underline{A}_{\bullet} := (\underline{A}_{\lambda} := (A_{\lambda}, A_{\lambda}^+) \mid \lambda \in \Lambda)$ un système d'anneaux affinoïdes, indexé par l'ensemble filtrant $(\Lambda, \leq)$, avec morphismes de transition *adiques* $f_{\lambda\mu} : \underline{A}_{\lambda} \rightarrow \underline{A}_{\mu}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, et supposons qu'il existe un système compatible de sous-anneaux de définition $(A_{0\lambda} \subset A_{\lambda}^+ \mid \lambda \in \Lambda)$ tels que $f_{\lambda\mu}(A_{0\lambda}) \subset A_{0\mu}$ pour tout $\lambda \leq \mu$. Soient A_0, A^+, A les colimites des systèmes induits d'anneaux $(A_{0,\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$, $(A_{\lambda}^+ \mid \lambda \in \Lambda)$, $(A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$, et soit $(f_{\lambda} : A_{\lambda} \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel.

(a) Montrer qu'il existe une unique topologie $\mathcal{T}_A$ sur A telle que $(A, \mathcal{T}_A)$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition A_0 , et telle que f_{λ} soit un homomorphisme adique pour tout $\lambda \in \Lambda$. Montrer en outre que $A^{\circ\circ} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(A_{\lambda}^{\circ\circ})$.

(b) En déduire que A^+ est un sous-anneau d'éléments entiers de A , de sorte que chaque $f_{\lambda} : \underline{A}_{\lambda} \rightarrow \underline{A} := (A, A^+)$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes.

(c) Montrer que le co-cône $(f_{\lambda} : \underline{A}_{\lambda} \rightarrow \underline{A} \mid \lambda \in \Lambda)$ induit un cône universel d'espaces topologiques $(\mathrm{Spa} f_{\lambda} : \mathrm{Spa} \underline{A}_{\lambda} \rightarrow \mathrm{Spa} \underline{A} \mid \lambda \in \Lambda)$.

10.2.1. Le faisceau des fonctions algébriques. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $\sigma_{\underline{A}} : \mathrm{Spa} \underline{A} \rightarrow \mathrm{Spec} A$ la restriction de l'application continue $\sigma_A : \mathrm{Sv} A \rightarrow \mathrm{Spec} A$ de la remarque 8.103(iii); on munit $\mathrm{Spa} \underline{A}$ du faisceau de A -algèbres

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}} := \tilde{\sigma}_{\underline{A}}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A})$$

(notation du §4.3.2). Soient $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$ et $\mathfrak{p} := \sigma_{\underline{A}}(v) = \mathrm{Supp}(v)$; d'après l'exercice 4.98(ii), on a des identifications naturelles :

$$(*) \quad \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$$

et une inspection directe montre qu'il s'agit d'isomorphismes de A -algèbres. Ainsi, le couple $(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}})$ est un espace localement annelé. La valuation v se prolonge en une unique valuation de $A_{\mathfrak{p}}$, et avec $(*)$ on déduit une valuation que l'on notera

$$|\cdot|_v : \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \rightarrow \Gamma_{v\circ} \quad s \mapsto |s|_v$$

dont le support est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}$. Comme d'habitude, pour tout voisinage ouvert $U \subset \mathrm{Spa} \underline{A}$ de v , et tout $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U)$, on dénote $s_v \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}$ le germe de s . On obtient un *sous-faisceau des fonctions algébriques entières*

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+ \subset \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}} \quad U \mapsto \{s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U) \mid 0 \leq |s_v|_v \ \forall v \in U\}.$$

Lemme 10.28. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$. On a :

- (i) $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+ = \{s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \mid 0 \leq |s|_v\}$.
- (ii) $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$ est un anneau local, dont le corps résiduel s'identifie naturellement avec celui de l'anneau de valuation $k(v)^+$ de la valuation résiduelle de v .

Démonstration. (i) : Evidemment $|s|_v \geq 0$ pour tout $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$. Réciproquement, soient $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}$ avec $|s|_v \geq 0$, et $\mathfrak{p} := \mathrm{Supp}(v) \subset A$; sous l'identification naturelle $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$, la section s correspond à une fraction $a/t \in A_{\mathfrak{p}}$, avec $a \in A$ et $t \in A \setminus \mathfrak{p}$. En particulier, $v \in U := R_A(\frac{a}{t}) \cap \mathrm{Spa} \underline{A}$; noter que $U \subset \tilde{\sigma}_{\underline{A}}^{-1}(D(t))$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A}(D(t)) = A[t^{-1}]$, d'où un homomorphisme induit $\phi : A[t^{-1}] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})}(U)$ de A -algèbres, et s est le germe de la section $\phi(a/t) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})}^+(U)$, donc $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$.

(ii) : Soient $\pi_v : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow k(v)$ la projection, et $\mathfrak{m} \subset k(v)^+$ l'idéal maximal; sous l'identification $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$, le sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$ correspond à $\pi_v^{-1}(k(v)^+)$, donc $\pi_v^{-1}(\mathfrak{m}) = \{s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \mid 0 < |s|_v\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$ (remarque 1.45(iii)), et il suffit de vérifier que $(\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+)^{\times} = \{s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v} \mid 0 = |s|_v\}$. Mais si $|s|_v = 0$, on a $s \in (\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v})^{\times}$ et $|s^{-1}|_v = 0$, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 10.29. (i) Soient $\underline{A} := (A, A^+)$, $\underline{B} := (B, B^+)$ deux anneaux affinoïdes, $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes; on pose

$$X_A := \mathrm{Spec} A \quad X_B := \mathrm{Spec} B \quad \phi := \mathrm{Spec} f \quad \psi := \mathrm{Spa} f$$

de sorte que l'on a un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa} \underline{B} & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Spa} \underline{A} \\ \sigma_{\underline{B}} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\underline{A}} \\ X_B & \xrightarrow{\phi} & X_A. \end{array}$$

Le morphisme de faisceaux d'anneaux $\phi^{\sharp} : \tilde{\phi}^{-1}(\mathcal{O}_{X_A}) \rightarrow \mathcal{O}_{X_B}$ induit un morphisme

$$\tilde{\sigma}_{\underline{B}}^{-1}(\phi^{\sharp}) : \tilde{\sigma}_{\underline{B}}^{-1} \circ \tilde{\phi}^{-1}(\mathcal{O}_{X_A}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}$$

et avec les isomorphismes $\tilde{\sigma}_{\underline{B}}^{-1} \circ \tilde{\phi}^{-1} \xrightarrow{\sim} (\tilde{\phi} \circ \tilde{\sigma}_{\underline{B}})^{-1} = (\tilde{\sigma}_{\underline{A}} \circ \psi)^{-1} \xrightarrow{\sim} \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\sigma}_{\underline{A}}^{-1}$ de l'exercice 4.98(ii), celui-ci s'identifie naturellement avec un morphisme

$$\psi^{\sharp} : \tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}.$$

En outre, $\psi^{\sharp}$ est l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),\psi(w)} & \xleftarrow{\sim} \tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}})_w \xrightarrow{\psi_w^{\sharp}} & \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{B}),w} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{q}}} & B_{\mathfrak{q}} \end{array} \quad \forall w \in \mathrm{Spa} \underline{B}$$

avec $\mathfrak{q} := \mathrm{Supp}(w)$, $\mathfrak{p} := \mathrm{Supp}(\psi(w)) = \phi(\mathfrak{q})$, et dont les flèches verticales sont les identifications naturelles; de même, l'isomorphisme $\tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}})_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),\psi(w)}$ est celui fourni par l'exercice 4.98(ii), et $f_{\mathfrak{q}}$ est la localisation de f . On a ainsi associé à f un morphisme d'espaces localement annelés

$$\mathrm{Spa} f := (\psi, \psi^{\sharp}) : (\mathrm{Spa} \underline{B}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}) \rightarrow (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}).$$

(ii) De plus, par inspection directe des constructions, on voit que :

$$|\psi_w^{\sharp}(s)|_w = |s|_{\psi(w)} \quad \forall w \in \mathrm{Spa} \underline{B}, \forall s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),\psi(w)}.$$

Par suite, $\psi^{\sharp}$ induit par restriction un morphisme de faisceaux

$$\psi^{+\sharp} : \tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}^+$$

d'où un deuxième morphisme d'espaces localement annelés associé à f :

$$\mathrm{Spa}(f)^+ := (\psi, \psi^{+\sharp}) : (\mathrm{Spa} \underline{B}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}^+) \rightarrow (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+).$$

(iii) Si $\underline{C} := (C, C^+)$ est un troisième anneau affinoïde, et $g : \underline{B} \rightarrow \underline{C}$ un deuxième morphisme d'anneaux affinoïdes, la commutativité des diagrammes (†) entraîne aisément l'identité de morphismes d'espaces localement annelés :

$$\mathrm{Spa}(g \circ f) = \mathrm{Spa}(f) \circ \mathrm{Spa}(g).$$

La vérification détaillée est laissée en exercice au lecteur.

(iv) Soient X_A^{an} et X_B^{an} les lieux analytiques de X_A et X_B (définition 9.79) ; noter que $\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} = \sigma_{\underline{A}}^{-1}(X_A^{\mathrm{an}})$, et de même pour $\mathrm{Spa}(\underline{B})_{\mathrm{an}}$. Si $f : A \rightarrow B$ est l'inclusion d'un sous-anneau ouvert, on sait que $\mathrm{Spec} f$ se restreint en un isomorphisme de schémas $(X_B^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X_B^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\sim} (X_A^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X_A^{\mathrm{an}}})$ (proposition 9.80(iii)) ; si de plus B^+ est la fermeture intégrale de A^+ dans B , alors $\mathrm{Cont}(f)$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa}(\underline{B})_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}$ (exercice 10.13(ii)), et il s'ensuit aussitôt que $\mathrm{Spa} f$ se restreint en un isomorphisme d'espaces localement annelés :

$$\mathrm{Spa}(\underline{B})_{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{Spa}(\underline{B})} (\mathrm{Spa} \underline{B}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{B}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{Spa}(\underline{A})} (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}).$$

10.2.2. *Centres des valuations.* Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, $X_A := \mathrm{Spec} A$, $X_A^+ := \mathrm{Spec} A^+$. On a un morphisme évident d'espaces localement annelés

$$(\sigma_{\underline{A}}, \sigma_{\underline{A}}^{\sharp}) : (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}) \rightarrow (X_A, \mathcal{O}_{X_A})$$

tel que $\sigma_{\underline{A}}^{\sharp}$ soit l'identité de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$. Mais le lemme 10.28(ii) fournit aussi l'espace localement annelé $(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)$, et on veut maintenant exhiber un morphisme

$$(\sigma_{\underline{A}}^+, \sigma_{\underline{A}}^{+\sharp}) : (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \rightarrow X_{A^+}^{\mathrm{na}} \times_{X_{A^+}} (X_{A^+}, \mathcal{O}_{X_{A^+}})$$

d'espaces localement annelés. Pour cela, remarquons d'abord que pour tout $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$ la partie $\sigma_{\underline{A}}^+(v) := \{a \in A^+ \mid v(a) > 0\}$ est un idéal premier ouvert de A^+ : la vérification détaillée est laissée aux soins du lecteur ; traditionnellement on appelle $\sigma_{\underline{A}}^+(v)$ le *centre* de la valuation v . On obtient ainsi une application bien définie $\sigma_{\underline{A}}^+ : \mathrm{Spa} \underline{A} \rightarrow X_{A^+}^{\mathrm{na}}$; en outre, pour tout $a \in A^+$ il vient

$$(\sigma_{\underline{A}}^+)^{-1}(D(a)) = U_a := \mathrm{Spa}(\underline{A}) \cap R_A\left(\frac{1}{a}\right)$$

donc $\sigma_{\underline{A}}^+$ est continue et compacte (par contre $\sigma_{\underline{A}}^{-1}(D(a)) = U'_a := \mathrm{Spa}(\underline{A}) \cap R_A\left(\frac{a}{1}\right)$, donc $\sigma_{\underline{A}}$ n'est pas forcément compacte). Noter ensuite que la composition

$$A[a^{-1}] \xrightarrow{\sigma_{\underline{A}, D(a)}^b} \sigma_{\underline{A}, *}\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(D(a)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U'_a) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U_a) \quad \forall a \in A^+$$

envoie $A^+[a^{-1}] \subset A[a^{-1}]$ dans le sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+(U_a) \subset \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U_a)$ (car $v(a) = 0$ pour tout $v \in U_a$). On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux

$$\sigma_{\underline{A}, D(a)}^{+b} : \mathcal{O}_{X_{A^+}}(D(a)) \rightarrow \sigma_{\underline{A}, *}^+\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+(D(a))$$

et il est clair que l'association : $D(a) \mapsto \sigma_{\underline{A}, D(a)}^{+b}$ pour tout $a \in A^+$, définit un morphisme de faisceaux sur le site des parties ouvertes $\{D(a) \mid a \in A^+\}$ (voir la définition 5.34(iii,iv)) ; d'après l'exercice 5.35(ii), ce dernier se prolonge en un unique morphisme de faisceaux $\sigma_{\underline{A}}^{+b} : \mathcal{O}_{X_{A^+}} \rightarrow \sigma_{\underline{A}, *}^+\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+$ sur X_{A^+} , et le couple $(\sigma_{\underline{A}}^+, \sigma_{\underline{A}}^{+b})$ est un morphisme d'espaces annelés

$$(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \rightarrow (X_{A^+}, \mathcal{O}_{X_{A^+}})$$

avec $\sigma_{\underline{A}}^+(\mathrm{Spa} \underline{A}) \subset X_{A^+}^{\mathrm{na}}$. Ce morphisme se factorise alors à travers un unique morphisme $(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \rightarrow X_{A^+}^{\mathrm{na}} \times_{X_{A^+}} (X_{A^+}, \mathcal{O}_{X_{A^+}})$ que l'on notera encore $(\sigma_{\underline{A}}^+, \sigma_{\underline{A}}^{+b})$. En dernier lieu, soient $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$ et $\mathfrak{p} := \sigma_{\underline{A}}^+(v)$; par inspection directe, on voit que l'homomorphisme induit sur les fibres $(\sigma_{\underline{A}}^{+b})_v : A_{\mathfrak{p}}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}), v}^+$ est local, comme souhaité : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

10.2.3. *Spectre adique et éclatements.* Soit encore $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde ; à tout idéal $I \subset A^+$, la remarque 5.68(i) associe l'idéal quasi-cohérent $I\mathcal{O}_{X_{A^+}}$; pour tout morphisme $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X_{A^+}, \mathcal{O}_{X_{A^+}})$ d'espaces annelés posons $I\mathcal{O}_Y := f^{-1}(I\mathcal{O}_{X_{A^+}}) \cdot \mathcal{O}_Y$ (voir la remarque 5.68(iv)) ; il s'agit de l'idéal de $\mathcal{O}_Y$ tel que pour toute partie ouverte $U \subset Y$ on a :

$$I\mathcal{O}_Y(U) := \{a \in \mathcal{O}_Y(U) \mid a_y \in I\mathcal{O}_{Y,y} \ \forall y \in U\}.$$

Par exemple, on peut prendre pour f le morphisme $(\sigma_{\underline{A}}^+, \sigma_{\underline{A}}^{+\sharp})$ du §10.2.2 ; ainsi l'idéal $I\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+$ est bien défini. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux ouverts I de type fini de A^+ ; on munit $\mathcal{J}$ de l'ordre partiel tel que pour tous $I, I' \in \mathcal{J}$ on a

$$I' \leq I \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } J \in \mathcal{J} \text{ tel que } I' = IJ.$$

Evidemment l'ensemble $(\mathcal{J}, \leq)$ est *cofiltrant*. Posons $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}}^+ := (\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)|_{\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}}$, et pour tout $I \in \mathcal{J}$, soit $\pi_I : E_I \rightarrow X_{A^+}$ l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent $I\mathcal{O}_{X_{A^+}}$.

Lemme 10.30. $I\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}}^+$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}}^+$, pour tout $I \in \mathcal{J}$.

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_n$ un système fini de générateurs de I , et $v \in \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}$. On peut supposer que $v(a_i) \leq v(a_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et comme v est analytique, on a alors $v(a_1) \neq +\infty$. Ainsi, $v \in U := R_A(\frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1})$, et il vient $a_i/a_1 \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A})}^+(U)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où $I\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+ = a_1\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$. De plus, $a_1 \in (\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v})^\times$, car $v(a_1) \neq +\infty$; donc a_1 est un élément régulier du sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$, et par suite $I\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$ -module libre de rang un. L'assertion découle alors du lemme 5.70(i). $\square$

D'après le lemme 10.30 et le théorème 5.97, la restriction de $(\sigma_{\underline{A}}^+, \sigma_{\underline{A}}^{+\sharp})$

$$(\sigma_{\underline{A},\mathrm{an}}^+, \sigma_{\underline{A},\mathrm{an}}^{+\sharp}) : \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{Spa} \underline{A}} (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \rightarrow (X_{A^+}, \mathcal{O}_{X_{A^+}})$$

se factorise à travers π_I et un unique morphisme d'espaces localement annelés

$$(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)_{\mathrm{an}} := \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{Spa} \underline{A}} (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+) \xrightarrow{\phi_I} (E_I, \mathcal{O}_{E_I}).$$

Evidemment $\phi_I(\mathrm{Spa} \underline{A})$ est contenu dans la partie fermée $E_I^{\mathrm{na}} := \pi_I^{-1}(X_{A^+}^{\mathrm{na}})$, donc ϕ_I se factorise à son tour par un unique morphisme d'espaces localement annelés

$$\phi_I^{\mathrm{na}} : (\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)_{\mathrm{an}} \rightarrow (E_I, \mathcal{O}_{E_I})_{\mathrm{na}} := E_I^{\mathrm{na}} \times_{E_I} (E_I, \mathcal{O}_{E_I}).$$

De même, par le lemme 5.70(ii), pour tous $I, J \in \mathcal{J}$, le morphisme $\pi_{IJ} : E_{IJ} \rightarrow X_{A^+}$ se factorise à travers π_I et un unique morphisme de schémas $\psi_{IJ,I} : E_{IJ} \rightarrow E_I$. Par l'unicité de ϕ_I^{na} il vient $\psi_{IJ,I} \circ \phi_{IJ}^{\mathrm{na}} = \phi_I^{\mathrm{na}}$ pour tous $I, J \in \mathcal{J}$, et de même on a

$$\psi_{IJ,I} \circ \psi_{IJK,IJ} = \psi_{IJK,I} \quad \forall I, J, K \in \mathcal{J}.$$

On obtient ainsi un système cofiltrant de X_{A^+} -schémas $E_\bullet := (E_I \mid I \in \mathcal{J})$ dont les morphismes de transition sont les $\psi_{IJ,I}$, et un cône $\phi_\bullet^{\mathrm{na}} := (\phi_I^{\mathrm{na}} \mid I \in \mathcal{J})$ de base $(E_\bullet, \mathcal{O}_{E_\bullet})_{\mathrm{na}}$ et de sommet $(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)_{\mathrm{an}}$. Le résultat principal de cette section est la proposition suivante, qui nous servira pour la preuve d'un important théorème de Gruson et Raynaud :

Proposition 10.31. *Avec la notation ci-dessus, le cône $\phi_\bullet^{\mathrm{na}}$ est universel, donc il induit un isomorphisme d'espaces localement annelés :*

$$(\mathrm{Spa} \underline{A}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \lim_{I \in \mathcal{J}} (E_I, \mathcal{O}_{E_I})_{\mathrm{na}}.$$

Démonstration. D'après la remarque 10.29(ii,iv) on peut supposer que $A = A^+$ (et donc, $X_A = X_{A^+}$). Or, soit $I \in \mathcal{I}$; on veut expliciter l'application continue $\phi_I : \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \rightarrow E_I$. Pour cela, soit $a_1, \dots, a_n$ un système fini de générateurs de I , et pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $B_i := A[\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}] \subset A[a_i^{-1}]$; rappelons que E_I admet le recouvrement $E_I = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$ où chaque partie ouverte Ω_i est isomorphe au X_A -schéma $\mathrm{Spec} B_i$. Posons aussi $U_i := \phi_I^{-1}(\Omega_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

Affirmation 10.32. $a_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U_i)^\times$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $v(a_i) \neq +\infty$ pour tout $v \in U_i$ (observation 5.48). Mais une inspection de la construction de ϕ_I montre que l'idéal $I\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}$ est engendré par l'image de a_i , pour tout tel v ; puisque v est non analytique, son support ne contient pas I , d'où l'assertion. $\diamond$

D'après l'observation 10.32 et l'exercice 8.9, tout $v \in U_i$ se prolonge alors en une unique valuation $v_i : A[a_i^{-1}] \rightarrow \Gamma_{v \circ}$.

Affirmation 10.33. Pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $v \in U_i$ on a :

- (i) $U_i = \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \cap R_A(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$
- (ii) $\phi_I(v) = \{b \in B_i \mid v_i(b) > 0\} \in \mathrm{Spec} B_i$.

Preuve : Par inspection de la construction de ϕ_I (voir la preuve du théorème 5.97), il vient $\mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \cap R_A(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}) \subset U_i$. De l'autre côté, la restriction $U_i \rightarrow \Omega_i$ de ϕ_I est le morphisme d'espaces localement annelés correspondant à $(\phi_I)_{\Omega_i}^b : B_i \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+(U_i)$ sous l'adjonction du théorème 5.47; donc, l'image de B_i dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(U_i)$ est contenue dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+(U_i)$, et par suite $v_i(a_j/a_i) \geq 0$ pour $j = 1, \dots, n$. En outre, $v(a_i) \neq +\infty$, car v est analytique, d'où $v \in R_A(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$.

(ii) : La preuve du théorème 5.47 montre que $\phi_I(v)$ est l'image réciproque dans B_i de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}),v}^+$, d'où l'assertion. $\diamond$

Or, soit E^{na} la limite du système cofiltrant d'espaces topologiques $(E_I^{\mathrm{na}} \mid I \in \mathcal{I})$; le cône $\phi_\bullet^{\mathrm{na}}$ induit une application continue

$$\phi : (\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}} \rightarrow E^{\mathrm{na}}$$

et l'observation 10.33(i) entraîne aisément que la topologie de $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$ est induite par celle de E^{na} via ϕ . Comme $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est spectral, et en particulier de type T_0 (remarque 4.51(iv)), il s'ensuit aussitôt que ϕ est injective.

Affirmation 10.34. Si $I \subset A^\circ$, l'application $\phi_I^{\mathrm{na}} : \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}} \rightarrow E_I^{\mathrm{na}}$ est surjective.

Preuve : Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j : A \rightarrow B_i$ l'homomorphisme naturel d'anneaux. Soit aussi $\mathfrak{p} \subset B_i$ un idéal premier tel que $j^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier ouvert de A ; d'après les exercices 1.61(ii) et 3.37(i), il existe un idéal premier $\mathfrak{q} \subset A[a_i^{-1}]$ tel que $\mathfrak{q}' := \mathfrak{q} \cap B_i \subset \mathfrak{p}$; on pose $C := (B_i/\mathfrak{q}')_{\mathfrak{p}}$. Le sous-anneau local C est dominé par l'anneau de valuation d'une valuation v de $K := \mathrm{Frac}(C)$ (théorème 8.21). La composition de v avec l'homomorphisme naturel d'anneaux $B_i \rightarrow K$ est une valuation u de B_i avec $u(b) \geq 0$ pour tout $b \in B_i$, et $u(b) > 0 \Leftrightarrow b \in \mathfrak{p}$; de plus, $u(a_i) \neq +\infty$. Avec la notation de l'exercice 10.8, on pose

$$t := u \circ j : A \rightarrow \Gamma_{u \circ} \quad \text{et} \quad w := t \circ \Gamma_t^*.$$

Il vient $w(a) \geq 0$ pour tout $a \in A$, et $w(a) > 0 \Leftrightarrow a \in j^{-1}\mathfrak{p}$, et noter que $A^\circ \subset j^{-1}\mathfrak{p}$, car $j^{-1}\mathfrak{p}$ est ouvert. Cela montre que $w \in \mathrm{Spa}(\underline{A})$ (théorème 10.12(i)); de plus on a $t(a_i) \neq +\infty$ par l'observation 10.33(i), et par hypothèse $a_i \in A^\circ$, donc w est analytique, d'après l'exercice 10.8(ii). Ensuite, par inspection directe on trouve $w(a_k) \geq w(a_i)$ pour tout $k = 1, \dots, n$; mais alors $w(a_i) \neq +\infty$, car w est analytique et I est ouvert. Cela montre que $w \in R_A(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$, donc $\phi_I(w) \in \mathrm{Spec} B_i$. En dernier lieu, notons par u_i, t_i et w_i les uniques valuations de $A[a_i^{-1}]$ qui prolongent respectivement u, t et w ; évidemment $t_i = u_i$. Pour tout $a/a_i^n \in A[a_i^{-1}]$ on a alors $u_i(a/a_i^n) > 0 \Leftrightarrow t(a) > t(a_i^n)$, et comme $t(a_i) = w(a_i) \neq +\infty$, cela équivaut à $w(a) > w(a_i^n)$, ou encore, à $w_i(a/a_i^n) > 0$.

Avec l'observation 10.33(ii) on conclut aussitôt que $\phi_I(w) = \mathfrak{p}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). $\diamond$

Remarquons ensuite que $\Omega_i \cap \Omega_j$ est une partie ouverte compacte de Ω_i et de Ω_j , pour tous $i, j = 1, \dots, n$; l'espace E_I est alors spectral, pour tout $I \in \mathcal{I}$ (exercice 4.52), et de même pour sa partie fermée E_I^{na} . Suivant la définition 4.50(ii), à tout espace spectral $(X, \mathcal{T})$ on associe l'espace topologique $(X^c, \mathcal{T}^c)$ avec $X^c = X$ et où $\mathcal{T}^c$ est la topologie constructible de $(X, \mathcal{T})$; d'après le théorème 4.54(ii), il s'agit d'un espace topologique compact et séparé.

Affirmation 10.35. (i) $\psi_{IJ,I} : E_{IJ} \rightarrow E_I$ est compacte pour tous $I, J \in \mathcal{I}$.

(ii) Pour tout $I \in \mathcal{I}$ l'application $\phi_I^{\text{na}} : \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}} \rightarrow E_I^{\text{na}}$ est compacte.

Preuve : (i) : On a $\pi_I \circ \psi_{IJ,I} = \pi_{IJ}$, et on sait que π_I et π_{IJ} sont séparés et de type fini (corollaire 5.101(i,ii)); l'assertion découle alors de l'exercice 5.93(iii).

(ii) : Pour $i = 1, \dots, n$ la partie $\Omega_i^{\text{na}} := E_I^{\text{na}} \cap \Omega_i$ est ouverte et constructible dans E_I^{na} , et $E_I^{\text{na}} = \Omega_1^{\text{na}} \cup \dots \cup \Omega_n^{\text{na}}$; d'après le lemme 4.60, il suffit alors de vérifier que chaque restriction $\phi_{I,i}^{\text{na}} : U_i \rightarrow \Omega_i^{\text{na}}$ de ϕ_I^{na} est compacte. Or, soit $a/a_i^s \in B_i$; au vu de l'observation 10.33(ii), on a

$$\begin{aligned} \phi_{I,i}^{-1}(D(a/a_i^s)) &= \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}} \cap R_A\left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \cap R_A\left(\frac{a_i^s}{a}\right) \\ &= \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}} \cap R_A\left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \cap R_A\left(\frac{a_i^s}{a}, \dots, \frac{a_n^s}{a}\right). \end{aligned}$$

On voit aisément que la suite $a_1^s, \dots, a_n^s, a$ engendre un idéal ouvert de A , d'où l'assertion, par le théorème 10.12(iii). $\diamond$

L'observation 10.35(i) entraîne aisément que la restriction $\psi_{IJ,I}^{\text{na}} : E_{IJ}^{\text{na}} \rightarrow E_I^{\text{na}}$ de $\psi_{IJ,I}$ est encore une application compacte, pour tous $I, J \in \mathcal{I}$; d'après la remarque 4.59(ii), elle est alors continue aussi pour les topologies constructibles, et avec l'observation 10.35(ii) il en est de même pour $\phi_I^{\text{na}} : \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}^c \rightarrow (E_I^{\text{na}})^c$. Noter de plus que la partie $\mathcal{I}' := \{I \in \mathcal{I} \mid I \subset A^{\circ\circ}\}$ est finale dans $\mathcal{I}$ (voir l'exercice 2.35), donc l'application naturelle $E^{\text{na}} \rightarrow F := \lim_{I \in \mathcal{I}'} E_I^{\text{na}}$ est un homéomorphisme. Soit aussi $F^c := \lim_{I \in \mathcal{I}'} (E_I^{\text{na}})^c$, et rappelons que les ensembles sous-jacents à F et F^c sont égaux; d'autre part, au vu du problème 2.32(ii) et de l'observation 10.34, l'application $\text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}^c \rightarrow F^c$ induite par le cône $(\phi_I^{\text{na}} : \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}^c \rightarrow (E_I^{\text{na}})^c \mid I \in \mathcal{I}')$ est surjective; on déduit ainsi que ϕ est de même surjective, et comme on sait déjà qu'elle est injective et qu'elle induit la topologie de $\text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}$, on conclut finalement que ϕ est un homéomorphisme.

Soit ensuite $v \in \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}$, et pour tout $I \in \mathcal{I}$ posons $\mathfrak{p}_I := \phi_I(v) \in E_I^{\text{na}}$; la construction de E^{na} (voir la solution du problème 5.51(ii)) montre que la fibre $\mathcal{O}_{E^{\text{na}}, \phi(v)}$ du faisceau $\mathcal{O}_{E^{\text{na}}}$ représente la colimite du système filtrant $\mathcal{O}_{E_\bullet, \mathfrak{p}_\bullet} := (\mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I} \mid I \in \mathcal{I}^{\text{op}})$ d'anneaux locaux, dont les homomorphismes de transition sont les $(\psi_{IJ,I}^\#)_{\mathfrak{p}_{IJ}} : \mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I} \rightarrow \mathcal{O}_{E_{IJ}, \mathfrak{p}_{IJ}}$, pour tous $I, J \in \mathcal{I}$. Pour conclure la preuve, il ne reste donc qu'à vérifier que le co-cône $(\phi_{I,v}^\# : \mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spa}(\underline{A}), v}^+ \mid I \in \mathcal{I}^{\text{op}})$ de base $\mathcal{O}_{E_\bullet, \mathfrak{p}_\bullet}$ et sommet $\mathcal{O}_{\text{Spa}(\underline{A}), v}$ est universel, i.e. qu'il induit un isomorphisme :

$$\omega : \lim_{I \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\text{Spa}(\underline{A}), v}^+.$$

Or, soit $\mathfrak{p} := \text{Supp}(v)$; la valuation v se prolonge en une unique valuation $v : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \Gamma_{v, \circ}$, et sous l'identification naturelle $\mathcal{O}_{\text{Spa}(\underline{A}), v} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$, le sous-anneau $\mathcal{O}_{\text{Spa}(\underline{A}), v}^+$ correspond à $A_v^+ := \{s \in A_{\mathfrak{p}} \mid v(s) \geq 0\}$. Fixons $a_1, \dots, a_n \in A^{\circ\circ}$ qui engendrent un idéal ouvert de A , et soit $a \in A_v^+$; on a $a = b/s$ pour certains $b, s \in A$ avec $v(b) \geq v(s) \neq +\infty$, et d'après le lemme 10.4(i) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v(a_i^N) \geq v(s)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il vient ainsi $v \in R_A\left(\frac{a_1^N}{s}, \dots, \frac{a_n^N}{s}, \frac{b}{s}\right)$ et l'idéal I engendré par $s, b, a_1^N, \dots, a_n^N$ est ouvert dans A ; compte tenu de l'observation 10.33(i), il s'ensuit que $\mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I}$ contient l'image de $A\left[\frac{a_1^N}{s}, \dots, \frac{a_n^N}{s}, \frac{b}{s}\right] \subset A[s^{-1}]$. Cela achève de montrer que ω est surjective. Ensuite,

soient $I \in \mathcal{I}$ et $x \in \mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I}$ tel que $\phi_{I,v}^\#(x) = 0$; afin de vérifier l'injectivité de ω , il suffira d'exhiber $J \in \mathcal{I}$ tel que $(\psi_{IJ,I}^\#)_{\mathfrak{p}_{IJ}}(x) = 0$. Pour cela, soit aussi $a_1, \dots, a_n$ un système fini de générateurs de I , et disons que $\mathfrak{p}_I \in \text{Spec } B_I \subset E_I$, avec comme ci-dessus, $B_i := A[\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}]$. On a alors $x = b/s$ avec $b \in B_i$ et $s \in B_i \setminus \mathfrak{p}_I$; il vient $\phi_{I,v}^\#(b) = 0$, et il suffira d'exhiber $J \in \mathcal{I}$ tel que $(\psi_{IJ,I}^\#)_{\mathfrak{p}_{IJ}}(b) = 0$. De même $b = a/a_i^k$ pour quelque $a \in A$ et $k \in \mathbb{N}$, d'où $\phi_{I,v}^\#(a) = 0$, et à nouveau il suffira d'exhiber $J \in \mathcal{I}$ tel que $(\psi_{IJ,I}^\#)_{\mathfrak{p}_{IJ}}(a) = 0$, car l'image de a_i dans $\mathcal{O}_{E_{IJ}, \mathfrak{p}_{IJ}}$ est un élément régulier, pour tout tel J . Mais sous l'identification $\mathcal{O}_{\text{Spa}(A), v}^+ \xrightarrow{\sim} A_v^+$, la composition $A \rightarrow \mathcal{O}_{E_I, \mathfrak{p}_I} \xrightarrow{\phi_{I,v}^\#} \mathcal{O}_{\text{Spa}(A), v}^+$ correspond à l'homomorphisme structurel $A \rightarrow A_v^+$ de la A -sous-algèbre A_v^+ de $A_{\mathfrak{p}}$; la condition $\phi_{I,v}^\#(a) = 0$ nous dit alors qu'il existe $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $ta = 0$ dans A . D'après le lemme 10.4(i) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v(a_i^N) \geq v(t)$ pour tout $i = 1, \dots, n$; soit $J \in \mathcal{I}$ l'idéal engendré par la suite $t, a_1^N, \dots, a_n^N$. D'après l'observation 10.33(i) on a $\mathfrak{p}_J \in \text{Spec } B' \subset E_J$, avec $B' := A[\frac{a_1^N}{t}, \dots, \frac{a_n^N}{t}]$, et évidemment $ta = 0$ dans B' . Mais t est un élément régulier de B' , d'où $a = 0$ dans B' . On déduit aisément que $(\psi_{IJ,I}^\#)_{\mathfrak{p}_{IJ}}(a) = 0$, comme souhaité : les détails sont confiés aux soins du lecteur. $\square$

10.3. Foncteurs Tor et extension des scalaires. Au §3.2.6 on a réinterprété le produit tensoriel comme un foncteur sur la catégorie AlgMod . On souhaite maintenant prolonger les mêmes considérations aux foncteurs dérivés du produit tensoriel; pour cela, fixons un système de résolutions projectives

$$\mathcal{P} := (P_{A, N_\bullet} \rightarrow N \mid (A, N) \in \text{Ob}(\text{AlgMod}))$$

(i.e. $P_{A, N_\bullet, i}$ est un A -module projectif, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $(A, N) \in \text{Ob}(\text{AlgMod})$) et soit $(f, g, h) : (A, M, N) \rightarrow (A', M', N')$ un morphisme de $\text{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \text{Alg}} \text{AlgMod}$ (voir le §3.2.6). Le complexe augmenté de A' -modules $P_{A', N'_\bullet} \rightarrow N'$ induit par restriction des scalaires un complexe exact de A -modules $(P_{A', N'_\bullet} \rightarrow N')_{[f]}$, et d'après le théorème 5.9, l'application A -linéaire $h : N \rightarrow N'_{[f]}$ se prolonge en un morphisme de complexes de A -modules $h_\bullet : P_{A, N_\bullet} \rightarrow (P_{A', N'_\bullet})_{[f]}$, unique à équivalence homotopique près; d'où un morphisme de $\mathcal{C}(A - \text{Mod})$:

$$g \otimes_f h_\bullet : M \otimes_A P_{A, N_\bullet} \rightarrow (M' \otimes_{A'} P_{A', N'_\bullet})_{[f]}$$

donné en chaque degré $i \in \mathbb{N}$ par l'application A -linéaire $g \otimes_f h_i : M \otimes_A P_{A, N_\bullet, i} \rightarrow (M' \otimes_{A'} P_{A', N'_\bullet, i})_{[f]}$. Si $k_\bullet : P_{A, N_\bullet} \rightarrow (P_{A', N'_\bullet})_{[f]}$ est un autre morphisme de complexes de A -modules prolongeant h , et si $s_\bullet := (s_i : P_{A, N_\bullet, i} \rightarrow (P_{A', N'_\bullet, i+1})_{[f]} \mid i \in \mathbb{N})$ est une homotopie de $h_\bullet$ vers $k_\bullet$, on voit aussitôt que $g \otimes_f s_\bullet := (g \otimes_f s_i \mid i \in \mathbb{N})$ est une homotopie de $g \otimes_f h_\bullet$ vers $g \otimes_f k_\bullet$. Donc, l'application A -linéaire

$$\text{Tor}_i^f(g, h) := H_i(g \otimes_f h_\bullet) : \text{Tor}_i^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_i^{A'}(M', N')_{[f]}$$

est indépendante du choix de $h_\bullet$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ (remarque 5.5(iii)). En particulier, si $(f', g', h') : (A', M', N') \rightarrow (A'', M'', N'')$ est un autre morphisme, on a :

$$\text{Tor}_i^{f' \circ f}(g' \circ g, h' \circ h) = \text{Tor}_i^{f'}(g', h') \circ \text{Tor}_i^f(g, h) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

On a ainsi obtenu pour tout $i \in \mathbb{N}$ un foncteur bien défini

$$\text{Tor}_i : \text{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \text{Alg}} \text{AlgMod} \rightarrow \text{AlgMod} \quad (A, M, N) \mapsto (A, \text{Tor}_i^A(M, N))$$

indépendant, à isomorphisme unique près, du choix de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Remarque 10.36. Soient A un anneau, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre, et $i \in \mathbb{N}$.

(i) $A - \text{Mod} \times A - \text{Mod}$ est naturellement identifiée avec la sous-catégorie $\mathcal{C}_A$ de $\text{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \text{Alg}} \text{AlgMod}$ telle que $\text{Ob}(\mathcal{C}_A) := \{(A, M, N) \mid M, N \in \text{Ob}(A - \text{Mod})\}$, et dont les morphismes sont les données (Id_A, g, h) , pour tout homomorphisme de A -modules

g, h ; évidemment, la restriction du foncteur Tor_i à cette sous-catégorie redonne le foncteur $\mathrm{Tor}_i^A(-, -)$ de la remarque 7.64(i).

(ii) Soient M un B -module, N un A -module, et $(P_\bullet, d_\bullet) \rightarrow N$ une résolution projective. Rappelons que $M \otimes_A P_j$ est naturellement un B -module, et $M \otimes_A d_j$ est une application B -linéaire pour tout $j \in \mathbb{N}$ (voir le §3.2.1), i.e. $M \otimes_A P_\bullet$ est un complexe de B -modules, et son homologie est un B -module en tout degré. Ainsi, le A -module $\mathrm{Tor}_i^A(M_{[f]}, N)$ hérite de M une structure naturelle de B -module, que l'on notera $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$, telle que

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N)_{[f]} = \mathrm{Tor}_i^A(M_{[f]}, N).$$

En outre, ce B -module est indépendant, à isomorphisme B -linéaire unique près, du système auxiliaire $\mathcal{P}$ de résolutions projectives : i.e., pour deux tels systèmes auxiliaires $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, l'isomorphisme naturel $\mathrm{Tor}_{i, \mathcal{P}}^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_{i, \mathcal{P}'}^A(M, N)$ de la remarque 7.61(iv) est B -linéaire pour tout $i \in \mathbb{N}$. De même, si $\phi : M \rightarrow M'$ est une application B -linéaire, et $\psi : N \rightarrow N'$ est une application A -linéaire, l'application induite $\mathrm{Tor}_i^A(\phi, \psi) : \mathrm{Tor}_i^A(M, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^A(M', N')$ est B -linéaire : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

(iii) Soient $C_\bullet^1, C_\bullet^2$ deux complexes de A -modules, $D_\bullet^1, D_\bullet^2$ deux complexes de B -modules, et $\phi_\bullet^j : C_\bullet^j \rightarrow (D_\bullet^j)_{[f]}$, un morphisme de complexes de A -modules, pour $j = 1, 2$; on a un morphisme $\phi_\bullet^1 \boxtimes_f \phi_\bullet^2 : C_\bullet^1 \boxtimes_A C_\bullet^2 \rightarrow (D_\bullet^1 \boxtimes_B D_\bullet^2)_{[f]}$ de complexes doubles de A -modules, avec $(\phi_\bullet^1 \boxtimes_f \phi_\bullet^2)_{pq} := \phi_p^1 \otimes_f \phi_q^2$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. En prenant les complexes totaux, on déduit un morphisme de complexes de A -modules :

$$\phi_\bullet^1 \otimes_f \phi_\bullet^2 : C_\bullet^1 \otimes_A C_\bullet^2 \rightarrow (D_\bullet^1 \otimes_B D_\bullet^2)_{[f]}.$$

Cela posé, on généralise le théorème 8.126 comme suit. On a un foncteur évident

$$\Phi : \mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathrm{AlgMod} \quad (A, M, N) \mapsto (A, N, M)$$

qui associe à tout morphisme (f, g, h) de $\mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathrm{AlgMod}$ le morphisme (f, h, g) . Alors, il existe un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Tor}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i \circ \Phi.$$

La preuve s'obtient aisément, par inspection de la démonstration du théorème 8.126 : les détails seront laissés en exercice au lecteur.

Exercice 10.37. Soient $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, M un B -module, N un A -module, et P un C -module.

(i) Montrer que si A et B sont noethériens, et si M et N sont de type fini, alors $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ est un B -module de type fini pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que si $P_{[g]}$ est un B -module plat, on a un isomorphisme C -linéaire

$$P \otimes_B \mathrm{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^A(P \otimes_B M, N) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(iii) Montrer que si B est une A -algèbre plate, on a un isomorphisme B -linéaire :

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^B(M, B \otimes_A N) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

10.3.1. Considérons un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow A'$, une suite exacte courte de A -modules $\Sigma := (0 \rightarrow M' \xrightarrow{f^1} M \xrightarrow{g^1} M'' \rightarrow 0)$, et une suite exacte courte de A' -modules $\Sigma' := (0 \rightarrow N' \xrightarrow{f^2} N \xrightarrow{g^2} N'' \rightarrow 0)$; on choisit des résolutions projectives $Q_{M'_\bullet} \xrightarrow{\varepsilon'} M', Q_{M''_\bullet} \xrightarrow{\varepsilon''} M''$ des A -modules M', M'' , et des résolutions projectives $Q_{N'_\bullet} \xrightarrow{\mu'} N', Q_{N''_\bullet} \xrightarrow{\mu''} N''$ des A' -modules N', N'' . D'après la proposition 7.65, on

déduit un diagramme commutatif de résolutions projectives

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q_{M',\bullet} & \xrightarrow{f^1_\bullet} & Q_{M,\bullet} & \xrightarrow{g^1_\bullet} & Q_{M'',\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \varepsilon' \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f^1} & M & \xrightarrow{g^1} & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec $Q_{M,i} := Q_{M',i} \oplus Q_{M'',i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et on a également une suite exacte courte $0 \rightarrow (Q_{N',\bullet}, \mu') \rightarrow (Q_{N,\bullet}, \mu) \rightarrow (Q_{N'',\bullet}, \mu'') \rightarrow 0$ de résolutions projectives de A' -modules pour la suite Σ' . Par restriction des scalaires, Σ' nous donne une suite exacte courte de A -modules, que l'on notera $\Sigma'_{[f]}$; soit alors $\Sigma \rightarrow \Sigma'_{[f]}$ un homomorphisme de suites exactes de A -modules, composés d'applications A -linéaires $h' : M' \rightarrow N'_{[f]}$, $h : M \rightarrow N_{[f]}$ et $h'' : M'' \rightarrow N''_{[f]}$. D'après le théorème 5.9, il existe des morphismes de complexes de A -modules $h'_\bullet : Q_{M',\bullet} \rightarrow (Q_{N',\bullet})_{[f]}$ et $h''_\bullet : Q_{M'',\bullet} \rightarrow (Q_{N'',\bullet})_{[f]}$ tels que $\mu'' \circ h''_0 = h'' \circ \varepsilon''$ et $\mu' \circ h'_0 = h' \circ \varepsilon'$. Or, les complexes $(Q_{N,\bullet})_{[f]}$, $(Q_{N',\bullet})_{[f]}$ et $(Q_{N'',\bullet})_{[f]}$ ne sont pas nécessairement des résolutions projectives de A -modules, mais comme ils se déduisent, par restriction des scalaires, de trois résolutions projectives de A' -modules, il est clair que la suite exacte courte de A -modules $0 \rightarrow (Q_{N',i})_{[f]} \rightarrow (Q_{N,i})_{[f]} \rightarrow (Q_{N'',i})_{[f]} \rightarrow 0$ est scindée en tout degré $i \in \mathbb{N}$. D'après la remarque 7.68(ii), il existe alors un morphisme de complexes de A -modules $h_\bullet : Q_{M,\bullet} \rightarrow Q_{N,\bullet}$ tel que $\mu \circ h_0 = h \circ \varepsilon$, et faisant commuter le diagramme (***) de la proposition 7.67. Soient de plus T un A -module, T' un A' -module, et $t : T \rightarrow T'_{[f]}$ une application A -linéaire; on obtient ainsi un diagramme commutatif de complexes de A -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T \otimes_A Q_{M',\bullet} & \xrightarrow{T \otimes_A f^1_\bullet} & T \otimes_A Q_{M,\bullet} & \xrightarrow{T \otimes_A g^1_\bullet} & T \otimes_A Q_{M'',\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & t \otimes_f h'_\bullet \downarrow & & \downarrow t \otimes_f h_\bullet & & \downarrow t \otimes_f h''_\bullet \\ 0 & \longrightarrow & T' \otimes_{A'} Q_{N',\bullet} & \xrightarrow{T' \otimes_{A'} f^1_\bullet} & T' \otimes_{A'} Q_{N,\bullet} & \xrightarrow{T' \otimes_{A'} g^1_\bullet} & T' \otimes_{A'} Q_{N'',\bullet} \longrightarrow 0. \end{array}$$

En raisonnant comme dans la remarque 7.68(iii), on déduit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le diagramme commutatif de A -modules (les détails sont laissés aux soins du lecteur) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_{i+1}^A(T, M'') & \xrightarrow{\partial_\Sigma^i} & \mathrm{Tor}_i^A(T, M') \\ \mathrm{Tor}_{i+1}^f(t, h'') \downarrow & & \downarrow \mathrm{Tor}_i^f(t, h') \\ \mathrm{Tor}_{i+1}^{A'}(T', N'')_{[f]} & \xrightarrow{\partial_{\Sigma'}^i} & \mathrm{Tor}_i^{A'}(T', N')_{[f]}. \end{array}$$

10.3.2. Soient A un anneau, $f : A \rightarrow A'$ et $g : A \rightarrow C$ deux A -algèbres, M un A -module, N un C -module. Posons $C' := C \otimes_A A'$, $M' := A' \otimes_A M$, $N' := C' \otimes_C N$, et notons par $\phi_M : M \rightarrow M'$ (resp. $\phi_N : N \rightarrow N'$) l'application A -linéaire (resp. C -linéaire) naturelle. L'application A -linéaire $\mathrm{Tor}_1^f(\phi_N, \phi_M) : \mathrm{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(N', M')_{[f]}$ induit, par l'adjonction du § 3.2.2, une application A' -linéaire

$$(*) \quad A' \otimes_A \mathrm{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(N', M').$$

Lemme 10.38. Dans la situation du § 10.3.2, si $N \otimes_A M$ est un C -module plat, alors $(*)$ est une surjection.

Démonstration. Soient Q un A -module projectif et $\varepsilon : Q \rightarrow M$ une surjection A -linéaire; posons $R := \mathrm{Ker} \varepsilon$, $Q' := A' \otimes_A Q$, $\varepsilon' := A' \otimes_A \varepsilon : Q' \rightarrow M'$, $R' := \mathrm{Ker} \varepsilon'$, et considérons le diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma & & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{j} & Q \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ & & & & r \downarrow & & \downarrow f \otimes_A Q \\ \Sigma'_{[f]} & & 0 & \longrightarrow & R'_{[f]} & \xrightarrow{j'} & Q'_{[f]} \xrightarrow{\varepsilon'} M'_{[f]} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Noter que Q' est un A' -module projectif (exercice 4.102(ii)), d'où $\mathrm{Tor}_1^{A'}(N', Q') = 0$ (exercice 7.62(i)). La discussion du §10.3.1, nous donne alors le diagramme commutatif suivant, dont la ligne horizontale en bas est exacte :

$$\begin{array}{ccccc}
 A' \otimes_A \mathrm{Tor}_1^A(N, M) & \xrightarrow{A' \otimes_A \partial_\Sigma^1} & A' \otimes_A (N \otimes_A R) & \xrightarrow{A' \otimes_A (N \otimes_A j)} & A' \otimes_A (N \otimes_A Q) \\
 \downarrow (*) & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(N', M') & \xrightarrow{\partial_{\Sigma'}^1} & N' \otimes_{A'} (A' \otimes_A R) & \xrightarrow{N' \otimes_{A'} (A' \otimes_A j)} & N' \otimes_{A'} Q' \\
 & & \downarrow N' \otimes_{A'} s & & \parallel \\
 & & N' \otimes_{A'} R' & \xrightarrow{N' \otimes_{A'} j'} & N' \otimes_{A'} Q'
 \end{array}$$

où α et β sont les isomorphismes A' -linéaires naturels de la proposition 3.20, et l'application A' -linéaire $s : A' \otimes_A R \rightarrow R'$ est l'adjointe de r (voir le §3.2.2). Le lemme découle alors de l'observation suivante, et d'une chasse simple au diagramme, que l'on laissera aux soins du lecteur :

Affirmation 10.39. $N' \otimes_A s$ est une surjection, et si $N \otimes_A M$ est un C -module plat, la ligne horizontale en haut du diagramme $(\dagger)$ est exacte.

Preuve : Pour la première assertion, d'après la proposition 3.11 il suffit de montrer la surjectivité de s , et cette dernière suit encore de la proposition 3.11.

Ensuite, soit $R_N := \mathrm{Ker}(N \otimes_A \varepsilon)$; on a deux suites exactes de C -modules :

$$\begin{array}{lcl}
 \Omega_1 & : & \mathrm{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow N \otimes_A R \rightarrow R_N \rightarrow 0 \\
 \Omega_2 & : & 0 \rightarrow R_N \rightarrow N \otimes_A Q \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow 0.
 \end{array}$$

La suite $A' \otimes_A \Omega_1$ est encore exacte, par la proposition 3.11, et de même pour la suite $C' \otimes_C \Omega_2 \simeq A' \otimes_A \Omega_2$, d'après le problème 4.24(ii.a) (ou l'exemple 8.128). La deuxième assertion s'ensuit aussitôt. $\square$

10.3.3. Foncteurs Tor et colimites filtrantes. On souhaite maintenant montrer que les foncteurs Tor_i des paragraphes précédents commutent aux colimites filtrantes.

- Le cas où $i = 0$ est réglé par le lemme suivant :

Lemme 10.40. *Le foncteur $- \otimes -$ commute avec la colimite de tout système filtrant d'objets de $\mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}-\mathrm{Alg}} \mathrm{AlgMod}$.*

Démonstration. Soit $(A_\bullet, M_\bullet, N_\bullet) := (A_\lambda, M_\lambda, N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un tel système filtrant, avec morphismes de transition $(A_\lambda \xrightarrow{f_{\lambda\mu}} A_\mu, M_\lambda \xrightarrow{g_{\lambda\mu}} (M_\mu)_{[f_{\lambda\mu}]}, N_\lambda \xrightarrow{h_{\lambda\mu}} (N_\mu)_{[f_{\lambda\mu}]})$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$. On déduit deux systèmes filtrants d'objets de AlgMod :

$$(A_\bullet, M_\bullet) := (A_\lambda, M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad \text{et} \quad (A_\bullet, N_\bullet) := (A_\lambda, N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

et si l'on dénote par $(A, M), (A, N) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AlgMod})$ les colimites respectives, on vérifie aisément que (A, M, N) représente dans $\mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}-\mathrm{Alg}} \mathrm{AlgMod}$ la colimite de $(A_\bullet, M_\bullet, N_\bullet)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. D'après la solution de l'exercice 3.22, on sait aussi que A est la colimite du système d'anneaux $(A_\bullet, f_{\bullet\bullet})$, et M (resp. N) est la colimite du système induit de A -modules $(A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ (resp. $(A \otimes_{A_\lambda} N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$). Comme Λ est filtrant, M est donné par le A -module des classes d'équivalence $[p, \lambda]$ des couples (p, λ) avec $\lambda \in \Lambda$ et $p \in A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda$ (voir l'exercice 2.31(iii)), et de même pour N . Soit aussi $(f_\lambda : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ le co-cône universel pour la colimite de $(A_\bullet, f_{\bullet\bullet})$; le co-cône universel pour la colimite de $(A_\bullet, M_\bullet)$ est alors donné par les couples :

$$(A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} A, M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} M_{[f_\lambda]}) \quad \text{avec} \quad g_\lambda(x) := [1 \otimes x, \lambda] \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in M_\lambda$$

et de même pour le co-cône universel $(f_\lambda, N_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} N_{[f_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda)$ de $(A_\bullet, N_\bullet)$. Avec cette notation, on doit vérifier l'universalité du co-cône induit :

$$(A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} A, M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda \xrightarrow{g_\lambda \otimes_{A_\lambda} h_\lambda} (M \otimes_A N)_{[f_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda).$$

Or, l'exercice 3.14 nous dit que $M \otimes_A N$ est la colimite du système de A -modules

$$((A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda) \otimes_A (A \otimes_{A_\mu} N_\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda)$$

où l'on munit $\Lambda \times \Lambda$ de l'ordre partiel tel que $(\lambda, \mu) \leq (\lambda', \mu')$ si et seulement si $\lambda \leq \lambda'$ et $\mu \leq \mu'$. Plus précisément, on a un co-cône universel naturel :

$$(A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda) \otimes_A (A \otimes_{A_\mu} N_\mu) \rightarrow M \otimes_A N \quad p \otimes q \mapsto [p, \lambda] \otimes [q, \mu] \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda \times \Lambda.$$

Noter maintenant que la partie $\{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ est cofinale dans $\Lambda \times \Lambda$, car Λ est filtrant ; d'après l'exercice 2.35(iii), il s'ensuit que $M \otimes_A N$ représente aussi la colimite du système filtrant $((A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda) \otimes_A (A \otimes_{A_\lambda} N_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$, et la restriction du co-cône universel ci-dessus est un co-cône universel pour cette colimite. Rappelons l'isomorphisme naturel $(A \otimes_{A_\lambda} M_\lambda) \otimes_A (A \otimes_{A_\lambda} N_\lambda) \xrightarrow{\sim} A \otimes_{A_\lambda} (M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda)$ de A -modules fourni par la proposition 3.20 ; on a ainsi un co-cône universel :

$$A \otimes_{A_\lambda} (M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda) \rightarrow M \otimes_A N \quad 1 \otimes (x \otimes y) \mapsto [1 \otimes x, \lambda] \otimes [1 \otimes y, \lambda] \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

L'universalité du co-cône $(f_\lambda, g_\lambda \otimes_{A_\lambda} h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ s'ensuit aussitôt, par inspection de la solution de l'exercice 3.22. $\square$

Remarque 10.41. Gardons la notation de la preuve du lemme 10.40 ; d'après la remarque 3.23, la colimite de $(A_\bullet, M_\bullet)$ est aussi représentée par le couple (A, M') , où M' est le A -module des classes d'équivalence $[x, \lambda]$ des couples (x, λ) avec $\lambda \in \Lambda$ et $x \in M_\lambda$, et le co-cône universel correspondant est donné par les couples

$$(A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} A, M_\lambda \xrightarrow{g'_\lambda} M'_{[f_\lambda]}) \quad \text{avec} \quad g'_\lambda(x) := [x, \lambda] \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

De même on décrit la colimite des systèmes $(A_\bullet, N_\bullet)$ et $(A_\lambda, M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ d'objets de $\mathbf{AlgMod}$. Le lemme 10.40 (avec la remarque 2.36) nous donne alors un isomorphisme canonique de A -modules :

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda \xrightarrow{\sim} (\lim_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \otimes_A (\lim_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \quad [x \otimes y, \lambda] \mapsto [x, \lambda] \otimes [y, \lambda].$$

- Considérons ensuite le foncteur d'oubli

$$F : \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathcal{C} := \mathbb{Z} - \mathbf{Alg} \times \mathbf{Ens} \quad (A, M) \mapsto (A, |M|)$$

qui associe à tout objet (A, M) de $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ le couple $(A, |M|)$ formé de l'anneau A et de l'ensemble $|M|$ sous-jacent le A -module M , et à tout morphisme $(f, g) : (A, M) \rightarrow (B, N)$ de $\mathbf{AlgMod}$ le couple $(f, |g|)$, où $|g| : |M| \rightarrow |N|$ est l'application ensembliste sous-jacente à l'application A -linéaire $g : M \rightarrow N$. En raisonnant comme dans la solution du problème 2.10(ii), on voit aisément que F admet un foncteur adjoint à gauche

$$G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AlgMod} \quad (A, S) \mapsto (A, A^{(S)})$$

associant à tout couple (A, S) l'objet $(A, A^{(S)})$ de $\mathbf{AlgMod}$ constitué de A et du A -module libre $A^{(S)}$ sur l'ensemble S , et à tout morphisme $(f, \phi) : (A, S) \rightarrow (A', S')$ de $\mathcal{C}$ le morphisme $(f, f^{(\phi)}) : (A, A^{(S)}) \rightarrow (A', A'^{(S')})$ de $\mathbf{AlgMod}$, où $f^{(\phi)} : A^{(S)} \rightarrow A'^{(S')}_{[f]}$ est l'application A -linéaire telle que $f^{(\phi)}(e_s) := e'_{\phi(s)}$ pour tout $s \in S$ (ici on dénote par $(e_s \mid s \in S)$ et $(e'_{s'} \mid s' \in S')$ les bases canoniques de $A^{(S)}$ et respectivement $A'^{(S')}$). Plus précisément, on a une adjonction canonique pour le couple de foncteurs (G, F) , qui associe à tout $(A, S) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $(B, N) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AlgMod})$ la bijection naturelle :

$$\mathcal{C}((A, S), (B, |N|)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{AlgMod}((A, A^{(S)}), (B, N)) \quad (f, \phi) \mapsto (f, \phi^*)$$

où $\phi^* : A^{(S)} \rightarrow N_{[f]}$ est l'application A -linéaire telle que $\phi^*(e_s) := \phi(s)$ pour tout $s \in S$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Noter que la coïté de cette adjonction associe à tout $(A, M) \in \text{Ob}(\text{AlgMod})$ la surjection A -linéaire

$$\varepsilon_{A,M} : A^{(M)} \rightarrow M \quad e_x \mapsto x \quad \forall x \in M$$

qui fournit l'augmentation d'une *résolution libre canonique* du A -module M , notée :

$$(\mathcal{L}_{\bullet}^{A,M}, d_{\bullet}^{A,M}) \xrightarrow{\varepsilon_{A,M}} M$$

que l'on construit de proche en proche, comme suit. On pose d'abord

$$\mathcal{L}_{-1}^{A,M} := M \quad \mathcal{L}_0^{A,M} := A^{(M)} \quad \text{et} \quad d_0^{A,M} := \varepsilon_{A,M} : \mathcal{L}_0^{A,M} \rightarrow \mathcal{L}_{-1}^{A,M}.$$

Ensuite, si $\mathcal{L}_i^{A,M}$ et $d_i^{A,M} : \mathcal{L}_i^{A,M} \rightarrow \mathcal{L}_{i-1}^{A,M}$ sont déjà définis, on pose $Z_i^{A,M} := \text{Ker } d_i^{A,M}$, et $\mathcal{L}_{i+1}^{A,M} := A^{(Z_i^{A,M})}$, et la différentielle en degré $i+1$ sera la composition

$$d_{i+1}^{A,M} : \mathcal{L}_{i+1}^{A,M} \xrightarrow{\varepsilon_{A,M}^{i+1}} Z_i^{A,M} \hookrightarrow \mathcal{L}_i^{A,M} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{A,M}^{i+1} := \varepsilon_{A, Z_i^{A,M}}.$$

En outre, à tout morphisme $(f, g) : (A, M) \rightarrow (B, N)$ de AlgMod on associe de proche en proche un morphisme de complexes de A -modules

$$\mathcal{L}_{\bullet}^{f,g} : \mathcal{L}_{\bullet}^{A,M} \rightarrow (\mathcal{L}_{\bullet}^{B,N})_{[f]}.$$

Pour cela, on pose $\mathcal{L}_{-1}^{f,g} := g : M \rightarrow N_{[f]}$ et $\mathcal{L}_0^{f,g} := f^{(g)} : A^{(M)} \rightarrow B_{[f]}^{(N)}$. Ensuite, si $\mathcal{L}_j^{f,g}$ est déjà défini pour tout $j \leq i$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_j^{A,M} & \xrightarrow{d_i^{A,M}} & \mathcal{L}_{j-1}^{A,M} \\ \mathcal{L}_j^{f,g} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_{j-1}^{f,g} \\ (\mathcal{L}_j^{B,N})_{[f]} & \xrightarrow{d_i^{B,N}} & (\mathcal{L}_{j-1}^{B,N})_{[f]} \end{array} \quad \forall j \leq i$$

on remarque que $\mathcal{L}_i^{f,g}$ induit par restriction une application A -linéaire $h_i^{f,g} : Z_i^{A,M} \rightarrow (Z_i^{B,N})_{[f]}$; on déduit qu'avec $\mathcal{L}_{i+1}^{f,g} := f^{(h_i^{f,g})} : A^{(Z_i^{A,M})} \rightarrow B_{[f]}^{(Z_i^{B,N})}$, le diagramme $(*)$ commute aussi pour $j = i+1$. On a ainsi un foncteur bien défini

$$\mathcal{L}_{\bullet} : \text{AlgMod} \rightarrow \mathbf{C}(\text{AlgMod}) \quad (A, M) \mapsto (A, \mathcal{L}_{\bullet}^{A,M}) \quad (f, g) \mapsto (f, \mathcal{L}_{\bullet}^{f,g})$$

où l'on dénote par $\mathbf{C}(\text{AlgMod})$ la catégorie dont les objets sont les couples $(A, C_{\bullet})$ formés d'un anneau A et d'un complexe $C_{\bullet}$ de A -modules, et dont les morphismes $(f, g_{\bullet}) : (A, C_{\bullet}) \rightarrow (B, D_{\bullet})$ sont les couples formés d'un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ d'anneaux, et d'un morphisme de complexes de A -modules $g_{\bullet} : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$, avec la loi de composition évidente.

Exercice 10.42. (i) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a un *foncteur d'évaluation* évident

$$\text{ev}^n : \mathbf{C}(\text{AlgMod}) \rightarrow \text{AlgMod} \quad (A, C_{\bullet}) \mapsto (A, C_n)$$

qui associe à tout morphisme $(f, g_{\bullet}) : (A, C_{\bullet}) \rightarrow (B, D_{\bullet})$ de $\mathbf{C}(\text{AlgMod})$ le morphisme $(f, g_n) : (A, C_n) \rightarrow (B, D_n)$ de AlgMod . Montrer que la catégorie $\mathbf{C}(\text{AlgMod})$ est complète et cocomplète, et que ev^n commute avec toute petite limite et toute petite colimite de $\mathbf{C}(\text{AlgMod})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Soient la catégorie $\text{Morph}(\text{AlgMod})$ comme dans la remarque 2.69(i), et

$$\text{Ker} : \text{Morph}(\text{AlgMod}) \rightarrow \text{AlgMod}$$

le foncteur qui associe à tout morphisme $(f, g) : (A, M) \rightarrow (A', M')$ de $\mathbf{AlgMod}$ le couple $(A, \text{Ker } g)$, et à tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A_1, M_1) & \xrightarrow{(f_1, g_1)} & (A'_1, M'_1) \\ (h, k) \downarrow & & \downarrow (h', k') \\ (A_2, M_2) & \xrightarrow{(f_2, g_2)} & (A'_2, M'_2) \end{array}$$

le morphisme $(h, t) : (A_1, \text{Ker } g_1) \rightarrow (A_2, \text{Ker } g_2)$, où t est la restriction de $k : M_1 \rightarrow M_{2, [h]}$. Montrer que Ker commute avec toute colimite filtrante.

Lemme 10.43. *Le foncteur $\mathcal{L}_\bullet$ commute avec toute colimite filtrante.*

Démonstration. D'après l'exercice 10.42(i), il suffit de montrer que $\mathcal{L}_n := \text{ev}^n \circ \mathcal{L}_\bullet : \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathbf{AlgMod}$ commute avec toute colimite filtrante, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par récurrence sur n . Par définition, $\mathcal{L}_0 = G \circ F$, et il est clair que le foncteur F d'oubli commute avec toute colimite filtrante; il en est de même pour son adjoint à gauche G , d'après la proposition 2.49(ii), et donc aussi pour $\mathcal{L}_0$.

Ensuite, supposons que $n \geq 0$, et que l'assertion soit déjà connue pour tout entier $k \leq n$; on considère le foncteur

$$\mathcal{L}_{[n, n-1]} : \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathbf{Morph}(\mathbf{AlgMod}) \quad (A, M) \mapsto \mathcal{L}_{[n, n-1]}^{A, M}$$

où $\mathcal{L}_{[n, n-1]}^{A, M}$ est le morphisme $(\text{Id}_A, d_n^{A, M}) : (A, \mathcal{L}_n^{A, M}) \rightarrow (A, \mathcal{L}_{n-1}^{A, M})$ de $\mathbf{AlgMod}$. A tout morphisme $(f, g) : (A, M) \rightarrow (B, N)$ de $\mathbf{AlgMod}$, le foncteur $\mathcal{L}_{[n, n-1]}$ associe le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A, \mathcal{L}_n^{A, M}) & \xrightarrow{(\text{Id}_A, d_n^{A, M})} & (A, \mathcal{L}_{n-1}^{A, M}) \\ (f, \mathcal{L}_n^{f, g}) \downarrow & & \downarrow (f, \mathcal{L}_{n-1}^{f, g}) \\ (B, \mathcal{L}_n^{B, N}) & \xrightarrow{(\text{Id}_B, d_n^{B, N})} & (B, \mathcal{L}_{n-1}^{B, N}) \end{array}$$

Avec cette notation, $\mathcal{L}_{n+1}$ est la composition :

$$\mathbf{AlgMod} \xrightarrow{\mathcal{L}_{[n, n-1]}} \mathbf{Morph}(\mathbf{AlgMod}) \xrightarrow{\text{Ker}} \mathbf{AlgMod} \xrightarrow{\mathcal{L}_0} \mathbf{AlgMod}.$$

Par hypothèse de récurrence (et par l'exercice 10.42(ii)), le foncteur $\mathcal{L}_{[n, n-1]}$ commute avec toute colimite filtrante; il en est de même pour $\mathcal{L}_0$, et aussi pour Ker , d'après l'exercice 10.42(ii). Donc $\mathcal{L}_{n+1}$ commute avec toute colimite filtrante. $\square$

Proposition 10.44. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le foncteur Tor_i commute avec la colimite de tout système filtrant d'objets de $\mathbf{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathbf{AlgMod}$.*

Démonstration. On peut supposer que Tor_i soit le foncteur donné par l'association : $(A, M, N) \mapsto H^i(M \otimes_A \mathcal{L}_\bullet^{A, N})$ pour tout $(A, M, N) \in \text{Ob}(\mathbf{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathbf{AlgMod})$. L'assertion découle alors aussitôt des lemmata 10.40 et 10.43, et de l'exercice 2.100. $\square$

Corollaire 10.45. *Soient A un anneau, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre, M un A -module, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $M_B := B \otimes_A M$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) M_B est un B -module plat, et $\text{Tor}_i^A(M, B_{[f]}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
- (b) $\text{Tor}_i^A(M, N_{[f]}) = 0$ pour tout B -module N et tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (a) : Pour tout B -module N , l'exercice 3.6(ii) et la proposition 3.18(i) nous donnent des isomorphismes naturels de B -modules : $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_A (B \otimes_B N) \xrightarrow{\sim} M_B \otimes_B N$, et si $u : N \rightarrow N'$ est un homomorphisme de B -modules, ces isomorphismes identifient $M \otimes_A u : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'$ avec $M_B \otimes_B u : M_B \otimes_B N \rightarrow$

$M_B \otimes_B N'$. Or, si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de B -modules, avec l'exemple 7.69 on déduit une suite exacte :

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(M, N'') \rightarrow M_B \otimes_B N' \rightarrow M_B \otimes_B N \rightarrow M_B \otimes_B N'' \rightarrow 0.$$

D'après la proposition 2.102(ii), cela montre que M_B est un B -module plat.

(a) $\Rightarrow$ (b) : On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, choisissons une suite exacte courte de B -modules $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} L \rightarrow N \rightarrow 0$, avec $L = B^{(S)}$ pour un certain ensemble S ; comme ci-dessus, on déduit une suite exacte :

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, L) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow M_B \otimes_B N' \xrightarrow{M_B \otimes_B u} M_B \otimes_B L$$

et noter que $M_B \otimes_B u$ est injective, car M_B est un B -module plat. On est ainsi ramené à vérifier que $\mathrm{Tor}_1^A(M, L) = 0$. Or, comme $\mathrm{Tor}_1^A(M, B) = 0$, le problème 2.76(i) entraîne que $\mathrm{Tor}_1^A(M, B^{(S')}) = 0$ pour toute partie finie $S' \subset S$. D'autre part, L est la colimite du système filtrant $(B^{(S')} \mid S' \in \Sigma)$, où Σ est l'ensemble des parties finies de S ; l'assertion découle alors de la proposition 10.44.

Ensuite, soit $n > 1$, et supposons que $\mathrm{Tor}_i^A(M, N_{[f]}) = 0$ pour tout B -module N et $i = 1, \dots, n-1$. La suite exacte courte ci-dessus nous donne alors une surjection : $\mathrm{Tor}_n^A(M, L) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$, car $\mathrm{Tor}_{n-1}^A(M, N') = 0$; on est ainsi ramené à vérifier que $\mathrm{Tor}_n^A(M, L) = 0$, et pour cela on raisonne comme dans le cas $n = 1$. $\square$

Proposition 10.46. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, $\phi : A \rightarrow B$ un homomorphisme plat d'anneaux, M un B -module tel que $M_{[\phi]}$ soit un A -module plat, et posons $(X, \mathcal{O}_X) := \mathrm{Spec} B$, $U := X \setminus V(IB)$, $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U}$, et $\mathcal{M} := \mathcal{O}_U \widetilde{\otimes}_B M$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) M/IM est un B/IB -module plat, et $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_U$ -module plat.
- (b) M est un B -module plat.

Démonstration. Evidemment (b) $\Rightarrow$ (a). Pour la réciproque, soit $f_1, \dots, f_n$ un système fini de générateurs de I ; on raisonne par récurrence sur n . Donc, supposons d'abord que $I = Af$ soit un idéal principal, de sorte que $U = \mathrm{Spec} B_f$; la condition (a) revient à dire que M/fM est un B/fB -module plat, et M_f est un B_f -module plat (exercice 5.80(ii)), et il suffit de montrer que $\mathrm{Tor}_1^B(M, N) = 0$ pour tout B -module N (proposition 7.70). Soient $j : N \rightarrow N_f$ la localisation, $K := \mathrm{Ker}(j)$, $\overline{N} := j(N)$, et $C := \mathrm{Coker}(j)$; on considère les suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow \overline{N} \rightarrow N_f \rightarrow C \rightarrow 0.$$

D'après l'exercice 10.37(iii) et le théorème 8.126(i), on a

$$\mathrm{Tor}_i^B(M, N_f) = \mathrm{Tor}_i^B(N_f, M) = \mathrm{Tor}_i^{B_f}(N_f, M_f) = 0 \quad \forall i > 0$$

car M_f est un B_f -module plat. Les suites exactes longues des foncteurs $\mathrm{Tor}_\bullet^B(M, -)$ nous donnent alors des suites exactes :

$$\mathrm{Tor}_i^B(M, K) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^B(M, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^B(M, \overline{N}) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

ainsi que des identifications naturelles : $\mathrm{Tor}_{i+1}^B(M, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^B(M, \overline{N})$ pour tout $i > 0$. Par suite, on est ramené à vérifier :

Affirmation 10.47. $\mathrm{Tor}_1^B(M, K) = \mathrm{Tor}_2^B(M, C) = 0$.

Preuve : Noter que $K = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathrm{Ann}_K(f^r)$, et de même pour C ; au vu de la proposition 10.44, on est alors ramené à montrer que $\mathrm{Tor}_i^B(M, Q) = 0$ pour $i = 1, 2$, tout entier $r > 0$, et tout B -module Q tel que $f^r Q = 0$. Ensuite, noter que la suite exacte courte $0 \rightarrow fQ \rightarrow Q \rightarrow Q/fQ \rightarrow 0$ induit une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_i^B(M, fQ) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^B(M, Q) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^B(M, Q/fQ) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

donc une simple récurrence sur r nous ramène au cas où $fQ = 0$, i.e. Q est un B/fB -module ; avec le corollaire 10.45 on est ensuite ramené au cas où $Q = B/fB$.

Soit alors $P_\bullet \rightarrow A/fA$ une résolution de A/fA par des A -modules libres ; puisque B est une A -algèbre plate, $B \otimes_A P_\bullet \rightarrow B/fB$ est une résolution de B/fB par des B -modules libres, donc on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ des isomorphismes naturels :

$$\mathrm{Tor}_i^B(M, B/fB) \xrightarrow{\sim} H_i(M \otimes_B (B \otimes_A P_\bullet)) \xrightarrow{\sim} H_i(M \otimes_A P_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^A(M, A/fA)$$

et $\mathrm{Tor}_i^A(M, A/fA) = 0$ pour tout $i > 0$, car $M_{[\phi]}$ est un A -module plat. $\diamond$

Soit ensuite $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau A' et tout idéal $I' \subset A'$ engendré par $n - 1$ éléments. Posons $A' := A/f_n A$, $I' := IA'$, $B' := B/f_n B$, et $M' := M/f_n M$. Alors, l'homomorphisme induit $\phi' : A' \rightarrow B'$ est plat, et $M'_{[\phi']}$ est un A' -module plat. Soient en outre $(X', \mathcal{O}_{X'}) := \mathrm{Spec} B'$, $U' := (X' \setminus V(I'B))$, $\mathcal{O}_{U'} := \mathcal{O}_{X'|U'}$, et $\mathcal{M}' := \mathcal{O}_{U'} \otimes_{B'} M'$; évidemment $B'/I'B' = B/IB$, et $M'/I'M' = M/IM$ est un B'/IB' -module plat ; en outre, l'immersion fermée $(U', \mathcal{O}_{U'}) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$ identifie $\mathcal{M}'$ avec $\mathcal{O}_{U'} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{M}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc $\mathcal{M}'$ est un $\mathcal{O}_{U'}$ -module plat. Par hypothèse de récurrence, M' est alors un B' -module plat. Posons alors $V := X \setminus V(Bf_n)$, $\mathcal{O}_V := \mathcal{O}_{X|V}$, et $\mathcal{N} := \mathcal{M}_V$; ainsi, $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_V$ -module plat, et par le cas $n = 1$, on conclut que M est un B -module plat. $\square$

10.4. Le critère local de platitude. Cette section présente quelques résultats sur la platitude des modules, dont les preuves reposent sur le lemme d'Artin-Rees, et donc ne seront valables que pour les modules sur les anneaux noethériens, ou en tout cas leur démonstration exigera une réduction préalable au cas noethérien.

Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et M un A -module. On pose

$$A_n := A/I^{n+1} \quad \text{et} \quad M_n := A_n \otimes_A M = M/I^{n+1}M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on dénote par $\bar{a} \in A_n$ et $\bar{x} \in M_n$ les classes de tout $a \in A$ et $x \in M$. On a une application A -linéaire naturelle

$$\alpha_n^{A,M} : I^n \otimes_A M \rightarrow I^n M \quad a \otimes x \mapsto ax$$

et noter que le noyau de la composition

$$\gamma_n : I^n \otimes_A M \xrightarrow{\alpha_n^{A,M}} I^n M \rightarrow I^n M / I^{n+1}M \quad a \otimes x \mapsto ax \mapsto \bar{ax}$$

contient l'image de l'application naturelle $\beta_n : I^{n+1} \otimes_A M \rightarrow I^n \otimes_A M$ (induite par l'inclusion $I^{n+1} \subset I^n$), dont le conoyau est $I^n / I^{n+1} \otimes_A M$ (proposition 3.11) ; de plus, comme I^n / I^{n+1} est évidemment un A_0 -module, on a une identification naturelle de A_0 -modules : $I^n / I^{n+1} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} (I^n / I^{n+1} \otimes_{A_0} A_0) \otimes_A M \xrightarrow{\sim} (I^n / I^{n+1}) \otimes_{A_0} M_0$ (proposition 3.18(i)). Donc, γ_n se factorise à travers une application A_0 -linéaire

$$\bar{\gamma}_n : (I^n / I^{n+1}) \otimes_{A_0} M_0 \rightarrow I^n M / I^{n+1}M \quad \bar{a} \otimes \bar{x} \mapsto \bar{ax}.$$

Théorème 10.48. (Critère local de platitude) Avec la notation ci-dessus, on considère les conditions suivantes :

- (a) M est un A -module plat.
- (b) M_0 est un A_0 -module plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A_0) = 0$.
- (c) M_0 est un A_0 -module plat, et $\bar{\gamma}_n$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (d) M_n est un A_n -module plat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d). En outre, (d) $\Rightarrow$ (a) si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- l'idéal I est nilpotent.
- A est noethérien, et la topologie I -adique de $J \otimes_A M$ est séparée, pour tout idéal $J \subset A$.

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (c) : Remarquons d'abord :

Affirmation 10.49. (i) (b) $\Rightarrow \alpha_n^{A,M}$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\alpha_1^{A,M}$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow \text{Tor}_1^A(M, A_0) = 0$.

Preuve : (i) : On montre la condition par récurrence sur n . Pour $n = 0$, l'assertion est l'exercice 3.6(ii). Soit ensuite $n \geq 0$ tel que $\alpha_n^{A,M}$ est un isomorphisme. D'après le corollaire 10.45, on a $\text{Tor}_1^A(M, I^n/I^{n+1}) = 0$; d'après l'exemple 7.69, la suite exacte courte $0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow I^n/I^{n+1} \rightarrow 0$ induit alors une suite exacte courte

$$0 \rightarrow I^{n+1} \otimes_A M \xrightarrow{\beta_n} I^n \otimes_A M \rightarrow (I^n/I^{n+1}) \otimes_A M \rightarrow 0.$$

Par inspection directe, on voit que $\alpha_n^{A,M} \circ \beta_n$ est la composition de $\alpha_{n+1}^{A,M}$ avec l'inclusion $I^{n+1}M \rightarrow I^nM$, et l'hypothèse de récurrence implique que $\alpha_n^{A,M} \circ \beta_n$ soit injective; donc $\alpha_{n+1}^{A,M}$ est injective, et elle est aussi évidemment surjective.

(ii) : La suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A_0 \rightarrow 0$ induit une suite exacte

$$0 = \text{Tor}_1^A(M, A) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, A_0) \rightarrow I \otimes_A M \xrightarrow{\alpha_1^{A,M}} IM \rightarrow 0$$

(voir l'exercice 7.62(i)) d'où l'assertion. $\diamond$

L'observation 10.49(i) entraîne que le noyau de γ_n est l'image de β_n , d'où (c).

(a) $\Rightarrow$ (b) : Cela découle de la proposition 7.70 et la remarque 3.74(vi).

(c) $\Rightarrow$ (d) : Remarquons d'abord :

Affirmation 10.50. (c) $\Rightarrow \alpha_i^{A_n, M_n}$ est un isomorphisme pour tous $n, i \in \mathbb{N}$.

Preuve : On montre par récurrence sur j , que $\alpha_{1+n-j}^{A_n, M_n}$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \leq n+1$. Cela est clair pour $j \leq 0$, car $\alpha_i^{A_n, M_n}$ est l'isomorphisme $0 \xrightarrow{\sim} 0$ si $i > n$. Soit ensuite $j \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\alpha_{1+n-j}^{A_n, M_n}$ est un isomorphisme; pour $i := n-j$, la proposition 3.18(i) fournit un isomorphisme naturel $\omega_i : (I^i/I^{i+1}) \otimes_{A_n} M_n \xrightarrow{\sim} (I^i/I^{i+1}) \otimes_{A_0} M_0$, d'où le diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} I^{i+1}A_n \otimes_{A_n} M_n & \longrightarrow & I^iA_n \otimes_{A_n} M_n & \longrightarrow & (I^i/I^{i+1}) \otimes_{A_n} M_n & \longrightarrow & 0 \\ \alpha_{i+1}^{A_n, M_n} \downarrow & & \downarrow \alpha_i^{A_n, M_n} & & \downarrow \bar{\gamma}_i \circ \omega_i & & \\ 0 \longrightarrow & I^{i+1}M_n & \longrightarrow & I^iM_n & \longrightarrow & I^iM/I^{i+1}M & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est une suite exacte courte, et dont celle en haut est une suite exacte à droite (proposition 3.11). Par hypothèse, $\alpha_{i+1}^{A_n, M_n}$ et $\bar{\gamma}_i$ sont des isomorphismes; il s'ensuit aisément que la ligne horizontale en haut est exacte courte, et alors $\alpha_i^{A_n, M_n} = \alpha_{1+n-(j+1)}^{A_n, M_n}$ est un isomorphisme (exercice 2.104). $\diamond$

Les observations 10.49(ii) et 10.50 entraînent que $\text{Tor}_1^{A_n}(M_n, A_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; avec le corollaire 10.45, on obtient $\text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N) = 0$ pour tout A_0 -module N . On va montrer par récurrence sur i , que $\text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et tout A_i -module N . Le cas $i = 0$ vient d'être établi; soit ensuite $i < n$ tel que $\text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N') = 0$ pour tout A_i -module N' . Pour tout A_{i+1} -module N , on a la suite exacte $0 \rightarrow IN \rightarrow N \rightarrow N/IN \rightarrow 0$, et noter que IN et N/IN sont des A_i -modules; par hypothèse de récurrence, il vient une suite exacte

$$0 = \text{Tor}_1^{A_n}(M_n, IN) \rightarrow \text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N) \rightarrow 0 = \text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N/IN)$$

d'où $\text{Tor}_1^{A_n}(M_n, N) = 0$. Ainsi, M_n est un A_n -module plat, par la proposition 7.70.

Ensuite, si $I^n = 0$, on a $A = A_n$ et $M = M_n$, donc trivialement (d) $\Rightarrow$ (a) dans ce cas. Il reste à montrer que (d) $\Rightarrow$ (a), quand A est noethérien, et quand la topologie I -adique de $J \otimes_A M$ est séparée pour tout idéal $J \subset A$. D'après la proposition 3.78, il suffit de vérifier que l'inclusion $J \rightarrow A$ induit une injection $j : J \otimes_A M \rightarrow M$ pour tout tel J , et comme, par hypothèse $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n(J \otimes_A M) = 0$, on est ramené à montrer

que $\text{Ker } j \subset I^n(J \otimes_A M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or d'après le lemme d'Artin-Rees, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I^{k+1} \cap J \subset I^n J$; noter l'identification naturelle :

$$J/(I^{k+1} \cap J) \xrightarrow{\sim} JA_k$$

(remarque 1.14(v)). La proposition 3.18(i) fournit alors un isomorphisme naturel $\omega : J/(I^{k+1} \cap J) \otimes_A M \xrightarrow{\sim} JA_k \otimes_{A_k} M_k$ de A_k -modules, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} J \otimes_A M & \xrightarrow{j} & M \\ \downarrow \pi \otimes_A M & & \downarrow p_k \\ \frac{J \otimes_A M}{I^n(J \otimes_A M)} = \frac{J}{I^n J} \otimes_A M \xleftarrow{\pi' \otimes_A M} \frac{J}{I^{k+1} \cap J} \otimes_A M & \xrightarrow{\omega} & JA_k \otimes_{A_k} M_k \xrightarrow{j_k} M_k \end{array}$$

où $\pi : J \rightarrow J/(I^{k+1} \cap J)$, $\pi' : J/(I^{k+1} \cap J) \rightarrow J/(I^n J)$ et p_k dénotent les projections naturelles, et j_k est induite par l'inclusion $JA_k \rightarrow A_k$. Mais j_k est injective, car M_k est un A_k -module plat; ainsi :

$$\text{Ker } j \subset \text{Ker } p_k \circ j = \text{Ker } \pi \otimes_A M \subset \text{Ker}(\pi' \circ \pi) \otimes_A M = I^n(J \otimes_A M)$$

comme souhaité. □

Remarque 10.51. (i) Soient $h : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, $I \subset A$ un idéal tel que $IB \subset \mathcal{J}(B)$, et N un B -module de type fini. Pour tout idéal $J \subset A$, le B -module $J \otimes_A N$ est de type fini, et par suite, la topologie I -adique de $J \otimes_A N$ est séparée (corollaire 9.106(ii)); dans ce cas, pour $M := N_{[h]}$ les conditions (a) – (d) du théorème 10.48 sont alors toutes équivalentes.

(ii) Si A est local et si I est son idéal maximal, A_0 est le corps résiduel k de A , donc dans ce cas la condition (b) du théorème 10.48 revient à l'identité : $\text{Tor}_1^A(M, k) = 0$, et au vu du théorème 3.82, la condition (d) équivaut à :

(d') M_n est un A_n -module libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.52. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, $I \subset A$ un idéal tel que $IB \subset \mathcal{J}(B)$, et P un B -module de type fini. Munissons A et $P_{[f]}$ de leurs topologies I -adiques, et soient $\hat{A}, \hat{P}$ les complétions de A et $P_{[f]}$. Montrer que $P_{[f]}$ est un A -module plat si et seulement si $\hat{P}$ est un $\hat{A}$ -module plat.

Exercice 10.53. Soient $f : (A, \mathfrak{m}_A) \rightarrow (B, \mathfrak{m}_B)$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M et P deux B -modules de type fini, $u : M \rightarrow P$ une application B -linéaire, et supposons que $P_{[f]}$ soit un A -module plat. Montrer que $k(\mathfrak{m}_A) \otimes_A u : M(\mathfrak{m}_A) \rightarrow P(\mathfrak{m}_A)$ est injective $\Leftrightarrow u$ est injective et $(\text{Coker } u)_{[f]}$ est un A -module plat.

10.4.1. Ouverture du lieu de platitude. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, $f : A \rightarrow A'$ et $g : A \rightarrow B$ deux A -algèbres, M un B -module. On pose

$$A_0 := A/I \quad A'_0 := A'/IA' \quad B' := A' \otimes_A B \quad M' := B' \otimes_B M \simeq A' \otimes_A M$$

ainsi que $f_0 := f \otimes_A A_0 : A_0 \rightarrow A'_0$ et $g' := A' \otimes_A g : A' \rightarrow B'$, et soit $\mathfrak{p}' \subset B'$ un idéal premier tel que $IB' \subset \mathfrak{p}'$. Notons aussi par $\phi : M \rightarrow M'_{\mathfrak{p}'}$ la composition de $f \otimes_A M : M \rightarrow M'$ avec la localisation $M' \rightarrow M'_{\mathfrak{p}'}$. On déduit un morphisme $(f, \phi, f_0) : (A, M, A_0) \rightarrow (A', M'_{\mathfrak{p}'}, A'_0)$ de $\text{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \text{AlgMod}$, d'où l'application

$$\psi := \text{Tor}_1^f(\phi, f_0) : \text{Tor}_1^A(M, A_0) \rightarrow \text{Tor}_1^{A'}(M'_{\mathfrak{p}'}, A'_0).$$

Corollaire 10.54. Dans la situation du § 10.4.1, supposons en outre que $M_0 := A_0 \otimes_A M_{[g]}$ soit un A_0 -module plat, que ψ soit l'application nulle, et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(a) I est un idéal nilpotent.

(b) A' est noethérien, g' est de type fini, et M' est un B' -module de type fini.

Alors $M'_{\mathfrak{p}'}$ est un A' -module plat.

Démonstration. Comme M_0 est un A_0 -module plat, $A'_0 \otimes_{A'} M' \simeq A'_0 \otimes_A M \simeq A'_0 \otimes_{A_0} M_0$ est un A'_0 -module plat (remarque 3.74(vi)). D'autre part, la proposition 3.18(i) fournit des isomorphismes $B'_{\mathfrak{p}'}$ -linéaires : $A'_0 \otimes_{A'} M'_{\mathfrak{p}'} \xrightarrow{\sim} B'_{\mathfrak{p}'} \otimes_{B'} (A'_0 \otimes_{A'} M')$; avec l'exercice 3.76(i), on déduit alors que $A'_0 \otimes_{A'} M'_{\mathfrak{p}'}$ est un A'_0 -module plat.

Affirmation 10.55. $\mathrm{Tor}_1^{A'}(M'_{\mathfrak{p}'}, A'_0) = 0$.

Preuve : D'après l'exercice 10.37(ii), on a un isomorphisme $B'_{\mathfrak{p}'}$ -linéaire

$$\omega : \mathrm{Tor}_1^{A'}(M'_{\mathfrak{p}'}, A'_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)_{\mathfrak{p}'}$$

et par inspection directe on voit que $\omega \circ \psi : \mathrm{Tor}_1^A(M, A_0) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)_{\mathfrak{p}'}$ est la composition de $\psi' := \mathrm{Tor}_1^f(f \otimes_A M, f_0) : \mathrm{Tor}_1^A(M, A_0) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)$ avec la localisation $\omega' : \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)_{\mathfrak{p}'}$. Or, d'après la remarque 10.36(iii), on a un diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^f(f_0, f \otimes_A M)} & \mathrm{Tor}_1^{A'}(A'_0, M')_{[f]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_1^A(M, A_0) & \xrightarrow{\psi'} & \mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)_{[f]} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes, et le lemme 10.38, appliqué avec $C := A_0$ et $N := A_0$, montre que l'image de $\mathrm{Tor}_1^f(f_0, f \otimes_A M)$ engendre le A' -module $\mathrm{Tor}_1^{A'}(A'_0, M')$. Par suite, l'image de ψ' engendre le A' -module $\mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)$, et évidemment l'image de ω' engendre le $B'_{\mathfrak{p}'}$ -module $\mathrm{Tor}_1^{A'}(M', A'_0)_{\mathfrak{p}'}$; de l'autre côté, $\omega' \circ \psi' = 0$, car ψ est l'application nulle. L'assertion s'ensuit aussitôt. $\diamond$

Si I est nilpotent, il en est de même pour IA' , et le corollaire suit du théorème 10.48, appliqué à l'anneau A' , son idéal IA' , et le A' -module $(M'_{\mathfrak{p}'})_{[g]}$, compte tenu de l'observation 10.55. Sous la condition (b), on a $IB'_{\mathfrak{p}'} \subset \mathfrak{p}'B'_{\mathfrak{p}'} = \mathcal{J}(B'_{\mathfrak{p}'})$, et $M'_{\mathfrak{p}'}$ est un $B'_{\mathfrak{p}'}$ -module de type fini ; en outre, B' est noethérien, car g' est de type fini (théorème 6.65). On conclut alors encore avec l'observation 10.55, au vu de la remarque 10.51(i), appliquée avec h égal à la composition de g' et de la localisation $B' \rightarrow B'_{\mathfrak{p}'}$, et avec $N := M'_{\mathfrak{p}'}$. $\square$

Proposition 10.56. Soient A un anneau noethérien, $\phi : A \rightarrow B$ une A -algèbre de type fini, et M un B -module de type fini. Alors la partie

$$U := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B \mid (M_{\mathfrak{q}})_{[\phi]} \text{ est un } A\text{-module plat}\}$$

est ouverte dans $\mathrm{Spec} B$.

Démonstration. Comme B est noethérien (théorème 6.65), $\mathrm{Spec} B$ est un espace spectral noethérien (remarque 6.106(i)) ; d'après le corollaire 6.114(ii), il suffit alors de montrer que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$ avec $V(\mathfrak{q}) \cap U \neq \emptyset$, il existe $f \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que $V(\mathfrak{q}) \cap D(f) \subset U$. Pour cela, remarquons d'abord que si $\mathfrak{q}' \in V(\mathfrak{q}) \cap U$, on a $M_{\mathfrak{q}} = (M_{\mathfrak{q}'})_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}} \otimes_B M_{\mathfrak{q}'}$; comme $B_{\mathfrak{q}}$ est une B -algèbre plate (remarque 3.74(i)), il s'ensuit que $(M_{\mathfrak{q}})_{[\phi]}$ est un A -module plat (exercice 3.76(i)). Donc $V(\mathfrak{q}) \cap U \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathfrak{q} \in U$. Rappelons aussi que $\mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ est naturellement un B -module, pour tout A -module N , d'après la remarque 10.36(ii).

Affirmation 10.57. Soient $\mathfrak{q} \in U$, et $\mathfrak{p} := \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec} A$. Alors il existe $f \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que $(M/\mathfrak{p}M)_f$ soit un $A/\mathfrak{p}$ -module plat, et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})_f = 0$.

Preuve : D'après le théorème 6.102, il existe $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $(M/\mathfrak{p}M)_g$ soit un $A/\mathfrak{p}$ -module plat. D'autre part, comme $M_{\mathfrak{q}} \simeq B_{\mathfrak{q}} \otimes_B M$ est un A -module plat, on a :

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}} \otimes_B \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$$

(exercice 10.37(ii)). Mais $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})$ est un B -module de type fini (exercice 10.37(i)), donc son support est une partie fermée de $\mathrm{Spec} B$ qui ne contient pas $\mathfrak{q}$ (remarque 3.58(ii)); par suite, il existe $h \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})_h = 0$. Noter que $(B/\mathfrak{p}B)_h$ est un $B/\mathfrak{p}B$ -module plat (remarque 3.74(i)), et avec $f := \phi(g) \cdot h$, on a un isomorphisme $B/\mathfrak{p}B$ -linéaire : $(M/\mathfrak{p}M)_f \xrightarrow{\sim} (B/\mathfrak{p}B)_h \otimes_{B/\mathfrak{p}B} (M/\mathfrak{p}M)_g$, donc $(M/\mathfrak{p}M)_f$ est encore un $A/\mathfrak{p}$ -module plat (exercice 3.76(i)), d'où l'assertion. $\diamond$

Soient alors $\mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ et f comme dans l'observation 10.57, et noter que $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{q}) \cap D(f)$; pour tout $\mathfrak{q}' \in V(\mathfrak{q}) \cap D(f)$ on a évidemment $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} \subset \mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}'} = \mathcal{J}(B_{\mathfrak{q}'}')$, et il existe des isomorphismes naturels de $B_{\mathfrak{q}'}$ -modules :

$$M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'} \xrightarrow{\sim} (M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{q}'} \xrightarrow{\sim} ((M/\mathfrak{p}M)_f)_{\mathfrak{q}'} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}'} \otimes_B (M/\mathfrak{p}M)_f.$$

Par suite, $(M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'})_{[\phi]}$ est un A -module plat (exercice 3.76(i)). De même, avec l'exercice 10.37(ii), il vient : $\mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p}) = B_{\mathfrak{q}'} \otimes_B \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}) = B_{\mathfrak{q}'} \otimes_{B_f} \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})_f = 0$. La remarque 10.51(i) nous dit alors que $M_{\mathfrak{q}'}$ est un A -module plat, *i.e.* $\mathfrak{q}' \in U$, comme souhaité. $\square$

Remarque 10.58. Voir le problème 10.61 pour une généralisation de la proposition 10.56 et de l'exercice 10.53 sans hypothèses noethériennes.

10.4.2. Lieu de platitude et limites directes d'algèbres. Soient A_0 un anneau, B_0 une A_0 -algèbre de présentation finie, M_0 un B_0 -module de présentation finie, $A_\bullet := (A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant de A_0 -algèbres et $(j_{A,\lambda} : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel. On pose $B := B_0 \otimes_{A_0} A$, $M := B \otimes_{B_0} M_0$, et $B_\lambda := B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $M_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} M_0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Rappelons que B représente la limite directe du système induit de B_0 -algèbres $(B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, et plus précisément, le co-cône induit $(j_{B,\lambda} := B_0 \otimes_{A_0} j_{A,\lambda} : B_\lambda \rightarrow B \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel (exercice 3.63(iv) et proposition 2.49(ii)). Soit aussi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} B$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$ posons $\mathfrak{p}_\lambda := j_{B,\lambda}^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec} B_\lambda$.

Théorème 10.59. *Dans la situation du § 10.4.2, on a :*

- (i) $M_{\mathfrak{p}}$ est un A -module plat $\Leftrightarrow (M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un A_λ -module plat pour un $\lambda \in \Lambda$.
- (ii) M est un A -module plat $\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que M_λ est un A_λ -module plat.

Démonstration. Si $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un A_λ -module plat, $A \otimes_{A_\lambda} (M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un A -module plat (remarque 3.74(vi)), et comme $B_{\mathfrak{p}}$ est un B -module plat, $B_{\mathfrak{p}} \otimes_B M_{\mathfrak{p}_\lambda} \simeq (M_{\mathfrak{p}_\lambda})_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}}$ est alors un A -module plat (exercice 3.76(i)). De même, si M_λ est un A_λ -module plat, M est un A -module plat.

• Réciproquement, soit $M_{\mathfrak{p}}$ (resp. M) un A -module plat. Noter que A_0 est la colimite du système filtrant de ses $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de type fini; d'après le problème 3.69(i), il existe alors une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini $A'_0 \subset A_0$, une A'_0 -algèbre B'_0 de type fini, et un B'_0 -module de type fini M'_0 avec des isomorphismes de A_0 -algèbres $B_0 \xrightarrow{\sim} B'_0 \otimes_{A'_0} A_0$ et de B_0 -modules $B_0 \otimes_{B'_0} M'_0 \xrightarrow{\sim} M_0$. Noter que A'_0 est un anneau noethérien (théorème 6.65). Par restriction des scalaires, $A_\bullet$ est un système filtrant de A'_0 -algèbres, et on déduit des isomorphismes naturels de B_0 -algèbres : $B_\lambda \xrightarrow{\sim} B'_0 \otimes_{A'_0} A_\lambda$ et de B_λ -modules : $M_\lambda \xrightarrow{\sim} B_\lambda \otimes_{B'_0} M'_0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (exercice 3.63(ii)). Ainsi, quitte à remplacer A_0, B_0 et M_0 par A'_0, B'_0 et M'_0 , on peut supposer que A_0 soit noethérien.

• Ensuite, soit Λ' l'ensemble des couples (λ, C) tels que $\lambda \in \Lambda$ et C est une A_0 -sous-algèbre de type fini de A_λ ; munissons Λ' de l'ordre partiel tel que $(\lambda, C) \leq (\mu, D) \Leftrightarrow \lambda \leq \mu$ et l'homomorphisme de transition $f_{\lambda\mu} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ envoie C dans D . On voit aisément que Λ' est filtrant, et on considère le système de A_0 -algèbres $A'_\bullet := (A'_{(\lambda, C)} \mid (\lambda, C) \in \Lambda')$ avec $A'_{(\lambda, C)} := C$ pour tout $(\lambda, C) \in \Lambda'$, et dont l'homomorphisme de transition $A'_{(\lambda, C)} \rightarrow A'_{(\mu, D)}$ est la restriction $C \rightarrow D$ de $f_{\lambda\mu}$, pour tous $(\lambda, C), (\mu, D) \in \Lambda'$ avec $(\lambda, C) \leq (\mu, D)$. Rappelons que la colimite de $A_\bullet$ est représentée par l'ensemble des classes d'équivalence $[a, \lambda]$ des couples (a, λ) avec $\lambda \in \Lambda$ et $a \in A_\lambda$ (exercice 2.31(iv)), et de même pour la

colimite A' de $A'_\bullet$. Soit $S := \bigcup_{(\lambda, C) \in \Lambda'} A'_{(\lambda, C)} \times \{(\lambda, C)\}$, de sorte que $A' = S/\sim$; on considère l'application

$$\phi : S \rightarrow A \quad (a, (\lambda, C)) \mapsto [a, \lambda].$$

On voit aussitôt que $(a, (\lambda, C)) \sim (b, (\mu, D)) \Leftrightarrow \phi(a, (\lambda, C)) = \phi(b, (\mu, D))$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc ϕ se factorise à travers une bijection bien définie $\bar{\phi} : A' \xrightarrow{\sim} A$, et une inspection directe montre que $\bar{\phi}$ est un isomorphisme de A_0 -algèbres. Ainsi, $B' := B_0 \otimes_{A_0} A'$ représente la colimite du système induit de B_0 -algèbres ($B'_{(\lambda, C)} := B_0 \otimes_{A_0} A'_{(\lambda, C)} \mid (\lambda, C) \in \Lambda'$), et $\bar{\phi}$ induit un isomorphisme $\psi : B' \xrightarrow{\sim} B$ de B -algèbres. Soit $(j'_{(\lambda, C)} : B'_{(\lambda, C)} \rightarrow B' \mid (\lambda, C) \in \Lambda')$ le co-cône universel; on pose $\mathfrak{p}' := \psi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } B'$, $\mathfrak{p}'_{(\lambda, C)} := j'^{-1}_{(\lambda, C)}(\mathfrak{p}') \in \text{Spec } B'_{(\lambda, C)}$ et $M'_{(\lambda, C)} := B'_{(\lambda, C)} \otimes_{B_0} M_0$ pour tout $(\lambda, C) \in \Lambda'$, et $M' := B' \otimes_{B_0} M$. Or, si $M_{\mathfrak{p}}$ (resp. M) est un A -module plat, $M'_{\mathfrak{p}'}$ (resp. M') est alors un A' -module plat, et si $(M'_{(\lambda, C)})_{\mathfrak{p}'_{(\lambda, C)}}$ est un $A'_{(\lambda, C)}$ -module plat pour quelque $(\lambda, C) \in \Lambda'$, il s'ensuit que

$$M'_\lambda := A_\lambda \otimes_{A'_{(\lambda, C)}} (M'_{(\lambda, C)})_{\mathfrak{p}'_{(\lambda, C)}} \simeq B_\lambda \otimes_{B'_{(\lambda, C)}} (M'_{(\lambda, C)})_{\mathfrak{p}'_{(\lambda, C)}}$$

est à la fois un A_λ -module plat (remarque 3.74(vi)) et un B_λ -module, donc le A_λ -module $(B_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} \otimes_{B_\lambda} M'_\lambda \simeq (M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est plat (exercice 3.76(i)). De même, si $M_{(\lambda, C)}$ est un $A_{(\lambda, C)}$ -module plat, alors M_λ est un A_λ -module plat. Ainsi, quitte à remplacer $A_\bullet$ par $A'_\bullet$, on peut supposer que A_λ soit une A_0 -algèbre de type fini pour tout $\lambda \in \Lambda$. En particulier, chaque A_λ est un anneau noethérien (théorème 6.65).

Affirmation 10.60. L'assertion (i) du théorème entraîne l'assertion (ii).

Preuve : Par ce qui précède, on peut supposer que chaque A_λ soit noethérien. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la partie $U_\lambda := \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B_\lambda \mid (M_\lambda)_{\mathfrak{q}} \text{ est un } A_\lambda\text{-module plat}\}$ est alors ouverte dans $\text{Spec } B_\lambda$, d'après la proposition 10.56, car B_λ est une A_λ -algèbre de type fini. Ainsi, $Z_\lambda := \text{Spec } B_\lambda \setminus U_\lambda$ est fermé dans $\text{Spec } B_\lambda$, pour tout tel λ . Soient $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$, et $\mathfrak{q}_\mu \in \text{Spec } B_\mu$ dont l'image $\mathfrak{q}_\lambda \in \text{Spec } B_\lambda$ est dans U_λ ; alors $M''_\mu := A_\mu \otimes_{A_\lambda} (M_\lambda)_{\mathfrak{q}_\lambda}$ est un A_μ -module plat (remarque 3.74(vi)), et de même pour le A_μ -module $(B_\mu)_{\mathfrak{q}_\mu} \otimes_{B_\mu} M''_\mu \simeq (M_\mu)_{\mathfrak{q}_\mu}$, car $(B_\mu)_{\mathfrak{q}_\mu}$ est une B_μ -algèbre plate (exercice 3.76(i)), i.e. $\mathfrak{q}_\mu \in U_\mu$. Cela montre que l'application induite $\phi_{\lambda\mu} : \text{Spec } B_\mu \rightarrow \text{Spec } B_\lambda$ envoie Z_μ dans Z_λ . Munissons Z_λ de la topologie induite par l'inclusion $i_\lambda : Z_\lambda \rightarrow \text{Spec } B_\lambda$; avec l'exemple 4.58 on voit aussitôt que Z_λ est un espace spectral, et que i_λ est une application continue et compacte. Il en est de même pour $\phi_{\lambda\mu}$, d'après la remarque 4.59(iii), et alors on déduit aisément que la restriction $Z_\mu \rightarrow Z_\lambda$ de $\phi_{\lambda\mu}$ est de même continue et compacte. Or, si M est un A -module plat, alors (i) entraîne que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que l'image $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Spec } B_\lambda$ de $\mathfrak{p}$ soit dans U_λ . Cela revient à dire que

$$(*) \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\text{Spec } j_{B, \lambda})^{-1} Z_\lambda = \emptyset.$$

D'autre part, le cône $(\text{Spec } j_{B, \lambda} : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^{\text{op}})$ est universel dans la catégorie des espaces topologiques (problème 2.51(ii)); par inspection de la construction des limites d'espaces topologiques, on déduit aisément de (*) que la limite inverse du système $(Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est l'espace trivial $\emptyset$. Par suite, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $Z_\lambda = \emptyset$ (remarque 4.59(iv)); la proposition 3.77 montre alors que M_λ est un A_λ -module plat. $\diamond$

(i) : Soient $g : A_0 \rightarrow B$ et $g_\lambda : A_0 \rightarrow (B_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ les homomorphismes structurels des A_0 -algèbres B et $(B_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, et posons $\mathfrak{q} := g^{-1}(\mathfrak{p})$; d'un côté, si $M_{\mathfrak{p}}$ est un A -module plat, alors $M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{q}} \otimes_A M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{q}}$ -module plat (remarque 3.74(i,vi)); de l'autre côté, g_λ se factorise à travers la localisation $A_0 \rightarrow A_{0, \mathfrak{q}}$, et on a une identification naturelle de $(B_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ -modules : $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} \xrightarrow{\sim} (B_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} \otimes_{B_{0, \mathfrak{q}}} M_{0, \mathfrak{q}}$. En outre, $B_{0, \mathfrak{q}}$ est une $A_{0, \mathfrak{q}}$ -algèbre de type fini, $M_{0, \mathfrak{q}}$ est un $B_{0, \mathfrak{q}}$ -module de type fini, et si $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un $A_{\lambda, \mathfrak{q}}$ -module plat, alors il est aussi un A_λ -module plat (exercice 3.76(i)). Ainsi, on peut remplacer A_0 par $A_{0, \mathfrak{q}}$, B_0 par $B_{0, \mathfrak{q}}$, M_0 par $M_{0, \mathfrak{q}}$, et supposer que $(A_0, \mathfrak{m}_0)$ soit un anneau local noethérien, et $g^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}_0$.

Avec cette notation, $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M_0, k(\mathfrak{m}_0))$ est un B_0 -module de type fini (exercice 10.37(i)) ; soit alors $t_1, \dots, t_m$ un système fini de générateurs de ce module. D'autre part, comme $M_{\mathfrak{p}}$ est un A -module plat, on a $0 = \mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{p}}, A/\mathfrak{m}_0 A) = \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{m}_0 A)_{\mathfrak{p}}$ (proposition 7.70 et exercice 10.37(ii)). L'homomorphisme structurel $h : A_0 \rightarrow A$ de la A_0 -algèbre A , et les applications $h \otimes_{A_0} M_0 : M_0 \rightarrow M$, $h \otimes_{A_0} k(\mathfrak{m}_0) : k(\mathfrak{m}_0) \rightarrow A/\mathfrak{m}_0 A$ induisent une application A_0 -linéaire

$$\psi := \mathrm{Tor}_1^h(h \otimes_{A_0} M_0, h \otimes_{A_0} k(\mathfrak{m}_0)) : \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M_0, k(\mathfrak{m}_0)) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{m}_0 A)$$

et il existe alors $b \in B \setminus \mathfrak{p}$ tel que $b \cdot \psi(t_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$ (remarque 3.42(i)). En dernier lieu, noter que $(A, M, A/\mathfrak{m}_0 A)$ est la limite directe du système filtrant

$$((A_{\lambda}, M_{\lambda}, A_{\lambda}/\mathfrak{m}_0 A_{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$$

d'objets de $\mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathrm{AlgMod}$; d'après la proposition 10.44, on déduit un isomorphisme naturel de A_0 -modules

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{m}_0 A) \xrightarrow{\sim} \lim_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Tor}_1^{A_{\lambda}}(M_{\lambda}, A_{\lambda}/\mathfrak{m}_0 A_{\lambda}).$$

Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $b = j_{B, \lambda}(b_{\lambda})$ pour un élément $b_{\lambda} \in B_{\lambda} \setminus \mathfrak{p}_{\lambda}$, et pour tout $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, soit $b_{\mu} \in B_{\mu} \setminus \mathfrak{p}_{\mu}$ l'image de b_{λ} ; noter que pour tout tel μ , l'homomorphisme de transition $\mathrm{Tor}_1^{A_{\lambda}}(M_{\lambda}, A_{\lambda}/\mathfrak{m}_0 A_{\lambda}) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}(M_{\mu}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})$ est B_{λ} -linéaire. Notons aussi $\psi_{\mu} := \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M_0, k(\mathfrak{m}_0)) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}(M_{\mu}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})$ l'application A_0 -linéaire naturelle, pour tout $\mu \in \Lambda$; on conclut qu'il existe $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, tel que $b_{\mu} \cdot \psi_{\mu}(t_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Donc, la composition de ψ_{μ} avec la localisation $\omega : \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}(M_{\mu}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu}) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}(M_{\mu}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ est l'application nulle. Soit $\omega' : \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}(M_{\mu}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}((M_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})$ l'isomorphisme de $(B_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ -modules fourni par l'exercice 10.37 ; par inspection directe on voit que $\omega' \circ \omega \circ \psi_{\mu}$ coïncide avec l'application A_0 -linéaire

$$(*) \quad \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M_0, k(\mathfrak{m}_0)) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_{\mu}}((M_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu})$$

induite par le morphisme évident de $\mathrm{AlgMod} \times_{\mathbb{Z}\text{-Alg}} \mathrm{AlgMod}$:

$$(A_0, M_0, A_0/\mathfrak{m}_0) \rightarrow (A_{\mu}, (M_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}, A_{\mu}/\mathfrak{m}_0 A_{\mu}).$$

Par suite, $(*)$ est l'application nulle ; en outre, le $k(\mathfrak{m}_0)$ -module $k(\mathfrak{m}_0) \otimes_{A_0} M_0$ est trivialement plat, car $k(\mathfrak{m}_0)$ est un corps. Le corollaire 10.54 entraîne alors que $(M_{\mu})_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ est un A_{μ} -module plat, comme souhaité. $\square$

Problème 10.61. Soient A un anneau, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre de présentation finie, M et M' deux B -modules de présentation finie, et $\phi := \mathrm{Spec} f$. Montrer que :

- (i) $U := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B \mid (M_{\mathfrak{q}})_{[\mathfrak{f}]}\text{ est un } A\text{-module plat}\}$ est ouvert dans $\mathrm{Spec} B$.
- (ii) Avec la notation de (i), si $\mathrm{Supp} M = \mathrm{Spec} B$, alors la restriction $U \rightarrow \mathrm{Spec} A$ de $\phi : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$ est une application continue ouverte.
- (iii) Supposons que $M_{[\mathfrak{f}]}$ soit un A -module plat ; soient $g : M' \rightarrow M$ une application B -linéaire, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$, et $\mathfrak{p} := \phi(\mathfrak{q})$. Notons $g_{\mathfrak{q}} : M'_{\mathfrak{q}} \rightarrow M_{\mathfrak{q}}$ la localisation de g , et $g_{\mathfrak{q}, (\mathfrak{p})} := k(\mathfrak{p}) \otimes_A g_{\mathfrak{q}} : M'_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) \rightarrow M_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ (voir le §3.2.7). On pose

$$U_g := \{\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec} B \mid g_{\mathfrak{r}, (\phi(\mathfrak{r}))} : M'_{\mathfrak{r}}(\phi(\mathfrak{r})) \rightarrow M_{\mathfrak{r}}(\phi(\mathfrak{r})) \text{ est injective}\}.$$

- (a) Montrer que U_g est une partie ouverte de $\mathrm{Spec} B$.
- (b) Montrer que $\mathfrak{q} \in U_g \Leftrightarrow g_{\mathfrak{q}}$ est injective et $\mathrm{Coker}(g_{\mathfrak{q}})$ est un A -module plat.

10.5. Le théorème de Gruson et Raynaud. Revenons à la situation du §6.4.2 : on a associé au diagramme cartésien d'anneaux $(\dagger)$ la catégorie $\mathcal{D}$ des données (M_1, M_2, ξ) telles que M_i est un A_i -module pour $i = 1, 2$, et $\xi : A_3 \otimes_{A_1} M_1 \xrightarrow{\sim} A_3 \otimes_{A_2} M_2$ est un isomorphisme A_3 -linéaire; on a ensuite défini un foncteur $F : A_0 - \text{Mod} \rightarrow \mathcal{D}$ et son adjoint à droite, le foncteur de pincement $G : \mathcal{D} \rightarrow A_0 - \text{Mod}$, et on a vu, sous certaines conditions (a) ou (b), que F se restreint en une équivalence de catégories $F_{\text{plat}} : A_0 - \text{Mod}_{\text{plat}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{plat}}$ (resp. $F_{\text{ptf}} : A_0 - \text{Mod}_{\text{ptf}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ptf}}$) entre la sous-catégorie pleine des A_0 -modules plats (resp. projectifs de type fini) et celle des données (M_1, M_2, ξ) telles que M_i est un A_i -module plat (resp. projectif de type fini) pour $i = 1, 2$ (proposition 6.98). On va maintenant montrer que les conditions (a) et (b) peuvent être simplement omises :

Proposition 10.62. *Avec la notation ci-dessus, les foncteurs F_{plat} et F_{ptf} sont des équivalences de catégories, et la restriction $G_{\text{plat}} : \mathcal{D}_{\text{plat}} \rightarrow A_0 - \text{Mod}_{\text{plat}}$ (resp. $G_{\text{ptf}} : \mathcal{D}_{\text{ptf}} \rightarrow A_0 - \text{Mod}_{\text{ptf}}$) de G est une quasi-inverse de F_{plat} (resp. de F_{ptf}).*

Démonstration. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 6.98, on est ramené à vérifier que si (M_1, M_2, ξ) est un objet de $\mathcal{D}_{\text{plat}}$ (resp. de $\mathcal{D}_{\text{ptf}}$), alors $M := G(M_1, M_2, \xi)$ est un A_0 -module plat (resp. projectif de type fini). Soient $I_i := \text{Ker } f_i$ et $J_i := \text{Ker } g_i$ pour $i = 1, 2$. Remarquons d'abord :

Affirmation 10.63. Tout A_0 -module N admet des sous-modules $N_0 \subset N_1 \subset N$ tels que N_0 et N/N_1 sont des A_1 -modules, et N_1/N_0 est un A_2 -module.

Preuve : Soit $\alpha : A_0 \rightarrow A_1 \oplus A_2$ l'application telle que $\alpha(a) := (f_1(a), f_2(a))$ pour tout $a \in A_0$; on pose $N_0 := \text{Ker}(\alpha \otimes_{A_0} N) \subset A_0 \otimes_{A_0} N \xrightarrow{\sim} N$. Avec la suite exacte courte Σ du §6.4.2, l'exemple 7.69 et le théorème 8.126, on trouve une surjection A_0 -linéaire : $\text{Tor}_1^{A_0}(A_3, N) \rightarrow N_0$. Or, $\text{Tor}_1^{A_0}(A_3, N)$ est un A_3 -module (remarque 10.36(ii)), par suite $\text{Tor}_1^{A_0}(A_3, N)_{[g_2]}$ est un A_2 -module tel que $J_2 \cdot \text{Tor}_1^{A_0}(A_3, N)_{[g_2]} = 0$. Mais noter que f_2 induit par restriction une bijection $I_1 \xrightarrow{\sim} J_2$, donc $I_1 \cdot \text{Tor}_1^{A_0}(A_3, N)_{[g_2 \circ f_2]} = 0$, d'où $I_1 N_0 = 0$; comme $f_1 : A_0 \rightarrow A_1$ est surjectif, cela montre que N_0 est un A_1 -module. Soit ensuite $\pi : N \rightarrow N/N_0$ la projection, et noter le diagramme cartésien de A_0 -modules :

$$\begin{array}{ccc} N/N_0 & \xrightarrow{p_2} & A_2 \otimes_{A_0} N \\ p_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \otimes_{A_0} N \\ A_1 \otimes_{A_0} N & \xrightarrow{g_1 \otimes_{A_0} N} & A_3 \otimes_{A_0} N. \end{array}$$

L'application p_2 se restreint en une bijection de $\overline{N}_1 := \text{Ker } p_1$ sur le A_2 -module $\text{Ker}(g_2 \otimes_{A_0} N)$; posons alors $N_1 := \pi^{-1}(\overline{N}_1) \subset N$; ainsi N_1 est un A_0 -sous-module, et $N_1/N_0 \simeq \overline{N}_1$ est un A_2 -module. En dernier lieu, la surjection p_1 induit un isomorphisme $N/N_1 \xrightarrow{\sim} (N/N_0)/\overline{N}_1 \xrightarrow{\sim} A_1 \otimes_{A_0} N$, donc N/N_1 est un A_1 -module. $\diamond$

• On a déjà remarqué que f_2 induit par restriction une bijection $I_1 \xrightarrow{\sim} J_2$; considérons alors le diagramme commutatif de A_0 -modules :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} M \otimes_{A_0} I_1 & \xrightarrow{h} & M \\ k \downarrow & & \downarrow k' \\ (A_2 \otimes_{A_0} M) \otimes_{A_2} J_2 & \xrightarrow{h'} & A_2 \otimes_{A_0} M \end{array}$$

où h (resp. h' , resp. k , resp. k') est l'application A_0 -linéaire telle que $h(m \otimes x) := xm$ (resp. $h'((a \otimes m) \otimes y) := ay \otimes m$, resp. $k(m \otimes x) := (1 \otimes m) \otimes f_2(x)$, resp. $k'(m) := 1 \otimes m$) pour tous $x \in I_1, y \in J_2, a \in A_2$ et $m \in M$. D'après le lemme 6.97(ii), on a un isomorphisme A_i -linéaire $A_i \otimes_{A_0} M \xrightarrow{\sim} M_i$ pour $i = 1, 2$, donc $A_i \otimes_{A_0} M$ est un A_i -module plat. Par suite, h' est injective (proposition 3.78); mais, par construction k est un isomorphisme, donc h est injective, d'où $\text{Tor}_1^{A_0}(M, A_1) = 0$, d'après l'observation 10.49(ii). Avec le corollaire

10.45, il vient $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_1) = 0$ pour tout A_1 -module N_1 . D'autre part, la suite exacte Σ du §6.4.2 et l'exemple 7.69 nous donnent la suite exacte :

$$0 = \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_0) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_1) \oplus \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_2) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_3).$$

Par ce qui précède on a $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_3) = 0$, donc $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, A_2) = 0$, et à nouveau on conclut que $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_2) = 0$ pour tout A_2 -module N_2 . Soit maintenant N un A_0 -module quelconque, et $N_0 \subset N_1 \subset N$ des sous-modules comme dans l'observation 10.63 ; avec l'exemple 7.69, les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_1/N_0 \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow N_1 \rightarrow N \rightarrow N/N_1 \rightarrow 0$$

induisent des suites exactes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_0) &\rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_1) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_1/N_0) \\ \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_1) &\rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N/N_1). \end{aligned}$$

Mais N_0 est un A_1 -module, et N_1/N_0 est un A_2 -module, donc le premier et le troisième terme de la première suite sont nuls, et ainsi $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N_1) = 0$. De même, N/N_1 est un A_1 -module, donc aussi le premier et le troisième terme de la deuxième suite sont nuls, et finalement $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(M, N) = 0$. Comme N est arbitraire, M est alors un A_0 -module plat (proposition 7.70). Cela achève de montrer que F_{plat} et G_{plat} sont des équivalences.

Affirmation 10.64. (i) Pour tout A_0 -module M on a les équivalences :

M est de type fini $\Leftrightarrow$ le A_i -module $M_i := A_i \otimes_{A_0} M$ est de type fini pour $i = 1, 2$.

(ii) Si en outre $\mathrm{Tor}_1^{A_2}(M_2, A_3) = 0$, on a les équivalences :

M est de présentation finie $\Leftrightarrow M_i$ est de présentation finie pour $i = 1, 2$.

Preuve : (i) : Evidemment, si M est de type fini, M_i est un A_i -module de type fini pour $i = 1, 2$. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, on trouve un A_0 -sous-module de type fini $M' \subset M$ tel que l'inclusion $j : M' \rightarrow M$ induit des surjections $A_i \otimes_{A_0} j : A_i \otimes_{A_0} M' \rightarrow M_i$ pour $i = 1, 2$ (les détails sont laissées au lecteur) ; avec $\overline{M} := M/M'$, il vient $A_i \otimes_{A_0} \overline{M} = 0$ pour $i = 1, 2$ (proposition 3.11). Mais g_2 est surjectif, donc de même pour f_1 ; ainsi $A_1 \simeq A_0/I_1$, d'où $A_1 \otimes_{A_0} \overline{M} \simeq \overline{M}/I_1 \overline{M}_1$, et alors $\overline{M} = I_1 \overline{M}_1$. Or, si l'on remplace M par $\overline{M}$ dans (*), on obtient un diagramme commutatif avec un isomorphisme k de $\overline{M} \otimes_{A_0} I_1$ sur $(A_2 \otimes_{A_0} \overline{M}) \otimes_{A_2} J_2 = 0$; mais $I_1 \overline{M}$ est l'image de h , donc $I_1 \overline{M} = 0$, d'où $\overline{M} = 0$, i.e. $M = M'$.

(ii) : Evidemment, si M est de présentation finie, M_i est un A_i -module de présentation finie pour $i = 1, 2$. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée ; d'après (i), le A_0 -module M est alors de type fini, et on choisit une surjection A_0 -linéaire $\phi : L \rightarrow M$ avec un A_0 -module libre L de rang fini. Pour $i = 1, 2$ on déduit une suite exacte $A_i \otimes_{A_0} \mathrm{Ker} \phi \rightarrow L_i := A_i \otimes_{A_0} L \rightarrow M_i$, et d'après l'exercice 2.110(iv), l'image R_i de $A_i \otimes_{A_0} \mathrm{Ker} \phi$ dans L_i est un A_i -module de type fini. On trouve, par suite, un A_0 -sous-module $R \subset \mathrm{Ker} \phi$ de type fini, tel que R_i soit l'image de l'application $A_i \otimes_{A_0} R \rightarrow L_i$ induite par l'inclusion $R \rightarrow L$, pour $i = 1, 2$. Soit aussi $\phi' : M' := L/R \rightarrow M$ la surjection induite par ϕ ; par construction, $A_i \otimes_{A_0} \phi' : A_i \otimes_{A_0} M' \rightarrow M_i$ est un isomorphisme pour $i = 1, 2$. Comme $A_1 \simeq A_0/I_1$, il vient $M'/I_1 M' \xrightarrow{\sim} M/I_1 M$; d'autre part, avec la bijection $I_1 \xrightarrow{\sim} J_2$ induite par f_2 , on déduit des isomorphismes A_0 -linéaires :

$$I_1 \otimes_{A_0} M' \xrightarrow{\sim} J_2 \otimes_{A_0} M' \xrightarrow{\sim} J_2 \otimes_{A_2} (A_2 \otimes_{A_0} M') \xrightarrow{\sim} J_2 \otimes_{A_2} M_2 \xrightarrow{\sim} J_2 \otimes_{A_0} M \xrightarrow{\sim} I_1 \otimes_{A_0} M$$

dont la composition est l'isomorphisme $\psi : I_1 \otimes_{A_0} M' \xrightarrow{\sim} I_1 \otimes_{A_0} M$ tel que $x \otimes m' \mapsto x \otimes \phi'(m')$ pour tout $x \in I_1$ et tout $m' \in M'$. Avec cette notation, on a le diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} I_1 \otimes_{A_0} M' & \xrightarrow{\psi} & I_1 \otimes_{A_0} M & \xrightarrow{k} & J_2 \otimes_{A_0} M_2 \\ h' \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_2 \\ I_1 M' & \xrightarrow{\psi'} & I_1 M & \xrightarrow{k'} & J_2 M_2 \end{array}$$

où ψ' est la restriction de ϕ' , et h, h', h_2 et k sont les applications telles que $h(x \otimes m) := xm$, $h'(x \otimes m') := xm'$, $h_2(y \otimes (a \otimes m)) := ay \otimes m$ et $k(x \otimes m) := f_2(x) \otimes (1 \otimes m)$ pour tous $x \in I_1$, $y \in J_2$, $a \in A_2$, $m \in M$ et $m' \in M'$. Aussi, k' est la restriction de l'application $M \rightarrow M_2 : x \mapsto 1 \otimes x$. On a déjà observé que ψ et k sont des isomorphismes ; il en est de même pour h_2 , d'après l'observation 10.49(ii), car par hypothèse $\mathrm{Tor}_1^{A_2}(M_2, A_3) = 0$. Il est aussi clair que h', ψ', h et k' sont des surjections ; on déduit aussitôt que toutes ces applications sont bijectives. Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_1 M' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'/I_1 M' \longrightarrow 0 \\ & & \psi' \downarrow & & \downarrow \phi' & & \downarrow A_1 \otimes_{A_0} \phi' \\ 0 & \longrightarrow & I_1 M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/I_1 M \longrightarrow 0. \end{array}$$

On vient de voir que la première et la troisième flèche verticale sont bijectives ; d'après l'exercice 2.104, il s'ensuit que ϕ' est bijective, d'où l'assertion. $\diamond$

L'assertion concernant F_{ptf} et G_{ptf} suit aussitôt de celle concernant F_{plat} et G_{plat} , compte tenu de l'observation 10.64(ii) et du corollaire 4.100(ii). $\square$

Remarque 10.65. La partie de la proposition 10.62 concernant les foncteurs F_{ptf} et G_{ptf} se trouve déjà dans [56, Th.2.1, 2.2, 2.3], avec une preuve différente. Aussi, la partie concernant F_{plat} et G_{plat} est due à Ferrand ([22, Lemme]) dans le cas où g_1 est injectif (et g_2 surjectif). D'ailleurs, ce cas seulement interviendra dans la suite.

10.5.1. Soient maintenant $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, M un B -module de type fini ; considérons les schémas $(X, \mathcal{O}_X) := \mathrm{Spec} A$, $(Y, \mathcal{O}_Y) := \mathrm{Spec} B$, le morphisme de schémas $\phi := \mathrm{Spec} f : Y \rightarrow X$, ainsi que le $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent $\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_B M$, associé à M (voir la définition 5.57(i)). Soit en outre U une partie ouverte *compacte* de X telle que :

- $M_{\mathfrak{q}}$ est un A -module *plat* pour tout $\mathfrak{q} \in U' := \phi^{-1}U$
- la restriction $\mathcal{M}|_{U'}$ est un $(\mathcal{O}_Y)_{|U'}$ -module de *présentation finie*

(voir la définition 5.57(iii)). La partie $Z := X \setminus U$ est fermée et constructible, donc il existe un idéal de type fini $I \subset A$ avec $V(I) = Z$ (brièvement : on trouve $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $U = D(a_1) \cup \dots \cup D(a_n)$, et on voit aisément que $I := Aa_1 + \dots + Aa_n$ convient). Munissons A de la topologie I -adique, et considérons aussi l'anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A)$. Rappelons que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$ des fonctions algébriques sur $\mathrm{Spa} \underline{A}$ admet le sous-faisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+$ des fonctions algébriques entières, et pour tout $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$ soit $A_v^+ := \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\underline{A}), v}^+$. On a un diagramme *cartésien* de A -algèbres, dont les flèches verticales sont les surjections naturelles :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} A_v^+ & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \\ \pi_v \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathfrak{p}} \\ k(v)^+ & \longrightarrow & k(\mathfrak{p}) \end{array}$$

où $\mathfrak{p} := \mathrm{Supp}(v)$, et $k(v)^+$ est l'anneau de valuation de la valuation résiduelle de v (lemme 10.28(ii)). Soient $B_v := A_v^+ \otimes_A B$, $M_v := A_v^+ \otimes_A M$, $I_v := IA_v^+$, et posons

$$\Gamma_I M_v := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ann}_{M_v}(I_v^n) \quad \text{et} \quad \overline{M}_v := M_v / \Gamma_I M_v.$$

Lemme 10.66. *Dans la situation du §10.5.1, soit $v \in \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}$. Alors $\overline{M}_v$ est à la fois un A_v^+ -module plat, et un B_v -module de présentation finie.*

Démonstration. Remarquons d'abord :

Affirmation 10.67. On peut supposer que B soit une A -algèbre plate.

Preuve : Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme surjectif de A -algèbres $p_B : B_0 := A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$, tel que $J := \text{Ker } p_B$ est un idéal de type fini, et évidemment $M_0 := M_{[p_B]}$ est un B_0 -module de type fini. Posons $(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) := \text{Spec } B_0$, et $\mathcal{M}_0 := \mathcal{O}_{Y_0} \widetilde{\otimes}_{B_0} M_0$. Notons aussi $f_0 : A \rightarrow B_0$ l'homomorphisme structurel, $\phi_0 := \text{Spec } f_0 : Y_0 \rightarrow X$, et $U'_0 := \phi_0^{-1}U$. Rappelons que $\psi := \text{Spec } p_B : Y \rightarrow Y_0$ identifie Y avec la partie fermée $V(J) \subset Y_0$; par suite $\text{Supp}_{B_0}(M_0) \subset V(J)$, i.e. $M_{0,\mathfrak{q}} = 0$ pour tout $\mathfrak{q} \in Y_0 \setminus V(J)$, et d'autre part $M_{0,\mathfrak{q}}$ est un A -module plat pour tout $\mathfrak{q} \in U'_0 \cap V(J)$. Donc $M_{0,\mathfrak{q}}$ est un A -module plat pour tout $\mathfrak{q} \in U'_0$. Or, soit $a \in A$ tel que $D(a) \subset U$, et rappelons que la partie ouverte $D(a)$ de X est représentée par la A -algèbre A_a , et de même, la partie ouverte $\phi^{-1}D(a)$ (resp. $\phi_0^{-1}D(a)$) est représentée par la B -algèbre $A_a \otimes A B \simeq B_a$ (resp. par la B_0 -algèbre $A_a \otimes A B_0 \simeq B_{0,a}$); d'après le problème 5.58(ii.b), le B_a -module $B_a \otimes_B M \simeq M_a$ est alors de présentation finie, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme B_a -linéaire $B_a^k/N \xrightarrow{\sim} M_a$, pour un B_a -sous-module $N \subset B_a^k$ de type fini. Or, on a un isomorphisme naturel de B -modules $B \otimes_{B_0} B_{0,a}^k \xrightarrow{\sim} B_a^k$, et on trouve ainsi un $B_{0,a}$ -sous-module $N_0 \subset B_{0,a}^k$ de type fini tel que l'image de l'application induite $B \otimes_{B_0} N_0 \rightarrow B \otimes_{B_0} B_{0,a}^k \xrightarrow{\sim} B_a^k$ soit N ; il vient un isomorphisme $B_{0,a}$ -linéaire :

$$\mathcal{M}_0(\phi_0^{-1}D(a)) \xrightarrow{\sim} M_{0,a} \xrightarrow{\sim} (B \otimes_{B_0} (B_{0,a}^k/N_0)) \xrightarrow{\sim} B_{0,a}^k/(N_0 + JB_{0,a}^k)$$

et noter que $N_0 + JB_{0,a}^k$ est un $B_{0,a}$ -module de type fini, donc $M_{0,a}$ est un $B_{0,a}$ -module de présentation finie. Cela montre que $\mathcal{M}_{0|U'_0}$ est un $(\mathcal{O}_{Y_0})_{|U'_0}$ -module de présentation finie. Ensuite, posons $B_{0,v} := A_v^+ \otimes A B_0$; au vu de l'isomorphisme naturel de B -algèbres $B_{0,v}/JB_{0,v} \xrightarrow{\sim} B_v$, l'exercice 3.17(v.c) entraîne que si le $B_{0,v}$ -module $M_{0,v} := A_v^+ \otimes A M_0 = M_v$ est de présentation finie, il en est de même pour le B_v -module M_v . Ainsi, afin de démontrer le lemme on peut remplacer B par la A -algèbre plate B_0 , et M par M_0 . $\diamond$

Noter que $\mathfrak{p} \in U$, car la valuation v est analytique, et par construction le support de $\Gamma_I M_v$ est contenu dans la partie fermée $V(I_v)$ de $\text{Spec } A_v^+$; ainsi $A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} \Gamma_I M_v = 0$, et la projection $p : M_v \rightarrow \overline{M}_v$ induit un isomorphisme $A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} M_v \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v$ (proposition 3.11). En particulier, $A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v \simeq M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat, et d'après la proposition 10.62, pour vérifier la platitude du A_v^+ -module $\overline{M}_v$, il suffit de montrer que $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v$ est un $k(v)^+$ -module plat. Or, comme v est analytique, le théorème 10.12(i) entraîne aisément que $\Gamma_v \neq 0$; d'autre part, $c\Gamma_v = 0$, car $A = A^+$. Au vu du lemme 10.6, $v(a)$ est alors cofinal dans Γ_v , pour tout $a \in I$. Rappelons aussi que $J := \pi_v(I_v)$ est un idéal principal non nul de $k(v)^+$ (voir le §8.1.1); il s'ensuit aisément que la torsion de tout $k(v)^+$ -module N est le sous-module $\Gamma_J N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_N(J^n)$, et le quotient $N/\Gamma_J N$ est un $k(v)^+$ -module sans torsion (voir le §1.1.4). Compte tenu de l'exercice 8.29(ii), on est ramené à vérifier :

Affirmation 10.68. $\text{Ker}(k(v)^+ \otimes_{A_v^+} p) = \Gamma_J(k(v)^+ \otimes_{A_v^+} M_v)$.

Preuve : Noter que I_v est un idéal principal, engendré par un élément régulier $\alpha \in I_v$ (lemme 10.30), et $\pi_v(\alpha) \neq 0$, car $J \neq 0$; d'autre part, $\text{Ker } \pi_v = \text{Ker } \pi_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P} := \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Donc $\alpha \notin \mathfrak{P}$, i.e. $\alpha \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$, et ainsi :

$$(**) \quad \alpha \mathfrak{P} = \mathfrak{P}.$$

Les isomorphismes naturels $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} M_v \xrightarrow{\sim} M_v/\mathfrak{P}M_v$ et $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v \xrightarrow{\sim} \overline{M}_v/\mathfrak{P}\overline{M}_v$ identifient $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} p$ avec l'application $\overline{p} : M_v/\mathfrak{P}M_v \rightarrow \overline{M}_v/\mathfrak{P}\overline{M}_v$ induite par la projection $M_v \rightarrow \overline{M}_v$, dont le noyau est $(\Gamma_I M_v)/(\mathfrak{P}M_v \cap \Gamma_I M_v)$; par suite, $\text{Ker } \overline{p} \subset \Gamma_J(M_v/\mathfrak{P}M_v)$. Réciproquement, soit $\overline{x} \in \Gamma_J(M_v/\mathfrak{P}M_v)$, et soit $x \in M_v$ un représentant de la classe $\overline{x}$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $J^n \overline{x} = 0$, i.e. $\alpha^n x \in \mathfrak{P}M_v$. Mais $\mathfrak{P}M_v = \alpha^n \mathfrak{P}M_v$,

d'après (**), donc soit $y \in \mathfrak{P}M_v$ tel que $\alpha^n y = \alpha^n x$, et posons $z := x - y$; alors la classe de z dans $M_v/\mathfrak{P}M_v$ coïncide avec $\bar{x}$, et $\alpha^n z = 0$, d'où $z \in \Gamma_I M_v$, et finalement $\Gamma_J(M_v/\mathfrak{P}M_v) \subset \text{Ker } \bar{p}$. $\diamond$

Il reste à montrer que $\overline{M}_v$ est un B_v -module de présentation finie, et grâce à l'observation 10.67 on supposera que B soit une A -algèbre plate; en particulier, si l'on tensorise avec B le diagramme (*) on obtient encore un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} B_v & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(v)^+ \otimes_A B & \longrightarrow & B(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Or, $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v$ est un $k(v)^+ \otimes_A B$ -module de type fini, car il est un quotient du $k(v)^+ \otimes_A B$ -module $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} M_v \simeq k(v)^+ \otimes_A M \simeq (k(v)^+ \otimes_A B) \otimes_B M$ (proposition 3.18(i) et remarque 3.15); avec la proposition 8.30, il s'ensuit que $k(v)^+ \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v$ est un $k(v)^+ \otimes_A B$ -module de présentation finie. Il en est de même pour le $B_{\mathfrak{p}}$ -module

$$B_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_v} \overline{M}_v \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} \overline{M}_v \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_v^+} M_v \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M \simeq B_{\mathfrak{p}} \otimes_B M$$

car $\mathfrak{p} \in U$. En dernier, lieu, d'après l'exercice 10.37(iii) et la proposition 7.70 on a : $\text{Tor}_1^{B_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, B(\mathfrak{p})) \simeq \text{Tor}_1^{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, k(\mathfrak{p})) = 0$, et pour conclure, il suffit alors d'invoquer l'observation 10.64(ii). $\square$

10.5.2. Transformées strictes des $\mathcal{O}_Y$ -modules. Soient A un anneau, $(X, \mathcal{O}_X) := \text{Spec } A$, et $\phi : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas; pour tout idéal $J \subset A$, soit en outre $\pi_J : (E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent $J\mathcal{O}_X$ (théorème 5.97), et considérons le diagramme cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc} E'_J & \xrightarrow{\psi_J} & E_J \\ \pi'_J \downarrow & & \downarrow \pi_J \\ Y & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

(théorème 5.76). D'après l'exercice 5.62(i), le foncteur π_{J*} admet un adjoint à gauche $\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} - : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_{E'_J}\text{-Mod}$. Posons aussi

$$Z_J := \pi_J^{-1}(V(J)) \subset E_J \quad \text{et} \quad Z'_J := \psi_J^{-1}(Z_J) \subset E'_J.$$

Définition 10.69. Avec la notation du §10.5.2, soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module. La J -transformée stricte de $\mathcal{N}$ est le $\mathcal{O}_{E'_J}$ -module

$$\mathcal{N}_J := (\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) / \Gamma_{Z'_J}(\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N})$$

(voir la définition 5.63(ii)). Rappelons que tout quotient d'un $\mathcal{O}_{E'_J}$ -module par un $\mathcal{O}_{E'_J}$ -sous-module est représentable dans $\mathcal{O}_{E'_J}\text{-Mod}$: voir la remarque 5.55(iii).

Remarque 10.70. (i) Tout morphisme $h : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ de $\mathcal{O}_Y$ -modules induit un morphisme $\mathcal{O}_{E'_J}$ -linéaire $h_{E'_J} := \mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} h : \mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}$; noter que

$$h_{E'_J}(\Gamma_{Z'_J}(\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}')) \subset \Gamma_{Z'_J}(\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}).$$

Par suite, $h_{E'_J}$ induit un morphisme $\mathcal{O}_{E'_J}$ -linéaire $h_J : \mathcal{N}'_J \rightarrow \mathcal{N}_J$.

(ii) Soient $U_J := X \setminus V(J)$, $U'_J := \phi^{-1}U_J$, $W_J := E_J \setminus Z_J$ et $W'_J := \psi_J^{-1}W_J$; alors le morphisme de schémas $(\pi_J)|_{U_J} : W_J \times_{E_J} (E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \rightarrow U_J \times_X (X, \mathcal{O}_X)$ est l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent $(J\mathcal{O}_X)|_{U_J} = (\mathcal{O}_X)|_{U_J}$ (observation 5.98). Ainsi, $(\pi_J)|_{U_J}$ est un isomorphisme de schémas, et de même pour la restriction $(\pi'_J)|_{U'_J} : W'_J \times_{E'_J} (E'_J, \mathcal{O}_{E'_J}) \rightarrow U'_J \times_Y (Y, \mathcal{O}_Y)$ de π'_J . En outre, évidemment la restriction $(\mathcal{N}_J)|_{W'_J}$ de $\mathcal{N}_J$ coïncide avec la restriction $\mathcal{O}_{W'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{U'_J}} (\mathcal{N}_{U'_J})$ de $\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}$. Autrement dit, $(\pi'_J)|_{U'_J}$ identifie le $\mathcal{O}_{W'_J}$ -module $(\mathcal{N}_J)|_{W'_J}$ avec le $\mathcal{O}_{U'_J}$ -module $\mathcal{N}_{U'_J}$.

(iii) Par construction, $J\mathcal{O}_{E_J}$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{E_J}$, donc $\Gamma_{Z_J}\mathcal{O}_{E_J} = 0$. Si en outre ϕ est un morphisme plat de schémas, il est en de même pour ψ_J , par suite $J\mathcal{O}_{E'_J}$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_{E'_J}$, et $\Gamma_{Z'_J}\mathcal{O}_{E'_J} = 0$ (exercice 3.75(i)).

Lemme 10.71. (i) Dans la situation du §10.5.1, il existe un B -module de présentation finie M' et une surjection B -linéaire $h : M' \rightarrow M$ induisant un isomorphisme $\mathcal{O}_{U'}$ -linéaire $\mathcal{O}_{U'} \otimes_B h : \mathcal{O}_{U'} \otimes_B M' \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U'} \otimes_B M$.

(ii) Dans la situation du §10.5.2, soit $h : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ un épimorphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules dont la restriction sur $U'_J := \phi^{-1}(X \setminus V(J))$ est un isomorphisme $h|_{U'_J} : \mathcal{N}'_{|U'_J} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{|U'_J}$. Alors $h_J : \mathcal{N}'_J \rightarrow \mathcal{N}_J$ est un isomorphisme.

Démonstration. (i) : Soient $g : B^k \rightarrow M$ une surjection B -linéaire, et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $U = D(a_1) \cup \dots \cup D(a_n)$; par hypothèse, $\mathcal{O}_{U'} \otimes_B M$ est un $\mathcal{O}_{U'}$ -module de présentation finie, donc $A[a_i^{-1}] \otimes_A M$ est un $B[a_i^{-1}]$ -module de présentation finie (problème 5.58(ii.b)); ainsi $\text{Ker}(A[a_i^{-1}] \otimes_A g)$ est un $B[a_i]$ -module de type fini, pour tout $i = 1, \dots, n$ (exercice 2.110(iv)). Par suite, pour $i = 1, \dots, n$ il existe un B -sous-module de type fini $N_i \subset \text{Ker}(g)$ tel que l'image de $A[a_i^{-1}] \otimes_A N_i$ dans $B[a_i^{-1}]^k$ engendre $\text{Ker}(A[a_i^{-1}] \otimes_A g)$; posons $M' := B^k / (N_1 + \dots + N_n)$. Alors g se factorise à travers une surjection B -linéaire $h : M' \rightarrow M$, et il est clair que $A[a_i^{-1}] \otimes_A h$ est un isomorphisme pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où l'assertion.

(ii) : Posons $W'_J := \pi_J'^{-1}U'_J$. La remarque 10.70(ii) identifie naturellement les $\mathcal{O}_{W'_J}$ -modules $(\mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N})|_{W'_J}$ et $(\mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}')|_{W'_J}$ avec les $\mathcal{O}_{U'_J}$ -module $\mathcal{N}_{|U'_J}$ et respectivement $\mathcal{N}'_{|U'_J}$. Sous ces identifications, la restriction $(h_{E'_J})|_{W'_J}$ de $h_{E'_J} := \mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} h$ correspond évidemment à la restriction $h|_{U'_J}$ de h . Par hypothèse, $h|_{U'_J}$ est un isomorphisme, donc de même pour $(h_{E'_J})|_{W'_J}$. Il s'ensuit que $\text{Ker}(h_{E'_J}) \subset \Gamma_{Z'_J}(\mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}')$, donc $\text{Ker}(h_J) = 0$, i.e. h_J est un monomorphisme de $\mathcal{O}_{E'_J}$ -Mod. D'autre part, noter que le foncteur $\mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} -$ est exact à droite, car il est un adjoint à gauche (proposition 2.49(ii)); par suite, $\mathcal{O}_{E'_J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} h$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_{E'_J}$ -Mod (exercice 2.66(iv)), donc de même pour h_J . D'après l'exercice 5.65(i), on conclut que h_J est un isomorphisme. $\square$

Le théorème suivant, l'un des résultats centraux de ce cours, fut démontré par Gruson et Raynaud dans le leur article [35], paru en 1971; la preuve présentée ici, toutefois, suit une idée de K.Fujiwara, suggérée dans son article [27] du 1998, et esquissée dans son article [28], en collaboration avec F.Kato.

Théorème 10.72. (Gruson-Raynaud) Dans la situation du §10.5.2, soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent de type fini, $U \subset X$ une partie ouverte compacte; posons $Z := X \setminus U$, et supposons que :

- ϕ soit un morphisme de présentation finie
- en tout point de $\phi^{-1}U$, le $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{M}$ soit de présentation finie et ϕ -plat.

Alors il existe un idéal de type fini $J \subset A$ avec $V(J) = Z$, tel que la J -transformée stricte $\mathcal{M}_J$ de $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{O}_{E'_J}$ -module quasi-cohérent ψ_J -plat de présentation finie.

Démonstration. Supposons d'abord que Y soit un schéma affine, disons $Y = \text{Spec } B$, de sorte que $\phi = \text{Spec } f$ pour un homomorphisme d'anneaux de présentation finie $f : A \rightarrow B$, et $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y \otimes_B M$ pour un B -module M de type fini. D'après le lemme 10.71, on peut même supposer que M soit un B -module de présentation finie. Comme au §10.5.1, on a $Z = V(I)$ pour un idéal $I \subset A$ de type fini, et on munit A de sa topologie I -adique, de sorte que Z est le lieu non analytique X^{na} de X (définition 9.79). Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux ouverts de type fini de A , partiellement ordonné comme au §10.2.3, et $\underline{E}_\bullet := ((E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \rightarrow X \mid J \in \mathcal{I})$ le système cofiltrant associé d'éclatements. pour tous $J, J' \in \mathcal{I}$

avec $J' \leq J$ on déduit alors un diagramme commutatif de schémas :

$$\begin{array}{ccc} E'_{J'} & \xrightarrow{\psi_{J'}} & E_{J'} \\ p'_{J',J} \downarrow & & \downarrow p_{J',J} \\ E'_J & \xrightarrow{\psi_J} & E_J \end{array}$$

où $p_{J',J}$ dénote le morphisme de transition du système cofiltrant $\underline{E}_\bullet$. Noter que pour tout $J \in \mathcal{J}$ et toute partie ouverte affine $U \subset E'_J$, la partie $U \cap Z'_J$ est naturellement identifiée avec la partie fermée constructible $V(J\mathcal{O}_{E'_J}(U)) \subset \text{Spec } \mathcal{O}_{E'_J}(U) \simeq U$; d'après l'exercice 5.94(i), le $\mathcal{O}_{E'_J}$ -module $\Gamma_{Z'_J}(\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_B M)$ est alors quasi-cohérent, et par suite il en est de même pour $\mathcal{M}_J$ (problème 5.58(ii.c)).

Ensuite, posons $E_J^{\text{na}} := \pi_J^{-1}(Z)$ et $(E_J, \mathcal{O}_{E_J})_{\text{na}} := E_J^{\text{na}} \times_{E_J} (E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ pour tout $J \in \mathcal{J}$. Noter que la partie $\mathcal{J}' := \{J \in \mathcal{J} \mid V(J) = Z\}$ est finale dans $\mathcal{J}$; d'après la proposition 10.31 et l'exercice 2.35(iv), l'espace localement annelé $(\text{Spa } \underline{A}, \mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}^+)_{\text{an}}$ représente alors la limite inverse du système cofiltrant d'espaces localement annelés

$$((E_J, \mathcal{O}_{E_J})_{\text{na}} \mid J \in \mathcal{J}').$$

Notons aussi par $(p_J : \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}} \rightarrow E_J^{\text{na}} \mid J \in \mathcal{J}')$ le cône universel; on remarque :

Affirmation 10.73. (i) Soit $v \in \text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}$, et pour tout $J \in \mathcal{J}'$ soit $x_J := p_J(v)$. Alors il existe $J \in \mathcal{J}'$ tel que, pour tout $y \in \psi_J^{-1}(x_J)$, la fibre $\mathcal{M}_{J,y}$ soit à la fois un $\mathcal{O}_{E_J, x_J}$ -module plat et un $\mathcal{O}_{E'_J, y}$ -module de présentation finie.

(ii) Soit J comme dans (i). Alors, pour tout $J' \in \mathcal{J}'$ tel que $J' \leq J$, tout $y \in \psi_{J'}^{-1}(x_J)$ et tout $y' \in p_{J',J}^{-1}(y)$ on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{E'_{J'}, y'}$ -linéaire

$$\mathcal{O}_{E'_{J'}, y'} \otimes_{\mathcal{O}_{E'_J, y}} \mathcal{M}_{J, y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{J', y'}.$$

Preuve : (i) : Posons $A_J^+ := \mathcal{O}_{E_J, x_J}$, $B_J := A_J^+ \otimes_A B$, et $M_J := B_J \otimes_B M$ pour tout $J \in \mathcal{J}'$. Ainsi A_v^+ (resp. B_v : notation du §10.5.1) représente la colimite du système de A -algèbres $(A_J^+ \mid J \in \mathcal{J}'^{\text{op}})$ (resp. de B -algèbres $(B_J \mid J \in \mathcal{J}'^{\text{op}})$). D'après le lemme 10.66, le quotient $\overline{M}_v$ de $M_v := A_v^+ \otimes_A M$ est un A_v^+ -module plat, et un B_v -module de présentation finie. D'après l'exercice 2.110(iv), le B_v -sous-module $\Gamma_I M_v \subset M_v$ est alors de type fini. Il s'ensuit aisément qu'il existe $J \in \mathcal{J}'$ et un B_J -sous-module de type fini $Q_J \subset M_J$ tel que l'image de $B_v \otimes_B Q_J$ dans M_v soit $\Gamma_I M_v$, et ainsi l'application naturelle $t_J : M_J \rightarrow M_v$ induit un isomorphisme B_v -linéaire $B_v \otimes_{B_J} (M_J/Q_J) \xrightarrow{\sim} \overline{M}_v$. Pour tout $J' \in \mathcal{J}'$ tel que $J' \leq J$, soit $Q_{J'}$ l'image de $B_{J'} \otimes_{B_J} Q_J$ dans $M_{J'}$, de sorte que $B_{J'} \otimes_{B_J} (M_J/Q_J) \simeq M_{J'}/Q_{J'}$. Or, si $x_1, \dots, x_n$ est un système fini de générateurs de Q_J , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I_v^k t_J(x_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$; par suite, il existe $J' \in \mathcal{J}'$ avec $J' \leq J$ tel que $I^k Q_{J'} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, et quitte à remplacer J by J' , on peut alors supposer que $I^k Q_J = 0$. Comme J est un idéal de type fini avec $V(J) = V(I)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $J^m \subset I$ (remarque 1.56(i)), d'où $J^{km} Q_J = 0$. D'autre part, noter que $\mathcal{O}_{E'_J, y}$ est une localisation de B_J , et on a une identification naturelle

$$(\mathcal{O}_{E'_J} \widetilde{\otimes}_B M)_y \xrightarrow{\sim} M_y := \mathcal{O}_{E'_J, y} \otimes_{B_J} M_J \quad \forall y \in \psi_J^{-1}(x_J).$$

L'exercice 5.94(ii) fournit alors une identification naturelle :

$$\mathcal{M}_{J, y} \simeq M_y / \Gamma_J M_y \quad \text{avec} \quad \Gamma_J M_y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{M_y}(J^n) \quad \forall y \in \psi_J^{-1}(x_J)$$

et $\text{Ann}_{M_y}(J^n) = \mathcal{O}_{E'_J, y} \otimes_{B_J} \text{Ann}_{M_J}(J^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'exercice 3.75(i). Ainsi, on déduit une identification naturelle pour tout $y \in \psi_J^{-1}(x_J)$:

$$\mathcal{M}_{J, y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{E'_J, y} \otimes_{B_J} (M_J / \Gamma_J M_J) \quad \text{avec} \quad \Gamma_J M_J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{M_J}(J^n)$$

et évidemment, la projection $M_y \rightarrow \mathcal{M}_{J, y}$ se factorise par une surjection

$$(*) \quad \overline{M}_y := \mathcal{O}_{E'_J, y} \otimes_{B_J} (M_J / Q_J) \rightarrow \mathcal{M}_{J, y} \quad \forall y \in \psi_J^{-1}(x_J).$$

En dernier lieu, d'après le théorème 10.59(ii), quitte à remplacer J par quelque $J' \in \mathcal{J}'$ tel que $J' \leq J$, on peut aussi supposer que M_J/Q_J soit un A_J^+ -module plat, donc de même pour $\overline{M}_y$ (exercice 3.76(i)). Rappelons maintenant que la propriété universelle de l'éclatement entraîne que l'idéal JA_J^+ soit inversible, i.e. principal et engendré par un élément régulier, qui est donc aussi $\overline{M}_y$ -régulier (exercice 3.75(iii)). Ainsi, aucun élément non nul de $\overline{M}_y$ n'a support contenu dans $V(JA_J^+)$; mais par construction, le noyau de $(*)$ est précisément le sous-module des sections à support dans $V(JA_J^+)$. Finalement, $(*)$ est alors un isomorphisme, et cela achève de vérifier que $\mathcal{M}_{J,y}$ est un A_J^+ -module plat. De plus, comme M est un B -module de présentation finie, il en est de même pour le B_J -module M_J , donc aussi pour le B_J -module M_J/Q_J ; par suite, $\mathcal{M}_{J,y}$ est un $\mathcal{O}_{E_J',y}$ -module de présentation finie.

(ii) : En raisonnant comme ci-dessus, on voit que pour tout $J' \in \mathcal{J}'$ avec $J' \leq J$, l'application $A_{J'}^+$ -linéaire naturelle $\mathcal{O}_{E_{J'},y'} \otimes_{B_J} M_J \rightarrow \mathcal{M}_{J',y'}$ se factorise à travers une surjection $\mathcal{O}_{E_{J'},y'} \otimes_{\mathcal{O}_{E_J',y}} \mathcal{M}_{J,y} \rightarrow \mathcal{M}_{J',y'}$ dont le noyau est à support dans $V(J'A_{J'}^+)$. Mais $J'A_{J'}^+$ est un idéal inversible de $A_{J'}^+$, et $\mathcal{O}_{E_{J'},y'} \otimes_{\mathcal{O}_{E_J',y}} \mathcal{M}_{J,y}$ est un $A_{J'}^+$ -module plat, donc aucun de ses éléments non nuls n'a support dans $V(J'A_{J'}^+)$, d'où l'assertion. $\diamond$

Pour tout $J \in \mathcal{J}'$, soient :

- $U_J \subset E_J$ la partie des $x \in E_J$ tels que pour tout $y \in \psi_J^{-1}(x)$ le $\mathcal{O}_{E_J}$ -module $\mathcal{M}_J$ soit à la fois ψ_J -plat en y et de présentation finie en y (définition 5.57(ii))
- $U'_J \subset E_J$ la partie des $x \in E_J$ tels que $\mathcal{M}_{J,y}$ soit à la fois un $\mathcal{O}_{E_J,x}$ -module plat et un $\mathcal{O}_{E_J',y}$ -module de présentation finie, pour tout $y \in \psi_J^{-1}(x)$.

Noter que $U_J \subset U'_J$; mais en fait, pour tous $J, J' \in \mathcal{J}'$ avec $J' \leq J$ on a :

Affirmation 10.74. (i) $U_J = U'_J$.

(ii) La partie U_J est ind-constructible dans l'espace spectral E_J .

(iii) $E_J^{\text{an}} := E_J \setminus E_J^{\text{na}} \subset U_J$.

(iv) $p_{J,J'}^1(U_J) \subset U_{J'}$, et si $U_J = E_J$, on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{E_{J'}}$ -linéaire :

$$\mathcal{O}_{E_{J'}} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{E_J}} \mathcal{M}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{J'}.$$

Preuve : (i) : Montrons que pour toute partie ouverte affine $V \subset E_J$, on a $V \cap U_J = V \cap U'_J$. Soit alors $V = \text{Spec } C$, pour une A -algèbre C , et $V' := \psi_J^{-1}V \simeq \text{Spec } C'$, avec $C' := B \otimes_A C$. On peut en outre supposer que $JC = Ca$ pour un élément régulier $a \in C$. Posons $\mathcal{O}_V := (\mathcal{O}_{E_J})|_V$, $\mathcal{O}_{V'} := (\mathcal{O}_{E_J'})|_{V'}$, et soit

$$\psi_V : (V', \mathcal{O}_{V'}) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$$

la restriction de ψ_J . Alors $N_{V'} := \mathcal{M}_J(V')$ est le quotient de $M_{V'} := C' \otimes_B M$ par le sous-module $\Gamma_J M_{V'}$ des éléments à support dans $V(JC')$. Comme $M_{V'}$ est un C' -module de type fini, il en est de même pour $N_{V'}$; de plus, le $\mathcal{O}_{V'}$ -module $\mathcal{O}_{V'} \widetilde{\otimes}_{C'} N_{V'}$ est naturellement identifié avec $(\mathcal{M}_J)_{|V'}$, et ainsi $(\mathcal{O}_{V'} \widetilde{\otimes}_{C'} N_{V'})_{|V' \setminus Z'_J}$ s'identifie naturellement avec $(\mathcal{M}_J)_{|V' \setminus Z'_J}$. Avec la remarque 10.70(ii), il en découle que pour tout $y \in V' \setminus Z'_J$, le $\mathcal{O}_{V'}$ -module $\mathcal{O}_{V'} \widetilde{\otimes}_{C'} N_{V'}$ est ψ_V -plat en y , et de présentation finie en y . Cela montre que la donnée de l'homomorphisme naturel d'anneaux $C \rightarrow C'$, de l'idéal $JC \subset C$ et du C' -module $N_{V'}$ vérifie les conditions du §10.5.1. Par suite, il existe un C' -module de présentation finie M' et une surjection C' -linéaire $g : M' \rightarrow N_{V'}$ avec $\text{Supp}(\text{Ker } g) \subset V(JC')$ (lemme 10.71(i)). Or, soit $y \in V'$, et posons $C'_y := \mathcal{O}_{V',y}$; supposons que $C'_y \otimes_{C'} N_{V'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{J,y}$ soit un C'_y -module de présentation finie et un C -module plat. Alors le C'_y -module $\text{Ker}(C'_y \otimes_{C'} g) \xrightarrow{\sim} C'_y \otimes_{C'} \text{Ker}(g)$ est de type fini (exercice 2.110(iv)). Par suite, on trouve un C' -sous-module $M'' \subset \text{Ker } g$ de type fini tel que l'homomorphisme induit $\overline{g} : \overline{M}' := M'/M'' \rightarrow N_{V'}$ se localise en un isomorphisme $C'_y \otimes_{C'} \overline{g}$. Comme $\mathcal{M}_{J,y}$ est un C -module plat, il en est de même pour $C'_y \otimes_{C'} \overline{M}'$; d'autre part,

$\overline{M}'$ est un C' -module de présentation finie, donc d'après le problème 10.61(i), la partie

$$W' := \{y' \in V' \mid C'_{y'} \otimes_{C'} \overline{M}' \text{ est un } C\text{-module plat}\}$$

est ouverte dans V' . Soit $y' \in W'$; alors a est $(C'_{y'} \otimes_{C'} \overline{M}')$ -régulier (exercice 3.75(iii)), et par construction $\text{Supp}(C'_{y'} \otimes_{C'} \text{Ker } \bar{g}) \subset V(aC'_{y'})$, donc $C'_{y'} \otimes_{C'} \bar{g}$ est bijectif pour tout $y' \in W'$. Si $W'' \subset W'$ est un voisinage ouvert affine de y , on conclut que $\mathcal{O}_{V'}(W'') \otimes_{C'} \bar{g}$ est bijectif; en particulier $\mathcal{M}_J(W'') \simeq \mathcal{O}_{V'}(W'') \otimes_{C'} N_{V'}$ est à la fois un $\mathcal{O}_{V'}(W'')$ -module de présentation finie et un C -module plat (proposition 3.77). L'assertion en découle aussitôt.

(ii) : Notons par $W \subset E'_J$ la partie des $y \in E'_J$ tel que $\mathcal{M}_J$ soit ψ_V -plat en y et de présentation finie en y ; évidemment $E_J \setminus U_J = \psi_J(E'_J \setminus W)$, et la preuve de (i) montre que W est ouverte dans E'_J . De plus, le morphisme ψ_J est compact et séparé (lemme 5.81(ii), remarque 5.88(iii) et exercice 5.89(ii)), et E_J et E'_J sont des espaces spectraux (proposition 5.90(ii) et corollaire 5.101(i)), donc $E_J \setminus U_J$ est pro-constructible dans E_J (corollaire 4.68(i)), d'où l'assertion.

(iii) : L'assertion suit aussitôt de la remarque 10.70(ii).

(iv) : Par inspection directe des définitions, pour tous $y \in U_J$ et $y' \in p_{J,J'}^{-1}(y)$ on obtient une identification $\mathcal{O}_{E'_{J'},y'}$ -linéaire naturelle :

$$(\mathcal{O}_{E'_{J'}} \otimes_{\mathcal{O}_{E'_J}} \mathcal{M}_J)_{y'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{E'_{J'},y'} \otimes_{\mathcal{O}_{E'_J,y}} \mathcal{M}_{J,y}.$$

Rappelons aussi que p_J est une surjection pour tout $J \in \mathcal{J}'$ (observation 10.34); l'assertion découle alors de (i) et de l'observation 10.73(ii). $\diamond$

On a déjà remarqué que E_J est un espace spectral pour tout $J \in \mathcal{J}$, et pour tous $J, J' \in \mathcal{J}$ avec $J' \leq J$, le morphisme de transition $p_{J,J'} : E_J^{\text{na}} \rightarrow E_{J'}^{\text{na}}$ est continu et compact (voir la preuve de la proposition 10.31); d'après l'observation 10.74(ii,iii), la partie $T_J := E_J \setminus U_J$ est pro-constructible dans E_J^{na} pour tout $J \in \mathcal{J}'$, et au vu de l'observation 10.74(iv), il vient $p_{J,J'}(T_{J'}) \subset T_J$ pour tous $J, J' \in \mathcal{J}$ avec $J' \leq J$. D'autre part, l'observation 10.73(i) entraîne que $\bigcap_{J \in \mathcal{J}'} p_J^{-1}(T_J) = \emptyset$. En raisonnant comme dans la preuve de l'observation 10.60, on conclut qu'il existe $J \in \mathcal{J}$ tel que $T_J = \emptyset$, et cela achève la preuve, si Y est un schéma affine.

Dans le cas général, comme ϕ est un morphisme compact, il existe un recouvrement $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ constitué d'un nombre fini de parties ouvertes affines, telles que $\mathcal{O}_Y(Y_i)$ soit une A -algèbre de présentation finie pour tout $i = 1, \dots, k$. Pour chaque Y_i , d'après le cas précédent on trouve $J_i \in \mathcal{J}'$ tel que la restriction de $\mathcal{M}_{J_i}$ sur la partie ouverte $V'_i := \pi'^{-1}_{J_i}(Y_i)$ soit un $\mathcal{O}_{V'_i}$ -module ψ_{J_i} -plat de présentation finie. Soit alors $J := J_1 \cdots J_k$; au vu de l'observation 10.74(iv), on conclut aisément que $\mathcal{M}_J$ est ψ_J -plat de présentation finie. $\square$

Remarque 10.75. Gardons la notation du théorème 6.32, et soit $t_1, \dots, t_n$ un système fini de générateurs de J . Pour $i = 1, \dots, n$, soit $A_i := A[\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}] \subset A_{t_i}$, et noter que $JA_i = t_i A_i$; par inspection de la construction de $(E, \mathcal{O}_E)$, on voit que E admet le recouvrement $E = U_1 \cup \dots \cup U_n$, avec $U_i := \text{Spec } A_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Ainsi

$$\Gamma_J \mathcal{M}(U_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{A_i \otimes_A M}(t_i^n) = \text{Ker}(A_i \otimes_A M \rightarrow M_{t_i})$$

i.e. $\mathcal{M}_J(U_i)$ est l'image de $A_i \otimes_A M$ dans la localisation M_{t_i} , pour tout $i = 1, \dots, n$.

10.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 10.8, partie (i) : Soit $v \in \text{Spv } A$; comme $c\Gamma_v \subset c\Gamma_v^*$ (lemme 10.6), l'application $w := r(v)$ est bien une valuation de A avec $c\Gamma_w = c\Gamma_v$. Or, si $v(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset$, on a $c\Gamma_v^* = c\Gamma_v = \Gamma_w$, d'où $\Gamma_w = c\Gamma_w$ et ainsi $w \in \text{Spv}^*A$ (lemme 10.6). Sinon, on a $v(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_v = \emptyset = w(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_w$, donc $c\Gamma_v^*$ (resp. $c\Gamma_w^*$) est le plus grand sous-groupe convexe de Γ_v (resp. de Γ_w) dans lequel $v(a)$ (resp. $w(a)$) est cofinal pour tout $a \in A^{\circ\circ}A$; il s'ensuit aisément que $c\Gamma_w^* = \Gamma_w$, i.e. $w \in \text{Spv}^*A$.

Partie (ii) : Evidemment, si $\text{Supp}(w) \in X_A^{\text{an}} := (\text{Spec } A)^{\text{an}}$, alors $\text{Supp}(v) \in X_A^{\text{an}}$, car $\text{Supp}(v) \subset \text{Supp}(w)$ (proposition 9.12(i)). Réciproquement, supposons que $\text{Supp}(v) \in X_A^{\text{an}}$; si $v(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset$, il vient $w = v^{\text{cl}\Gamma_v}$, d'où $A^{\circ\circ}A \not\subset \text{Supp}(w)$, et ainsi $\text{Supp}(w) \in X_A^{\text{an}}$. Si $v(A^{\circ\circ}A) \cap c\Gamma_v = \emptyset$, l'assertion découle du lemme 10.5(ii).

Exercice 10.13, partie (i) : Si $R = R_A(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_k}{a_0}) \cap \text{Cont}(A)$ avec $a_0, \dots, a_k \in A$ qui engendrent un idéal ouvert de A , on a $\text{Cont}(f)^{-1}(R) = R_B(\frac{f(a_1)}{f(a_0)}, \dots, \frac{f(a_k)}{f(a_0)}) \cap \text{Cont}(B)$, et comme f est adique, on voit aisément que la suite $f(a_0), \dots, f(a_k)$ engendre un idéal ouvert de B , d'où la première assertion. Au vu du théorème 10.12(iii), cela entraîne que $\text{Cont}(f)$ est compacte. Ensuite, on sait déjà que $\text{Cont}(f)$ envoie $\text{Cont}(B)_{\text{na}}$ dans $\text{Cont}(A)_{\text{na}}$ (remarque 10.3(vi)); pour conclure, il suffit alors de vérifier que si $v \in \text{Cont}(B)$ et si $w := \text{Cont}(f)(v)$ est non analytique, alors v est non analytique. Mais si $\mathfrak{p} := \text{Supp}(w)$ est un idéal ouvert, l'idéal $f(\mathfrak{p}) \cdot B$ est contenu dans $\text{Supp}(v)$, et il est ouvert dans B , car f est adique, d'où l'assertion.

Partie (ii) : L'assertion (a) suit aisément de la remarque 10.3(ii). Pour montrer (b), soient $X_A^{\text{an}}, X_B^{\text{an}}$ les lieux analytiques de $X_A := \text{Spec } A$ et $X_B := \text{Spec } B$ (voir la définition 9.79), et considérons le diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spv } B & \xrightarrow{\text{Spv } f} & \text{Spv } A \\ \sigma_B \downarrow & & \downarrow \sigma_A \\ X_B & \xrightarrow{\text{Spec } f} & X_A \end{array}$$

avec σ_A et σ_B comme dans la remarque 8.103(iii). Evidemment, $\text{Cont}(A)_{\text{an}} \subset \sigma_A^{-1}(X_A^{\text{an}})$, et de même pour $\text{Cont}(B)_{\text{an}}$. Compte tenu de (a), il suffit alors de vérifier que $\text{Spv } f$ induit par restriction un homéomorphisme

$$\sigma_B^{-1}(X_B^{\text{an}}) \xrightarrow{\sim} \sigma_A^{-1}(X_A^{\text{an}}).$$

Rappelons que $X_A^{\text{an}} = \bigcup_{a \in A^{\circ\circ}} D(a)$, et $(\text{Spec } f)^{-1}D(a) = D(f(a))$ pour tout $a \in A^{\circ\circ}$; de plus, on a des isomorphismes naturels de schémas :

$$D(a) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } A_a \quad \text{et} \quad D(f(a)) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } B_{f(a)}$$

qui identifient la restriction $D(f(a)) \rightarrow D(a)$ de $\text{Spec } f$ avec $\text{Spec } f_a : \text{Spec } B_{f(a)} \rightarrow \text{Spec } A_a$, où $f_a : A_a \rightarrow B_{f(a)}$ est la localisation de f . Avec ces notations, on obtient un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spv } B_{f(a)} & & \xrightarrow{\text{Spv } f_a} & & \text{Spv } A_a \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & R_B(\frac{f(a)}{f(a)}) & \xrightarrow{\text{Spv } f} & R_A(\frac{a}{a}) & \\ & \sigma_B \downarrow & & \downarrow \sigma_A & \\ & D(f(a)) & \xrightarrow{\text{Spec } f} & D(a) & \\ \sigma_{B_{f(a)}} \downarrow & & & & \downarrow \sigma_{A_a} \\ \text{Spec } B_{f(a)} & & \xrightarrow{\text{Spec } f_a} & & \text{Spec } A_a \end{array}$$

dont les flèches diagonales sont des homéomorphismes (exercice 8.104(i)). On est ainsi ramené à montrer que f_a est un isomorphisme d'anneaux pour tout $a \in A^{\circ\circ}$; cela suit aussitôt de la proposition 9.80(iii,iv).

Partie (iii) : Au vu de (i), on peut supposer que $\text{Cont}(f)$ induit une application $\text{Cont}(B)_{\text{an}} \rightarrow \text{Cont}(A)_{\text{an}}$, et on doit montrer que f est adique. Or, soient $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ des sous-anneaux de définition avec $A_0 \subset f^{-1}B_0$ (corollaire 9.72(ii)), et $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ la restriction de f . On sait que B_0 est topologiquement local (exercice 9.21(v)), et f est adique si et seulement s'il en est de même pour f_0 (proposition 9.78(iii)); de plus, avec

(ii) on voit que $\text{Cont}(f_0)$ induit une application $\text{Cont}(B_0)_{\text{an}} \rightarrow \text{Cont}(A_0)_{\text{an}}$. Ainsi on peut remplacer A, B par A_0, B_0 , et supposer du départ que $B = B^\circ$, donc $B^{\circ\circ} \subset \mathcal{J}(B)$. Soient X_A^{na} et X_B^{na} les lieux non analytiques de $X_A := \text{Spec } A$ et $X_B := \text{Spec } B$; d'après la proposition 9.80(iv), on revient à vérifier que $(\text{Spec } f)^{-1}(X_A^{\text{na}}) = X_B^{\text{na}}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathfrak{p} \in X_B^{\text{an}}$ tel que $f^{-1}\mathfrak{p} \in X_A^{\text{na}}$, et soit $\mathfrak{m} \subset B$ un idéal maximal avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$; on pose $C := (B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}$ et on choisit une valuation $\bar{v}$ de $\text{Frac}(C)$ dont l'anneau de valuation domine C (théorème 8.21). Soit v la valuation de B avec $\text{Supp}(v) = \mathfrak{p}$, et dont la valuation résiduelle est $\bar{v}$; on pose $w := v^{\text{cl}^*_{\bar{v}}}$ (voir l'exercice 10.8). Comme $B^{\circ\circ} \subset \mathcal{J}(B)$, on a $B^{\circ\circ} \subset \mathfrak{m}$, et donc $w(b) > 0$ pour tout $b \in B^{\circ\circ}$; d'après le théorème 10.12(i) et l'exercice 10.8(ii), il vient $w \in \text{Cont}(B)_{\text{an}}$. D'autre part, $w' := \text{Cont}(f)(w)$ est une spécialisation primaire de $v' := \text{Spv}(f)(v)$ (lemme 8.111(i)) et par construction le support de v' est ouvert dans A , d'où $w' \in \text{Cont}(A)_{\text{na}}$, contradiction.

Partie (iv) : Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $S := 1 + I_0$; alors $A_{\text{loc}} = S^{-1}A_0$, donc $\text{Spv}(j)$ induit un homéomorphisme entre $\text{Spv } A_{\text{loc}}$ et la partie $Z := \bigcap_{s \in S} R_A(\frac{s}{s})$ de $\text{Spv } A$ (exercice 8.104(i)). Par suite $(\text{Cont } j)(\text{Cont}(A_{\text{loc}})) \subset Z$, et on est ramené à vérifier la surjectivité de $\text{Cont}(j)$. Or, soit $v \in \text{Cont}(A)$, notons par $\bar{v}$ la valuation résiduelle de $k(v)$, et munissons $k(v)$ de sa $\bar{v}$ -topologie; par la remarque 10.3(i), la projection $\pi : A \rightarrow k(v)$ est continue, et $k(v)$ est topologiquement local (problème 9.53(ii)), donc $\pi = \pi_{\text{loc}} \circ j$ pour un homomorphisme continu d'anneaux $\pi_{\text{loc}} : A_{\text{loc}} \rightarrow k(v)$. Encore par la remarque 10.3(i), la valuation $w := \bar{v} \circ \pi_{\text{loc}}$ est continue, et $\text{Cont}(j)(w) = v$. La dernière assertion de (iv) suit aussitôt, au vu de (i).

Problème 10.16, partie (i) : Pour voir la surjectivité de $\text{Cont}(j_A)$, soit $v \in \text{Cont}(A)$, notons w la valuation résiduelle de v sur $k(v)$, et $\pi_v : A \rightarrow k(v)$ la projection, et munissons $k(v)$ de sa w -topologie; on sait que π_v est un homomorphisme continu d'anneaux (remarque 10.3(i)), donc il se prolonge en un homomorphisme continu d'anneaux complétés $\hat{\pi}_v : \hat{A} \rightarrow \widehat{k(v)}$ (remarque 9.47(iii)), et d'autre part w se prolonge en une valuation $\hat{w} : \widehat{k(v)} \rightarrow \Gamma_{v^\circ}$ telle que la topologie de $\widehat{k(v)}$ coïncide avec la $\hat{w}$ -topologie (problème 9.53(iii)). Alors $\hat{v} := \hat{w} \circ \hat{\pi}_v \in \text{Cont}(\hat{A})$ (encore d'après la remarque 10.3(i)) et $\text{Cont}(j_A)(\hat{v}) = v$. Pour l'injectivité, montrons d'abord :

Lemme 10.76. *Soient $w \in \text{Cont}(\hat{A})$ et $v := \text{Cont}(j_A)(w)$. On a :*

- (i) $\Gamma_v = \Gamma_w$ et $\text{cl}_v = \text{cl}_w$.
- (ii) *Soit $\bar{w}$ la valuation résiduelle de $k(w)$. L'extension $i : k(v) \rightarrow k(w)$ de corps résiduels a image dense dans $k(w)$ pour la $\bar{w}$ -topologie (problème 9.53(i)).*

Démonstration. (i) : Soit $a \in \hat{A}$ avec $\gamma := w(a) \in \Gamma_w$; par continuité de w , il existe un voisinage $U \subset \hat{A}$ de 0 tel que $w(b) > \gamma$ pour tout $b \in U$, d'où $w(a+b) = \gamma$ pour tout tel b . Mais l'image de j_A rencontre la partie ouverte $a+U$, d'où $\gamma \in \Gamma_v$.

(ii) : Soit aussi $\bar{v}$ la valuation résiduelle de $k(v)$; d'après la remarque 10.3(i), les projections $\pi_v : A \rightarrow k(v)$ et $\pi_w : \hat{A} \rightarrow k(w)$ sont continues pour la $\bar{v}$ -topologie et la $\bar{w}$ -topologie. Soient de plus $\widehat{k(v)}$ et $\widehat{k(w)}$ les complétions de $k(v)$ et $k(w)$ pour ces topologies, et $j_v : k(v) \rightarrow \widehat{k(v)}$, $j_w : k(w) \rightarrow \widehat{k(w)}$ les applications de complétion; noter que i est continue pour ces topologies, donc se prolonge en un homomorphisme continu de corps topologiques $\hat{i} : \widehat{k(v)} \rightarrow \widehat{k(w)}$. Il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux $f : \hat{A} \rightarrow \widehat{k(v)}$ avec $f \circ j_A = j_v \circ \pi_v$ (remarque 9.47(iii)), et on a :

$$\hat{i} \circ f \circ j_A = \hat{i} \circ j_v \circ \pi_v = j_w \circ i \circ \pi_v = j_w \circ \pi_w \circ j_A$$

d'où $\hat{i} \circ f = j_w \circ \pi_w$, car l'image de j_A est dense dans $\hat{A}$ (exercice 1.26(iv)). Comme $k(w)$ est le corps des fractions de $\pi_w(\hat{A})$, il vient $j_w(k(w)) \subset \widehat{i(\widehat{k(v)})}$, i.e. j_w se factorise

à travers $\widehat{i}$ et une extension de corps $\phi : k(w) \rightarrow \widehat{k(v)}$. On a

$$\widehat{i} \circ \phi \circ i = j_w \circ i = \widehat{i} \circ j_v$$

d'où $\phi \circ i = j_v$. Or, d'un côté la topologie de $k(w)$ est induite par celle de $k(\widehat{w})$ via l'inclusion j_w (théorème 9.39(ii)), donc aussi par celle de $k(\widehat{v})$, via ϕ ; de l'autre côté, l'image de j_v est dense dans $k(\widehat{v})$. L'assertion en découle aussitôt. $\square$

Or, soient $w_1, w_2 \in \text{Cont}(\widehat{A})$ avec $\text{Cont}(j_A)(w_1) = \text{Cont}(j_A)(w_2)$; par le lemme 10.76(i), on peut supposer que $\Gamma_{w_1} = \Gamma_{w_2}$ et $w_1 \circ j_A = w_2 \circ j_A$. Comme l'image de j_A est dense dans $\widehat{A}$ et que la topologie de Γ_{w_1} est séparée, il vient $w_1 = w_2$ (exercice 1.26(iv)), CQFD.

Partie (ii) : Compte tenu de (i) et de la remarque 10.3(vi), on doit montrer que si $\widehat{v} \in \text{Cont}(\widehat{A})$ et $v := \text{Cont}(j_A)(\widehat{v}) \in \text{Cont}(A)_{\text{na}}$, alors $\widehat{v}$ est non analytique. Or, munissons $\mathfrak{p} := \text{Supp}(v)$ de la topologie induite par l'inclusion dans A ; si $\mathfrak{p}$ est un idéal ouvert de A , la complétion $\widehat{\mathfrak{p}}$ est un idéal ouvert de $\widehat{A}$ (exercice 9.49(iii)), et par continuité de $\widehat{v}$, on voit aisément que $\widehat{\mathfrak{p}} = \text{Supp}(\widehat{v})$: les détails sont laissés aux soins du lecteur; l'assertion en découle aussitôt.

Vérifions ensuite que $\text{Cont}(j_A)$ est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés : pour cela, soient $u \in \text{Cont}(\widehat{A})$, et $w' \in \text{Cont}(A)$ une spécialisation de

$$u' := \text{Cont}(j_A)(u).$$

D'après la proposition 8.109, il existe une spécialisation secondaire $v' \in \text{Spv } A$ de u' qui est aussi une g n r sation primaire de w' , et par le lemme 8.111(ii) il existe une spécialisation secondaire $v \in \text{Spv } \widehat{A}$ de u avec $\text{Spv}(j_A)(v) = v'$. On a $v \in \text{Cont}(\widehat{A})$ et $v' \in \text{Cont}(A)$ (remarque 10.3(v)), et d'après le lemme 10.76(i) on a aussi $\Gamma_v = \Gamma_{v'}$ et $c\Gamma_v = c\Gamma_{v'}$. Mais alors il existe une spécialisation primaire w de Γ_v dans $\text{Spv } \widehat{A}$ avec $\text{Spv}(j_A)(w) = w'$; toujours par la remarque 10.3(v), il vient $w \in \text{Cont}(\widehat{A})$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Si A est un anneau de Huber, il en est de même pour $\widehat{A}$, et j_A est un homomorphisme adique (proposition 9.86(i)), donc $\text{Cont}(A)$ et $\text{Cont}(\widehat{A})$ sont des espaces spectraux (théorème 10.12(ii)) et $\text{Cont}(j_A)$ est une application compacte (exercice 10.13(i)). D'après (i), on sait déjà que $\text{Cont}(j_A)$ est une bijection, donc il suffit de vérifier qu'elle est une application fermée, et la proposition 4.69(i) nous ramène à montrer que $\text{Cont}(j_A)$ est spécialisante; mais cela suit aussitôt de (ii).

Exercice 10.17 : Cela suit aussitôt de l'exercice 10.13(i,iii,iv), le problème 10.16(ii) et l'exercice 9.88(iii).

Problème 10.18, partie (i) : Evidemment, $w_I(1) \geq 0$ et $w_I(0) = +\infty$. Ensuite, on a $I^n \subset I^m$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \geq m$; or, si $a \in I^n$ et $b \in I^m$, il vient $a - b \in I^m$ et $ab \in I^{n+m}$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Evidemment on a $w_I(a) = u(a)$ pour tout $a \in I$, i.e. pour tout $a \in A$ avec $w_I(a) > 0$; en particulier, $w_I(a) \leq 0 \Leftrightarrow u(a) \leq 0$. Ensuite, si $w_I(a) = -n$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$, on a $aI^n \subset A_0$, d'où $aI^{n+1} \subset I \subset A'_0$, d'où $u(a) \geq -n - 1$, et de même, si $u(a) = -n$, alors $w_I(a) \geq -n - 1$, d'où l'assertion.

Partie (iii) : Posons $S := 1 + I$, de sorte que $A_{0,\text{loc}} = S^{-1}A_0$ et $A_{\text{loc}} = S^{-1}A_{\text{loc}}$. Montrons que :

$$(*) \quad S^{-1}(I^n) = I_{\text{loc}}^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cela est clair pour $n \geq 0$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, fixons un système fini $g_1, \dots, g_k$ de générateurs de I^n ; noter que I^{-n} est le noyau de l'application A -linéaire :

$$\phi : A \rightarrow (A/A_0)^k \quad a \mapsto (\overline{g_i a} \mid i = 1, \dots, k)$$

où $\overline{g;a}$ dénote la classe de $g;a$ dans A/A_0 . Par suite, $S^{-1}I^{-n} = \text{Ker}(S^{-1}\phi) = I_{\text{loc}}^{-n}$, et cela achève de vérifier (*) pour $n < 0$. Noter ensuite que I^n/I^{n+1} est un A_0/I -module pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc la localisation $I^n/I^{n+1} \rightarrow I_{\text{loc}}^n/I_{\text{loc}}^{n+1}$ est bijective pour tout $n \in \mathbb{Z}$; en outre, pour tout $m \leq n$ on a un diagramme commutatif de A_0 -modules à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^n/I^{n+1} & \longrightarrow & I^m/I^{n+1} & \longrightarrow & I^m/I^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_{\text{loc}}^n/I_{\text{loc}}^{n+1} & \longrightarrow & I_{\text{loc}}^m/I_{\text{loc}}^{n+1} & \longrightarrow & I_{\text{loc}}^m/I_{\text{loc}}^n \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par le lemme des cinq (exercice 2.104) et une simple récurrence sur m , on déduit que la localisation $I^m/I^{n+1} \rightarrow I_{\text{loc}}^m/I_{\text{loc}}^{n+1}$ est bijective pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$. Mais noter que $A/I^{n+1} = \bigcup_{m \leq n} I^m/I^{n+1}$, et de même pour $A_{\text{loc}}/I_{\text{loc}}^{n+1}$; donc la localisation $A/I^{n+1} \rightarrow A_{\text{loc}}/I_{\text{loc}}^{n+1}$ est bijective pour tout $n \in \mathbb{Z}$; on déduit aussitôt que $w_I = w_{I_{\text{loc}}} \circ i$, et l'identité $w_I^* = w_{I_{\text{loc}}}^* \circ i$ est une conséquence immédiate.

Partie (iv) : Si $a \in A^\circ$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^n I^k \subset A_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $w_I^*(a) \geq 0$. Ensuite, si $a \in I^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $w_I(a^n) > 0$ pour tout $n \geq n_0$, i.e. $a^n \in I$ pour tout tel n . Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $a^n \in IA^+$, on voit aisément que $w_I^*(a^n) > 0$, d'où $a \in I^+$. Cet argument montre aussi que $I^+ \subset A^\circ$, donc I^+ est aussi le radical de IA° .

Partie (v) : Soit aussi $w_{\bar{I}} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction d'ordre associé au couple $(\pi(A_0), \bar{I})$; on voit aisément que $w_{\bar{I}} \circ \pi(a) \geq w_I(a)$, d'où $w_{\bar{I}}^* \circ \pi(a) \geq w_I^*(a)$ pour tout $a \in A$. Pour l'inégalité opposée, soit $a \in A$, et supposons d'abord que $t := w_{\bar{I}}^* \circ \pi(a) > 0$; cela revient à dire qu'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $a^n \in I^{\phi(n)} + J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(n)/n = t$; en particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\phi(n) \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Or, il est clair que $w_I(b) \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $b \in I^k$, d'où $w_I^*(b) \geq k$ pour tout $b \in I^k + J$, d'après le problème 8.12(i,ii); par suite $n \cdot w_I^*(a) \geq \phi(n)$ pour tout $n \geq n_0$, et finalement $w_I^*(a) \geq t$. Ensuite, supposons que $t < 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N + t > 0$; fixons aussi un système fini $a_0, \dots, a_n$ de générateurs de I . On vient de voir que $w_{\bar{I}}^* \circ \pi(a_i^N) \geq N$, d'où $w_{\bar{I}}^* \circ \pi(aa_i^N) \geq N + t$ pour $i = 0, \dots, n$, et par ce qui précède, il vient alors $w_I(aa_i^N) \geq t + N$ pour $i = 0, \dots, n$, i.e. il existe une application $\psi_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $a^k a_i^{Nk} \in I^{\psi_i(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_i(k)/k = N + t$. Posons :

$$\psi(k) := \min(\psi_0(k), \dots, \psi_n(k)) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il vient $a^k a_i^{Nk} \in I^{\psi(k)}$ pour $i = 0, \dots, n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(k)/k = N + t$. Ainsi, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Nk > \psi(k) > 0$ pour tout $k \geq k_0$. En outre, avec $M(k) := (n+1)(Nk-1)+1$, on a $I^{M(k)} = \sum_{i=0}^n a_i^{Nk} I^{M(k)-Nk}$ (les détails sont laissés au lecteur). Posons $R(k) := M(k) - Nk + \psi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; alors :

$$R(k) \geq 0 \quad \text{et} \quad a^k I^{Nk-\psi(k)} I^{R(k)} \subset I^{R(k)} \quad \forall k \geq k_0.$$

Par une simple récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on déduit que $a^{pk} I^{p(Nk-\psi(k))} I^{R(k)} \subset I^{R(k)} \subset A_0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq k_0$, d'où $w_I(a^{pk}) \geq -R(k) - p(Nk - \psi(k))$ pour tous tels p and k . Par suite $w_I^*(a^k) \geq \psi(k) - Nk$ pour tout $k \geq k_0$, et finalement

$$w_I^*(a) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} (\psi(k) - Nk)/k = t.$$

En dernier lieu, si $t = 0$, par ce qui précède on a nécessairement $\alpha := w_I^*(a) \leq 0$. Supposons par l'absurde que $\alpha < 0$, et soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $-N\alpha \geq 1$; on a

$$w_{\bar{I}}^* \circ \pi(a_i a^{2N}) \geq w_{\bar{I}}^* \circ \pi(a_i) \geq 1 \quad \forall i = 0, \dots, n$$

donc il existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $w_{\bar{I}} \circ \pi(a_i^q a^{2Nq}) \geq 1$, i.e. $a_i^q a^{2Nq} \in I + J$ pour $i = 0, \dots, n$. Par suite, $w_{\bar{I}}^*(a_i^q a^{2Nq}) \geq 1$, donc il existe un multiple entier $p > 0$ de q tel que $a_i^p a^{2Np} \in A_0$ pour $i = 0, \dots, n$; d'autre part, comme dans le cas précédent, il existe un entier $M \geq p$ tel

que $I^M = \sum_{i=0}^n a_i^p I^{M-p}$, d'où $a^{2Np} I^p I^{M-p} \subset I^{M-p}$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, il vient alors $a^{2Npk} I^{pk} I^{M-p} \subset I^{M-p} \subset A_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où $w_I(a^{2Npk}) \geq -(pk + M - p)$ pour tout tel k . Ainsi, $w_I(a^{2Npk})/(2Npk) \geq -1/(2N) - (M - p)/(2Npk)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, d'où $w_I^*(a) \geq -1/(2N) \geq \alpha/2 > \alpha$, contradiction.

Partie (vi) : Posons $\bar{a} := \pi_R(a)$; l'inégalité $t := w_{I_{R_0}}^*(\bar{a}) \geq w_I^*(a)$ découle aussitôt des définitions (les détails sont confiés aux soins du lecteur). Ensuite, noter que $w_I(b^q) \geq -p$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $b \in K_p$; par suite, $w_I^*(b) \geq 0$ pour tout $b \in K$. Or, si $t > 0$, il existe une application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(n)/n = t$ et $\bar{a}^n \in I^{\phi(n)} R_0$ pour tout $n \geq n_0$, i.e. il existe $b \in K$ avec $a^n - b \in I^{\phi(n)}$, de sorte que $w_I^*(a^n) \geq \min(\phi(n), w_I^*(b))$, et ainsi $w_I^*(a) \geq 0$.

Supposons maintenant que $w_I^*(a) > 0$, de sorte que $t > 0$; il existe alors en outre $n_1 \geq n_0$ avec $a^n \in I$ pour tout $n \geq n_1$, d'où $a^n \in I^{\phi(n)} + (K \cap I)$; d'autre part, évidemment $K \cap I \subset \mathcal{N}(A)$, donc $w_I^*(b) = +\infty$ pour tout $b \in K \cap I$, d'où finalement $w_I^*(a^n) \geq \phi(n)$ pour tout $n \geq n_1$, par suite $w_I^*(a) \geq t$. En dernier lieu, si $t \leq 0$, il existe une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $\bar{a}^l I^{\psi(l)} \subset R_0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, et $\lim_{l \rightarrow +\infty} \psi(l)/l = t$. Cela revient à dire que $a^l I^{\psi(l)} \subset A_0 + K$, et puisque $I^{\psi(l)}$ est un idéal de type fini, il existe alors une application $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $a^l I^{\psi(l)} \subset A_0 + K_{p(l)}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Il vient $a^{kl} I^{k\psi(l)+p(l)} \subset A_0$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, d'où $w_I^*(a^l) \geq \psi(l)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, donc finalement $w_I^*(a) \geq t$.

Partie (vii) : Posons $\mu := \inf(w_I^*(ab) \mid b \in \Sigma)$; on doit vérifier que $\mu = 1 + w_I^*(a)$. On sait déjà que $w_I^*(ab) \geq w_I^*(a) + w_I^*(b) \geq w_I^*(a) + 1$ pour tout $b \in I$, donc on peut supposer que $w_I^*(a) < +\infty$. Supposons par l'absurde que $\mu > w_I^*(a) + \varepsilon + 1$ avec $\varepsilon > 0$. Cela revient à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

$$w_I(a^{kb^k}) \geq \lceil w_I^*(a^k) + k\varepsilon \rceil + k \quad \forall b \in \Sigma, \forall k \geq p$$

(où $\lceil w_I^*(a^k) + k\varepsilon \rceil$ désigne le plus petit entier $\geq w_I^*(a^k) + k\varepsilon$). Si $w_I^*(a) \geq 0$, noter que $\beta := \lceil w_I^*(a^p) + p\varepsilon \rceil > w_I^*(a^p) \geq 0$. Disons que $\Sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$; comme dans la preuve de (v), on trouve un entier $M > p$ tel que $I^M = \sum_{i=0}^n a_i^p I^{M-p}$, d'où $a^p I^M \subset I^{\beta+p} I^{M-p} = I^{\beta} I^M$. Puisque I^M est un A_0 -module de type fini, il existe alors $P(T) = T^d + c_1 T^{d-1} + \dots + c_d \in A_0[T]$ avec $c_k \in I^{k\beta}$ pour $k = 1, \dots, d$, tel que $P(a^p) \cdot I^M = 0$ (proposition 3.47). Par suite, $D(P(a^p)) \subset V(I^M)$, i.e. $\text{Spec}(A)_{\text{an}} \subset V(P(a^p))$; mais par hypothèse, $\text{Spec}(A)_{\text{an}}$ est dense dans $\text{Spec} A$, donc $V(P(a^p)) = \text{Spec} A$, d'où $P(a^p) \in \mathcal{N}(A)$, ainsi $w_I^*(P(a^p)) = +\infty$, et :

$$w_I^*(a^{pd}) = w_I^*(P(a^p) - \sum_{k=1}^d c_k a^{p(d-k)}) \geq \min(w_I^*(c_k a^{p(d-k)}) \mid k = 1, \dots, d).$$

D'autre part, $w_I^*(c_k a^{p(d-k)}) \geq w_I^*(c_k) + w_I^*(a^{p(d-k)}) \geq k\beta + (d-k)p \cdot w_I^*(a) > dp \cdot w_I^*(a)$ pour $i = 1, \dots, k$, d'où $w_I^*(a^{dp}) > dp \cdot w_I^*(a)$, contradiction.

En dernier lieu, si $w_I^*(a) < 0$, on peut faire ε suffisamment petit, de sorte que $\beta \leq 0$; soit $M \geq p$ un entier avec $N := M + \beta \geq 0$ et $I^M = \sum_{i=0}^n a_i^p I^{M-p}$; il vient alors $a^p I^{-\beta} I^N \subset I^{\beta+p} I^{M-p} = I^N$. Par récurrence sur k , on déduit que $a^{kp} I^{-k\beta} I^N \subset I^N \subset A_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où $w_I(a^{kp}) \geq k\beta - N$ pour tout tel k , et ainsi $w_I^*(a^p) \geq \beta \geq w_I^*(a^p) + p\varepsilon$, encore une contradiction.

Partie (viii) : D'après (iii), quitte à remplacer A par A_{loc} , on peut supposer que A soit topologiquement local; dans ce cas, on doit montrer que $q \in \{1, +\infty\}$, et que $q = +\infty \Leftrightarrow I \subset \mathcal{N}(A)$. Evidemment, si $I \subset \mathcal{N}(A)$, alors $q = +\infty$, et on sait que $w_I^*(b) \geq w_I(b) \geq 1$ pour tout $b \in \Sigma$, i.e. $q \geq 1$. Or, si $q > 1$, soit $p \in \mathbb{R}$ avec $q > p > 1$; l'hypothèse entraîne qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $b^k \in I^{\lceil pk \rceil}$ pour tout $b \in \Sigma$ et tout $k \geq k_0$, et évidemment $\lceil pk \rceil > k$ pour tout tel k , car $p > 1$. Disons que $\Sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, et prenons $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq k_0$ et $I^M = \sum_{i=0}^n a_i^{k_0} I^{M-k_0} \subset I^{\lceil pk_0 \rceil} I^{M-k_0} \subset I^{M+1}$. Puisque $I \subset \mathcal{J}(A_0)$, il vient $I^M = 0$ (corollaire 3.49), d'où $I \subset \mathcal{N}(A)$, comme souhaité. Noter aussi que $\bar{A}_{\text{loc}} = A_{\text{loc}}/JA_{\text{loc}}$; donc, $I\bar{A}_{\text{loc}} = 0 \Leftrightarrow IA_{\text{loc}} \subset JA_{\text{loc}} \Leftrightarrow q = +\infty$, d'où la dernière équivalence.

Partie (ix) : Noter que $v(a) \geq n$ pour tout $a \in I^n$ et tout $v \in \mathcal{R}_I$; d'autre part, $a \in J \Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $w_I(a^m) \geq mn$, d'où $v(a^m) \geq mn$, i.e. $v(a) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, $J \subset \text{Supp}(v)$ pour tout $v \in \mathcal{R}_I$. On a de même $J \subset \text{Supp}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{R}'_I$, en vertu de (iv). Compte tenu de (v), on peut alors supposer que $J = 0$, en particulier A est réduit (problème 8.12(iii)). On voit aussi aisément que $v(1+a) = 0$ pour tout $a \in I$ et tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$, donc toute telle v est la composition de la localisation topologique $i : A \rightarrow A_{\text{loc}}$ et d'une unique valuation $u : A_{\text{loc}} \rightarrow \Gamma_{v_0}$ (exercice 8.9); en outre, évidemment $v \in \mathcal{R}_I$ (resp. $v \in \mathcal{R}'_I$) si et seulement si $u \in \mathcal{R}_{I_{\text{loc}}}$ (resp. $u \in \mathcal{R}'_{I_{\text{loc}}}$), pour $I_{\text{loc}} := IA_{0,\text{loc}}$, et on a ainsi des bijections naturelles :

$$\mathcal{R}_{I_{\text{loc}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_I \quad \mathcal{R}'_{I_{\text{loc}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'_I \quad u \mapsto u \circ i.$$

D'après (iii), $w_I^* = w_{I_{\text{loc}}}^* \circ i$, et on voit aisément que $\{a \in A_{\text{loc}} \mid w_{I_{\text{loc}}}^*(a) = +\infty\} = 0$, car $J = 0$; quitte à remplacer A par A_{loc} , on peut alors supposer que A soit topologiquement local. Noter que si $I = 0$, alors $w_I^*(a) = 0$ pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ (les détails sont laissés au lecteur), d'où $\mathcal{R}_I = \emptyset$, et $\mathcal{R}'_I$ est l'ensemble des valuations triviales $v : A \rightarrow \{0, +\infty\}$; mais alors, pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ avec $a \notin \mathfrak{p}$ (car A est réduit). Soient $\bar{v} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathbb{R}_0$ la valuation triviale de $k(\mathfrak{p})$, et $v : A \rightarrow \mathbb{R}_0$ la composition de $\bar{v}$ avec la projection $A \rightarrow k(\mathfrak{p})$, de sorte que $v(a) = 0$, d'où l'assertion. On supposera donc que $I \neq 0$, et par suite $q = 1$, d'après (viii).

Or, soit $a \in A \setminus \{0\}$, et vérifions d'abord que $v(a) \geq w_I^*(a)$ pour tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$. En effet, si $w_I^*(a) > 0$, et si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 \geq w_I^*(a^k) > n$; il existe alors $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $w_I(a^{kr}) > nr$ pour tout $r \geq r_0$, i.e. $a^{kr} \in I^{nr}$. Par suite, $v(a^{kr}) \geq nr$ pour tout tel r , i.e. $v(a^k) \geq n$, donc $1+v(a^k) \geq w_I^*(a^k)$, i.e. $\frac{1}{k}+v(a) > w_I^*(a)$, d'où l'assertion, dans ce cas. Si $w_I^*(a) \leq 0$, et si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > -w_I^*(a^k) \geq n-1$; il existe alors $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $w_I(a^{kr}) > -nr$ pour tout $r \geq r_0$, i.e. $a^{kr} I^{nr} \subset A_0$. Par suite, $v(a^{kr}) + nr \geq 0$ pour tout tel r , donc $v(a^k) \geq -n$, et alors $1+v(a^k) \geq w_I^*(a^k)$, i.e. $\frac{1}{k}+v(a) \geq w_I^*(a)$, d'où l'assertion.

Vérifions ensuite que $w_I^*(a) \geq \inf\{v(a) \mid v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I\}$. Pour cela, posons

$$\mathcal{F} := \{(b, n) \in A \times \mathbb{N} \mid w_I^*(b) \geq w_I^*(a^n)\} \quad B_0 := \mathbb{Z}\left[\frac{b}{a^n} \mid (b, n) \in \mathcal{F}\right] \subset B := A\left[\frac{1}{a}\right].$$

Noter que $(b, 0) \in \mathcal{F}$ pour tout $b \in A^+$, donc B_0 contient l'image de A^+ dans B ; en outre, pour tous $(b, n), (b', n') \in \mathcal{F}$ on a $(bb', n+n'), (bn' + b'n, n+n') \in \mathcal{F}$; par suite, tout élément de B_0 est une fraction de la forme b/a^n avec $(b, n) \in \mathcal{F}$. Posons $I_0 := IB_0$, et munissons B_0 de sa topologie I_0 -adique, et B de la topologie $\mathcal{F}$ telle que $(B, \mathcal{F})$ soit un groupe topologique avec le sous-groupe ouvert B_0 ; par l'exercice 9.10(iii), on voit aisément que $(B, \mathcal{F})$ est un anneau de Huber avec sous-anneau de définition B_0 et idéal de définition I_0 . Soit C_0 (resp. C) la localisation topologique de B_0 (resp. de B), i.e. $C_0 = (1 + I_0)^{-1}B_0$ et $C = (1 + I_0)^{-1}B$. Montrons que $1 \notin I_0$. En effet, disons que $\Sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, et supposons que $1 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (b_i/a^{r_i})$ pour certains $(b_0, r_0), \dots, (b_n, r_n) \in \mathcal{F}$; alors il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $a^k = \sum_{i=0}^n a_i c_i$ pour certains $c_0, \dots, c_n \in A$, avec $w_I^*(c_i) \geq w_I^*(a^k)$ pour tout $i = 0, \dots, n$. D'où $w_I^*(a^k) \geq \min(w_I^*(a_i) + w_I^*(a^k) \mid i = 0, \dots, n)$, une contradiction. On a alors aussi $I_0 C_0 \neq C_0$, car la localisation $B_0/I_0 \rightarrow C_0/I_0 C_0$ est un isomorphisme.

Lemme 10.77. *Si $I_0 C_0 = 0$, alors $w_I^*(a) = 0$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $a \notin I^+$: car sinon, d'après (iv) on aurait $a^k/1 = 0$ dans C_0 pour quelque $k \in \mathbb{N}$, i.e. $a^k \cdot (1+x) = 0$ dans B_0 pour quelque $x \in I_0$, et noter que tout tel x est une fraction b/a^i avec $w_I^*(b) > w_I^*(a^i)$; d'où $a^l \cdot (a^i + b) = 0$ dans A pour quelque $l \in \mathbb{N}$, et ainsi $w_I^*(a^{l+i}) = w_I^*(a^l b) \geq w_I^*(a^l) + w_I^*(b) > w_I^*(a^l) + w_I^*(a^i)$, une contradiction. De l'autre côté, si $I_0 C_0 = 0$, on a aussi $a \in A^+$: en effet, l'hypothèse entraîne qu'il existe $x \in I_0$ avec $a_i \cdot (1+x) = 0$ dans B_0 pour tout $i = 0, \dots, n$; écrivons donc $x = \sum_{i=0}^n a_i b_i/a^r$ pour quelque $(b_0, r), \dots, (b_n, r) \in \mathcal{F}$. On a alors $a^l a_i (a^r - \sum_{i=0}^n a_i b_i) = 0$ dans A pour quelque $l \in \mathbb{N}$ et tout $i = 0, \dots, n$. Posons

$c := a^l(a^r - \sum_{i=0}^n a_i b_i)$; on vérifie aisément que l'on a soit $w_I^*(a) = +\infty$ (et alors, l'assertion est claire), soit $w_I^*(\sum_{i=0}^n a^l a_i b_i) > w_I^*(a^{l+r})$, et dans ce cas, en raisonnant comme dans la remarque 8.8(ii), on déduit que $w_I^*(c) = w_I^*(a^{l+r}) = (l+r) \cdot w_I^*(a)$. Mais puisque $cI = 0$, on a $w_I(c^k) \geq -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $w_I^*(c) \geq 0$, d'où l'assertion. $\square$

Si $I_0 C_0 = 0$, soit alors $u : C \rightarrow \{0, +\infty\}$ une valuation triviale quelconque de C , de sorte que $u(a/1) = 0$, et notons par $v : A \rightarrow \{0, \infty\}$ la composition de u avec la localisation $A \rightarrow C$; il vient $w_I^*(a) = v(a)$, et par construction on a $v \in \mathcal{R}'_I$, d'où l'assertion, dans ce cas. Ainsi, on peut supposer que $I_0 C_0 \neq 0$. Puisque C est réduit (exercice 3.38), il en est de même pour C_0 , et par suite, il existe $\mathfrak{p}_0 \in U := \text{Spec } C_0 \setminus V(I_0 C_0)$ (théorème 1.50(ii)); en outre U est une partie ouverte constructible de $\text{Spec } C_0$, car I_0 est de type fini, donc U est un espace spectral, avec la topologie induite par $\text{Spec } C_0$, et ainsi $\mathfrak{p}_0$ admet une spécialisation $\mathfrak{p}_1 \in \text{Min } U$ (corollaire 4.72(i)). D'autre part, l'adhérence $\overline{\{\mathfrak{p}_1\}}$ de $\{\mathfrak{p}_1\}$ dans $\text{Spec } C_0$ rencontre $V(I_0 C_0)$, car $I_0 C_0 \subset \mathcal{J}(C_0)$ (corollaire 1.51(ii)); soit alors $\mathfrak{q}$ un point maximal de l'espace spectral non vide $\overline{\{\mathfrak{p}_1\}} \cap V(I_0 C_0)$. L'image R de $C_{0,\mathfrak{q}}$ dans le corps résiduel $k(\mathfrak{p}_1)$ est ainsi un anneau local de dimension un; d'après l'exercice 8.23, il est par suite dominé par un anneau de valuation de $k(\mathfrak{p}_1)$ de dimension un; soit alors $\bar{u} : k(\mathfrak{p}_1) \rightarrow \mathbb{R}_o$ la valuation correspondante, et $u : C_0 \rightarrow \mathbb{R}_o$ la composition de $\bar{u}$ avec la projection $C_0 \rightarrow k(\mathfrak{p}_1)$. Comme $I_0 \not\subset \mathfrak{p}_1$, on a $q' := \min(u(a_0), \dots, u(a_n)) < +\infty$, et comme $I_0 \subset \mathfrak{q}$, on a $q' > 0$; quitte à remplacer u par $\frac{1}{q'} \cdot u$, on peut alors supposer que $q' = 1$, et quitte à permuter les a_i , on peut supposer que $u(a_0) = 1$. Par construction, $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in C_0$, et $u(x) \geq 1$ pour tout $x \in I_0 C_0$. On voit aussitôt que l'inclusion $B_0 \rightarrow B$ induit un isomorphisme $B_0[1/a_0] \xrightarrow{\sim} B[1/a_0]$, d'où un isomorphisme $C_0[1/a_0] \xrightarrow{\sim} C[1/a_0]$; d'après l'exercice 8.9, la valuation u se prolonge alors en une valuation $u' : C[1/a] \rightarrow \mathbb{R}_o$, et on dénote par $v : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ la composition de u' avec la localisation $A \rightarrow C[1/a_0]$. On a ainsi $v(x) \geq 0$ pour tout $x \in A^+$ et $\min(v(a_0), \dots, v(a_n)) = 1$, i.e. $v \in \mathcal{R}_I$; en outre $1 = v(a_0) \geq w_I^*(a_0) \geq 1$, d'où $w_I^*(a_0) = 1$. Or, si $w_I^*(a) \geq 0$, soient $\varepsilon > 0$ un nombre réel, et $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\varepsilon \geq r/s - w_I^*(a) \geq 0$; il vient $a_0^r/a^s \in B_0$, d'où $w_I^*(a) + \varepsilon \geq r/s = \frac{r}{s} \cdot v(a_0) \geq v(a)$, et comme ε est arbitraire, on conclut finalement que $w_I^*(a) \geq v(a)$. Si $w_I^*(a) < 0$, définissons l'idéal $K \subset A$, l'anneau de Huber $R := A/K$, et son sous-anneau de définition R_0 comme dans (vi); soient aussi $\pi_R : A \rightarrow R$ la projection, et $\bar{a} := \pi_R(a)$.

Lemme 10.78. (i) $\mathcal{R}_I = \{\bar{\nu} \circ \pi_R \mid \bar{\nu} \in \mathcal{R}_{IR_0}\}$.

(ii) $\text{Spec}(R)_{\text{an}}$ est une partie dense de $\text{Spec}(R)$.

Démonstration. (i) : On voit aussitôt que $\{\bar{\nu} \circ \pi_R \mid \bar{\nu} \in \mathcal{R}_{IR_0}\} \subset \mathcal{R}_I$. Réciproquement, soit $\nu \in \mathcal{R}_I$, et disons que $\nu(a_0) = 1$; il vient aisément $K \subset \text{Supp}(\nu)$, de sorte que $\nu = \bar{\nu} \circ \pi_R$ pour une valuation $\bar{\nu} : R \rightarrow \mathbb{R}_o$. Il est clair que $\inf(\bar{\nu}(\bar{b}) \mid \bar{b} \in IR_0) = 1$.

(ii) : Soient $b \in A$ et $\bar{b} := \pi_R(b)$, et supposons que $\text{Spec}(R)_{\text{an}} \subset V(\bar{b})$; cela revient à dire que $V(IR) \cup V(\bar{b}) = \text{Spec}(R)$, i.e. $V(\bar{b}IR) = \text{Spec}(R)$, d'où $\bar{b}IR \subset \mathcal{N}(R)$ (corollaire 1.51(i)). Puisque I est un idéal de type fini, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{b}^n I^n R = 0$ (les détails sont confiés aux soins du lecteur), i.e. $b^n I^n \subset K$; mais alors $b^n \in K$, i.e. $\bar{b} \in \mathcal{N}(R)$, et donc $V(\bar{b}) = \text{Spec}(R)$, d'où l'assertion. $\square$

Or, évidemment il suffit de vérifier que $w_I^*(a) \geq t(a) := \inf(\nu(a) \mid \nu \in \mathcal{R}_I)$, et d'autre part on a $w_I^*(a) = w_{IR_0}^*(\bar{a})$, d'après (v); au vu du lemme 10.78(i), on est alors ramené à vérifier que $w_{IR_0}^*(\bar{a}) \geq \inf(\nu(\bar{a}) \mid \nu \in \mathcal{R}_{IR_0})$, et compte tenu du lemme 10.78(ii), on peut ainsi remplacer A et a par R et $\bar{a}$, et supposer que $\text{Spec}(A)_{\text{an}}$ soit dense dans $\text{Spec } A$. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 - n > w_I^*(a) \geq -n$. Le cas $n = 0$ est déjà connu; soit alors $n > 0$, et supposons que l'on ait $w_I^*(x) \geq t(x)$ pour tout $x \in A$ avec $w_I^*(x) \geq 1 - n$. D'après (vii), il existe $b \in \Sigma$ tel que $w_I^*(ab) = w_I^*(a) + 1 \geq 1 - n$; par

hypothèse de récurrence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe alors $v_\varepsilon \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$ avec

$$w_I^*(ab) + \varepsilon \geq v_\varepsilon(ab) = v_\varepsilon(a) + v_\varepsilon(b) \geq 1 + v_\varepsilon(a)$$

i.e. $w_I^*(a) + \varepsilon \geq v_\varepsilon(a)$, comme souhaité.

Partie (x) : Au vu de (ix), évidemment $t(a) := \inf(v(a) \mid a \in \mathcal{R}_I) \geq w_I^*(a)$ pour tout $a \in A$. Si $w_I^*(a) = +\infty$, on a donc $t(a) = +\infty$; on peut ainsi supposer que $w_I^*(a) \in \mathbb{R}$. Si $w_I^*(a) > 0$, il vient $v(a) = +\infty$ pour tout $v \in \mathcal{R}'_I$, par (ix), donc $t(a) = w_I^*(a)$, toujours par (viii). De même, si $w_I^*(a) < 0$, on doit avoir $t(a) = w_I^*(a)$, car $v(a) \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{R}'_I$. En dernier lieu, si $w_I^*(a) = 0$, d'après (vii) il existe $b \in \Sigma$ tel que $w_I^*(ab) = 1$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{R}_I$ avec $1 \leq v_\varepsilon(ab) < 1 + \varepsilon$; mais $v_\varepsilon(b) \geq 1$, d'où $0 \leq v_\varepsilon(a) < \varepsilon$, et finalement $t(a) = 0$.

Partie (xi) : Evidemment il suffit de vérifier que $w_{\widehat{I}} \circ j = w_I$, et cela revient à montrer que $I^n = j^{-1}((\widehat{I})^n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, si $n \in \mathbb{N}$, l'assertion découle aussitôt du lemme 9.101(i,ii). Considérons ensuite l'application ϕ de la solution de (iii); il vient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & (A/A_0)^k \\ j \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{A} & \xrightarrow{\widehat{\phi}} & (\widehat{A}/\widehat{A}_0)^k \end{array}$$

où $\widehat{\phi}$ dénote la complétion de ϕ , et où la flèche verticale à droite est une bijection, d'après l'exercice 9.49(iii). On a $I^{-n} = \text{Ker}(\phi)$ et $(\widehat{I})^{-n} = \text{Ker}(\widehat{\phi})$ (car $(\widehat{I})^n = I^n \widehat{A}_0$, toujours d'après le lemme 9.101(i)), d'où l'identité souhaitée pour la puissance I^{-n} .

Partie (xii) : On vérifie aisément que $w_{IA^\circ}^*(a) \geq w_I^*(a)$ pour tout $a \in A$; or, soient $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $w_{IA^\circ}^*(a) \geq r > 0$, de sorte qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(n)/n = r$ et $a^n \in I^{\phi(n)} A^\circ$ pour tout $n \geq n_0$. Avec (iv) il vient $w_I^*(a^n) \geq \phi(n)$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $w_I^*(a) \geq r$. Ensuite, soit $a \in A$ tel que $r := w_I^*(a) < 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons par $\psi(n) \in \mathbb{N}$ le plus grand entier $\leq -rn$; soient en outre R et R_0 comme dans (vi), et $\bar{a} \in R$ l'image de a . D'après (vi) on a $w_{IR_0}^*(\bar{a}) = r$, et d'après (vii) il existe $b \in I^{\psi(n)}$ avec $w_{IR_0}^*(\bar{a}^n b) = w_{IR_0}^*(\bar{a}^n) + \psi(n) \leq 0$, d'où $w_I^*(a^n b) \leq 0$; par ce qui précède on a alors $w_{IA^\circ}^*(a^n b) \leq 0$, donc $w_{IA^\circ}^*(a^n) \leq -\psi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et finalement $w_{IA^\circ}^*(a) \leq r$. Ensuite, d'après (iv) on a $(A, \mathcal{T}_A^\circ)^\circ \subset (A, \mathcal{T}_A^\circ)^+ = A^+$. Pour l'inclusion opposée, si $w_I^*(a) \geq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $w_I(a^{np}) \geq -p$, d'où $a^{np} b^p \in A_0$ pour tout $b \in I$, par suite $a^n b \in A^\circ$ pour tout tel b , car A° est intégralement fermé dans A (exercice 9.21(iii)); mais alors $a \in (A, \mathcal{T}_A^\circ)^\circ$. En dernier lieu, $A^{\circ\circ} \subset (A, \mathcal{T}_A^\circ)^{\circ\circ}$ car $\text{Id}_A : A \rightarrow (A, \mathcal{T}_A^\circ)$ est continue. Si $a \in (A, \mathcal{T}_A^\circ)^{\circ\circ}$, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a^n \in IA^\circ$, d'où $a \in A^\circ$ (exercice 9.20(i)), par suite $a \in I^+$, car d'après (iv), I^+ est le radical de IA° ; cela montre que $(A, \mathcal{T}_A^\circ)^{\circ\circ} \subset I^+$, et puisque $IA^\circ \subset A^{\circ\circ}$, on a $I^+ \subset A^{\circ\circ}$ (exercice 9.21(iv)).

Problème 10.19, partie (i) : Soient $f := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$ et $g := \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n X^n$ deux éléments de $A\langle X^{\pm 1} \rangle$; il vient

$$w(a_n - b_n) \geq \min(w(a_n), w(b_n)) \geq \min(|f|_w, |g|_w) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

d'où $|f - g|_w \geq \min(|f|_w, |g|_w)$. De même, pour toute partie finie $S \subset \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $w(\sum_{k \in S} a_k b_{n-k}) \geq |f|_w + |g|_w$; puisque w est continue pour la $\circ$ -topologie de $\mathbb{R}$, il vient alors $w(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}) \geq |f|_w + |g|_w$, d'où $|f \cdot g|_w \geq |f|_w + |g|_w$. Il est aussi évident que $|1|_w \geq 0$ et $|0| = +\infty$, donc $|\cdot|_w$ est bien une semi-norme réelle. La continuité de $|\cdot|_w$ découle d'une inspection directe des définitions. Ensuite, soit w p -multiplicative, et montrons que $|f^k|_w \leq k \cdot |f|_w$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (l'inégalité opposée est déjà connue). Cela est trivial si $|f| = +\infty$, donc on peut supposer que $|f|_w \in \mathbb{R}$; puisque w est continue pour la $\circ$ -topologie de $\mathbb{R}$, il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $w(a_n) > |f|_w$ pour tout $|n| > p$. Posons $f_1 := \sum_{n=-p}^p a_n X^n$ et $f_2 := f - f_1$; ainsi, $|f_2|_w > |f|_w = |f_1|_w$,

d'où $|f_1^i f_2^{k-i}|_w > k \cdot |f|_w$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$, et en raisonnant comme dans la remarque 8.8(ii), on est aussitôt ramené à vérifier que $|f_1^k|_w \leq k \cdot |f|_w$. En outre, il est clair que $|(X^p f_1)^k|_w = |f_1^k|_w$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc on peut supposer que $f \in A[X]$. Soit alors $q := \min(n \in \mathbb{N} | w(a_n) = |f|_w)$, et posons $g_1 := \sum_{n=0}^{q-1} a_n X^n$ et $g_2 := f - g_1$; il vient $|g_1|_w > |g_2|_w$, et en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène à montrer que $|g_2^k|_w \leq k \cdot |g_2|_w$. Mais on a $g_2 = X^q \cdot h$ avec $h \in A[X]$, et il suffit alors de vérifier que $|h^k|_w \leq k \cdot |h|_w$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; quitte à remplacer f par h , on est ainsi ramené au cas où $q = 0$; dans ce cas, noter que $f^k = a_0^k + Xr$ avec $r \in A[X]$, d'où $|f^k|_w \leq w(a_0^k) = k \cdot |f|_w$, comme souhaité.

Partie (ii) : Remarquons d'abord que w et u sont continues pour la $\circ$ -topologie de $\mathbb{R}_\circ$, donc la question est bien posée. Notons aussi par $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle} : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ la fonction d'ordre associée à $(A_0\langle X^{\pm 1} \rangle, I\langle X^{\pm 1} \rangle)$, de sorte que $u_{\langle X^{\pm 1} \rangle} = w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}^*$, l'uniformisation de $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}$. Or, soient $p \in \mathbb{N}$ et $f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$ avec $|f|_w \geq p$, et fixons un système fini $(b_i | i = 0, \dots, n)$ de générateurs de I^p ; pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il existe alors $c_{0k}, \dots, c_{nk} \in A$ avec $w(c_{ik}) \geq w(a_k) - p$ pour tout $i = 0, \dots, n$, et tels que $a_k = \sum_{i=0}^n b_i c_{ik}$. D'où, $f = \sum_{i=0}^n b_i f_i$, avec $f_i := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{ik} X^k \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$ pour $i = 0, \dots, n$, et par suite $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \geq p$. Réciproquement, si $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \geq p$, on voit aisément que $|f|_w \geq p$. De même, on a $|f|_w \geq -p \Leftrightarrow I^p f \subset A_0\langle X^{\pm 1} \rangle \Leftrightarrow w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \geq -p$. Cela achève de vérifier que $|\cdot|_w = w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}$, d'où $|\cdot|_w^* = u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}$.

Ensuite, par inspection directe des définitions, on voit que :

$$I\langle X^{\pm 1} \rangle^n \cap A_0 X^p = I^n X^p \quad \forall n, p \in \mathbb{Z}$$

d'où $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(aX^p) = w(a)$ pour tout $a \in A$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, et par suite

$$(*) \quad u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(aX^p) = u(a) \quad \forall a \in A, \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Montrons maintenant que $\rho := u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \geq |f|_u$. On peut évidemment supposer que $\rho < +\infty$; soient alors $N, M \in \mathbb{N}$ avec $N > \rho$ et $a_k \in I^N$ pour tout $|k| > M$, et posons $g := \sum_{k=-M}^M a_k X^k$, $h := f - g$. Comme $h \in I\langle X^{\pm 1} \rangle^N$, on a $u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(h) \geq N$, d'où, par (*):

$$u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) = u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(g) \geq \min(u(a_k) | k = -M, \dots, M)$$

d'où l'inégalité souhaitée. Ensuite, soient $\mathcal{R}'_I$ (resp. $\mathcal{R}'_{I\langle X^{\pm 1} \rangle}$) l'ensemble des valuations triviales de A (resp. de $A\langle X^{\pm 1} \rangle$) dont le support contient I , et $\mathcal{R}_I$ (resp. $\mathcal{R}_{I\langle X^{\pm 1} \rangle}$) l'ensemble des valuations $v : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ (resp. $v : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_\circ$) telles que $\inf(v(a) | a \in I) = 1$ (resp. $\inf(v(g) | g \in I\langle X^{\pm 1} \rangle) = 1$). D'après le problème 10.18(ix) on a :

$$u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) = \inf(v(f) | v \in \mathcal{R}_{I\langle X^{\pm 1} \rangle} \cup \mathcal{R}'_{I\langle X^{\pm 1} \rangle}).$$

Noter que tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$ est une valuation continue de A (lemme 10.4(i)), donc $|\cdot|_v$ est une semi-norme bien définie sur $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, d'après (i). Cette semi-norme admet la description alternative suivante : soit $|\cdot|_{(0,0)}^v : A[X] \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ la valuation de Gauss de centre 0 et rayon 0 associée à v (voir l'exercice 8.11(i)); puisque $|X|_{(0,0)}^v = 0$, cette valuation se prolonge en une valuation $A[X^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ que l'on notera encore par $|\cdot|_{(0,0)}^v$ (exercice 8.9), et on voit aisément que $|Q|_{(0,0)}^v = \inf(v(c_k) | k \in \mathbb{Z})$ pour tout $Q(X) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k X^k \in A[X^{\pm 1}]$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). En particulier, $|\cdot|_{(0,0)}^v$ est continue pour la topologie de $A[X^{\pm 1}]$ induite par son inclusion dans $A\langle X^{\pm 1} \rangle$; compte tenu de la discussion de l'exemple 9.95(ii), elle se prolonge alors en une unique valuation continue $A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ (problème 10.16(i)), et on vérifie aisément que cette dernière coïncide avec $|\cdot|_v$. On voit ainsi que $|\cdot|_v \in \mathcal{R}_{I\langle X^{\pm 1} \rangle} \cup \mathcal{R}'_{I\langle X^{\pm 1} \rangle}$ pour tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$. Il vient alors :

$$u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \leq \inf(|f|_v | v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I) = \inf(v(a_k) | v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I, k \in \mathbb{Z})$$

pour tout $f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$. Mais, toujours d'après le problème 10.18(ix), on a aussi $u(a_k) = \inf\{v(a_k) \mid v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. D'où, $u_{\langle X^{\pm 1} \rangle}(f) \leq |f|_u$, et on obtient finalement l'identité $u_{\langle X^{\pm 1} \rangle} = |\cdot|_u$.

En dernier lieu, on voit aisément que $A\langle X \rangle \cap I\langle X^{\pm 1} \rangle^n = I\langle X \rangle^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par suite la fonction d'ordre $w_{\langle X \rangle} : A \rightarrow \mathbb{R}_0$ associée à $(A_0\langle X \rangle, I\langle X \rangle)$ est la restriction de $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}$, d'où $u_{\langle X \rangle} = (u_{\langle X^{\pm 1} \rangle})|_{A\langle X \rangle}$.

Exercice 10.20 : Munissons A et $B := A\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ des filtrations séparées et exhaustives telles que $A_n := I^n$ et $B_n := I^n B$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (où les puissances négatives sont définies comme pour le problème 10.18(i)); $(A, A_{\bullet})$ et $(B, B_{\bullet})$ sont alors des anneaux filtrés (définition 9.64(i)), et on a des isomorphismes d'anneaux :

$$\mathrm{gr}_{\bullet}(B, B_{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\bullet}(A, A_{\bullet})[X^{\pm 1}, Y_{\bullet}].$$

On a $\mathrm{gr}_0(A, A_0) = \overline{A}_0 := A_0/I$, et par hypothèse l'image de f dans $\overline{A}_0[X^{\pm 1}, Y_{\bullet}]$ est un élément Q dont les coefficients engendrent l'idéal $\overline{A}_0$; soient $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{N}$ tels que $P := X_1^{r_1} \cdots X_p^{r_p} Q \in \overline{A}[X_{\bullet}, Y_{\bullet}]$. Evidemment l'idéal de $\overline{A}_0$ engendré par les coefficients de P contient 1; d'après l'exercice 7.25(ii), P est alors un élément $\mathrm{gr}_{\bullet}(B, B_{\bullet})$ -régulier, donc de même pour Q ; d'autre part, il est clair que la multiplication par le scalaire f est un endomorphisme filtré μ_f de $(B, B_{\bullet})$, et l'endomorphisme induit $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mu_f)$ de $\mathrm{gr}_{\bullet}(B, B_{\bullet})$ coïncide avec la multiplication par le scalaire Q . La proposition 9.68(i) entraîne alors que μ_f est un endomorphisme injectif strict de l' A -module topologique $A\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$, i.e. il se factorise à travers un isomorphisme de A -modules topologiques $A \xrightarrow{\sim} fA\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$, pour la topologie de $fA\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ induite par l'inclusion dans $A\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$; en particulier, $fA\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ est complet et séparé, donc il est une partie fermée de $A\langle X^{\pm 1}, Y_{\bullet} \rangle$ (remarque 9.30(vii)).

Exercice 10.26, partie (i, ii) : D'après la proposition 10.21(ii), la partie $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est dense dans $\mathrm{Cont}(A)$, et la partie $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$ est dense dans $\mathrm{Cont}(A)_{\mathrm{an}}$. Les assertions suivent alors du corollaire 10.14.

Partie (iii) : Munissons $B := A/\mathfrak{m}$ de la topologie induite de A via la projection $\pi : A \rightarrow B$, et soit $B^+ \subset B$ la fermeture intégrale de $\pi(A^+)$ dans B . Alors B est un anneau de Huber et π est adique (exercice 9.81(v)), donc $\pi(A^+) \subset B^{\circ}$ (lemme 9.77(iv)); ainsi, $\underline{B} := (B, B^+)$ est un anneau affinoïde, et $\pi : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes. On voit aisément que l'image de $\mathrm{Spa}(\pi)$ est précisément la partie $\{v \in \mathrm{Spa} \underline{A} \mid \mathrm{Supp}(v) = \mathfrak{m}\}$; par suite, on est ramené à vérifier que $\mathrm{Spa} \underline{B} \neq \emptyset$, et d'après (i), il suffit de montrer que $B^{\mathrm{sep}} \neq 0$. Or, noter que $1 + A^{\circ\circ} \subset A^{\times}$, car A est topologiquement local; mais $A^{\circ\circ}$ est une partie ouverte de A , donc de même pour $1 + A^{\circ\circ}$. Pour tout $u \in A^{\times}$, la partie $u \cdot (1 + A^{\circ\circ})$ est alors un voisinage ouvert de u contenu dans $A^{\times}$; ainsi, $A^{\times}$ est une partie ouverte de A , et donc l'adhérence $\overline{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$ dans A est un idéal contenu dans $A \setminus A^{\times}$ (lemme 9.5(iii)); comme $\mathfrak{m}$ est maximal, il vient $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$, donc $B^{\mathrm{sep}} = B \neq 0$.

Problème 10.27, partie (i) : Soit $A_{\bullet} := (A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$ un système d'anneaux indexé par un ensemble filtrant $(\Lambda, \leq)$, avec homomorphismes de transition $f_{\lambda\mu} : A_{\lambda} \rightarrow A_{\mu}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \leq \mu$; soit en outre $(f_{\lambda} : A_{\lambda} \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ un co-cône universel de base $A_{\bullet}$. Notons par T la limite du système induit d'espaces topologiques $(\mathrm{Spv} A_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^{\mathrm{op}})$. Rappelons que les points de T sont les suites cohérentes $v_{\bullet} := (v_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^{\mathrm{op}})$ avec $v_{\lambda} \in \mathrm{Spv} A_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $\mathrm{Spv}(f_{\lambda\mu})(v_{\mu}) = v_{\lambda}$ pour tous λ, μ comme ci-dessus (voir le problème 2.25(iii)). Pour tout tel $v_{\bullet}$ et tout $\lambda \in \Lambda$, soient $\mathfrak{p}_{\lambda}$ et $k(v_{\lambda})$ respectivement le support et le corps résiduel de v_{λ} , et $k(v_{\lambda})^+ \subset k(v_{\lambda})$ l'anneau de valuation de la valuation résiduelle $\overline{v}_{\lambda}$ de v_{λ} . D'après le problème 2.51(ii), il existe un unique $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$ tel que $\mathfrak{p}_{\lambda} = f_{\lambda}^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et on voit aisément que le corps

résiduel $k(\mathfrak{p})$ représente la colimite du système des corps résiduels $(k(v_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$; plus précisément, le co-cône des extensions de corps résiduels $(f_{\lambda,(\mathfrak{p})} : k(v_\lambda) \rightarrow k(\mathfrak{p}) \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel. Par construction, pour chaque extension de corps résiduels $k(v_\lambda) \rightarrow k(v_\mu)$ on a $k(v_\lambda)^+ = k(v_\lambda) \cap k(v_\mu)^+$; ainsi, la colimite du système induit d'anneaux $(k(v_\lambda)^+ \mid \lambda \in \Lambda)$ est représentée par un sous-anneau $k(\mathfrak{p})^+ \subset k(\mathfrak{p})$. Compte tenu du lemme 8.16, on vérifie aisément que $k(\mathfrak{p})^+$ est un anneau de valuation de $k(\mathfrak{p})$, et $k(v_\lambda)^+ = f_{\lambda,(\mathfrak{p})}^{-1}(k(\mathfrak{p})^+)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. En résumant, cela montre déjà que le cône $(\mathrm{Spv} f_\lambda : \mathrm{Spv} A \rightarrow \mathrm{Spv} A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ induit une *surjection continue* :

$$\omega : \mathrm{Spv} A \rightarrow T \quad v \mapsto (\mathrm{Spv} f_\lambda(v) \mid \lambda \in \Lambda).$$

Ensuite, par simple inspection on voit que la topologie de $\mathrm{Spv} A$ est induite par celle de T , via ω ; comme $\mathrm{Spv} A$ est un espace T_0 , il s'ensuit aussitôt que ω est injective, et donc ω est un homéomorphisme, d'où l'assertion.

Partie (ii.a) : Fixons $\lambda_0 \in \Lambda$, ainsi qu'un idéal de définition $I_0 \subset A_{\lambda_0 0}$; quitte à remplacer Λ par la partie cofinale $\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}$, on peut supposer que λ_0 soit le plus petit élément de Λ (exercice 2.35(iii,iv)). Dans ce cas, $I_\lambda := f_{\lambda_0 \lambda}(I_0) \cdot A_{\lambda_0}$ est un idéal de définition de A_{λ_0} pour tout $\lambda \in \Lambda$; en outre, si f_λ est adique, il en est de même pour sa restriction $A_{\lambda_0} \rightarrow A_0$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, et par suite $I := f_{\lambda_0}(I_0) \cdot A_0$ est un idéal de définition de A_0 (lemme 9.77(ii)). Cela montre l'unicité de la topologie souhaitée sur A ; d'autre part, il existe une unique topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire $\mathcal{T}_A$ sur le $\mathbb{Z}$ -module A telle que $(I^n \mid n \in \mathbb{N})$ soit un système fondamental de voisinages ouverts de 0. Il reste à montrer que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un anneau topologique, car alors il sera évidemment un anneau de Huber. D'après l'exercice 9.10(iii), cela revient à vérifier que pour tout $a \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $aI^n \subset A_0$; mais pour tout tel a il existe $\lambda \in \Lambda$ et $a_\lambda \in A_\lambda$ avec $f_\lambda(a_\lambda) = a$ (exercice 2.31(iv)), et on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_\lambda I_\lambda^n \subset A_{0\lambda}$, d'où $aI^n = f_\lambda(a_\lambda I_\lambda^n) \cdot A_0 \subset A_0$. Ensuite, soit $a \in A^{\circ\circ}$; ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda$, et $a_\lambda \in A_\lambda$ tels que $a^n \in I$ et $a = f_\lambda(a_\lambda)$. Par suite, il existe $\lambda' \in \Lambda$ et $b \in I_{\lambda'}$ avec $f_{\lambda'}(a_\lambda^n) = f_{\lambda'}(b)$; on trouve alors $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda, \lambda'$ tel que $f_{\lambda\mu}(a_\lambda^n) = f_{\lambda'\mu}(b)$, et en particulier $a_\mu := f_{\lambda\mu}(a_\lambda) \in A_\mu^{\circ\circ}$. Comme $f_\mu(a_\mu) = a$, cela achève de montrer que $A^{\circ\circ} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(A_\lambda^{\circ\circ})$.

Partie (ii.b) : Par construction, on a $A_0 \subset A^+$, donc A^+ est un sous-anneau ouvert de A ; il reste à vérifier qu'il est intégralement fermé dans A . Soient alors $a \in A$, et $P(X) \in A^+[X]$ un polynôme unitaire tel que $P(a) = 0$; on trouve $\lambda \in \Lambda$, un élément $a_\lambda \in A$, et un polynôme unitaire $P_\lambda(X) := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ de $A_\lambda^+[X]$ tels que $f_\lambda(a_\lambda) = a$ et $P = X^n + \sum_{i=1}^n f_\lambda(a_i) X^{n-i}$, d'où $f_\lambda(P_\lambda(a_\lambda)) = 0$. Pour tout $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$ posons $a_\mu := f_{\lambda\mu}(a_\lambda)$; il vient $a_\mu^n + f_{\lambda\mu}(a_1) a_\mu^{n-1} + \dots + f_{\lambda\mu}(a_n) = 0$ dans A_μ , pour un tel $\mu \geq \lambda$, d'où $a_\mu \in A_\mu^+$, et finalement $a = f_\mu(a_\mu) \in A^+$.

Partie (ii.c) : D'un côté, la topologie de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est induite par l'inclusion dans $\mathrm{Spv} A$, et de l'autre côté, la topologie de la limite T du système $(\mathrm{Spa} \underline{A}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ est induite par l'inclusion dans la limite du système induit $(\mathrm{Spv} A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Compte tenu de (i), il suffit alors de montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{Spa} \underline{A} \rightarrow T$$

est surjective. Soit alors $(v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in T$, et notons par $v \in \mathrm{Spv} A$ l'unique valuation telle que $\mathrm{Spv}(f_\lambda)(v) = v_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; ainsi, $v_\lambda \in \mathrm{Spa} \underline{A}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et en particulier, $v_\lambda(A_\lambda^+) \subset \Gamma_{v_\lambda}^+$. On déduit aussitôt que $v(a) \geq 0$ pour tout $a \in A^+$. D'après le lemme 10.4(i), il reste à vérifier que $v(a)$ est cofinal dans Γ_v , pour tout $a \in A^{\circ\circ}$, et on voit aisément que Γ_v représente la colimite du système de groupes ordonnés $(\Gamma_{v_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Soient alors $\lambda \in \Lambda$ et $\gamma \in \Gamma_{v_\lambda}$, et notons par $\bar{\gamma} \in \Gamma_v$ l'image de γ ; d'après (ii.a), quitte à remplacer λ par un indice $\mu \geq \lambda$ et γ par son image dans Γ_{v_μ} , on peut supposer que $a = f_\lambda(a_\lambda)$ pour quelque $a_\lambda \in A_\lambda^{\circ\circ}$. Comme $v_\lambda \in \mathrm{Cont}(A_\lambda)$, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_\lambda(a_\lambda^n) > \gamma$; par suite $v(a^n) > \bar{\gamma}$, d'où l'assertion.

Exercice 10.37, partie (i) : On va construire de proche en proche une résolution $L_\bullet \rightarrow N$ du A -module N telle que chaque L_i soit un A -module libre de rang fini. Pour $i = 0$, comme par hypothèse N est de type fini, il existe une surjection A -linéaire $\varepsilon : L_0 \rightarrow N$ avec L_0 libre de rang fini. Supposons ensuite, que pour $i \in \mathbb{N}$ donné, on a déjà exhibé $L_0, \dots, L_i$ avec les propriétés souhaitées, ainsi que les différentielles $d_j : L_j \rightarrow L_{j-1}$ pour $j = 0, \dots, i$ (avec $d_0 := \varepsilon$) ; comme A est noethérien, $\text{Ker } d_i$ est alors un A -module de type fini, et à nouveau on peut choisir une surjection A -linéaire $\pi : L_{i+1} \rightarrow \text{Ker } d_i$ avec L_{i+1} libre de rang fini ; la différentielle $d_{i+1} : L_{i+1} \rightarrow L_i$ sera évidemment la composition de π avec l'inclusion $\text{Ker } d_i \rightarrow L_i$. Or, $M \otimes_A L_\bullet$ est un complexe de B -modules de type fini, car M est un B -module de type fini ; comme B est noethérien, l'homologie de $M \otimes_A L_\bullet$ est alors un B -module de type fini, en tout degré. Mais $H_i(M \otimes_A L_\bullet)$ est canoniquement isomorphe au B -module $\text{Tor}_i^A(M, N)$, d'après la remarque 10.36(ii), d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $(L_\bullet, d_\bullet) \rightarrow N$ une résolution projective du A -module N ; pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a un diagramme commutatif de C -modules

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_B (M \otimes_A L_{i+1}) & \xrightarrow{\sim} & (P \otimes_B M) \otimes_A L_{i+1} \\ P \otimes_B (M \otimes_A d_{i+1}) \downarrow & & \downarrow (P \otimes_B M) \otimes_A d_{i+1} \\ P \otimes_B (M \otimes_A L_i) & \xrightarrow{\sim} & (P \otimes_B M) \otimes_A L_i \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les isomorphismes de la proposition 3.18(i). Or, le C -module $H_i((P \otimes_B M) \otimes_A L_\bullet)$ est canoniquement isomorphe à $\text{Tor}_i^A(P \otimes_B M, N)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$; d'autre part, comme $P_{[g]}$ est un B -module plat, on des isomorphismes C -linéaires naturels : $H_i(P \otimes_B (M \otimes_A L_\bullet)) \xrightarrow{\sim} P \otimes_B H_i(M \otimes_A L_\bullet) \xrightarrow{\sim} P \otimes_B \text{Tor}_i^A(M, L)$ (proposition 2.102(iii)), d'où l'assertion.

Partie (iii) : Soit $(L_\bullet, d_\bullet) \rightarrow N$ comme dans la preuve de (ii) ; la platitude de la A -algèbre B implique que $B \otimes_A L_\bullet \rightarrow B \otimes_A N$ est une résolution projective du B -module $B \otimes_A N$ (exercice 4.102(ii)), et on a des isomorphismes B -linéaires :

$$H_i(M \otimes_B (B \otimes_A L_\bullet)) \xrightarrow{\sim} H_i((M \otimes_B B) \otimes_A L_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_i(M \otimes_A L_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(M, N)$$

par la proposition 3.18(i) et l'exercice 3.6(ii). Mais $H_i(M \otimes_B (B \otimes_A L_\bullet))$ est canoniquement isomorphe à $\text{Tor}_i^B(M, B \otimes_A N)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion.

Exercice 10.42, partie (i) : Définissons le foncteur $\pi : \text{AlgMod} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg} : (A, M) \mapsto A$ comme dans le §3.2.6 ; soit $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$ (voir l'exemple 1.114(vii)), et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$ soit $\phi_{n,m} : n \rightarrow m$ l'unique morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}$. De plus, pour tout anneau A et tout $M, N \in \text{Ob}(A - \text{Mod})$, notons par $0_{(A,M),(A,N)} : (A, M) \rightarrow (A, N)$ le morphisme $(\text{Id}_A, 0_{MN})$ de AlgMod , où $0_{MN} : M \rightarrow N$ dénote le morphisme zéro de M vers N (voir la section 2.4). La catégorie $\text{C}(\text{AlgMod})$ s'identifie naturellement à la sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \text{AlgMod})$ dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \text{AlgMod}$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) le foncteur $\pi \circ F : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Alg}$ est constant.

(b) $F\phi_{n+2,n} = 0_{F(n+2),F(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit aussi $j : \text{C}(\text{AlgMod}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \text{AlgMod})$ le foncteur d'inclusion. Considérons maintenant une petite catégorie I et un foncteur

$$C_\bullet : I \rightarrow \text{C}(\text{AlgMod}) \quad i \mapsto (A_i, (C_{i,\bullet}, d_{i,\bullet})).$$

D'après le lemme 2.55(ii) et l'exercice 3.22, la limite de $j \circ C_\bullet : I \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \text{AlgMod})$ est représentable dans $\text{Fun}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}}, \text{AlgMod})$, et se calcule terme à terme, d'après la remarque 2.56. Soit alors $(\eta_i : L \rightarrow j(A_i, C_{i,\bullet}) \mid i \in \text{Ob}(I))$ un cône universel de base $j \circ F$; d'après le lemme 2.52(i), pour montrer que $\text{C}(\text{AlgMod})$ est complète, il suffit de vérifier que

$$L : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\text{op}} \rightarrow \text{AlgMod}$$

est un objet de $\mathbf{C}(\mathbf{AlgMod})$. Or, par définition, Ln est un couple $(B_n, D_n) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AlgMod})$, et $\eta_{i,n} : Ln \rightarrow (A_i, C_{i,n})$ est un morphisme $(f_{i,n} : B_n \rightarrow A_i, g_{i,n} : D_n \rightarrow C_{i,n})$ de $\mathbf{AlgMod}$ pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, et d'après la solution de l'exercice 3.22, le cône induit $(f_{i,n} : B_n \rightarrow A_i \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ d'homomorphismes d'anneaux est universel pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et sa base est le foncteur $\pi \circ \text{ev}^n \circ C_\bullet : I \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$, qui par définition est indépendant de n . Il s'ensuit que, quitte à remplacer L par un objet isomorphe, on peut supposer que $B := B_n$ et $f_i := f_{i,n} : B \rightarrow A_i$ soient indépendants de $n \in \mathbb{Z}$. De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le cône $(g_{i,n} : D_n \rightarrow (C_{i,n})_{[f_i]} \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ est universel dans $B - \mathbf{Mod}$, et pour tout $m \leq n$ le morphisme $L\phi_{n,m}$ est caractérisé par la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} (B, D_n) & \xrightarrow{L\phi_{n,m}} & (B, D_m) \\ (f_i, g_{i,n}) \downarrow & & \downarrow (f_i, g_{i,m}) \\ (A_i, C_{i,n}) & \xrightarrow{(Id_{A_i}, d_{i,(n,m)})} & (A_i, C_{i,m}) \end{array} \quad \forall i \in \mathbf{Ob}(I)$$

avec $d_{i,(n,m)} := d_{i,m+1} \circ \dots \circ d_{i,n} : C_{i,n} \rightarrow C_{i,m}$ pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$. Il s'ensuit aussitôt que $L\phi_{n,m} = (Id_B, d_{n,m})$, où $d_{n,m} : D_n \rightarrow D_m$ est la limite de la transformation naturelle $(d_{i,(n,m)} \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$. Cela montre déjà que L vérifie la condition (a). En dernier lieu, on voit aisément que la limite de la transformation naturelle $(d_{i,(n+2,n)} = 0_{C_{i,n+2}C_{i,n}} : C_{i,n+2} \rightarrow C_{i,n} \mid i \in \mathbf{Ob}(I))$ est le morphisme zéro $0_{D_{n+2}D_n} : D_{n+2} \rightarrow D_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc L vérifie aussi la condition (b).

Afin de montrer que $\mathbf{C}(\mathbf{AlgMod})$ est cocomplète, on raisonne de manière analogue, avec la remarque 2.58(ii) et le dual du lemme 2.52(i) : les détails sont laissés au lecteur.

Partie (ii) : Soit $T : \mathbf{AlgMod} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ le foncteur d'oubli qui associe à tout objet (A, M) de $\mathbf{AlgMod}$ le groupe abélien M sous-jacent, et à tout morphisme $(f, g) : (A, M) \rightarrow (B, N)$ l'homomorphisme sous-jacent $g : M \rightarrow N$ de groupes abéliens. On a une diagramme commutatif de catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Morph}(\mathbf{AlgMod}) & \xrightarrow{\text{Ker}} & \mathbf{AlgMod} \\ \text{Morph}(T) \downarrow & & \downarrow T \\ \mathbf{Morph}(\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}) & \xrightarrow{\text{Ker}} & \mathbb{Z} - \mathbf{Mod} \end{array}$$

dont la flèche horizontale en bas est le foncteur Ker de la remarque 2.69(i), qui commute avec les colimites filtrantes, d'après l'exercice 2.70(iii). Avec l'exercice 2.60, on déduit qu'il en est de même pour le foncteur $\text{Morph}(T)$. Ainsi, $T \circ \text{Ker}$ commute avec les colimites filtrantes. Or, soit $((f_\lambda, g_\lambda) : (A_\lambda, M_\lambda) \rightarrow (A'_\lambda, M'_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ un système filtrant d'objets de $\mathbf{Morph}(\mathbf{AlgMod})$; choisissons un co-cône universel :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} (A_\lambda, M_\lambda) & \xrightarrow{(f_\lambda, g_\lambda)} & (A'_\lambda, M'_\lambda) \\ (h_\lambda, k_\lambda) \downarrow & & \downarrow (h'_\lambda, k'_\lambda) \\ (A, M) & \xrightarrow{(f, g)} & (A', M') \end{array} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

et posons $(A_\lambda, K_\lambda) := \text{Ker}(f_\lambda, g_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $(A, K) := \text{Ker}(f, g)$. On doit vérifier que le co-cône $((h_\lambda, t_\lambda) : (A_\lambda, K_\lambda) \rightarrow (A, K) \mid \lambda \in \Lambda)$ induit par $(*)$ est encore universel. Pour cela, choisissons aussi un co-cône universel

$$((l_\lambda, s_\lambda) : (A_\lambda, K_\lambda) \rightarrow (B, N) \mid \lambda \in \Lambda).$$

Il existe ainsi un unique morphisme $(l, s) : (B, N) \rightarrow (A, K)$ de $\mathbf{AlgMod}$ tel que $(l, s) \circ (l_\lambda, s_\lambda) = (h_\lambda, t_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Comme les colimites de $\mathbf{Morph}(\mathbf{AlgMod})$ se calculent terme à terme, on sait que le co-cône $(h_\lambda : A_\lambda \rightarrow A \mid \lambda \in \Lambda)$ est universel dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$, et de même pour le co-cône $(l_\lambda : A_\lambda \rightarrow B \mid \lambda \in \Lambda)$. Donc, on peut supposer que $A = B$ et $l_\lambda = h_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'où $l = Id_A$, et $s : N \rightarrow K$ est alors une application

A -linéaire. Or, comme T et $T \circ \text{Ker}$ commutent avec les colimites filtrantes, les deux co-cônes $(t_\lambda : K_\lambda \rightarrow K \mid \lambda \in \Lambda)$ et $(s_\lambda : K_\lambda \rightarrow N \mid \lambda \in \Lambda)$ sont universels dans la catégorie $\mathbb{Z} - \text{Mod}$; il s'ensuit que s est un isomorphisme de groupes abéliens, donc finalement s est un isomorphisme de A -modules, et (l, s) est un isomorphisme de AlgMod , d'où l'assertion.

Exercice 10.52 : D'après l'exercice 9.117(ii), si $P_{[f]}$ est un A -module plat, $\widehat{P}$ est un $\widehat{A}$ -module plat; supposons donc que $\widehat{P}$ soit un $\widehat{A}$ -module plat. Les applications de complétion $A \rightarrow \widehat{A}$ et $P \rightarrow \widehat{P}$ induisent un isomorphisme d'anneaux $h_n : A/I^n \xrightarrow{\sim} \widehat{A}/I^n \widehat{A}$ et de A/I^n -module $P/I^n P \xrightarrow{\sim} (\widehat{P}/I^n \widehat{P})_{[h_n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (corollaire 9.61(ii)); comme $\widehat{P}/I^n \widehat{P}$ est un $\widehat{A}/I^n \widehat{A}$ -module plat (remarque 3.74(vi)), il s'ensuit que $P/I^n P$ est un A/I^n -module plat, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors P est un A -module plat, par la remarque 10.51(i).

Exercice 10.53 : Posons $M' := \text{Ker } u$, $Q := u(M)$, $P' := \text{Coker } u$; si $P'_{[f]}$ est un A -module plat et si $M' = 0$, la suite de A -modules $0 \rightarrow M_{[f]} \xrightarrow{u} P_{[f]} \rightarrow P'_{[f]} \rightarrow 0$ est universellement exacte (problème 4.24(ii.a) ou exemple 8.128), donc $k(\mathfrak{m}_A) \otimes_A u$ est injective. Réciproquement, soit $k(\mathfrak{m}_A) \otimes_A u$ injective; par la proposition 3.11, et l'exemple 7.69, on a les suites exactes :

$$\begin{aligned} M'(\mathfrak{m}_A) &\rightarrow M(\mathfrak{m}_A) \xrightarrow{\alpha} Q(\mathfrak{m}_A) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \text{Tor}_1^A(k(\mathfrak{m}_A), P') \rightarrow Q(\mathfrak{m}_A) \xrightarrow{\beta} P(\mathfrak{m}_A) \rightarrow P'(\mathfrak{m}_A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

avec $\beta \circ \alpha = k(\mathfrak{m}_A) \otimes_A u$. Par suite, α est bijective, et β est injective. Alors

$$\text{Tor}_1^A(P', k(\mathfrak{m}_A)) = \text{Tor}_1^A(k(\mathfrak{m}_A), P') = 0$$

(théorème 8.126), et $P'_{[f]}$ est un A -module plat (remarque 10.51(i,ii)). Avec la suite exacte $0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow 0$, on déduit que aussi $Q_{[f]}$ est un A -module plat (exercice 8.129(i)), mais alors la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ est universellement exacte (problème 4.24(ii.a) ou exemple 8.128); en particulier, $M'(\mathfrak{m}_A) = \text{Ker } \alpha = 0$. Or, M' est un B -module de type fini, car B est noethérien, d'où $M' = 0$, par le lemme de Nakayama; *i.e.* u est injective.

Problème 10.61, partie (i) : En raisonnant comme dans la preuve du théorème 10.59, on trouve un sous-anneau noethérien $A_0 \subset A$, une A_0 -algèbre de type fini B_0 , et un B_0 -module de type fini M_0 , avec des isomorphismes $A \otimes_{A_0} B_0 \xrightarrow{\sim} B$ de A -algèbres, et $B \otimes_{B_0} M_0 \xrightarrow{\sim} M$ de B -modules. Noter que A représente la colimite du système filtrant $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses A_0 -sous-algèbres de type fini, et pour tout $\lambda \in \Lambda$ soient $j_{A,\lambda} : A_\lambda \rightarrow A$ l'inclusion, $B_\lambda := A_\lambda \otimes_{A_0} B_0$, $j_{B,\lambda} := j_{A,\lambda} \otimes_{A_0} B_0 : B_\lambda \rightarrow B$, et $M_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} M_0$. Or, soit $\mathfrak{q} \in U$, et posons $\mathfrak{q}_\lambda := j_{B,\lambda}^{-1}(\mathfrak{q})$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; d'après le théorème 10.59, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $M_{\lambda, \mathfrak{q}_\lambda}$ soit un A_λ -module plat, et d'après la proposition 10.56, il existe un voisinage U_λ de $\mathfrak{q}_\lambda$ dans $\text{Spec } B_\lambda$ tel que $M_{\lambda, \mathfrak{p}_\lambda}$ soit un A_λ -module plat pour tout $\mathfrak{p}_\lambda \in U_\lambda$. Soit alors $\mathfrak{p} \in (\text{Spec } j_{B,\lambda})^{-1}(U_\lambda)$, et $\mathfrak{p}_\lambda := j_{B,\lambda}^{-1}(\mathfrak{p}) \in U_\lambda$; il s'ensuit que $M_{\mathfrak{p}} \simeq B_{\mathfrak{p}} \otimes_B M \simeq B_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_\lambda} M_{\lambda, \mathfrak{p}_\lambda}$ est un A -module plat (exercice 3.76(i)), d'où l'assertion.

Partie (ii) : Pour tout $\mathfrak{q} \in U$ il existe $b \in B \setminus \mathfrak{q}$ tel que $D(b) \subset U$, et il suffit de montrer que la restriction $D(b) \rightarrow \text{Spec } A$ de $\text{Spec } f$ est ouverte. Pour cela, noter que $B' := B_b \simeq B[X]/(bX - 1)$ est une A -algèbre de présentation finie, et la localisation $B \rightarrow B'$ induit un homéomorphisme $D(b) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } B' : \mathfrak{r} \mapsto \mathfrak{r}B'$ (exemple 3.32); en outre, $M' := M_b$ est un B' -module de type fini avec $\text{Supp } M' = \text{Spec } B'$ et pour tout $\mathfrak{r} \in D(b)$ on a une identification naturelle de B' -modules : $M_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\sim} M'_{\mathfrak{r}B'}$ (remarque 3.58(iii)). Au vu de la proposition 3.77, il s'ensuit que M' est un A -module plat, et l'assertion découle alors du corollaire 6.116(i).

Partie (iii) : En raisonnant comme dans la preuve du théorème 10.59, on trouve un sous-anneau noethérien $A_0 \subset A$, une A_0 -algèbre $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ de type fini, et deux

B_0 -modules M_0, M'_0 de type fini, avec des isomorphismes $A \otimes_{A_0} B_0 \xrightarrow{\sim} B$ de A -algèbres et $B \otimes_{B_0} M_0 \xrightarrow{\sim} M, B \otimes_{B_0} M'_0 \xrightarrow{\sim} M'$ de B -modules. Noter que A est la colimite du système filtrant $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses A_0 -sous-algèbres de type fini, et posons

$$B_\lambda := A_\lambda \otimes_{A_0} B_0 \quad M_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} M_0 \quad M'_\lambda := B_\lambda \otimes_{B_0} M'_0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Alors, d'après le problème 3.69(ii), il existe $\lambda \in \Lambda$ et une application B_λ -linéaire $g_\lambda : M'_\lambda \rightarrow M_\lambda$ telle que $B \otimes_{B_\lambda} g_\lambda = g$ (sous les identifications naturelles $B \otimes_{B_\lambda} M'_\lambda \xrightarrow{\sim} M', B \otimes_{B_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{\sim} M$). En outre, par le théorème 10.59(ii), on peut supposer que M_λ soit un A_λ -module plat. Quitte à remplacer A_0, B_0, M_0, M'_0 par $A_\lambda, B_\lambda, M_\lambda, M'_\lambda$, on peut ainsi supposer que $(M_0)_{[f_0]}$ soit un A_0 -module plat, et $g = B \otimes_{B_0} g_0$ pour une application B_0 -linéaire $g_0 : M'_0 \rightarrow M_0$.

Or, si $\text{Ker } g_{\mathfrak{q}} = 0$ et si $\text{Coker } g_{\mathfrak{q}}$ est un A -module plat, la suite de A -modules $0 \rightarrow M'_q \rightarrow M_q \rightarrow \text{Coker } g_q \rightarrow 0$ est universellement exacte (problème 4.24(ii.a) ou exemple 8.128); donc, $\text{Ker } g_{\mathfrak{q},(\mathfrak{p})} = 0$, i.e. $\mathfrak{q} \in U_g$. Pour la réciproque, soient $j_A : A_0 \rightarrow A$ l'inclusion, $j_B := j_A \otimes_{A_0} B_0 : B_0 \rightarrow B$, $\phi_0 := \text{Spec } f_0 : \text{Spec } B_0 \rightarrow \text{Spec } A_0$, $\mathfrak{q}_0 := j_B^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } B_0$, et $\mathfrak{p}_0 := \phi_0(\mathfrak{q}_0) = j_A^{-1}(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } A_0$; soient aussi

$$B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B_{\mathfrak{q}} \quad \text{et} \quad B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0) := k(\mathfrak{p}_0) \otimes_{A_0} B_{0,\mathfrak{q}_0}.$$

D'un côté, g_0 induit une application $B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$ -linéaire $g_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0) := k(\mathfrak{p}_0) \otimes_{A_0} g_{0,\mathfrak{q}_0} : M'_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0) \rightarrow M_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$; de l'autre côté, on a des isomorphismes $B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ -linéaires :

$$M_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) \otimes_{B_0} M_0 \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) \otimes_{B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)} M_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$$

et de même pour $M'_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$. Ces isomorphismes identifient $g_{\mathfrak{q},(\mathfrak{p})}$ avec l'application $B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ -linéaire $B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) \otimes_{B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)} g_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$. L'extension de corps résiduels $k(\mathfrak{p}_0) \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est un homomorphisme plat d'anneaux, donc $B_{\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}) := k(\mathfrak{p}) \otimes_A B_{\mathfrak{q}_0} \simeq k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\mathfrak{p}_0)} B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$ est une $B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$ -algèbre plate (remarque 3.74(vi)); comme $B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ est une localisation de $B_{\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p})$, il s'ensuit que l'homomorphisme naturel $j_{\mathfrak{q},(\mathfrak{p})} : B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0) \rightarrow B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ est plat (remarque 3.74(i) et exercice 3.76(ii)). Mais $B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$ et $B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ sont des anneaux locaux d'idéaux maximaux $\mathfrak{q}_0 B_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0)$ et respectivement $\mathfrak{q} B_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$, donc $j_{\mathfrak{q},(\mathfrak{p})}$ est un homomorphisme *local*, et par suite il est fidèlement plat (problème 3.83(iii)); ainsi, $\text{Ker } g_{\mathfrak{q},(\mathfrak{p})} = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } g_{0,\mathfrak{q}_0}(\mathfrak{p}_0) = 0$ (problème 3.83(ii.d)), i.e. :

$$\mathfrak{q} \in U_g \Leftrightarrow \mathfrak{q}_0 \in U_{g_0} := \{\mathfrak{r}_0 \in \text{Spec } B_0 \mid g_{0,\mathfrak{r}_0}(\phi_0(\mathfrak{r}_0)) \text{ est injective}\}$$

i.e. $U_g = (\text{Spec } j_B)^{-1}(U_{g_0})$. Pour montrer (iii.b), on peut ainsi supposer que $\mathfrak{q}_0 \in U_{g_0}$, et d'après l'exercice 10.53 (appliqué à l'homomorphisme local $A_{0,\mathfrak{p}_0} \rightarrow B_{0,\mathfrak{q}_0}$ d'anneaux locaux noethériens induit par f_0), cela entraîne que $g_{0,\mathfrak{q}_0}$ est injective, et que $\text{Coker } g_{0,\mathfrak{q}_0}$ est un $A_{0,\mathfrak{p}_0}$ -module plat; alors, par le problème 4.24(ii.a) ou exemple 8.128 la suite de $A_{0,\mathfrak{p}_0}$ -modules

$$0 \rightarrow M'_{0,\mathfrak{q}_0} \rightarrow M_{0,\mathfrak{q}_0} \rightarrow \text{Coker } g_{0,\mathfrak{q}_0} \rightarrow 0$$

est universellement exacte. En particulier, $A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{0,\mathfrak{p}_0}} g_{0,\mathfrak{q}_0}$ est une injection $B_{\mathfrak{p}}$ -linéaire, et comme $B_{\mathfrak{q}}$ est une $B_{\mathfrak{p}}$ -algèbre plate (remarque 3.74(i)), $g_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{0,\mathfrak{p}_0}} g_{0,\mathfrak{q}_0})$ est injective. Ensuite, $A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{0,\mathfrak{p}_0}} \text{Coker } g_{0,\mathfrak{q}_0}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat (remarque 3.74(vi)), donc de même pour $\text{Coker } g_{\mathfrak{q}} \simeq B_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{0,\mathfrak{p}_0}} \text{Coker } g_{0,\mathfrak{q}_0})$ (exercice 3.76(i) et proposition 3.11). Cela achève la preuve de (iii.b). Pour vérifier (iii.a), soit

$$U'_0 := \{\mathfrak{r}_0 \in \text{Spec } B_0 \mid (\text{Coker } g_0)_{\mathfrak{r}_0} \text{ est un } A_0\text{-module plat}\}.$$

Comme B_0 est noethérien, $\text{Ker } g_0$ est un B_0 -module de type fini, donc

$$U''_0 := \text{Spec } B_0 \setminus \text{Supp}_B(\text{Ker } g_0)$$

est une partie ouverte de $\text{Spec } B_0$ (remarque 3.58(ii)), et de même pour la partie U'_0 , d'après la proposition 10.56. Mais d'après l'exercice 10.53, on a $U_{g_0} = U'_0 \cap U''_0$, donc U_{g_0} est une partie ouverte de $\text{Spec } B_0$, et finalement U_g est une partie ouverte de $\text{Spec } B$.



CETTE leçon est une introduction à l'étude de la structure fine des anneaux noethériens. Le premier sujet est la *théorie de la dimension*, à laquelle on consacre la section 11.2 : on établira notamment la finitude de la dimension des anneaux locaux noethériens (théorème 11.25 et corollaire 11.29), et on montrera que l'opération de complétion pour une topologie adique laisse inaltérée la dimension des modules de type fini sur un anneau local noethérien (corollaire 11.36) ; en outre, on étudiera la dimension des fibres d'un homomorphisme d'anneaux noethériens (propositions 11.37 et 11.43, et corollaire 11.39). Ces résultats reposent sur une investigation préalable de certains invariants de nature essentiellement combinatoire associés aux modules de type fini sur ces anneaux : la *série de Hilbert-Poincaré* et le *polynôme de Samuel*, qui font l'objet de la section 11.1.

Mais malgré son importance, la dimension n'est finalement qu'une mesure assez grossière de la taille du support d'un module ou d'un anneau : elle nous ne renseigne pas d'avantage sur sa topologie. Bien plus subtile, par contre, est la notion de *profondeur* étudiée à partir de la troisième section : il s'agit d'un invariant numérique associé à tout module M sur un anneau local noethérien A , qui est borné par la dimension de M , et qui s'exprime par la longueur maximale d'une *suite M -régulière* d'éléments de A (voir la définition 11.66). Si la profondeur de M coïncide avec la dimension, on dit que M est un *module de Cohen-Macaulay*, et on définit de même les *anneaux de Cohen-Macaulay* ; cette condition revient à dire que les *systèmes de paramètres* pour M sont exactement les suites M -régulières maximales, et entraîne des contraintes importantes sur la géométrie de M : premièrement, *tout idéal premier associé à un module M de Cohen-Macaulay est isolé*, et en outre, *toute partie fermée du support de M est caténaire*. Plus généralement, on dit qu'un anneau noethérien A est de Cohen-Macaulay, s'il en est de même pour chaque localisation $A_{\mathfrak{p}}$ de A ; on montrera que cette propriété est héritée par tout anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$, et par suite *toute algèbre de type fini sur un anneau de Cohen-Macaulay est caténaire*.

L'étude de la profondeur et des modules de Cohen-Macaulay a été révolutionnée au milieu des années 50 par l'introduction d'outils et de méthodes homologiques inspirés par la topologie algébrique : jadis des espèces invasives, le *complexe de Koszul* et la notion de *dimension projective* des modules sont désormais parfaitement intégrés au paysage naturel de l'algèbre commutative moderne. La section 11.4 leur y est entièrement dédiée ; on y démontre notamment la caractérisation due à J.-P. Serre de la classe la plus importante d'anneaux de Cohen-Macaulay, les *anneaux locaux réguliers*, *i.e.* les anneaux locaux noethériens dont l'idéal maximal est engendré par une suite régulière : d'après le théorème 11.103, ils sont précisément les anneaux locaux noethériens A de *dimension cohomologique finie*, *i.e.* tels que tout A -module de type fini admet une résolution libre de longueur finie.

La profondeur joue encore un rôle clef dans la dernière section 11.5, consacrée au *critère de normalité de Serre* (théorème 11.121) et au *théorème de Auslander-Buchsbaum* établissant la factorialité des anneaux locaux réguliers. Ma preuve de ce dernier est une adaptation de celle que l'on trouve au quatrième chapitre de l'ouvrage [16] de J. Dieudonné et A. Grothendieck. Des preuves plus courtes, et – du moins à première vue – plus élémentaires existent dans la littérature (voir *e.g.* [21] ou [55]) ; toutefois, la route que j'ai choisie me consente de donner leur juste relief à certaines constructions et idées géométriques sous-jacentes à la démonstration qui, à mon avis, sont quelque peu obscurcies par un traitement purement algébrique.

11.1. Série de Hilbert-Poincaré et polynôme de Samuel. L'une des idées les plus fertiles de l'analyse combinatoire consiste à associer à une suite numérique intéressante $a_\bullet := (a_n \mid n \in \mathbb{N})$ donnée, sa série génératrice $g(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$: toute sorte de relations récursives cachées entre les termes de $a_\bullet$ se manifestent alors comme des identités algébriques pour $g(t)$; dans cette section on exploite la même astuce pour l'étude des modules. Le point de départ est la définition suivante :

Définition 11.1. Soient A un anneau, M un A -module.

- (i) M est *simple*, si $M \neq 0$ et si les seuls sous-modules de M sont 0 et M .
- (ii) Une *série de composition* de M est une suite finie de A -sous-modules

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

telle que M_{i+1}/M_i soit un A -module simple pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Exemple 11.2. (i) Bien sûr, tout module n'admet pas une série de composition. Par exemple, on voit aisément qu'un $\mathbb{Z}$ -module est simple si et seulement s'il est cyclique de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier arbitraire. Il s'ensuit qu'un $\mathbb{Z}$ -module non nul admet une série de composition si et seulement s'il est de cardinalité finie, *i.e.* si et seulement s'il est de torsion et de type fini.

(ii) Plus généralement, on voit aisément que tout A -module simple doit être cyclique, donc isomorphe à un A -module de la forme A/I pour un idéal $I \subsetneq A$; de plus, si $\mathfrak{m} \subset A$ est un idéal maximal qui contient I , le A -module A/I contient le sous-module $\mathfrak{m}/I$, et donc $I = \mathfrak{m}$. Autrement dit, tout A -module simple est isomorphe au corps résiduel $k(\mathfrak{m})$ d'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A .

Proposition 11.3. Soient $(M_i \mid i = 0, \dots, n)$ une série de composition du A -module M , et $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_k = M$ une autre suite de sous-modules. Alors :

- (i) On a $k \leq n$.
- (ii) Si $(N_i \mid i = 0, \dots, k)$ est aussi une série de composition de M , alors $k = n$.

Démonstration. (i) : On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, on a $M = 0$, et l'assertion est évidente. Si $n \geq 1$, alors $k \geq 1$, et comme M_1 est simple, il existe un unique $i < k$ tel que $N_i \cap M_1 = 0$ et $N_{i+1} \cap M_1 = M_1$, d'où $N_i \subsetneq N_i + M_1 \subset N_{i+1}$. Quitte à interposer $N_i + M_1$ dans la deuxième suite (et ainsi remplacer k par $k+1$), on peut donc supposer que $N_{i+1} = N_i \oplus M_1$. On en déduit une suite

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_i = N_{i+1}/M_1 \subset N_{i+2}/M_1 \subset \cdots \subset M/M_1$$

de longueur $k-1$. Mais M/M_1 admet la série de composition $(M_i/M_1 \mid i = 1, \dots, n)$ de longueur $n-1$. Par hypothèse de récurrence il vient $k-1 \leq n-1$, *i.e.* $k \leq n$.

(ii) : Avec (i), il vient $n \leq k$, en échangeant les rôles de $M_\bullet$ et $N_\bullet$; d'où $k = n$. $\square$

Définition 11.4. Soient A un anneau, M un A -module. On dit que M est de *longueur finie* s'il admet une série de composition $(M_i \mid i = 0, \dots, n)$. Dans ce cas, la longueur n d'une suite de composition est appelée *longueur de M* , et notée :

$$l_A(M).$$

Si M n'est pas de longueur finie, on pose $l_A(M) := +\infty$. D'après la proposition 11.3(ii), la longueur de M ne dépend que du A -module M .

Exemple 11.5. (i) Soit M le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; on a la série de composition

$$0 \subset 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \subset M$$

donc $l_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = 3$. La suite ci-dessus n'est pas l'unique série de composition de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, car on a aussi la série : $0 \subset 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \subset M$ (de la même longueur).

(ii) Si K est un corps, évidemment un K -module M est de longueur finie si et seulement s'il est de K -dimension finie, et on a $l_K(M) = \dim_K M$.

(iii) Soient $\phi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et M un B -module. Avec la proposition 11.3(i) on voit aisément que

$$(*) \quad l_A(M_{[\phi]}) \geq l_B(M).$$

En outre, noter que si ϕ est surjectif et si N est un B -module simple, $N_{[\phi]}$ est un A -module simple; il s'ensuit aisément que dans ce cas on a l'égalité dans $(*)$.

Exercice 11.6. Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie, $j : A \rightarrow S^{-1}A$ la localisation, et M un A -module de longueur finie. Montrer que

$$l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = l_A((S^{-1}M)_{[j]}) \leq l_A(M).$$

Lemme 11.7. Soit A un anneau, et considérons une suite exacte de A -modules :

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0.$$

Alors, on a : $l_A(M) = l_A(M') + l_A(M'')$.

Démonstration. (Ici on pose $n + (+\infty) = (+\infty) + n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.) Si $l_A(M) < +\infty$, soit $(M_j | j = 0, \dots, n)$ une série de composition pour M . On voit aisément que, pour tout $j = 0, \dots, n-1$ le sous-quotient $i^{-1}(M_{j+1})/i^{-1}(M_j)$ est soit nul, soit simple, donc la suite $(i^{-1}M_j | j = 0, \dots, n)$ devient une série de composition pour M' , quitte à éliminer des répétitions. De même pour le sous-quotient $p(M_{j+1})/p(M_j)$, et donc la suite $(p(M_j) | j = 0, \dots, n)$ devient une série de composition pour M'' , encore quitte à éliminer des répétitions dans cette suite. Réciproquement, si $l_A(M') = n'$ et $l_A(M'') = n''$ avec $n', n'' \in \mathbb{N}$, et si $(M'_i | i = 0, \dots, n')$ et $(M''_j | j = 0, \dots, n'')$ sont des séries de composition pour M' et respectivement M'' , on obtient la série de composition de M :

$$0 = i(M'_0) \subset \dots \subset i(M'_{n'-1}) \subset i(M') \subset p^{-1}(M''_1) \subset \dots \subset p^{-1}(M''_{n''-1}) \subset M$$

de longueur $n' + n''$. □

Remarque 11.8. Soient A un anneau, M un A -module, et $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ une filtration finie par A -sous-modules de M . Par une simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on déduit aisément du lemme 11.7 que M est de longueur finie $\Leftrightarrow M_{k+1}/M_k$ est de longueur finie pour tout $k = 0, \dots, n-1$, et on a

$$l_A(M) = \sum_{k=0}^{n-1} l_A(M_{k+1}/M_k).$$

Proposition 11.9. Soit $A \neq \{0\}$ un anneau noethérien. On a les équivalences :

(a) $\dim A = 0 \Leftrightarrow$ (b) tout A -module de type fini a longueur finie $\Leftrightarrow$ (c) $l_A(A) < +\infty$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Par le théorème 7.31, on a une décomposition

$$A = A_1 \times \dots \times A_k$$

dont les facteurs A_i sont des anneaux locaux noethériens de dimension zéro. Si M est un A -module, l'exercice 3.66(i) (avec une simple récurrence sur k) nous donne une décomposition correspondante $M = M_1 \times \dots \times M_k$ pour certains A_i -modules M_i ($i = 1, \dots, k$). Evidemment, si M est un A -module de type fini, M_i est un A_i -module de type fini

pour tout $i = 1, \dots, k$; compte tenu de la remarque 11.8, on est réduit à montrer que $l_{A_i}(M_i) < +\infty$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

On peut donc supposer du départ que A soit local. De plus, encore par la remarque 11.8, on est aisément réduit au cas où M est cyclique, disons $M \simeq A/I$ pour un idéal $I \subset A$, et en vertu du lemme 11.7, il suffit de montrer que $l_A(A) < +\infty$. Or, soit $\mathfrak{m} \subset A$ l'idéal maximal; par la proposition 7.32 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$, d'où une filtration finie $0 \subset \mathfrak{m}^{n-1} \subset \mathfrak{m}^{n-2} \subset \dots \subset \mathfrak{m} \subset A$, et une fois de plus à l'aide de la remarque 11.8, on voit qu'il suffit de montrer que $l_A(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})$ est finie pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Mais $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ est un $k(\mathfrak{m})$ -module de type fini, donc $l_{k(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) < +\infty$, d'où l'assertion (voir l'exemple 11.5(ii,iii)).

(b) $\Rightarrow$ (c) est triviale.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Supposons par l'absurde, que $\dim A > 0$, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A tel que $\dim A_{\mathfrak{m}} > 0$; compte tenu de l'exercice 11.6, il suffit de montrer que $l_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) = +\infty$. Cela découle aisément des propositions 7.32 et 11.3(i). $\square$

Exemple 11.10. Comme application, on va montrer encore une autre solution du problème 3.53(i.b). Donc, soit $f : A^n \rightarrow A^m$ une injection A -linéaire; en raisonnant comme dans l'exemple 6.68 on peut supposer que A soit noethérien, et par l'exercice 1.61(i) on peut choisir un idéal premier minimal $\mathfrak{p} \subset A$. L'application $Id_{A_{\mathfrak{p}}} \otimes_A f : A_{\mathfrak{p}}^n \rightarrow A_{\mathfrak{p}}^m$ est encore injective, car $A_{\mathfrak{p}}$ est une A -algèbre plate (remarque 3.74(i,ii)). On peut donc remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$ et supposer que A soit noethérien de dimension zéro. Mais dans ce cas, en vertu de la proposition 11.9 et du lemme 11.7 on a :

$$l_A(\operatorname{Im} f) + l_A(\operatorname{Coker} f) = l_A(A^m) = m \cdot l_A(A).$$

D'autre part, $l_A(\operatorname{Im} f) = l_A(A^n) = n \cdot l_A(A)$, car f est injective. On a $l_A(A) > 0$, car $A \neq 0$, donc $n \leq m$, CQFD.

Exercice 11.11. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, et $I \subset \mathfrak{m}$ un idéal de A . Montrer que $l_A(A/I) < +\infty$ si et seulement si I est $\mathfrak{m}$ -primaire.

11.1.1. *Série de Hilbert-Poincaré d'un module gradué.* Soient $A := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau $\mathbb{N}$ -gradué noethérien, et $M := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ un A -module $\mathbb{N}$ -gradué. En vertu de l'exercice 6.75(i) on sait que A est une A_0 -algèbre de type fini, disons engendrée par un système $x_1, \dots, x_s$ d'éléments homogènes, de degrés $k_1, \dots, k_s > 0$.

Définition 11.12. Avec la notation ci-dessus, on dit que M est *borné* s'il est de type fini et si $l_{A_0}(M_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 11.13. (i) Tout quotient gradué et tout sous-module gradué d'un A -module borné est évidemment borné.

(ii) Si A_0 est artinien, tout A -module gradué M de type fini est borné; en effet, par l'exercice 6.75(ii) chaque composante homogène M_n de M est un A_0 -module de type fini, donc de longueur finie, par la proposition 11.9.

A tout A -module $\mathbb{N}$ -gradué borné M on associe la *série de Hilbert-Poincaré* :

$$P(M, t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} l_{A_0}(M_n) \cdot t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Théorème 11.14. (Hilbert-Serre) Avec la notation du §11.1.1, on a :

$$P(M, t) \cdot \prod_{i=1}^s (1 - t^{k_i}) \in \mathbb{Z}[t].$$

En outre, si $M \neq 0$, la fonction méromorphe $P(M, t)$ n'a pas de zéro pour $t = 1$.

Démonstration. On montrera plus précisément, par récurrence sur s , que pour toute partie $I \subset \{1, \dots, s\}$ il existe une fonction rationnelle

$$P_I(M, t) = \frac{g_I(t)}{\prod_{i \in I} (1 - t^{k_i})} \quad \text{avec } g_I(t) \in \mathbb{N}[t]$$

tel que $P(M, t) = \sum_{I \subset \{1, \dots, s\}} P_I(M, t)$. Si $s = 0$, on a $A = A_0$, et il s'ensuit aisément qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_k = 0$ pour tout $k \geq n$, d'où $P(M, t) \in \mathbb{N}[t]$.

Supposons donc que $s > 0$, et que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau gradué B engendré sur $B_0 = A_0$ par un système de $s - 1$ éléments homogènes, et tout B -module borné de type fini. Noter que $\bar{A} := A/x_s A$ est un anneau gradué, engendré par $x_1, \dots, x_{s-1}$ sur $\bar{A}_0 = A_0$, car x_s est homogène. Comme A est noethérien et M de type fini, la suite des sous-modules $K^j := \text{Ker}(x_s^j \cdot \text{Id}_M)$ est stationnaire, donc disons que $K^r = K^{r+1}$, et posons $M' := M/K^r$; il s'ensuit que x_s est M' -régulier (voir le §1.1.4). Comme x_s est un élément homogène de A , la graduation de M induit des graduations sur les modules $K^0, \dots, K^r, M'$, de sorte que $0 = K_n^0 \subset K_n^1 \subset \dots \subset K_n^r \subset M_n$ et $M'_n = M_n/K_n^r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $K^0, \dots, K^r$ et M' sont des A -modules bornés, et d'après la remarque 11.8 on a

$$P(M, t) = P(M', t) + \sum_{j=0}^{r-1} P(K^{j+1}/K^j, t).$$

Evidemment K^{j+1}/K^j est un $\bar{A}$ -module, pour tout $j = 0, \dots, r - 1$; par hypothèse de récurrence, $P(K^{j+1}/K^j, t)$ s'écrit alors sous la forme souhaitée. Il suffit donc de montrer l'assertion pour $P(M', t)$, i.e. on est ramené au cas où x_s est M -régulier.

Dans ce cas, posons $M_n := 0$ pour tout entier $n < 0$; la multiplication scalaire par x_s sur M se restreint en une application A_0 -linéaire $M_n \rightarrow M_{n+k_s}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, dont on dénote le conoyau L_{n+k_s} d'où la suite exacte courte de A_0 -modules

$$(*) \quad 0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n+k_s} \rightarrow L_{n+k_s} \rightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Or, $L := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n = \text{Coker}(x_s \cdot \text{Id}_M)$, donc L est un A -module borné de type fini. En outre, évidemment $x_s \cdot L = 0$, i.e. L est un $\bar{A}$ -module. D'autre part, compte tenu du lemme 11.7, la suite exacte $(*)$ donne l'identité :

$$l_{A_0}(M_n) - l_{A_0}(M_{n+k_s}) + l_{A_0}(L_{n+k_s}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on multiplie chaque identité ci-dessus par t^{n+k_s} et on additionne, on obtient

$$(1 - t^{k_s}) \cdot P(M, t) = P(L, t)$$

et par hypothèse de récurrence, la série $P(L, t)$ s'écrit sous la forme souhaitée, donc de même pour $P(M, t)$. Il reste à vérifier que $P(M, t)$ n'a pas de zéro en $t = 1$, si $M \neq 0$. Pour cela, noter que $g_I(1) > 0$ pour toute partie $I \subset \{1, \dots, s\}$ avec $g_I \neq 0$, et en outre $1 - t^{k_i} = (1 - t) \cdot (1 + t + \dots + t^{k_i-1})$ pour tout $i \in I$; donc, pour une telle partie I de cardinalité d_I , il existe une fonction méromorphe $Q_I(t)$, holomorphe au voisinage de $t = 1$, telle que

$$P_I(M, t) = (1 - t)^{-d_I} \cdot Q_I(t) \quad \text{avec} \quad Q_I(1) > 0.$$

Soient $d := \max(d_I \mid I \subset \{1, \dots, s\} \text{ avec } g_I \neq 0)$, et $S := \{I \subset \{1, \dots, s\} \mid d_I = d\}$; il s'ensuit que $P(M, t) = (1 - t)^{-d} \cdot Q(t)$, pour une fonction $Q(t)$ méromorphe et holomorphe en $t = 1$, et en outre $Q(1) = \sum_{I \in S} Q_I(1) > 0$, d'où l'assertion. $\square$

Pour tout A -module borné $M \neq 0$ on notera

$$d(M) \in \mathbb{N}$$

l'ordre du pôle de $P(M, t)$ en $t = 1$. Si $M = 0$, on a $P(M, t) = 0$, et on posera alors $d(M) := 0$. D'après le théorème 11.14 on a $d(M) \leq s$.

Corollaire 11.15. Avec la notation du §11.1.1, supposons $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 1$ (i.e. la A_0 -algèbre A est engendrée par sa composante homogène A_1). Alors il existe un polynôme $H_M(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $d(M) - 1$ et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$l_{A_0}(M_n) = H_M(n) \quad \forall n \geq r.$$

(Ici, on pose $\deg_X 0 = -1$, donc pour $d(M) = 0$, on a $H_M(X) = 0$).

Démonstration. Si $M = 0$, l'assertion est triviale. Si $M \neq 0$, on a $P(M, t) \neq 0$, et par définition $P(M, t) = f(t) \cdot (1-t)^{-d}$ pour un polynôme $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tel que $f(1) \neq 0$, et avec $d := d(M)$. Disons $f(t) := \sum_{j=0}^N a_j t^j$. Si $d = 0$, on a $P(M, t) = f(t)$, donc $l_{A_0}(M_n) = 0$ pour tout $n > N$, d'où le corollaire, dans ce cas. Si $d \geq 1$, un calcul standard donne le développement de Taylor

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{d+j-1}{d-1} \cdot t^j$$

d'où :

$$l_{A_0}(M_n) = \sum_{j=0}^N \binom{d+n-j-1}{d-1} \cdot a_j \quad \forall n \geq N.$$

On voit aisément que cette expression est un polynôme de la variable n , à coefficients rationnels, et de degré $\leq d-1$; en outre, le coefficient en degré $d-1$ est

$$\frac{1}{(d-1)!} \cdot \sum_{j=0}^N a_j = \frac{f(1)}{(d-1)!} \neq 0$$

d'où le corollaire. □

Définition 11.16. Le polynôme $H_M(X)$ dont l'existence est assurée par le corollaire 11.15 est appelé le *polynôme de Hilbert* de M .

Exemple 11.17. Soit $A_0 \neq \{0\}$ un anneau artinien; l'anneau $A := A_0[T_1, \dots, T_s]$ est muni de la graduation telle que A_n soit le A_0 -module libre engendré par les monômes de degré total n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va déterminer la série de Hilbert-Poincaré $P(A, t)$ par deux méthodes différentes :

- D'abord, on va compter le monômes de degré n en s indéterminées pour tous $n, s \in \mathbb{N}$, autrement dit, la cardinalité $c_{n,s}$ de l'ensemble $E_{n,s}$ des suites de nombres naturels $\nu_\bullet := (\nu_1, \dots, \nu_s)$ tels que $\sum_{i=1}^s \nu_i = n$. Or, à une telle suite $\nu_\bullet$ on associe la suite $(\mu_1, \dots, \mu_{s-1})$ telle que

$$\mu_i := i + \nu_1 + \dots + \nu_i \quad \forall i = 1, \dots, s-1.$$

On voit que $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{s-1} \leq n + s - 1$, et on dénote $E'_{n,s}$ l'ensemble des suites $\mu_\bullet$ de nombres naturels qui satisfaisaient cette dernière condition. On obtient ainsi une application $\phi : E_{n,s} \rightarrow E'_{n,s}$ qui est évidemment injective. Cette application est aussi surjective : en effet, sa réciproque est calculée explicitement de la façon suivante. Si $\mu_\bullet \in E'_{n,s}$, on pose $\mu_0 := 0$, $\mu_s := n + s$, et on associe à $\mu_\bullet$ la suite $\nu_\bullet$ telle que $\nu_i := \mu_i - \mu_{i-1} - 1$ pour tout $i = 1, \dots, s$. On voit aisément que la cardinalité de $E'_{n,s}$ est $\binom{n+s-1}{s-1}$, d'où

$$l_{A_0}(A_n) = l_{A_0}(A_0) \cdot \binom{n+s-1}{s-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, $P(A, t) = l_{A_0}(A_0) \cdot (1-t)^{-s}$ (cf. la preuve du corollaire 11.15).

- La deuxième méthode consiste à développer directement en série de puissances la fonction rationnelle $(1-t)^{-s}$:

$$\frac{1}{(1-t)^s} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}} t^\nu \right)^s = \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^s} t^{\nu_1} \dots t^{\nu_s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\nu_\bullet \in E_{n,s}} t^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{n,s} t^n$$

retrouvant ainsi plus directement le même résultat. En particulier, il vient $d(A) = s$.

Proposition 11.18. Soient A un anneau gradué noethérien, $M \neq 0$ un A -module gradué borné, $x \in A$ homogène de degré $k \geq 1$ et M -régulier (voir le § 1.1.4). Alors :

$$d(M/xM) = d(M) - 1.$$

Démonstration. Puisque x est homogène, $L := M/xM$ est bien un A -module gradué ; la composante homogène L_n de L en degré $n \in \mathbb{N}$ est M_n/xM_{n-k} si $n \geq k$, et M_n pour $n < k$. Le lemme 11.7 nous donne les identités :

$$l_{A_0}(M_n) - l_{A_0}(M_{n+k}) + l_{A_0}(L_{n+k}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si l'on multiplie ces identités par t^{n+k} et on additionne, il vient :

$$(1 - t^k) \cdot P(M, t) = P(L, t).$$

Mais $1 - t^k$ a un zéro d'ordre 1 en $t = 1$, d'où l'assertion. □

Exercice 11.19. Revenons à l'exercice 6.76(ii) : noter que le groupe D_{2n} agit sur $B := K[X, Y]$ par des *automorphismes d'algèbres graduées*, i.e. si $B_n \subset B$ dénote le K -sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n , on a $g(B_n) = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g \in D_{2n}$. Par suite, $B^{(\sigma)}$ et $B^{D_{2n}}$ sont des K -algèbres graduées. Déterminer $P(B^{(\sigma)}, t)$ et $P(B^{D_{2n}}, t)$ (cela veut dire que l'on regarde $B^{(\sigma)}$ comme un $B^{(\sigma)}$ -module gradué borné, dont on veut calculer la série d'Hilbert-Poincaré, et de même pour $B^{D_{2n}}$). Voir le problème 11.92 pour une généralisation.

11.1.2. *Modules filtrés et polynôme de Samuel.* On va maintenant appliquer les résultats du paragraphe précédent aux anneaux noethériens non gradués et aux modules munis d'une filtration.

Proposition 11.20. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal engendré par un système de s éléments, M un A -module de type fini, $M_\bullet := (M_n \mid n \in \mathbb{N})$ une I -filtration stable de M , et supposons que $l_A(M/IM) < +\infty$. Alors :

- (i) $l_n := l_A(M/M_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Il existe $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $\leq s$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $g(n) = l_n$ pour tout $n \geq r$.
- (iii) Le degré et le coefficient principal de $g(X)$ sont indépendants de $M_\bullet$.

Démonstration. On définit l'anneau gradué $G(A, I)$ et le $G(A, I)$ -module gradué $G(M_\bullet)$ comme au §9.5.2 (voir la remarque 9.109(i)).

(i) : Au vu du lemme 9.97, il suffit de montrer que $l_A(M/I^n M) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; mais d'après la remarque 11.8 on a

$$l_A(M/I^n M) = \sum_{k=0}^{n-1} l_A(I^k M/I^{k+1} M)$$

donc on est ramené à montrer que $l_A(I^k M/I^{k+1} M) < +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $M'_\bullet := (I^k M \mid k \in \mathbb{N})$ la filtration I -adique de M ; la multiplication scalaire du $G(A, I)$ -module $G(M'_\bullet)$ se restreint en une application A/I -bilinéaire naturelle

$$(I^k/I^{k+1}) \times (M/IM) \rightarrow I^k M/I^{k+1} M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d'où une application A -linéaire $(I^k/I^{k+1}) \otimes_{A/I} (M/IM) \rightarrow I^k M/I^{k+1} M$ qui est évidemment surjective. Or, I^k/I^{k+1} est un A/I -module de type fini, disons engendré par des éléments $a_1, \dots, a_p$; on déduit une application A/I -linéaire surjective $(A/I)^p \rightarrow I^k/I^{k+1}$, et finalement on conclut que $I^k M/I^{k+1} M$ est un quotient du A/I -module $(M/IM)^p$ dont la longueur est $p \cdot l_A(M/IM) < +\infty$, d'où l'assertion.

(ii) : Par le lemme 9.99 et la remarque 9.109(ii), le $G(A, I)$ -module $G(M_\bullet)$ est de type fini, et avec (i) on déduit que $G(M_\bullet)$ est borné ; évidemment $G(A, I)$ est engendré par sa composante homogène I/I^2 de degré 1, qui est par hypothèse un A/I -module de type fini, engendré par s éléments. Par le corollaire 11.15, il existe alors $H(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $< s$ et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que $l_A(M_n/M_{n+1}) = H(n)$ pour tout $n \geq r$. En outre, encore en vertu de la remarque 11.8 on a

$$l_A(M/M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} l_A(M_i/M_{i+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On conclut que le polynôme cherché $g(X)$ est solution du système

$$\begin{cases} g(r) = l_A(M/M_r) \\ g(X+1) - g(X) = H(X). \end{cases}$$

Pour montrer que ce système admet une solution $g(X)$ de degré $\leq s$, on dénote par $\mathbb{Q}[X]_n$ le $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}[X]$ constitué des polynômes de degré $\leq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on considère l'application $\mathbb{Q}$ -linéaire

$$\phi : \mathbb{Q}[X]_s \rightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[X]_{s-1} \quad f(X) \mapsto (f(r), f(X+1) - f(X)).$$

Par rapport aux bases $\mathcal{B} := (1, X, \dots, X^s)$ de $\mathbb{Q}[X]_s$, $\mathcal{B}' := (1, \dots, X^{s-1})$ de $\mathbb{Q}[X]_{s-1}$ et $\mathcal{B}'' := \{1\}$ de $\mathbb{Q}$, l'application ϕ admet la matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & r^s \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \binom{s}{s-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{pmatrix}$$

donc ϕ est inversible, d'où l'assertion.

(iii) : Soit $(M'_n \mid n \in \mathbb{N})$ une autre I -filtration stable de M ; il existe $k \in \mathbb{N}$ avec

$$M_{n+k} \subset M'_n \subset M_{n-k} \quad \forall n \geq k$$

(lemme 9.97). Soient donc $r' \in \mathbb{N}$ et $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $h(n) = l_A(M/M'_n)$ pour tout $n \geq r'$; si $M = 0$, il n'y a rien à montrer ; supposons ainsi que $M \neq 0$, de sorte que $g(X), h(X) \neq 0$. Il vient

$$g(n+k) \geq h(n) \geq g(n-k) \quad \forall n \geq k, r, r'$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n)/h(n) = 1$, et l'assertion s'ensuit aussitôt. $\square$

En particulier, si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien, et si I est un idéal $\mathfrak{m}$ -primaire de A , le quotient A/I est artinien, donc pour tout A -module M de type fini, le quotient M/IM est de longueur finie par la proposition 11.9, et la proposition 11.20 s'applique à la filtration I -adique $(I^n M \mid n \in \mathbb{N})$ de M . On obtient ainsi dans ce cas un entier $r \in \mathbb{N}$ et un polynôme

$$\chi_M^I(X) \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{tel que} \quad \chi_M^I(n) = l_A(M/I^n M) \quad \forall n \geq r.$$

Le polynôme $\chi_M^{\mathfrak{m}}(X)$ est parfois appelé le *polynôme de Samuel* de M et sera noté dans la suite simplement $\chi_M(X)$. Si $M \neq 0$, on pose aussi

$$d(M) := \deg \chi_M(X).$$

Proposition 11.21. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, et $M \neq 0$ un A -module de type fini. Alors, pour tout idéal $\mathfrak{m}$ -primaire I de A on a*

$$\deg \chi_M^I(X) = d(M).$$

Démonstration. Par hypothèse, $\mathfrak{m}$ est le radical de I ; comme $\mathfrak{m}$ est de type fini, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^k \subset I$, d'où $\mathfrak{m}^{kn} M \subset I^n M \subset \mathfrak{m}^n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\chi_M(n) \leq \chi_M^I(n) \leq \chi_M(nk) \quad \forall n \geq r$$

d'où l'assertion. $\square$

Remarque 11.22. On n'essayera pas de définir $d(M)$ dans le cas trivial où $M = 0$. Noter néanmoins que pour $M \neq 0$, les invariants ainsi obtenus pour anneaux gradués et anneaux locaux non gradués se correspondent : à savoir, compte tenu du corollaire 11.15, une inspection directe de la preuve de la proposition 11.20 montre que $d(M)$ est égal à l'invariant noté $d(G(M_\bullet))$ au paragraphe précédent, qui est l'ordre du pôle en $t = 1$ de la série

de Hilbert-Poincaré associée au $G(A, I)$ -module gradué $G(M_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n M / I^{n+1} M$, pour tout idéal $\mathfrak{m}$ -primaire I de A . Dans le cas non gradué on a aussi la contrepartie suivante de la proposition 11.18 :

Lemme 11.23. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini, $x \in \mathfrak{m}$ un élément M -régulier. Alors $M/xM \neq 0$, et on a*

$$d(M/xM) \leq d(M) - 1.$$

Démonstration. La première assertion suit du corollaire 3.49. Posons $M' := xM \subset M$, $M'' := M/M'$, et $M'_n := M' \cap \mathfrak{m}^n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a la suite exacte

$$0 \rightarrow M'/M'_n \rightarrow M/\mathfrak{m}^n M \rightarrow M''/\mathfrak{m}^n M'' \rightarrow 0.$$

Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $l_A(M'/M'_n) = \chi_M(n) - \chi_{M''}(n)$ pour tout $n \geq r$. D'autre part, par le lemme de Artin-Rees, la $\mathfrak{m}$ -filtration $(M'_n | n \in \mathbb{N})$ est stable, et en outre $M' \simeq M$, car x est M -régulier. Par la proposition 11.20, il existe alors $r' \in \mathbb{N}$ et un polynôme $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ dont le degré et coefficient principal sont égaux à ceux de χ_M , et tel que $l_A(M'/M'_n) = g(n)$ pour tout $n \geq r'$. Il en découle aussitôt que $\deg \chi_{M''} < \deg \chi_M$. $\square$

Corollaire 11.24. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, et*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de A -modules non nuls de type fini. Alors

$$d(M) = \max(d(M'), d(M'')).$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $M'_n := M' \cap \mathfrak{m}^n M$. Si l'on applique le lemme 11.7 à la suite exacte

$$0 \rightarrow M'/M'_n \rightarrow M/\mathfrak{m}^n M \rightarrow M''/\mathfrak{m}^n M'' \rightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

on trouve $r \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_M(n) = l_A(M'/M'_n) + \chi_{M''}(n)$ pour tout $n \geq r$. De l'autre côté, la $\mathfrak{m}$ -filtration $(M'_n | n \in \mathbb{N})$ est stable, par le lemme de Artin-Rees, donc la proposition 11.20 nous donne un entier $r' \in \mathbb{N}$ et un polynôme $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $d(M')$ tel que $l_A(M'/M'_n) = g(n)$ pour tout $n \geq r'$. On conclut :

$$\chi_M(n) = g(n) + \chi_{M''}(n) \quad \forall n \geq r, r'.$$

Les coefficients principaux de ces polynômes sont positifs, car ils prennent leur valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \geq r, r'$. L'assertion est une conséquence immédiate. $\square$

11.2. Théorie de la dimension des anneaux locaux noethériens. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini. On pose

$$\delta(M) := \min(n \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m} \text{ avec } l_A(M/(x_1 M + \dots + x_n M)) < +\infty).$$

Théorème 11.25. (Krull-Chevalley-Samuel) *Avec la notation ci-dessus, on a :*

$$\delta(M) = d(M) = \dim M.$$

Démonstration. Rappelons que $\dim M := \dim(\text{Supp } M)$ (exemple 4.65(iii)).

• Montrons d'abord que $\delta(M) \geq d(M)$: en effet, soit $I \subset \mathfrak{m}$ un idéal engendré par $\delta(M)$ éléments, tel que $l_A(M/IM) < +\infty$; par la proposition 11.20, il existe $r \in \mathbb{N}$ et un polynôme $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $\leq \delta(M)$ tel que $l_A(M/I^n M) = g(n)$ pour tout $n \geq r$. Evidemment, $l_A(M/\mathfrak{m}^n M) \leq l_A(M/I^n M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $d(M) \leq \deg g(X)$, d'où l'assertion.

• Ensuite, montrons que $d := d(A) \geq \dim A$. On raisonne par récurrence sur d . Si $d = 0$, la fonction $n \mapsto l_A(A/\mathfrak{m}^n)$ est stationnaire, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, d'où $\dim A = 0$ (proposition 7.32). Soit donc $d > 0$ et supposons que l'inégalité souhaitée soit déjà connue pour tout anneau local noethérien B avec $d(B) < d$. Si $\dim A = 0$, l'assertion est triviale; sinon, soit $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ une chaîne strictement croissante

d'idéaux premiers de A de longueur $r \geq 1$, et choisissons $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. On pose $\bar{A} := A/\mathfrak{p}_0$ et on dénote par $\bar{x} \in \bar{A}$ la classe de x . Par construction, $\bar{x} \neq 0$ et $\bar{A}$ est intègre ; avec le lemme 11.23 il vient

$$d(\bar{A}/\bar{x}\bar{A}) \leq d(\bar{A}) - 1.$$

Soit aussi $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\mathfrak{p}_0$ l'idéal maximal de $\bar{A}$; évidemment

$$l_{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}^n) \leq l_A(A/\mathfrak{m}^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $d \geq d(\bar{A})$ et on conclut que $d - 1 \geq d(\bar{A}/\bar{x}\bar{A})$. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient $\dim \bar{A}/\bar{x}\bar{A} \leq d - 1$; mais les images des $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ nous donnent une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $\bar{A}/\bar{x}\bar{A}$, donc $r - 1 \leq d - 1$, i.e. $r \leq d$, et finalement $\dim A \leq d$.

• Montrons que $d(M) \geq \dim M$ pour un A -module de type fini $M \neq 0$ arbitraire. En effet, par le corollaire 7.11 il existe une filtration finie $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ un idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de A tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$. Il s'ensuit aisément que $\text{Supp } M = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_n)$, et donc

$$\dim M = \max(\dim A/\mathfrak{p}_1, \dots, \dim A/\mathfrak{p}_n).$$

De l'autre côté, le corollaire 11.24 implique aisément que

$$d(M) = \max(d(A/\mathfrak{p}_1), \dots, d(A/\mathfrak{p}_n)).$$

Mais on vient de voir que $d(A/\mathfrak{p}_i) \geq \dim A/\mathfrak{p}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, d'où l'assertion.

• Il ne reste qu'à montrer l'inégalité $\dim M \geq \delta(M)$. Pour cela, soit $d := \dim M$; notons aussi $\bar{A} := A/\text{Ann}_A(M)$. Evidemment M est aussi un $\bar{A}$ -module, et pour tout quotient $Q := M/(x_1M + \dots + x_nM)$ on a $l_A(Q) = l_{\bar{A}}(Q)$ (voir l'exemple 11.5(iii)) ; quitte à remplacer A par $\bar{A}$, on peut alors supposer que $\dim A = d$. Par ce qui précède, on sait déjà que $d < +\infty$, et on va exhiber inductivement une suite d'éléments $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que, pour chaque $i = 1, \dots, d$ la hauteur de tout idéal premier contenu dans le support de $Q_i := M/(x_1M + \dots + x_iM)$ soit $\geq i$. Comme $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal premier de A de hauteur d , on en déduira que $\text{Supp } Q_d = \{\mathfrak{m}\}$, i.e. le radical de $I := \text{Ann}_A Q_d$ est $\mathfrak{m}$, donc A/I est artinien et évidemment Q_d est un A/I -module de type fini ; ainsi, finalement $l_A(Q_d) = l_{A/I}(Q_d) < +\infty$ (en vertu de la proposition 11.9 et l'exemple 11.5(iii)), d'où l'inégalité souhaitée.

Posons donc $Q_0 := M$; trivialement, la hauteur de tout $\mathfrak{p} \in \text{Supp } Q_0$ est ≥ 0 . Soit ensuite $d \geq i > 0$, et supposons que le quotient Q_{i-1} a déjà été exhibé. Rappelons que $\text{Supp } Q_{i-1} = V(\text{Ann}_A(Q_{i-1}))$ n'admet qu'un nombre fini d'éléments minimaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ (exercice 6.109(iii)). Par hypothèse, $\text{ht } \mathfrak{p}_j \geq i - 1$ pour tout $j = 1, \dots, s$, et quitte à permuter les $\mathfrak{p}_j$, on peut supposer qu'il existe $t \leq s$ tel que

$$\text{ht } \mathfrak{p}_j = i - 1 \quad \forall j = 1, \dots, t \quad \text{et} \quad \text{ht } \mathfrak{p}_j \geq i \quad \forall j = t + 1, \dots, s.$$

En particulier, $\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{m}$ pour tout $j = 1, \dots, t$, donc il existe $x_i \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j=1}^t \mathfrak{p}_j$ (proposition 1.58), et on pose $Q_i := Q_{i-1}/x_i Q_{i-1}$. Evidemment, $\text{ht } \mathfrak{p} \geq i - 1$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Supp } Q_i$, car $\text{Supp } Q_i \subset \text{Supp } Q_{i-1}$. De l'autre côté, les seuls éléments de $\text{Supp } Q_{i-1}$ de hauteur $i - 1$ sont les idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$; mais pour tout $q \in Q_i$, on a forcément $x_i \in \text{Ann}_A(q)$, donc aucun des $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ n'appartient à $\text{Supp } Q_i$ (voir le corollaire 7.8(ii,v.a)). On conclut que l'hauteur de tout $\mathfrak{p} \in \text{Supp } Q_i$ est $\geq i$, et cela achève la preuve du théorème. $\square$

Définition 11.26. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un A -module de type fini, et $d := \dim M$. Un *système de paramètres* pour M est une suite $x_1, \dots, x_d$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ tel que $M/(x_1M + \dots + x_dM)$ soit de longueur finie.

Remarque 11.27. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien.

(i) Avec le théorème 11.25 et l'exercice 11.11, on voit que $r := \dim(A)$ est le plus petit des entiers n tels qu'il existe un idéal $\mathfrak{m}$ -primaire de A engendré par n éléments, et une

suite $x_1, \dots, x_r$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ est un système de paramètres pour A si et seulement si elle engendre un idéal $\mathfrak{m}$ -primaire.

(ii) En particulier *tout anneau local noethérien a dimension finie*. Ce résultat est d'autant plus remarquable, qu'il existe des anneaux intègres noethériens (forcément non locaux) de dimension infinie : le problème 11.28 en présente un spécimen, découvert par Nagata en 1962.

Problème 11.28. (i) Soit A un anneau tel que :

- $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau noethérien pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$
- $\text{Max } A/xA$ est un ensemble fini, pour tout $x \in A \setminus \{0\}$.

Montrer que A est noethérien.

(ii) Soient K un corps, et $A := K[X_0, X_1, X_2, \dots]$ la K -algèbre des polynômes des indéterminées $(X_i | i \in \mathbb{N})$. Soit aussi $(r_i | i \in \mathbb{N})$ une suite d'entiers positifs telle que $r_{i+1} - r_i > r_i - r_{i-1} > 0$ pour tout $i > 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ soit $\mathfrak{p}_i \subset A$ l'idéal premier engendré par $(X_j | j = r_i, \dots, r_{i+1} - 1)$, et posons $S := A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}_i$. Dédurre de (i) que $S^{-1}A$ est noethérien.

(iii) Montrer que $\text{ht}(S^{-1}\mathfrak{p}_i) = r_{i+1} - r_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc $\dim S^{-1}A = +\infty$.

Signalons l'important corollaire suivant, que l'on avait déjà annoncé au §7.4.2 :

Corollaire 11.29. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. On a :*

$$\dim A \leq \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Démonstration. En effet, par la proposition 3.51 on sait que $\mathfrak{m}$ est engendré par tout système d'éléments qui relève une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, d'où $\delta(A) \leq \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, et il suffit d'appliquer le théorème 11.25. $\square$

Exercice 11.30. (i) Soient K un corps algébriquement clos, A une K -algèbre de type fini, et $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ un système fini d'éléments distincts de $V := \text{Max } A$; notons W l'ensemble algébrique obtenu de V , après pincement des points $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$, suivant la construction détaillée au §6.4.1. Donc, $W = \text{Max } A'$, où $A' \subset A$ dénote l'égaliseur des projections $A \rightarrow A/\mathfrak{m}_i = K$ ($i = 1, \dots, n$), et tout système $t_1, \dots, t_r$ de générateurs de la K -algèbre A' induit un plongement de W dans K^r . Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit aussi $d_i := \dim A_{\mathfrak{m}_i}$. Montrer que $r \geq d_1 + \dots + d_n$.

(ii) Par exemple, l'ensemble algébrique obtenu en pinçant n points de l'espace affine $K^d = \text{Max } K[T_1, \dots, T_d]$, ne peut pas être plongé dans K^r , si $r < nd$.

Corollaire 11.31. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$, et $M \neq 0$ un A -module de type fini. Alors on a :*

$$(*) \quad \dim M/(x_1M + \dots + x_rM) \geq \dim M - r.$$

En outre, les deux membres de $(*)$ sont égaux $\Leftrightarrow$ il existe $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que $(x_i | i = 1, \dots, d)$ soit un système de paramètres pour M .

Démonstration. Posons $M' := M/(x_1M + \dots + x_rM)$, $d := \dim M$ et $d' := \dim M'$, et soit $x_{r+1}, \dots, x_{r+d'}$ un système de paramètres pour M' ; évidemment :

$$l_A(M/(x_1M + \dots + x_{r+d'}M)) = l_A(M'/(x_{r+1}M' + \dots + x_{r+d'}M')) < +\infty$$

d'où $r + d' \geq d$ (théorème 11.25). Si, en outre, $r + d' = d$, évidemment $(x_1, \dots, x_d)$ est un système de paramètres pour M . Réciproquement, s'il existe $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que $(x_1, \dots, x_d)$ soit un système de paramètres pour M , alors la longueur de $M'/\sum_{k=r+1}^d x_k M'$ est finie, donc $d' \leq d - r$, et avec $(*)$, il vient $d' = d - r$. $\square$

Corollaire 11.32. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini, $x \in \mathfrak{m}$, et posons $\Sigma := \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M) \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim M\}$. Alors :*

$$(*) \quad \dim M/xM \geq \dim M - 1$$

et les deux membres de $(*)$ sont égaux si et seulement si $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$.

Démonstration. L'inégalité $(*)$ est un cas particulier du corollaire 11.31. Ensuite, noter que $M/xM = M \otimes_A A/xA$; d'après l'exercice 3.64(ii.a) on a alors :

$$\Sigma \cap V(x) = \Sigma \cap \text{Supp}_A(M) \cap V(x) = \Sigma \cap \text{Supp}_A(M/xM)$$

et d'autre part, $\Sigma \cap V(x) = \emptyset \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\dim M/xM \leq \dim M - 1$ si et seulement si $\Sigma \cap \text{Supp}_A(M/xM) = \emptyset$. $\square$

Le corollaire suivant est la traduction algébrique de l'observation géométrique intuitive selon laquelle toute composante irréductible de l'ensemble des solutions d'un système de r équations polynomiales a codimension $\leq r$.

Corollaire 11.33. Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$, et $a_1, \dots, a_r \in A$. Posons $h := \text{ht}(\mathfrak{q})$ et $I_k := a_1A + \dots + a_kA$ pour $k = 1, \dots, r$. On a :

- (i) $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } V(I_r)$.
- (ii) $\text{ht}(\mathfrak{p}/I_k) \geq \text{ht}(\mathfrak{p}) - k$ pour tout $\mathfrak{p} \in V(I_r)$ et tout $k = 1, \dots, r$.
- (iii) $\text{ht}(\mathfrak{p}/I_k) = r - k$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Max } V(I_r)$ tel que $\text{ht}(\mathfrak{p}) = r$, et $k = 1, \dots, r$.
- (iv) Il existe $b_1, \dots, b_h \in \mathfrak{q}$ tels que $\mathfrak{q} \in \text{Max } V(b_1A + \dots + b_hA)$.

Démonstration. (i) : Rappelons que $\text{Max } V(I_r)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont minimaux parmi ceux qui contiennent I_r (voir l'exemple 4.65(iii)). Or, si $\mathfrak{p}$ est minimal dans $V(I_r)$, l'idéal $I_rA_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ -primaire dans $A_{\mathfrak{p}}$ (voir l'exemple 7.14(ii)), d'où $\delta(A_{\mathfrak{p}}) \leq r$, et il suffit d'appliquer le théorème 11.25.

(iv) : On a $\dim A_{\mathfrak{q}} = h$, donc il existe $c_1, \dots, c_h \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ tels que $c_1A_{\mathfrak{q}} + \dots + c_hA_{\mathfrak{q}}$ soit un idéal $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ -primaire (théorème 11.25). Pour $i = 1, \dots, h$, écrivons $c_i = b_i/s_i$ avec $b_i \in \mathfrak{q}$ et $s_i \in A \setminus \mathfrak{q}$; avec la proposition 3.31, il s'ensuit aisément que $\mathfrak{q}$ est minimal parmi les idéaux premiers de A contenant $b_1, \dots, b_h$.

(ii) : Posons $\overline{A} := A/I_k$ et $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/I_k \in \text{Spec } \overline{A}$; disons que $\text{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) = l$. D'après (iv), il existe $b_1, \dots, b_l \in A$ tels que $\overline{\mathfrak{p}}$ soit minimal parmi les idéaux premiers de $\overline{A}$ contenant les images des b_i dans $\overline{A}$. Il s'ensuit aisément que $\mathfrak{p}$ est minimal parmi les idéaux premiers de A contenant $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$, d'où $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq k + l$, par (i).

(iii) : On a $\text{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) \leq r - k$ d'après (i), car $\overline{\mathfrak{p}} \in \text{Max } V(I_r/I_k)$, et $I_r/I_k \subset \overline{A}$ est engendré par les images de $a_{k+1}, \dots, a_r$. L'inégalité opposée est donnée par (ii). $\square$

Corollaire 11.34. Soient A un anneau noethérien, $x \in A$ un élément régulier et non inversible. On a :

- (i) (Hauptidealsatz) Tout idéal premier minimal de $V(Ax)$ est de hauteur 1.
- (ii) Si $(A, \mathfrak{m})$ est local, alors $\dim A/xA = \dim A - 1$.

Démonstration. (i) : Soit $\mathfrak{p}$ minimal dans $V(Ax)$; on sait déjà que $\text{ht } \mathfrak{p} \leq 1$, grâce au corollaire 11.33(i). Si $\text{ht } \mathfrak{p} = 0$, tout élément de $\mathfrak{p}$ est un diviseur de zéro, par la remarque 7.21(iii). Mais $\mathfrak{p}$ contient x , contradiction.

(ii) : Avec (i), on voit aisément que $\dim A/xA \leq \dim A - 1$ (alternativement, cela vient du lemme 11.23 et du théorème 11.25). Pour l'inégalité opposée, noter que $\dim A = \text{ht}(\mathfrak{m})$, $\dim A/xA = \text{ht}(\mathfrak{m}/xA)$, et appliquer le corollaire 11.33(ii). $\square$

Exercice 11.35. Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que A est semi-local de dimension $\leq 1 \Leftrightarrow$ il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que A_f soit un corps.

Corollaire 11.36. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un A -module de type fini, $I \subset \mathfrak{m}$ un idéal de A , et $\widehat{M}$ la complétion I -adique de M . Alors :

$$\dim \widehat{M} = \dim M.$$

Démonstration. Posons $B := \widehat{A}$, la complétion I -adique de A , et $N := \widehat{M}$; on munit $\mathfrak{m}$ de la topologie I -adique, et on dénote $\mathfrak{m}_B \subset B$ la complétion de $\mathfrak{m}$; rappelons que B

est noethérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_B$, en vertu du corollaire 9.104 et du théorème 9.113. Noter que $\dim N$ désigne la dimension du B -module N . Noter en outre que $\mathfrak{m}^n$ est un idéal ouvert pour la topologie I -adique de A , pour tout $n \in \mathbb{N}$, et de même, $\mathfrak{m}^n M$ est un sous-module ouvert de M ; par les corollaires 9.61(i) et 9.104, et l'exercice 9.49(iii), on a alors des isomorphismes de A -modules

$$M/\mathfrak{m}^n M \xrightarrow{\sim} N/\mathfrak{m}^n N \xrightarrow{\sim} N/\mathfrak{m}_B^n N \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les topologies I -adiques sur ces quotients sont discrètes, donc tout A -sous-module de $M/\mathfrak{m}^n M$ est aussi un B -sous-module; ainsi, $l_A(M/\mathfrak{m}^n M) = l_B(N/\mathfrak{m}_B^n N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\chi_M(X) = \chi_N(X)$. L'assertion découle alors du théorème 11.25. $\square$

Proposition 11.37. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$, et $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } A$. On a :

- (i) $\text{ht}(\mathfrak{q}) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$.
- (ii) Si en outre, $\text{Spec } f$ est générissante, alors l'inégalité de (i) est une égalité.
- (iii) Si A et B sont intègres, et si f est injectif, alors :

$$\boxed{\text{ht}(\mathfrak{q}) + \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p})) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{tr.deg}(\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A)).}$$

Démonstration. (i) : Quitte à remplacer A et B par $A_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{q}}$, et f par l'homomorphisme induit $g : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$, on peut supposer que $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ soit un homomorphisme local d'anneaux locaux, et on est alors ramené à vérifier l'inégalité :

$$\dim B \leq \dim A + \dim B/\mathfrak{m}B.$$

Pour cela, soit $x_1, \dots, x_r$ un système de paramètres de A , et choisissons $y_1, \dots, y_s \in B$ dont les images in $B/\mathfrak{m}B$ forment un système de paramètres pour $B/\mathfrak{m}B$. Ainsi, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\mathfrak{n}^p \subset \mathfrak{m}B + \sum_{i=1}^s y_i B$, et $\mathfrak{m}^q \subset \sum_{i=1}^r x_i A$, d'où $\mathfrak{n}^{pq} \subset \sum_{i=1}^r x_i B + \sum_{i=1}^s y_i B$, et avec le théorème 11.25, il vient $\dim B \leq r + s$.

(ii) : Posons $X := \text{Spec } A, Y := \text{Spec } B$, et $\phi := \text{Spec } f : Y \rightarrow X$; noter que l'application $\text{Spec } g : \text{Spec } B_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ correspond à la restriction $\phi_{\mathfrak{q}} : Y(\mathfrak{q}) \rightarrow X(\mathfrak{p})$ de ϕ , sous les identifications naturelles de $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ et $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}}$ avec $X(\mathfrak{p})$ et respectivement $Y(\mathfrak{q})$ (voir l'exemple 4.65(ii,iii)). De même, $\phi_{\mathfrak{q}}^{-1}(\mathfrak{p})$ correspond à l'espace spectral $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$ sous ces identifications (voir le §3.4.2); l'égalité souhaitée découle alors de (i) et de l'exercice 4.70(i).

(iii) : Soient $h := \text{ht}(\mathfrak{q})$, et $d := \text{tr.deg}(\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A))$; remarquons d'abord :

Affirmation 11.38. Pour la preuve de l'assertion (iii), on peut supposer que B soit une A -algèbre de type fini.

Preuve : Soit $r \in \mathbb{N}$ avec $r \leq \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{p}))$; choisissons une chaîne $\mathfrak{q}_h = 0 \subsetneq \mathfrak{q}_{h-1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}$ d'idéaux premiers de B , et $a_1, \dots, a_r \in B$ dont les images $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ dans $k(\mathfrak{q})$ sont algébriquement indépendantes sur $k(\mathfrak{p})$. Pour $i = 0, \dots, h-1$, soit aussi $b_i \in \mathfrak{q}_i \setminus \mathfrak{q}_{i+1}$; posons $B' := A[a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_h] \subset B$, et supposons que (iii) soit vérifiée pour l'homomorphisme induit $A \rightarrow B'$. Noter que

$$0 \subsetneq B' \cap \mathfrak{q}_{h-1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}' := B' \cap \mathfrak{q}$$

d'où $\text{ht}(\mathfrak{q}') \geq h$; en outre, $k(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{q}') \subset k(\mathfrak{q})$, et $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r \in k(\mathfrak{q}')$. Il vient alors

$$h + r \leq \text{ht}(\mathfrak{q}') + \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q}')/k(\mathfrak{p})) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{tr.deg}(\text{Frac}(B')/\text{Frac}(A)) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}) + d$$

d'où l'inégalité souhaitée, pour l'homomorphisme f et l'idéal premier $\mathfrak{q}$. $\diamond$

Soient alors $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que $B = A[b_1, \dots, b_n]$; on raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, on a $B = A[X]/I$ pour un idéal premier I de l'algèbre des polynômes $A[X]$ en une indéterminée X ; quitte à remplacer A, I et $\mathfrak{q}$ par $A_{\mathfrak{p}}, I_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit un anneau local. Si $I = 0$, alors $B = A[X]$ est une A -algèbre plate, et d'après (ii) et le théorème 3.84(ii), il vient $\text{ht}(\mathfrak{q}) = \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{ht}(\bar{\mathfrak{q}})$, où $\bar{\mathfrak{q}}$ désigne l'image de $\mathfrak{q}$ dans $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p})[X]$; ainsi :

- soit $\bar{q} = 0$ et $k(q) = k(\bar{q}) = k(p)(X)$
- soit $\text{ht}(\bar{q}) = 1$ et $k(q)$ est une extension algébrique finie de $k(p)$.

Dans les deux cas l'inégalité de (iii) est une égalité. Si $I \neq 0$, alors $K_B := \text{Frac}(B)$ est une extension algébrique de $K_A := \text{Frac}(A)$. En outre, $A \cap I = 0$, car f est injectif; par suite, $\text{ht}(I) = \text{ht}(IK_A[X]) = 1$. Soit $\mathfrak{r} \subset A[X]$ l'image réciproque de q ; ainsi $q = \mathfrak{r}/I$, $k(q) = k(\mathfrak{r})$, $A \cap \mathfrak{r} = p$, et au vu du cas précédent, on a :

$$\begin{aligned} \text{ht}(q) &\leq \text{ht}(\mathfrak{r}) - \text{ht}(I) = \text{ht}(\mathfrak{r}) - 1 = \text{ht}(p) + 1 - \text{tr.deg}(k(\mathfrak{r})/k(p)) - 1 \\ &= \text{ht}(p) - \text{tr.deg}(k(q)/k(p)). \end{aligned}$$

En dernier lieu, si $n > 1$, posons $A' := A[b_1, \dots, b_{n-1}]$, $p' := A' \cap q$, $K_{A'} := \text{Frac}(A')$; si l'inégalité de (iii) est déjà connue pour les extensions $A \subset A'$ et $A' \subset B$, on a :

$$\begin{aligned} (*) \quad & \text{ht}(p') + \text{tr.deg}(k(p')/k(p)) \leq \text{ht}(p) + \text{tr.deg}(K_{A'}/K_A) \\ & \text{ht}(q) + \text{tr.deg}(k(q)/k(p')) \leq \text{ht}(p') + \text{tr.deg}(K_B/K_{A'}) \end{aligned}$$

et rappelons que $\text{tr.deg}(k(p')/k(p)) + \text{tr.deg}(k(q)/k(p')) = \text{tr.deg}(k(q)/k(p))$, et de même, $\text{tr.deg}(K_{A'}/K_A) + \text{tr.deg}(K_B/K_{A'}) = \text{tr.deg}(K_B/K_A)$. L'inégalité souhaitée s'obtient alors en additionnant les inégalités (*). $\square$

Corollaire 11.39. (i) Soient $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, $M \neq 0$ un A -module de type fini, $N \neq 0$ un B -module de type fini. Alors on a :

$$(*) \quad \dim_B(N \otimes_A M) \leq \dim_A M + \dim_{B/\mathfrak{m}B}(N/\mathfrak{m}N).$$

(ii) Si en outre $N_{[f]}$ est un A -module plat, les deux membres de (*) sont égaux.

Démonstration. Posons $I := \text{Ann}_A M$, $A' := A/I$, $B' := B/IB$, $N' := B' \otimes_B N$, $f' := A' \otimes_A f : A' \rightarrow B'$, et soient $\pi_A : A \rightarrow A'$ et $\pi_B : B \rightarrow B'$ les projections; alors $M = M'_{[\pi_A]}$ pour un A' -module M' , et si $N_{[f]}$ est un A -module plat, $N'_{[f']}$ est un A' -module plat. En outre, $N' \neq 0$ (corollaire 3.49), et on a des identifications naturelles : $N \otimes_A M \xrightarrow{\sim} (N' \otimes_{A'} M')_{[\pi_B]}$ (proposition 3.18(i)), $N/\mathfrak{m}N \xrightarrow{\sim} (N'/\mathfrak{m}N')_{[\pi_B]}$, car $I \subset \mathfrak{m}$. Par suite, $\dim_B(N \otimes_A M) = \dim_{B'}(N' \otimes_{A'} M')$, $\dim_A M = \dim_{A'} M'$, et $\dim_{B/\mathfrak{m}B}(N/\mathfrak{m}N) = \dim_{B'/\mathfrak{m}B'}(N'/\mathfrak{m}N')$. Quitte à remplacer A, B, M et N par A', B', M et N' , on peut alors supposer que $\text{Supp}_A M = \text{Spec } A$.

Soient ensuite $J := \text{Ann}_B N$ et $B'' := B/J$; soient $\pi_{B''} : B \rightarrow B''$ la projection, et $f'' := \pi_{B''} \circ f : A \rightarrow B''$. Alors $N = N''_{[\pi_{B''}]}$ pour un B'' -module N'' , de sorte que $N'_{[f']}$ est $N_{[f]}$. En outre, $N \otimes_A M = (N'' \otimes_{B''} M)_{[\pi_{B''}]}$, et évidemment $(N/\mathfrak{m}N) = (N''/\mathfrak{m}N'')_{[\pi_{B''}]}$. Ainsi, quitte à remplacer f, B et N par f'', B'' et N'' , on peut supposer que $\text{Supp}_B N = \text{Spec } B$. Dans cette situation on a $\text{Supp}_B(N \otimes_A M) = \text{Spec } B$ (exercice 3.64(i)), et $\text{Spec } f$ est générante, si $N_{[f]}$ est un A -module plat (théorème 3.84(i)); les assertions découlent alors de la proposition 11.37(i,ii). $\square$

Problème 11.40. (i) Soient K un corps, A, B deux K -algèbres intègres de type fini, et Z une composante irréductible Z de $\text{Spec}(A \otimes_K B)$. Montrer que :

$$\dim Z = \dim A + \dim B.$$

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}$, et $A := K[X_1, \dots, X_n]$ la K -algèbre des polynômes en n indéterminées. Soient aussi $Z, Z' \subset \mathbb{A}_K^n := \text{Spec } A$ deux parties fermées irréductibles, et Z'' une composante irréductible de $Z \cap Z'$. Montrer que :

$$\dim Z'' \geq \dim Z + \dim Z' - n.$$

Exercice 11.41. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens tel que $\text{Spec } f$ soit générante, $p \in \text{Spec } A$, et $q \in \text{Max } V(pB)$. Montrer que :

$$f^{-1}(q) = p \quad \text{et} \quad \text{ht}(p) = \text{ht}(q).$$

(ii) Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $I \subset A$ un idéal $\mathfrak{m}$ -primaire, $B := A[X]$ l'anneau des polynômes d'une indéterminée à coefficients dans A , et $J \subset B$ un idéal tel que $J \subset \mathfrak{m}B$ et $J + XB = IB + XB$. Montrer que $\mathfrak{m}B \in \text{Max } V(J)$.

Exemple 11.42. Voici une application classique de l'exercice 11.41, empruntée à l'article [18] de Eagon et Northcott. Soient A un anneau noethérien, $1 \leq t \leq r \leq s$ des entiers, et $M := (a_{ij} \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s)$ une matrice d'éléments de A ; notons par $I(M, t) \subset A$ l'idéal engendré par les déterminants des mineurs de M de taille $t \times t$. Par exemple, si $r = 2$ et $s = 3$, l'idéal $I(M, 2)$ est engendré par :

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

et en général, $I(M, t)$ est engendré par $\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{t}$ éléments. On va montrer que :

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq (r - t + 1)(s - t + 1) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Max } V(I(M, t)).$$

On raisonne par récurrence sur t . Si $t = 1$, l'idéal $I(M, t)$ est engendré par rs éléments; dans ce cas, l'inégalité en question est un cas particulier du corollaire 11.33(i). Soit alors $t > 1$, et supposons que l'inégalité soit déjà connue pour l'idéal $I(N, t - 1)$, et pour toute matrice N à coefficients dans un anneau noethérien quelconque. Quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$, on peut aussi supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit un anneau local, et que $I(M, t)$ soit $\mathfrak{p}$ -primaire. Supposons d'abord que $a_{ij} \in A^\times$ pour certains indices $i \leq r$ et $j \leq s$; quitte à échanger des lignes et des colonnes de M , on peut alors supposer que $a_{11} \in A^\times$. Ensuite, soient $C_1, \dots, C_s$ les colonnes de M ; quitte à remplacer C_1 par $a_{11}^{-1}C_1$, on peut supposer que $a_{11} = 1$, et quitte à remplacer C_j par $C_j - a_{1j}C_1$, on peut supposer que $a_{1j} = 0$ pour chaque $j = 2, \dots, s$. De même, avec des opérations élémentaires sur les lignes on se ramène au cas où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

pour une matrice N de taille $(r - 1) \times (s - 1)$ à coefficients dans A . Dans ce cas, on voit aisément que $I(M, t) = I(N, t - 1)$, et l'hypothèse de récurrence nous donne l'inégalité souhaitée. Ainsi, on peut supposer que $a_{ij} \in \mathfrak{p}$ pour tous $i \leq r$ et $j \leq s$. Or, soit $M' := (b_{ij} \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s)$ la matrice à coefficients dans $B := A[X]$, avec $b_{11} := a_{11} + X$ et $b_{ij} := a_{ij}$ si $i \neq 1$ ou si $j \neq 1$; puisque $t > 1$, et que $b_{ij} \in \mathfrak{p}$ pour $i \neq 1$, on a $J := I(M', t) \subset \mathfrak{q} := \mathfrak{p}B$. Notons par M'_q l'image de M' dans B_q^{rs} ; ainsi, $I(M'_q, t) = J_q$, et on a une identification naturelle :

$$(*) \quad \text{Max } V(J_q) = \text{Spec}(B_q) \cap \text{Max } V(J).$$

D'autre part, l'image de b_{11} est inversible dans B_q , donc le cas précédent donne :

$$(**) \quad \text{ht}(\mathfrak{r}) \leq (r - t + 1)(s - t + 1) \quad \forall \mathfrak{r} \in \text{Max } V(J_q).$$

En outre, $J + XB = I(M, t)B + XB$, car ces deux idéaux ont la même image dans $B/XB = A$; d'après l'exercice 11.41(ii) il vient $\mathfrak{q} \in \text{Max } V(J)$, d'où $\mathfrak{q} \in \text{Max } V(J_q)$, au vu de (*). En dernier lieu, puisque B est une A -algèbre plate, $\text{ht}(\mathfrak{q}) = \text{ht}(\mathfrak{p})$, d'après l'exercice 11.41(i) et le théorème 3.84(ii), et compte tenu de (**), on obtient l'inégalité souhaitée.

Proposition 11.43. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, et $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$, avec $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. On a :

- (i) Si $\text{Spec } f$ est spécialisante, alors $\dim B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \geq \dim B \otimes_A k(\mathfrak{p}')$.
- (ii) Si $\text{Spec } f$ est généralisante, alors $\dim B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \leq \dim B \otimes_A k(\mathfrak{p}')$.

Démonstration. Posons $\overline{A} := A/\mathfrak{p}'$, $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{p}' \in \text{Spec } \overline{A}$, $\overline{B} := B/\mathfrak{p}'B$, et $s := \text{ht}(\overline{\mathfrak{p}})$.

(i) : Soit aussi $r := \dim B \otimes_A k(\mathfrak{p}')$. Il existe alors une chaîne $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_r$ d'idéaux premiers de B avec $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}'$ pour $i = 0, \dots, r$, et une chaîne $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}$ d'idéaux premiers de A . Puisque $\text{Spec } f$ est spécialisante, on trouve ensuite une chaîne $\mathfrak{q}_r \subsetneq \mathfrak{q}_{r+1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{r+s}$ d'idéaux premiers de B avec $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_{i-r}$ pour

$i = r, \dots, r+s$. Avec $\bar{q} := q_{r+s}\bar{B}$, il vient $\text{ht}(\bar{q}) \geq r+s$, et de l'autre côté, si l'on applique la proposition 11.37(i) à l'homomorphisme $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ induit par f , on trouve : $\text{ht}(\bar{q}) \leq s + \dim \bar{B}_{\bar{q}} \otimes_{\bar{A}} k(\bar{p}) = s + \dim B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$. Ainsi, $r \leq \dim B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p}) \leq \dim B \otimes_A k(\mathfrak{p})$.

(ii) : On se ramène aisément au cas où $s = 1$. On raisonne par récurrence sur $r := \dim B \otimes_A k(\mathfrak{p})$; si $r = 0$, il existe $q_0 \in \text{Spec } B$ avec $f^{-1}(q_0) = \mathfrak{p}$, et puisque $\text{Spec } f$ est générissante, on trouve $q'_0 \in \text{Spec } B$ avec $q'_0 \subset q_0$, et $f^{-1}(q'_0) = \mathfrak{p}'$, d'où l'assertion, dans ce cas. Pour $r > 0$, on est ramené aisément à montrer :

Affirmation 11.44. Soient $q'_0 \subsetneq q_0 \subsetneq q_1$ trois idéaux premiers de B avec $f^{-1}q'_0 = \mathfrak{p}'$ et $f^{-1}q_0 = f^{-1}q_1 = \mathfrak{p}$. Alors il existe $q'_1 \in \text{Spec } B$ avec $q'_0 \subsetneq q'_1 \subsetneq q_1$ et $f^{-1}q'_1 = \mathfrak{p}'$.

Preuve : Quitte à remplacer $A, \mathfrak{p}, B$ par $\bar{A}, \bar{p}, B/q'_0$ on peut supposer que $\mathfrak{p}' = q'_0 = 0$, que A et B soient intègres, et f injectif (mais avec $\text{Spec } f$ qui n'est plus forcément générissante). Soit alors $x \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$, et disons que $\text{Max } V(xB) = \{\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_t\}$ (exercice 6.109(iii)). Au vu du corollaire 11.34(i), il vient : $\text{ht}(\mathfrak{r}_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, t$. D'autre part, $\text{ht}(q_1) \geq 2$, donc il existe $y \in q_1 \setminus \bigcup_{i=1}^t \mathfrak{r}_i$ (proposition 1.58). Soit q'_1 un idéal premier minimal de $V(yB)$ avec $q'_1 \subset q_1$; d'un côté on a $\text{ht}(q'_1) = 1$, toujours d'après le corollaire 11.34(i), et de l'autre côté on a $q'_1 \neq \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_t$, d'où $x \notin q'_1$. Ainsi, $f^{-1}q'_1 \subsetneq \mathfrak{p}$, et puisque $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, on doit avoir $f^{-1}q'_1 = 0$. $\square$

Exercice 11.45. Montrer que pour tout anneau noethérien A et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\dim A[X_1, \dots, X_n] = \dim A[[X_1, \dots, X_n]] = n + \dim A.$$

11.3. Théorie de la profondeur et modules de Cohen-Macaulay. Les systèmes de paramètres d'un anneau local noethérien jouissent d'une propriété d'indépendance algébrique exprimée par le résultat suivant.

Proposition 11.46. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $x_{\bullet} := (x_1, \dots, x_d)$ un système de paramètres pour A , et $I \subset A$ l'idéal engendré par $x_{\bullet}$. Soient aussi $s \in \mathbb{N}$ et $f(T_1, \dots, T_d) \in A[T_1, \dots, T_d]$ homogène de degré s . Alors on a :

$$f(x_1, \dots, x_d) \in I^{s+1} \Rightarrow f \in \mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d].$$

Démonstration. Si $s = 0$, l'assertion est triviale ; on suppose donc $s > 0$. Or, soit $A_0 := A/I$; on considère l'homomorphisme surjectif d'anneaux gradués

$$\phi : B := A_0[T_1, \dots, T_d] \rightarrow G(A, I) \quad T_i \mapsto \bar{x}_i$$

où $\bar{x}_i \in I/I^2$ est la classe de x_i , pour tout $i = 1, \dots, d$ (notation du §9.5.2). On raisonne par l'absurde : soit aussi $\bar{f} \in B$ la classe de f ; l'hypothèse sur f veut dire précisément que $\bar{f} \in \text{Ker } \phi$, et si $f \notin \mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d]$, l'exercice 1.52(i.b) implique que $\bar{f}$ est un élément régulier de B . D'autre part, comme f est homogène, le quotient $B/\bar{f}B$ est aussi un anneau gradué, et comme I est $\mathfrak{m}$ -primaire, A_0 est artinien, donc les séries de Hilbert-Poincaré de $G(A, I)$, B et $B/\bar{f}B$ sont bien définies, et compte tenu du corollaire 11.15, de l'exemple 11.17 et de la proposition 11.18 on obtient

$$d(G(A, I)) \leq d(B/\bar{f}B) = d(B) - 1 = d - 1.$$

Mais on sait que $d(G(A, I)) = d(A) = d$, par la remarque 11.22 ; contradiction. $\square$

Corollaire 11.47. Soient K un corps, $(A, \mathfrak{m})$ une K -algèbre locale noethérienne, et $x_{\bullet} := (x_1, \dots, x_d)$ un système de paramètres de A . Alors les éléments $x_1, \dots, x_d$ sont algébriquement indépendants sur K .

Démonstration. Soit $f \in K[T_1, \dots, T_d]$ tel que $f(x_1, \dots, x_d) = 0$; il faut montrer que $f = 0$. On raisonne par l'absurde : si $f \neq 0$, on peut écrire $f = f_s + g$, avec $f_s, g \in K[T_1, \dots, T_d]$, tels que $f_s \neq 0$ soit homogène de degré s , et g soit une somme de monômes de degrés $> s$. Soit $I \subset A$ l'idéal engendré par $x_{\bullet}$; évidemment, $g(x_1, \dots, x_d) \in I^{s+1}$, donc $f_s(x_1, \dots, x_d) \in I^{s+1}$ aussi. Par la proposition 11.46, il vient $f_s \in \mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d]$; mais $K \cap \mathfrak{m} = 0$ dans A , d'où $f_s = 0$, contradiction. $\square$

Théorème 11.48. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien de dimension d . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un isomorphisme de $k(\mathfrak{m})$ -algèbres graduées :

$$k(\mathfrak{m})[T_1, \dots, T_d] \simeq G(A, \mathfrak{m}).$$

(b) $\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$.

(c) $\mathfrak{m}$ est engendré par un système de paramètres de A .

Démonstration. Evidemment (a) $\Rightarrow$ (b), et par la proposition 3.51 on a (b) $\Rightarrow$ (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) : On choisit un système de paramètres $x_1, \dots, x_d$ de A qui engendre $\mathfrak{m}$, et on définit l'application $\phi : k(\mathfrak{m})[T_1, \dots, T_d] \rightarrow G(A, \mathfrak{m})$ comme dans la preuve de la proposition 11.46 ; évidemment ϕ est surjective. Soit $\bar{f} \in \text{Ker}(\phi)$, et écrivons $\bar{f} = \sum_{s=0}^n \bar{f}_s$, où $\bar{f}_s$ est la composante homogène de $\bar{f}$ de degré s , pour tout $s = 0, \dots, n$; comme ϕ est un homomorphisme d'anneaux gradués, on voit aisément que chaque $\bar{f}_s$ est dans le noyau de ϕ . Pour $s = 0, \dots, n$ choisissons $f_s \in A[T_1, \dots, T_d]$ homogène de degré s qui relève $\bar{f}_s$; il vient $f_s(x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{m}^{s+1}$ pour tout $s = 0, \dots, n$. D'après la proposition 11.46 on a alors $f_s \in \mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d]$, donc $\bar{f}_s = 0$ pour chaque $s = 0, \dots, n$. Ainsi, $\bar{f} = 0$, donc ϕ est injective, d'où l'assertion. $\square$

Définition 11.49. Un anneau local noethérien qui vérifie les conditions équivalentes du théorème 11.48 est dit *local régulier*.

Proposition 11.50. (i) Tout anneau local régulier est intègre.

(ii) Soit A un anneau local noethérien de dimension 1 (resp. 0). Alors A est un anneau de valuation discrète (resp. un corps) $\Leftrightarrow A$ est régulier.

Démonstration. (i) : Cela suit du corollaire 9.106(ii) et de l'exercice 9.69.

(ii) : Cela découle aussitôt du théorème 11.48. $\square$

Exemple 11.51. Soient K un corps algébriquement clos, A une K -algèbre intègre de type fini. On peut généraliser de la façon suivante la remarque 7.53(ii) : l'ensemble

$$\text{Reg}(A) := \{\mathfrak{p} \in \text{Max } A \mid A_{\mathfrak{p}} \text{ est régulier}\}$$

est ouvert dans $\text{Max } A$. En effet, soit $d := \text{tr.deg}(\text{Frac}(A)/K)$; compte tenu du problème 6.82(i), on voit que $\text{Reg}(A) = \{\mathfrak{m} \in \text{Max } A \mid e(\mathfrak{m}) := \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d\}$. On raisonne maintenant comme dans la remarque 7.53(ii) : on choisit une présentation

$$A = K[X_1, \dots, X_n]/(R_1, \dots, R_m)$$

et on dénote J la matrice Jacobienne $(\partial R_i / \partial X_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$; on sait que $e(\mathfrak{m}) = n - \text{rk } J(\mathfrak{m})$, où $J(\mathfrak{m})$ désigne l'image de J dans l'anneau des matrices de taille $m \times n$, à coefficients dans $k(\mathfrak{m})$. Notons aussi que $e(\mathfrak{m}) \geq d$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, grâce au corollaire 11.29 et au problème 6.82(i). Donc, $\mathfrak{m} \in \text{Reg}(A)$ si et seulement si J admet un mineur de taille $(n - d) \times (n - d)$ dont le déterminant D est inversible dans le corps résiduel $k(\mathfrak{m})$, et il suffit de remarquer que :

$$\mathfrak{m} \in \text{Max } A[D^{-1}] \subset \text{Reg}(A).$$

11.3.1. Suites régulières et suites quasi-régulières. On poursuivra l'étude des anneaux réguliers dans les sections suivantes ; toutefois, la preuve du théorème 11.48 suggère l'intérêt de regarder plus systématiquement les suites d'éléments vérifiant la condition d'indépendance algébrique mise en évidence par la proposition 11.46. Pour cela, considérons plus généralement un anneau A , un A -module M , et une suite finie $\mathbf{x}_{\bullet} := (x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de A . Soit $I \subset A$ l'idéal engendré par $\mathbf{x}_{\bullet}$, et munissons M de sa *filtration I -adique* $F_{\bullet} := (F_k \mid k \in \mathbb{Z})$, i.e. $F_k := I^k M$ et $F_{-k} := M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; rappelons que le groupe gradué $G(M)$ associé à $(M, F_{\bullet})$ est naturellement un $G(A, I)$ -module gradué (remarque 9.109(i)). Soient $A_0 := A/I$, $M_0 := M/IM$, $A_0[T_{\bullet}] := A_0[T_1, \dots, T_n]$, et

$$\phi : A_0[T_{\bullet}] \rightarrow G(A, I) \quad T_i \mapsto \bar{x}_i \in I/I^2 \quad (i = 1, \dots, n)$$

l'homomorphisme surjectif d'anneaux gradués associé à $x_\bullet$, comme dans la preuve de la proposition 11.46. Par restriction de scalaires suivant ϕ , le $G(A, I)$ -module $G(M)$ devient alors un $A_0[T_\bullet]$ -module gradué, d'où une surjection $A_0[T_\bullet]$ -linéaire :

$$\phi_M : M_0[T_\bullet] := M_0 \otimes_{A_0} A_0[T_\bullet] \rightarrow G(M) \quad m \otimes P \mapsto \phi(P) \cdot m.$$

Définition 11.52. Dans la situation du §11.3.1 :

- (i) On dit que la suite $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière*, si ϕ_M est un isomorphisme.
- (ii) Si $n = 0$, la suite (vide) $x_\bullet$ est *M-régulière*. Pour $n > 0$, on dit que $x_\bullet$ est *M-régulière* si x_1 est *M-régulier*, et si la suite $(x_2, \dots, x_n)$ est $M/x_1 M$ -régulière.
- (iii) On dit que $x_\bullet$ est *proprement M-régulière*, si elle est *M-régulière* et si $M_0 \neq 0$.
- (iv) On dit aussi que $x_\bullet$ est une *suite régulière de A*, si elle est *A-régulière*.

Remarque 11.53. (i) Avec la notation du §11.3.1, noter qu'on peut représenter tout élément de $M_0[T_\bullet]$ par un polynôme $P(T_\bullet) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} m_\nu T_\bullet^\nu$ à coefficients $m_\nu \in M_0$; avec cette présentation, on a $\phi_M(P) = P(x_\bullet) := \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \bar{x}_1^{\nu_1} \cdots \bar{x}_n^{\nu_n} m_\nu$.

(ii) De même, $M[T_\bullet] := M \otimes_A A[T_\bullet]$ peut se représenter comme le A -module des polynômes $P(T_\bullet)$ à coefficients dans M . Avec cette notation, noter que si P est homogène de degré s , alors l'image $\bar{P}$ de P dans $M_0[T]$ est dans le noyau de $\phi_M \Leftrightarrow P(x_\bullet) \in I^{s+1}M$. Par suite, $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière* $\Leftrightarrow$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $P \in M[T_\bullet]$ homogène de degré s avec $P(x_\bullet) \in I^{s+1}M$, on a $P \in IM[T_\bullet]$.

(iii) En outre : $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière* $\Leftrightarrow$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $P \in M[T_\bullet]$ homogène de degré s avec $P(x_\bullet) = 0$, on a $P \in IM[T_\bullet]$. En effet, la condition est évidemment nécessaire, d'après (ii) ; d'autre part, si la condition est vérifiée, et si $Q \in M[T_\bullet]$ est homogène de degré s avec $Q(x_\bullet) \in I^{s+1}M$, alors il existe $R \in M[T_\bullet]$ homogène de degré $s+1$ avec $Q(x_\bullet) = R(x_\bullet)$. Écrivons $R = \sum_{i=1}^n T_i R_i$ avec $R_1, \dots, R_n \in M[T_\bullet]$ homogènes de degré s ; alors $S := Q - \sum_{i=1}^n x_i R_i$ est homogène de degré s et $S(x_\bullet) = 0$, d'où $S \in IM[T_\bullet]$, par hypothèse. Mais alors $Q = S + \sum_{i=1}^n x_i R_i \in IM[T_\bullet]$, donc $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière*, toujours d'après (ii).

Exemple 11.54. (i) Pour tout anneau A , évidemment $X_\bullet := (X_1, \dots, X_n)$ est une suite régulière de $A[X_1, \dots, X_n]$, et $X_\bullet$ est proprement régulière $\Leftrightarrow A \neq 0$.

(ii) Dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ la suite (n, X) est régulière, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et elle est proprement régulière pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Proposition 11.55. Dans la situation du §11.3.1, considérons les conditions :

- (a) La suite $x_\bullet$ est *M-régulière*.
- (b) La suite $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière*.
- (c) Pour tout $k = 0, \dots, n$, la topologie I -adique de $M / \sum_{i=1}^k x_i M$ est séparée.

Alors (a) $\Rightarrow$ (b), et si (c) est vérifiée, on a aussi (b) $\Rightarrow$ (a).

Démonstration. Posons $M_k := M / I^{k+1}M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord :

Affirmation 11.56. Si la suite $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière*, et si $a \in A$ est M_0 -régulier, alors a est M_k -régulier pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve : On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 0$ il n'y a rien à montrer ; soit donc $k > 0$, et supposons que a soit M_{k-1} -régulier. Soit $m \in M$ avec $am \in I^{k+1}M$. Alors on a aussi $am \in I^k M$, d'où $m \in I^k M$, par hypothèse de récurrence. Par suite, il existe $P \in M[T_\bullet]$ homogène de degré k tel que $m = P(x_\bullet)$. Or, $am = aP(x_\bullet) \in I^{k+1}M$, donc $aP \in IM[T_\bullet]$, d'après la remarque 11.53(ii). Mais par hypothèse, a est M_0 -régulier, donc $P \in IM[T_\bullet]$, et ainsi $m = P(x_\bullet) \in I^{k+1}M$. $\diamond$

(a) $\Rightarrow$ (b) : On raisonne par récurrence sur la longueur n de la suite $x_\bullet$. Si $n = 1$, l'élément $x := x_1$ est *M-régulier* par hypothèse ; or, si $P(T) \in M[T]$ est homogène de degré $s \geq 0$, alors $P = mT^s$ avec $m \in M$, et si $P(x) = 0$, on a $x^s m = 0$, d'où $m = 0$, ainsi $P = 0$, et avec la remarque 11.53(iii), cela montre que $x_\bullet$ est *M-quasi-régulière*. Soit ensuite $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute suite de

longueur $n - 1$; en particulier, la suite $x'_\bullet := (x_1, \dots, x_{n-1})$ est M -quasi-régulière. Or, soit $P \in M[T_\bullet]$ homogène de degré $s \geq 0$, tel que $P(x_\bullet) = 0$; on doit vérifier que $P \in IM[T_\bullet]$, et on raisonne par récurrence sur s . L'assertion est triviale pour $s = 0$. Soit alors $s > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout polynôme homogène de degré $s - 1$. Écrivons $P = Q + T_n R$, avec $Q \in M[T'_\bullet] := M[T_1, \dots, T_{n-1}]$ homogène de degré s , et $R \in M[T_\bullet]$ homogène de degré $s - 1$. Soit $J \subset A$ l'idéal engendré par $x_1, \dots, x_{n-1}$; il vient

$$x_n R(x_\bullet) = -Q(x'_\bullet) \in J^s M.$$

Mais par hypothèse, x_n est M/JM -régulier, donc aussi $M/J^s M$ -régulier, d'après l'observation 11.56; par suite :

$$(*) \quad R(x_\bullet) \in J^s M \subset I^s M$$

et en raisonnant comme dans la remarque 11.53(iii) on trouve $U \in IM[T_\bullet]$ homogène de degré $s - 1$ tel que $R(x_\bullet) + U(x_\bullet) = 0$, d'où $R + U \in IM[T_\bullet]$, par l'hypothèse de récurrence sur s , et alors $R \in IM[T_\bullet]$. En outre, $(*)$ montre qu'il existe $S \in M[T'_\bullet]$ homogène de degré s , avec $R(x_\bullet) = S(x'_\bullet)$; ainsi $W := Q + x_n S \in M[T_\bullet]$ est homogène de degré s avec $W(x'_\bullet) = 0$; par l'hypothèse de récurrence sur n , on a alors $W \in JM[T_\bullet]$, donc $Q \in IM[T_\bullet]$, et finalement $P \in IM[T_\bullet]$.

(b),(c) $\Rightarrow$ (a) : Soit $J \subset A_0[T_\bullet]$ l'idéal engendré par $T_\bullet$, munissons $A_0[T_\bullet]$ et $M_0[T_\bullet]$ des filtrations J -adiques (voir l'exemple 9.66), et soient $\text{gr}_\bullet A_0[T_\bullet]$ et $\text{gr}_\bullet M_0[T_\bullet]$ les A_0 -modules gradués associés respectifs; noter que $\text{gr}_k A_0[T_\bullet]$ s'identifie naturellement avec le A_0 -module libre des polynômes homogènes $P(T_\bullet)$ de degré k à coefficients dans A_0 , et on a un isomorphisme naturel $\text{gr}_k M_0[T_\bullet] \xrightarrow{\sim} M_0 \otimes_{A_0} \text{gr}_k A_0[T_\bullet]$; en particulier, $T_1 \cdot \text{gr}_k A_0[T_\bullet]$ est un facteur direct de $\text{gr}_{k+1} A_0[T_\bullet]$, et le quotient

$$\text{gr}_{k+1} A_0[T_\bullet] / T_1 \cdot \text{gr}_k A_0[T_\bullet] \xrightarrow{\sim} \bar{J}_{k+1} := J^{k+1} / (T_1 J^k + J^{k+2})$$

est un A_0 -module libre, pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le problème 4.24(ii.a), on obtient alors une suite exacte courte de A_0 -modules :

$$0 \rightarrow \text{gr}_k M_0[T_\bullet] \xrightarrow{\beta_k} \text{gr}_{k+1} M_0[T_\bullet] \rightarrow M_0 \otimes_{A_0} \bar{J}_{k+1} \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où β_k est induite par la multiplication par le scalaire T_1 sur le $A_0[T_\bullet]$ -module $M_0[T_\bullet]$. Or, (b) revient à dire que ϕ_M induit un isomorphisme $\text{gr}_k M_0[T_\bullet] \xrightarrow{\sim} I^k M / I^{k+1} M$, pour tout $k \in \mathbb{N}$; ainsi, l'injectivité de β_k se traduit par l'égalité :

$$(**) \quad \{m \in I^k M \mid x_1 m \in I^{k+2} M\} = I^{k+1} M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d'où $x_1 I^k M \cap I^{k+2} M = x_1 I^{k+1} M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on a :

Affirmation 11.57. (b) $\Rightarrow x_1 M \cap I^{k+2} M = x_1 I^{k+1} M \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve : Montrons, par récurrence sur t , que $x_1 I^{k-t} M \cap I^{k+2} M = x_1 I^{k+1} M$ pour tous $k, t \in \mathbb{N}$ avec $k \geq t$. Pour $t = 0$, l'identité est déjà connue; soit alors $t > 0$, et supposons que $x_1 I^{p-j} M \cap I^{p+2} M = x_1 I^{p+1} M$ pour tout $p \geq t - 1$ et tout $j = 0, \dots, t - 1$; avec $k := p + 1$ et $j := t - 1$, il vient $x_1 I^{k-t} M \cap I^{k+1} M = x_1 I^k M$, d'où $x_1 I^{k-t} M \cap I^{k+2} M = x_1 I^k M \cap I^{k+2} M = x_1 I^{k+1} M$, comme souhaité. $\diamond$

En outre $(**)$ entraîne aussitôt que $\text{Ann}_M(x_1) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^k M$, donc x_1 est M -régulier, si (b) et (c) sont vérifiées (exercice 9.15). Montrons maintenant que (b) et (c) entraînent (a), par récurrence sur la longueur n de $x_\bullet$. Si $n = 1$, la preuve est déjà complète. Soit alors $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau A' , tout A' -module M' , et toute suite $x'_\bullet$ de longueur $n - 1$. Posons $M' := M/x_1 M$; par ce qui précède, il reste à vérifier que la suite $x'_\bullet := (x_2, \dots, x_n)$ est M' -régulière. Pour cela, soient $A' := A/x_1 A$, $A_0[T'_\bullet] := A_0[T'_2, \dots, T'_n]$, et notons par $I' \subset A'$ l'idéal engendré par l'image $\bar{x}'_\bullet := (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ de $x'_\bullet$. Munissons M' de la filtration I' -adique $F'_\bullet := (F'_k \mid k \in \mathbb{Z})$, i.e. $F'_k := I'^k M'$ et $F'_{-k} := M'$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et soit $G(M')$

le groupe gradué associé à $(M', F'_\bullet)$. On a comme au §11.3.1 un homomorphisme d'anneaux gradués correspondant $\phi' : A_0[T'_\bullet] \rightarrow G(A', I')$ et une surjection $A_0[T'_\bullet]$ -linéaire $\phi_{M'} : M_0[T'_\bullet] := M_0 \otimes_{A_0} A_0[T'_\bullet] \rightarrow G(M')$. Evidemment, la topologie I' -adique sur chaque quotient $M' / \sum_{i=2}^k \bar{x}_i M' = M / \sum_{i=1}^k x_i M$ coïncide avec la topologie I -adique, et elle donc séparée, par hypothèse, *i.e.* la condition (c) est vérifiée pour M' et pour la suite $\bar{x}'_\bullet$. Par hypothèse de récurrence, il suffit donc de vérifier que la suite $\bar{x}'_\bullet$ est M' -quasi-régulière, *i.e.* que $\phi_{M'}$ est un isomorphisme. Or, on a un homomorphisme surjectif évident de A_0 -algèbres :

$$p : A_0[T_\bullet] \rightarrow A_0[T'_\bullet] \quad T_1 \mapsto 0 \quad T_i \mapsto T'_i \quad \forall i = 2, \dots, n$$

dont le noyau est l'idéal engendré par T_1 , et noter les identifications naturelles :

$$G(M) \otimes_{A_0[T_\bullet]} A_0[T'_\bullet] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{F_k}{F_{k+1} + x_1 F_{k-1}} \quad G(M') \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{F_k}{F_{k+1} + (x_1 M \cap F_k)}.$$

On a en outre un diagramme commutatif de $A_0[T_\bullet]$ -modules :

$$\begin{array}{ccc} M_0 \otimes_{A_0} A_0[T_\bullet] & \xrightarrow{\phi_M} & G(M) \\ M_0 \otimes_{A_0} p \downarrow & & \downarrow q \\ M_0 \otimes_{A_0} A_0[T'_\bullet] & \xrightarrow{\phi_{M'}} & G(M') \end{array}$$

où q est le morphisme de modules gradués induit par la projection $M \rightarrow M'$, qui est évidemment un morphisme de modules filtrés $(M, F_\bullet) \rightarrow (M', F'_\bullet)$ (remarque 9.65). Ainsi, $\phi_{M'}$ est la composition de l'isomorphisme

$$\phi_M \otimes_{A_0[T_\bullet]} A_0[T'_\bullet] : M_0 \otimes_{A_0} A_0[T'_\bullet] \rightarrow G(M) \otimes_{A_0[T_\bullet]} A_0[T'_\bullet]$$

et de l'application $A_0[T'_\bullet]$ -linéaire $q' : G(M) \otimes_{A_0[T_\bullet]} A_0[T'_\bullet] \rightarrow G(M')$ induite par q . Mais par l'observation 11.57, on a $x_1 F_{k-1} = x_1 M \cap F_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; avec les identifications ci-dessus on déduit que q' est bijective, donc de même pour $\phi_{M'}$. $\square$

Corollaire 11.58. *Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini, et $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{J}(A)$. Alors $x_\bullet$ est M -régulière si et seulement si elle est M -quasi-régulière.*

Démonstration. Soit $I \subset \mathcal{J}(A)$ l'idéal de A engendré par $x_\bullet$; d'après le corollaire 9.106(ii), la topologie I -adique de tout A -module de type fini est séparée, donc l'assertion est un cas particulier de la proposition 11.55. $\square$

Corollaire 11.59. *Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier de dimension $d > 0$, et $x_\bullet := (x_1, \dots, x_d)$ un système de générateurs de $\mathfrak{m}$. Alors la suite $x_\bullet$ est A -régulière.*

Démonstration. L'assertion découle aussitôt du corollaire 11.58, car la condition (a) du théorème 11.48 entraîne que la suite $x_\bullet$ soit A -quasi-régulière. Toutefois, on a aussi la preuve plus directe suivante. On raisonne par récurrence sur d . Si $d = 1$, tout $x \in A \setminus \{0\}$ est A -régulier (proposition 11.50(i)). Si $d > 1$, posons $B := A/x_1 A$; par le corollaire 11.34(ii) on a $\dim B = d - 1$, et évidemment l'image $\bar{x}_\bullet$ dans B de la suite $(x_2, \dots, x_d)$ engendre l'idéal maximal. Donc, B est régulier; par hypothèse de récurrence, $\bar{x}_\bullet$ est alors B -régulière, et finalement $x_\bullet$ est A -régulière. $\square$

Problème 11.60. Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier, et $r := \text{ht}(\mathfrak{p})$; on suppose que $\mathfrak{p}$ soit engendré par un système de r éléments $x_1, \dots, x_r$.

- (i) Si A est local, montrer que A est intègre, et $x_\bullet$ est une suite A -régulière.
- (ii) Si A n'est pas local, montrer qu'il existe une matrice $(a_{ij} \mid i, j = 1, \dots, r)$ d'éléments de A avec $a_{ij} = 0$ pour $1 \leq j < i \leq r$ et $a_{ii} = 1$ pour $i = 1, \dots, r$, telle que la suite $(y_i := \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j \mid i = 1, \dots, r)$ soit A -régulière et génératrice de $\mathfrak{p}$.

Exercice 11.61. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, M un A -module, N un B -module, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_r)$ une suite finie d'éléments de A , et posons $f(x_\bullet) := (f(x_1), \dots, f(x_r))$. Montrer les assertions suivantes :

(a) Si $N_{[f]}$ est un A -module plat, et si la suite $x_\bullet$ est M -régulière, alors la suite $f(x_\bullet)$ est $N \otimes_A M$ -régulière.

(b) Si $N_{[f]}$ est un A -module fidèlement plat, alors la suite $x_\bullet$ est M -régulière (resp. proprement M -régulière) si et seulement si la suite $f(x_\bullet)$ est $N \otimes_A M$ -régulière (resp. proprement $N \otimes_A M$ -régulière).

(ii) Soient A un anneau, A' et B deux A -algèbres, M un B -module, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite M -régulière d'éléments de B ; posons $B' := A' \otimes_A B$, $M' := A' \otimes_A M$, $x'_i := 1 \otimes x_i \in B'$ pour $i = 1, \dots, n$. Supposons que $M_i := M / \sum_{j=1}^i x_j M$ soit un A -module plat pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que la suite $x'_\bullet := (x'_1, \dots, x'_n)$ est M' -régulière, et que $M'_i := M' / \sum_{j=1}^i x'_j M'$ est un A' -module plat pour $i = 1, \dots, n$.

Proposition 11.62. Soient $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M un B -module de type fini, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{n}$, et $\bar{x}_\bullet$ l'image de $x_\bullet$ dans $B \otimes_A k(\mathfrak{m})$. Posons $M_i := M / \sum_{j=1}^i x_j M$ pour $i = 1, \dots, n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La suite $x_\bullet$ est M -régulière, et M_i est un A -module plat pour $i = 1, \dots, n$.
- (b) La suite $x_\bullet$ est M -régulière, et M_n est un A -module plat.
- (c) La suite $\bar{x}_\bullet$ est $M \otimes_A k(\mathfrak{m})$ -régulière, et M est un A -module plat.

Démonstration. Evidemment (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Par récurrence sur $i = n, \dots, 1$, on est ramené à vérifier :

Affirmation 11.63. Si N est un B -module de type fini, si $x \in \mathfrak{n}$ est N -régulier, et si N/xN est un A -module plat, alors N est un A -module plat.

Preuve : Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow x^i N / x^{i+1} N \rightarrow N / x^{i+1} N \rightarrow N / x^i N \rightarrow 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

et noter que $x^i N / x^{i+1} N$ est isomorphe à N/xN pour tout $i \in \mathbb{N}$, car x est N -régulier. Par récurrence sur i , on conclut que chaque $N/x^i N$ est un A -module plat (exercice 8.129(i)). L'assertion découle alors de la remarque 10.51(i). $\diamond$

(a) $\Rightarrow$ (c) : D'après l'exercice 11.61(ii), la suite $\bar{x}_\bullet$ est $M \otimes_A k(\mathfrak{m})$ -régulière. Ensuite, puisque M_1 est un A -module plat, et que x_1 est M -régulier, l'observation 11.63 nous dit que M est un A -module plat.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Posons $M_0 := M$ et $g_i := x_{i+1} \cdot \text{Id}_{M_i}$ pour $i = 0, \dots, n-1$; vérifions par récurrence sur $i = 0, \dots, n$, que M_i est un A -module plat. Pour $i = 0$, cela est connu par hypothèse; soit alors $i > 0$, et supposons que M_{i-1} soit un A -module plat. Par hypothèse, $g_{i-1} \otimes_A k(\mathfrak{m})$ est un endomorphisme injectif de $M_{i-1} \otimes_A k(\mathfrak{m})$, donc g_{i-1} est injectif et M_i est un A -module plat, en vertu de l'exercice 10.53. La preuve montre aussi que chaque g_i est injectif, i.e. la suite $x_\bullet$ est M -régulière. $\square$

Corollaire 11.64. Soient $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M un B -module de type fini, $x_\bullet := (x_i \mid i = 1, \dots, n)$ une suite A -régulière d'éléments de $\mathfrak{m}$; posons $I := \sum_{i=1}^n A x_i$, $A_0 := A/I$, et $M_0 := M/IM$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $M_{[f]}$ est un A -module plat.
- (b) M_0 est un A_0 -module plat et la suite $x_\bullet$ est M -régulière.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) d'après l'exercice 11.61(i.a) et la remarque 3.74(vi).

(b) $\Rightarrow$ (a) : Cela découle aussitôt de la proposition 11.62. $\square$

Proposition 11.65. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini. Alors, toute suite M -régulière $(x_1, \dots, x_r)$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ fait partie d'un système de paramètres pour M .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r . Si $r = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit alors $r > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout A -module M et toute suite proprement M -régulière de longueur $r - 1$. En particulier, la suite $(x_1, \dots, x_{r-1})$ fait partie d'un système de paramètres pour M ; posons $N := M/(x_1M + \dots + x_{r-1}M)$. D'après le corollaire 11.31, on a $\dim N = \dim M - r + 1$. En outre, par hypothèse x_r est N -régulier, donc $x_r \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(N)} \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(iii)). Rappelons que $\text{Ass}_A(N)$ contient les éléments minimaux du support de N (corollaire 7.8(v.a)), et en particulier, si $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(N)$ et si $\dim A/\mathfrak{p} = \dim N$, alors $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(N)$. Au vu du corollaire 11.32, il vient par suite : $\dim N/x_rN = \dim N - 1 = \dim M - r$. La conclusion résulte donc du corollaire 11.31. $\square$

Définition 11.66. (i) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, et M un A -module de type fini. La I -profondeur de M , notée :

$$\text{prof}(I, M)$$

est la borne supérieure des longueurs des suites M -régulières formées d'éléments de I . Si $(A, \mathfrak{m})$ est local, on appelle $\text{prof}_A(M) := \text{prof}(\mathfrak{m}, M)$ la *profondeur* de M .

(ii) Soit $x_\bullet := (x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de I , et posons $M_0 := M/\sum_{i=1}^r x_iM$; on dit que $x_\bullet$ est I -maximale si $\text{prof}(I, M_0) = 0$.

Remarque 11.67. (i) Dans la situation de la définition 11.66(i), noter que si $M = 0$, alors $\text{prof}(I, M) = +\infty$, car toute suite finie d'éléments de I est 0-régulière.

(ii) Si en outre, A est noethérien, on a les équivalences :

$$\text{prof}(I, M) = 0 \Leftrightarrow \text{Ass}_A(M) \cap V(I) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Hom}_A(A/I, M) \neq 0.$$

En effet, $\text{prof}(I, M) = 0 \Leftrightarrow I \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(iii)), et puisque l'ensemble $\text{Ass}_A(M)$ est fini (théorème 7.18(iii)), la proposition 1.58 entraîne la première équivalence. Ensuite, l'isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_A(A/I, M) \xrightarrow{\sim} \text{Ann}_M(I)$$

montre que $\text{Hom}_A(A/I, M) \neq 0 \Rightarrow \text{prof}(I, M) = 0$; de l'autre côté, si $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M) \cap V(I)$, il existe $x \in M$ tel que $\text{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$ (corollaire 7.8(ii)), et donc $\text{Ann}_M(I) \neq 0$.

(iii) En particulier, pour $(A, \mathfrak{m})$ local noethérien, on a $\text{prof}_A(M) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \text{Ass}_A(M) \Leftrightarrow \text{Hom}_A(k(\mathfrak{m}), M) \neq 0$. D'autre part, la proposition 11.65 donne :

$$\text{prof}(I, M) \leq \text{prof}_A(M) \leq \dim M \quad \text{si } I \subset \mathfrak{m} \text{ et si } M \neq 0.$$

(iv) Si $M \neq IM$, toute suite M -régulière d'éléments de I est proprement M -régulière. De plus, tout suite M -régulière I -maximale $(x_1, \dots, x_r)$ est proprement M -régulière, car si $\text{prof}(I, M/\sum_{i=1}^r x_iM) = 0$, alors $M/\sum_{i=1}^r x_iM \neq 0$, par (i).

Exercice 11.68. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, M un A -module de type fini avec $M \neq IM$, et $(x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de I . Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ et $x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \in I$ tels que la suite $(x_1, \dots, x_{r+s})$ soit M -régulière I -maximale.

Proposition 11.69. Soient A un anneau noethérien, $I \subset A$ un idéal, M un A -module de type fini, et $M_0 := M/IM$. Alors on a :

(i) Si $M_0 \neq 0$, toutes les suites M -régulières I -maximales ont la même longueur.

(ii) $\text{prof}(I, M) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0\}$.

(iii) $\text{prof}(I, M) = +\infty \Leftrightarrow M_0 = 0 \Leftrightarrow \text{Supp}_A(M) \cap V(I) = \emptyset$.

Démonstration. (i) : Soit $(x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de I , et posons $\overline{M} := M/(x_1M + \dots + x_rM)$; compte tenu de la remarque 11.67(ii) et de l'exercice 11.68, il suffit de montrer que les A -modules $\text{Ext}_A^r(A/I, M)$ et $\text{Hom}_A(A/I, \overline{M})$ sont isomorphes. On raisonne par récurrence sur r . Pour $r = 0$, on a l'isomorphisme naturel

$\text{Hom}_A(A/I, M) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^0(A/I, M)$ de l'exercice 7.63(iii). Soit ensuite $r > 0$, et supposons d'avoir déjà exhibé un tel isomorphisme, pour tout A -module de type fini N , et toute suite N -régulière d'éléments de I , de longueur $r - 1$. On pose $N := M/x_1M$, de sorte que $(x_2, \dots, x_r)$ est une suite N -régulière. Par hypothèse de récurrence, on a un isomorphisme :

$$\text{Hom}_A(A/I, \overline{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(A/I, N/(x_2N + \dots + x_rN)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^{r-1}(A/I, N).$$

De l'autre côté, la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow N \rightarrow 0$ induit une suite exacte :

$$\text{Ext}_A^{r-1}(A/I, M) \rightarrow \text{Ext}_A^{r-1}(A/I, N) \xrightarrow{\delta^{r-1}} \text{Ext}_A^r(A/I, M) \xrightarrow{x_1} \text{Ext}_A^r(A/I, M)$$

(remarque 7.71). En vertu de l'hypothèse de récurrence, $\text{Ext}_A^{r-1}(A/I, M)$ est isomorphe à $\text{Hom}_A(A/I, M/(x_1M + \dots + x_{r-1}M))$, qui est nul, car $(x_1, \dots, x_{r-1})$ n'est pas I -maximale (remarque 11.67(ii)). Noter en outre que $\text{Ext}_A^r(A/I, M)$ est un A/I -module, donc la multiplication par le scalaire x_1 est l'endomorphisme nul sur ce module. Ainsi, δ^{r-1} est un isomorphisme, d'où l'assertion.

(iii) : Si $\text{prof}(I, M) = +\infty$, alors $M_0 = 0$, d'après (i) et l'exercice 11.68. De l'autre côté, si $M_0 = 0$, il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$ (corollaire 3.48), et pour tout $r \in \mathbb{N}$ la suite constante $(a, \dots, a)$ de longueur r est alors M -régulière, d'où $\text{prof}(I, M) = +\infty$. Ensuite, on a $M_0 = 0 \Leftrightarrow \text{Supp}_A(M_0) = \emptyset$ d'après la remarque 3.58(i), et $\text{Supp}_A(M_0) = V(I) \cap \text{Supp}_A(M)$, d'après l'exercice 3.64(ii.a).

(ii) : La preuve de (i) montre l'identité souhaitée si $M_0 \neq 0$. Compte tenu de (iii), il reste à vérifier que si $M_0 = 0$, alors $E_i := \text{Ext}_A^i(A/I, M) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Mais on vient de voir que si $M_0 = 0$, il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$, donc $1+a \in \text{Ann}_A(E_i)$; de l'autre côté, E_i est un A/I -module, donc $(1+a) \cdot \text{Id}_{E_i} = \text{Id}_{E_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 11.70. *Dans la situation de la proposition 11.69, on a :*

(i) *Pour toute suite M -régulière $(x_1, \dots, x_r)$ d'éléments de I on a :*

$$\boxed{\text{prof}(I, M/(x_1M + \dots + x_rM)) = \text{prof}(I, M) - r.}$$

(ii) $\text{prof}(I, M) \leq \inf(\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)) \leq \dim M$, si $M \neq IM$.

(iii) *Soient $\widehat{A}$ et $\widehat{M}$ les complétions I -adiques de A et M ; alors :*

$$\boxed{\text{prof}(I\widehat{A}, \widehat{M}) = \text{prof}(I, M).}$$

Démonstration. (i) : On se ramène aussitôt au cas où $r = 1$. En outre, l'assertion découle aisément de la proposition 11.69(iii), si $M = IM$. Soit alors $M \neq IM$; si $(y_1, \dots, y_n)$ est une suite M/x_1M -régulière I -maximale, la suite $(x_1, y_1, \dots, y_n)$ est M -régulière I -maximale, donc il suffit d'invoquer la proposition 11.69(i).

(ii) : On raisonne par récurrence sur $n := \text{prof}(I, M)$. L'assertion est triviale si $n = 0$. Remarquons ensuite :

Affirmation 11.71. Soit $t \in A$ un élément M -régulier ; on a :

$$\text{Max}(V(\mathfrak{p} + At)) \subset \text{Ass}_A(M/tM) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M).$$

Preuve : Rappelons que $\text{Max}(V(\mathfrak{p} + At))$ est l'ensemble des idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{p} + tA$ (exemple 4.65(iii)). Soit $\Sigma := \text{Ass}_A(M)$; d'après l'exercice 7.19, il existe une suite exacte de A -modules

$$(*) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

telle que $\text{Ass}_A(M') = \{\mathfrak{p}\}$ et $\text{Ass}_A M'' = \Sigma \setminus \{\mathfrak{p}\}$, et avec le corollaire 7.8(iii), il s'ensuit que tout élément M -régulier est aussi M'' -régulier. Considérons le diagramme commutatif à

lignes exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les multiplications par le scalaire t . Par le lemme du serpent, $(*)$ induit alors une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow M'/tM' \rightarrow M/tM \rightarrow M''/tM'' \rightarrow 0.$$

Ainsi, $\text{Ass}_A(M'/tM') \subset \text{Ass}_A(M/tM)$. Mais on a $\text{Supp}_A(M') = V(\mathfrak{p})$ (corollaire 7.8(v.a)) et donc $\text{Supp}_A(M'/tM') = \text{Supp}_A(M \otimes_A A/tA) = V(\mathfrak{p}) \cap V(t) = V(\mathfrak{p} + At)$ (exercice 7.21). Par suite, $\text{Max}(V(\mathfrak{p} + At)) \subset \text{Ass}_A(M'/tM')$ (corollaire 7.8(v.a)), d'où l'assertion. $\diamond$

Or, soit $x \in I$ un élément M -régulier avec $M/xM \neq 0$; d'après (i), il vient

$$\text{prof}_A(M/xM) = n - 1$$

et d'après l'observation 11.71, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$ il existe $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}_A(M/xM)$ avec $\mathfrak{p} + Ax \subset \mathfrak{p}'$. Mais $x \notin \mathfrak{p}$, car x est M -régulier (remarque 7.21(iii)), d'où $\dim A/\mathfrak{p}' < \dim A/\mathfrak{p}$. En outre, par hypothèse de récurrence on a $n-1 \leq \dim A/\mathfrak{p}'$, donc $n \leq \dim A/\mathfrak{p}$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, CQFD.

(iii) Si $\text{prof}(I, M) = +\infty$, on a $M = IM$ (proposition 11.69(iii)), d'où $\widehat{M} = 0$, et ainsi $\text{prof}(I, \widehat{M}) = +\infty$. On peut donc supposer que $\text{prof}(I, M) < +\infty$. D'après la proposition 9.102(i) et le corollaire 9.103(i), $\widehat{A}$ est une A -algèbre plate, et on a une identification naturelle : $\widehat{A} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$. Soit $x_\bullet := (x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de I , et notons par $x'_\bullet := (x'_1, \dots, x'_r)$ l'image de $x_\bullet$ dans $I\widehat{A}$; soient aussi $M_0 := M / \sum_{i=1}^r x_i M$ et $\widehat{M}_0 := \widehat{M} / \sum_{i=1}^r x'_i \widehat{M} \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \otimes_A M_0$. D'après l'exercice 11.61(i.a), la suite $x'_\bullet$ est $\widehat{M}$ -régulière; en outre, $\text{Hom}_A(A/I, M_0)$ est un A/I -module, et on a une identification naturelle : $A/IA \xrightarrow{\sim} \widehat{A}/I\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \otimes_A A/I$ (lemme 9.101(i,ii)), d'où des isomorphismes A -linéaires :

$$\text{Hom}_A(A/I, M_0) \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \otimes_A \text{Hom}_A(A/I, M_0) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{A}/I\widehat{A}, \widehat{M}_0)$$

(exercice 4.110(ii)). Ainsi, $x_\bullet$ est M -régulière I -maximale $\Leftrightarrow x'_\bullet$ est $\widehat{M}$ -régulière $I\widehat{A}$ -maximale (remarque 11.67(ii)), et on conclut avec la proposition 11.69(i). $\square$

Exercice 11.72. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, intègre et intégralement clos, avec $\dim A \geq 2$. Montrer que $\text{prof}_A(A) \geq 2$.

Problème 11.73. Soient A un anneau noethérien, $f : A \rightarrow B$ une A -algèbre, M un B -module tel que $M_{[f]}$ soit un A -module de type fini. Montrer que :

- (i) $\dim M = \dim M_{[f]}$.
- (ii) $\text{prof}(I, M_{[f]}) = \text{prof}(IB, M)$ pour tout idéal $I \subset A$.
- (iii) Si $(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ sont locaux, et si f est local, $\text{prof}_B(M) = \text{prof}_A(M_{[f]})$.

Exercice 11.74. Soient A un anneau, $I, J \subset A$ deux idéaux, M un A -module, $(x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de A , et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (i) Montrer que la suite $(x_1^{k_1}, \dots, x_r^{k_r})$ est M -régulière.
- (ii) On suppose que $V(I) = V(J)$; déduire de (i) que $\text{prof}(I, M) = \text{prof}(J, M)$.

L'exercice 11.74(ii) montre que la I -profondeur d'un A -module M ne dépend que de M et de la partie fermée $Z := V(I)$; par suite, on écrit aussi $\text{prof}(Z, M)$ au lieu de $\text{prof}(I, M)$, et on appelle parfois cet invariant Z -profondeur de M . La Z -profondeur d'un anneau A (relative à une partie fermée donnée $Z \subset \text{Spec } A$) encode des propriétés géométriques subtiles de $\text{Spec } A$, très importantes pour l'étude des propriétés fines des

schémas. Le problème suivant peut fournir un aperçu des interactions entre Z -profondeur et géométrie du spectre premier.

Problème 11.75. Montrer la généralisation suivante du problème 3.36. Soient A un anneau, $Z \neq \emptyset$ une partie fermée de $X := \operatorname{Spec} A$ avec $\operatorname{prof}(Z, A) \geq 2$, et $U := X \setminus Z$; soit en outre $j : U \rightarrow X$ l'inclusion. Alors on a :

- (i) La partie ouverte U de X n'est pas représentable (voir la remarque 3.34(ii)).
- (ii) Si en outre, Z est constructible dans X , l'unité d'adjonction $\mathcal{O}_X \rightarrow \tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme.
- (iii) Sous les hypothèses de (ii), si X est connexe, il en est de même pour U .

Proposition 11.76. Soient $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M un A -module de type fini, N un B -module de type fini, tel que $N_{[f]}$ soit un A -module plat. Alors on a :

$$\operatorname{prof}_B(N \otimes_A M) = \operatorname{prof}_A(M) + \operatorname{prof}_{B/\mathfrak{m}B}(N/\mathfrak{m}N).$$

Démonstration. On peut supposer que $M, N \neq 0$; alors $N/\mathfrak{m}N \neq 0$ (corollaire 3.49), et en outre $n' := \operatorname{prof}_A(M)$ et $n'' := \operatorname{prof}_{B/\mathfrak{m}B}(N/\mathfrak{m}N)$ sont des entiers, d'après la proposition 11.69(iii). On pose $p := \operatorname{prof}_B(N \otimes_A M)$, et on raisonne par récurrence sur $n := n' + n''$. Si $n = 0$, on a $n' = n'' = 0$, donc $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ et $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B \in \operatorname{Ass}_{B/\mathfrak{m}B}(N/\mathfrak{m}N)$, i.e. $\mathfrak{n} \in \operatorname{Ass}_B(N/\mathfrak{m}N)$ (remarque 11.67(ii)); par suite, $\mathfrak{n} \in \operatorname{Ass}_B(N \otimes_A M)$ (théorème 7.23(ii)), d'où $p = 0$ (remarque 11.67(ii)).

Soit alors $n > 0$, et supposons que l'identité souhaitée soit déjà connue pour tout A -module M' et tout B -module N' tel que $N'_{[f]}$ soit un A -module plat, et avec $\operatorname{prof}_A(M') + \operatorname{prof}_{B/\mathfrak{m}B}(N'/\mathfrak{m}N') < n$. Supposons d'abord que $n' > 0$, i.e. qu'il existe $x \in \mathfrak{m}$ qui soit M -régulier; posons $A' := A/xA, B' := B/xB, M' := M/xM, f' : A' \otimes_A f : A' \rightarrow B'$, et $N' := N/xN$. On a des identifications naturelles : $B'/\mathfrak{m}B' = B/\mathfrak{m}B$ et $N'/\mathfrak{m}N' = N/\mathfrak{m}N$, car $x \in \mathfrak{m}$, et un isomorphisme B' -linéaire

$$(N \otimes_A M)/x(N \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} N' \otimes_{A'} M'.$$

En outre, comme x est M -régulier, il est aussi $N \otimes_A M$ -régulier, car $N_{[f]}$ est un A -module plat (exercice 11.61(i.a)). Compte tenu du corollaire 11.70(i), il vient :

$$\operatorname{prof}_{A'}(M') = n' - 1 \quad \operatorname{prof}_{B'/\mathfrak{m}B'}(N'/\mathfrak{m}N') = n'' \quad \operatorname{prof}_{B'}(N' \otimes_{A'} M') = p - 1.$$

Mais $N'_{[f']}$ est un A' -module plat (remarque 3.74(vi)); par hypothèse de récurrence, on a alors $p - 1 = n' - 1 + n''$, d'où l'assertion, dans ce cas.

En dernier lieu, supposons que $n'' > 0$, i.e. il existe $y \in B$ qui soit $N/\mathfrak{m}N$ -régulier; d'après la proposition 11.62, y est alors aussi N -régulier, et $N' := N/yN$ est un A -module plat. En outre, on a des identifications naturelles

$$(N \otimes_A M)/y(N \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} N' \otimes_A M \quad (N \otimes_A k(\mathfrak{m}))/y(N \otimes_A k(\mathfrak{m})) \xrightarrow{\sim} N' \otimes_A k(\mathfrak{m})$$

et une suite exacte $0 \rightarrow N \xrightarrow{y} N \rightarrow N' \rightarrow 0$ de B -modules; le problème 4.24(ii.a) montre alors que y est $N \otimes_A M$ -régulier. Avec le corollaire 11.70(i), il vient :

$$\operatorname{prof}_{B/\mathfrak{m}B}(N'/\mathfrak{m}N') = n'' - 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{prof}_B(N' \otimes_A M) = p - 1$$

et $p - 1 = n' + n'' - 1$, par hypothèse de récurrence; cela achève la preuve. $\square$

Définition 11.77. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un A -module de type fini. On dit que M est de *Cohen-Macaulay* si $M = 0$ ou si $M \neq 0$ et $\dim M = \operatorname{prof}_A(M)$. On dit que A est un *anneau de Cohen-Macaulay*, si le A -module A est de Cohen-Macaulay.

Exemple 11.78. (i) Soient A, M comme dans la définition 11.77. Avec le théorème 11.25, on a : $0 < l_A(M) < +\infty \Leftrightarrow \dim M = 0 \Rightarrow M$ est de Cohen-Macaulay.

(ii) Si en outre $(A, \mathfrak{m})$ est réduit et $\dim A = 1$, noter que $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_A(A)$, car sinon on aurait $a \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ avec $\mathfrak{m} \cdot a = 0$ (corollaire 7.8(ii)), et en particulier $a^2 = 0$, une

contradiction. Il s'ensuit que $\text{prof}_A(A) > 0$ (remarque 11.67(iii)), et avec le corollaire 11.70(ii), on conclut que A est un anneau de Cohen-Macaulay.

(iii) L'exercice 11.72 et le corollaire 11.70(ii) montrent que si A est intègre et intégralement clos et si $\dim A = 2$, alors $\widehat{A}$ est de Cohen-Macaulay.

(iv) Soient $I \subset \mathfrak{m}$ un idéal, $\widehat{A}$ et $\widehat{M}$ les complétions I -adiques de A et M . Alors M est un A -module de Cohen-Macaulay si et seulement si $\widehat{M}$ est un $\widehat{A}$ -module de Cohen-Macaulay (corollaires 11.36 et 11.70(iii)).

(v) Soit $f : B \rightarrow A$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, et supposons que $M_{[f]}$ soit un B -module de type fini. D'après le problème 11.73(i,iii), le A -module M est de Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ le B -module $M_{[f]}$ est de Cohen-Macaulay.

Corollaire 11.79. *Sous les hypothèses de la proposition 11.76, supposons en outre que $M, N \neq 0$. On a :*

(i) $N \otimes_A M$ est un B -module de Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow M$ est un A -module de Cohen-Macaulay et $N/\mathfrak{m}N$ est un $B/\mathfrak{m}B$ -module de Cohen-Macaulay.

(ii) En particulier, si $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ est fidèlement plat, alors B est un anneau de Cohen-Macaulay si et seulement s'il en est de même pour A et pour $B/\mathfrak{m}B$.

Démonstration. (i) découle de la proposition 11.76, du corollaire 11.39(ii), et de la remarque 11.67(iii). Pour (ii), noter que $B/\mathfrak{m}B \neq 0$, car f est local ; l'assertion est alors un cas particulier de (i). $\square$

Lemme 11.80. (i) Soient A un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de Cohen-Macaulay. Alors on a $\dim A/\mathfrak{p} = \dim M$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$.

(ii) En particulier, aucun idéal premier associé à M n'est immergé.

Démonstration. Soit $\Sigma := \text{Ass}_A(M)$; on a $\text{prof}_A(M) \leq \inf(\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \Sigma)$ d'après le corollaire 11.70(ii), et d'autre part, $\sup(\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \Sigma) = \dim M$, car $\text{Supp}_A(M)$ est l'adhérence de Σ dans $\text{Spec } A$ (corollaire 7.8(v.a)), d'où les assertions. $\square$

Proposition 11.81. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau noethérien, $M \neq 0$ un A -module de Cohen-Macaulay, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_r)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$, et $N := M/(x_1M + \dots + x_rM)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) La suite $x_\bullet$ est M -régulière.

(b) $\dim N = \dim M - r$.

(c) La suite $x_\bullet$ fait partie d'un système de paramètres pour M .

En outre, si ces conditions sont vérifiées, N est un A -module de Cohen-Macaulay.

Démonstration. On sait déjà que (b) $\Leftrightarrow$ (c) pour tout A -module $M \neq 0$ de type fini (corollaire 11.31), et que (a) $\Rightarrow$ (c) (proposition 11.65).

(c) $\Rightarrow$ (a) : On raisonne par récurrence sur r . Pour $r = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $r = 1$, posons $d := \dim M$, et noter que $\Sigma := \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A M \mid \dim A/\mathfrak{p} = d\} = \text{Ass}_A M$, d'après le lemme 11.80 ; d'autre part, on sait déjà que $\dim M/x_1M = d-1$ (car (c) $\Rightarrow$ (b)), donc $x_1 \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$ (corollaire 11.32), par suite x_1 est M -régulier (corollaire 7.8(iii)), et $\text{prof}_A(M/x_1M) = \text{prof}_A(M) - 1 = d-1$ (corollaire 11.70(i)), donc M/x_1M est de Cohen-Macaulay. Soit ensuite $r > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute suite de $r-1$ éléments de $\mathfrak{m}$; comme x_1 fait partie d'un système de paramètres pour M , on vient de voir que x_1 est M -régulier et $M' := M/x_1M$ est de Cohen-Macaulay avec $\dim M' = d-1$. En outre, il existe $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que $x_1, \dots, x_d$ soit un système de paramètres pour M , donc $x_2, \dots, x_d$ est un système de paramètres pour M' . Par hypothèse de récurrence, $N = M'/(x_2M' + \dots + x_rM')$ est alors un A -module de Cohen-Macaulay de dimension $d-r$, et la suite $x_2, \dots, x_r$ est M' -régulière, d'où (a). $\square$

Proposition 11.82. Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de Cohen-Macaulay, et $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A M$. Alors on a :

(i) $\dim_A M = \dim_A(M/\mathfrak{p}M) + \text{prof}(\mathfrak{p}, M)$.

(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module de Cohen-Macaulay et $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \text{prof}(\mathfrak{p}, M)$.

Démonstration. (i) : On raisonne par récurrence sur $r := \text{prof}(\mathfrak{p}, M)$. Si $r = 0$, il existe $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A(M)$ tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ (remarque 11.67(ii)), et puisque M est de Cohen-Macaulay, $\mathfrak{q}$ est un point maximal de $\text{Supp}_A M$ et $\dim A/\mathfrak{q} = d := \dim M$ (lemme 11.80(i,ii) et corollaire 7.8(v.a)) ; par suite, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ et $\dim A/\mathfrak{p} = d$. D'autre part, $\text{Supp}_A(M/\mathfrak{p}M) = \text{Supp}_A(M) \cap V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p})$ (exercice 3.64(ii.a)), d'où $\dim_A(M/\mathfrak{p}M) = \dim A/\mathfrak{p}$. Soit ensuite $r > 0$, et supposons que l'identité de (i) soient déjà connue pour tout A -module de Cohen-Macaulay N tel que $\text{prof}(\mathfrak{p}, N) = r - 1$; par hypothèse, $\mathfrak{p}$ contient un élément M -régulier x , et $N := M/xM$ est un A -module de Cohen-Macaulay avec $\dim N = d - 1$ (proposition 11.81) ; en outre, $\text{prof}(\mathfrak{p}, N) = r - 1$ (corollaire 11.70(i)). Evidemment, $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A N$ et $N/\mathfrak{p}N = M/\mathfrak{p}M$; par hypothèse de récurrence, $\dim_A N = \dim_A(N/\mathfrak{p}N) + \text{prof}(\mathfrak{p}, N) = \dim_A(M/\mathfrak{p}M) + \text{prof}(\mathfrak{p}, M) - 1$, d'où l'identité souhaitée pour M .

(ii) : Soit $x_{\bullet} := (x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière $\mathfrak{p}$ -maximale d'éléments de $\mathfrak{p}$, et notons par $x'_{\bullet}$ l'image de $x_{\bullet}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$. Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est une A -algèbre plate (remarque 3.74(i)), et en vertu de l'isomorphisme naturel $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}}$ (voir le §3.3.2), la suite $x'_{\bullet}$ est $M_{\mathfrak{p}}$ -régulière (exercice 11.61(i.a)), d'où :

$$\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \text{prof}(\mathfrak{p}, M).$$

De l'autre côté, munissons $T := \text{Supp}_A M$ de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spec } A$; alors T est un espace spectral (exemple 4.58), et $\text{Supp}_A(M/\mathfrak{p}M) = T \cap V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence de $\{\mathfrak{p}\}$ dans T (exercice 3.64) ; en outre, avec la remarque 3.58(iii), $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ s'identifie naturellement avec $T(\mathfrak{p})$ (notation de l'exemple 4.65(i)). Au vu de (i) et de la remarque 4.75(ii), il vient alors :

$$\text{prof}(\mathfrak{p}, M) = \dim_A M - \dim_A(M/\mathfrak{p}M) \geq \dim_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Mais on a $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \dim_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ (corollaire 11.70(ii)), d'où l'assertion. $\square$

Définition 11.83. Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini. On dit que M est de Cohen-Macaulay (resp. que A est de Cohen-Macaulay) si $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module de Cohen-Macaulay (resp. si $A_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay) pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. En vertu de la proposition 11.82(ii), cette définition coïncide avec la définition 11.77, lorsque A est local. Evidemment, si M (resp. A) est de Cohen-Macaulay, $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$ -module de Cohen-Macaulay (resp. $S^{-1}A$ est un anneau de Cohen-Macaulay), pour toute partie $S \subset A$.

Corollaire 11.84. Si A est un anneau de Cohen-Macaulay, l'anneau $A[T_1, \dots, T_n]$ est de Cohen-Macaulay pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on se ramène au cas où $n = 1$. Soient alors $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A[T]$, et $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$; on doit vérifier que $A[T]_{\mathfrak{q}}$ est de Cohen-Macaulay. Puisque $\mathfrak{q}' := \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}[T] \in \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}[T]$ et $A[T]_{\mathfrak{q}} = (A_{\mathfrak{p}}[T])_{\mathfrak{q}'}$, quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{q}$ par $\mathfrak{q}'$, on peut supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit local et que l'homomorphisme induit $A \rightarrow A[T]_{\mathfrak{q}}$ soit local ; en outre, puisque $A[T]$ est un A -module libre, $A[T]_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre plate (remarque 3.74(i,iv) et exercice 3.76(ii)), et on est alors ramené à montrer que $B := k(\mathfrak{p}) \otimes_A A[T]_{\mathfrak{q}}$ est de Cohen-Macaulay (corollaire 11.79(ii)). Mais B est une localisation de $k(\mathfrak{p})[T]$, donc il suffit de montrer que $k(\mathfrak{p})[T]$ est de Cohen-Macaulay ; or, ce dernier est intègre et de dimension un, donc l'assertion découle de l'exemple 11.78(ii). $\square$

Théorème 11.85. (i) Soit A un anneau noethérien, et supposons qu'il existe un A -module de Cohen-Macaulay M avec $\text{Supp}_A M = \text{Spec } A$. Alors tout quotient de A est caténaire (voir la remarque 4.75(iii)).

(ii) Si A est de Cohen-Macaulay, toute A -algèbre de type fini est caténaire.

Démonstration. (i) : Il est clair que toute partie fermée d'un espace spectral caténaire est encore caténaire ; il suffit alors de montrer que A est caténaire, sous les hypothèses de (i).

Puisque A est noethérien, on a $\text{ht}(\mathfrak{p}) < +\infty$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ (remarque 11.27(ii)) ; le critère de l'exercice 4.76(ii) nous ramène alors à vérifier que :

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) = \text{ht}(\mathfrak{q}) + \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) \quad \forall \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } A \text{ avec } \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}.$$

Or, par hypothèse, $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module de Cohen-Macaulay, et $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ (remarque 3.58(iii)), donc, quitte à remplacer A , $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ par $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, on est ramené au cas où $(A, \mathfrak{p})$ est local, et on doit montrer que

$$\dim A = \text{ht}(\mathfrak{q}) + \dim A/\mathfrak{q} \quad \forall \mathfrak{q} \in \text{Spec } A.$$

Mais $\dim A = \dim_A M$, $\dim A/\mathfrak{q} = \dim_A(M/\mathfrak{q}M)$ et $\text{ht}(\mathfrak{q}) = \dim(A_{\mathfrak{q}}) = \dim_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) = \text{prof}_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})$, donc l'assertion découle de la proposition 11.82(i,ii).

(ii) découle de (i) et du corollaire 11.84. $\square$

Exercice 11.86. (i) Soient K un corps, A une K -algèbre de type fini. Avec la notation du problème 6.120(i), montrer que :

$$\dim_{\mathfrak{q}}(A/K) = \text{ht}(\mathfrak{q}) + \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q})/K) \quad \forall \mathfrak{q} \in \text{Spec } A.$$

(ii) Soient en outre $K \subset K'$ une extension de corps, $A' := K' \otimes_K A$, $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } A'$ et $\mathfrak{q} := A \cap \mathfrak{q}' \in \text{Spec } A$. Montrer que $\dim_{\mathfrak{q}}(A/K) = \dim_{\mathfrak{q}'}(A'/K')$.

(iii) Soient $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux, B une A -algèbre de type fini, et posons $B' := A' \otimes_A B$ et $\phi := \text{Spec}(f \otimes_A B) : \text{Spec } B' \rightarrow \text{Spec } B$. Avec la notation du problème 6.120(ii), montrer que :

$$U_n(B'/A') = \phi^{-1}(U_n(B/A)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Soit $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie. Montrer que $U_n(B/A)$ est une partie ouverte compacte de $\text{Spec } B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11.4. Complexe de Koszul et dimension projective des modules. Soient A un anneau, et $x \in A$; on dénote $K_{\bullet}^A(x)$ le complexe de A -modules

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{x \cdot \text{Id}_A} A \rightarrow 0$$

avec les deux copies de A placées aux degrés homologiques 1 et 0.

Soit maintenant $x_{\bullet} := (x_1, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de A . Le *complexe de Koszul* de la suite $x_{\bullet}$ est le produit tensoriel itéré

$$K_{\bullet}^A(x_{\bullet}) := K_{\bullet}^A(x_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K_{\bullet}^A(x_n).$$

Noter que cette notation est ambiguë, car on n'indique pas l'ordre dans le quel ces produits tensoriels doivent être effectués, que l'on pourrait signaler en interposant des parenthèses ; toutefois, en vertu de l'exercice 8.123 on sait que tout choix des positions des parenthèses donne lieu à un complexe canoniquement isomorphe à celui que l'on obtient avec n'importe quel autre choix, donc l'ambiguïté de notre notation est en fait inoffensive. Si $M_{\bullet}$ est un complexe de A -modules, on pose aussi

$$H_i(x_{\bullet}, M_{\bullet}) := H_i(M_{\bullet} \otimes_A K_{\bullet}^A(x_{\bullet})).$$

Exemple 11.87. (i) Si $M_{\bullet} = M[0]_{\bullet}$ pour un A -module M , on écrit plus simplement $H_i(x_{\bullet}, M)$ au lieu de $H_i(x_{\bullet}, M[0]_{\bullet})$. Pour tout $x \in A$ on trouve aisément :

$$H_0(x, M) = M/xM \quad H_1(x, M) = \text{Ann}_M(x) \quad \text{et} \quad H_i(x, M) = 0 \quad \forall i > 1.$$

(ii) Considérons une suite finie $x_{\bullet}$ d'éléments de A , et une suite exacte :

$$\Sigma_{\bullet} : 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

de A -modules. Les termes de $K_{\bullet}^A(x_{\bullet})$ sont des A -modules libres, donc $\Sigma_{\bullet} \otimes_A K_{\bullet}^A(x_{\bullet})$ est une suite exacte de complexes de A -modules, et d'après le §2.5.2, la suite exacte longue d'homologie correspondante s'écrit :

$$\cdots \rightarrow H_q(x_{\bullet}, M') \rightarrow H_q(x_{\bullet}, M) \rightarrow H_q(x_{\bullet}, M'') \rightarrow H_{q-1}(x_{\bullet}, M') \rightarrow \cdots$$

Proposition 11.88. Soient $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ un complexe de A -modules, et $x \in A$. Alors :

(i) Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_0(x, H_q(M_\bullet)) \rightarrow H_q(x, M_\bullet) \rightarrow H_1(x, H_{q-1}(M_\bullet)) \rightarrow 0.$$

(ii) $x \cdot H_q(x, M_\bullet) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On a une suite exacte courte de complexes évidente

$$0 \rightarrow A[0]_\bullet \rightarrow K_\bullet^A(x) \rightarrow A[-1]_\bullet \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte courte de complexes :

$$(*) \quad 0 \rightarrow M_\bullet \rightarrow M_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x) \rightarrow M_\bullet[-1] = M_\bullet \otimes_A A[-1]_\bullet \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue d'homologie associée à $(*)$ s'écrit

$$H_{q+1}(M_\bullet[-1]) \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(M_\bullet) \rightarrow H_q(M_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x)) \rightarrow H_q(M_\bullet[-1]) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(M_\bullet).$$

Noter que $M_i[-1] = M_{i-1}$, et la différentielle en degré i du complexe $M_\bullet[-1]$ est d_{i-1}^M pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On déduit une identification naturelle

$$H_{q+1}(M_\bullet[-1]) = H_q(M^\bullet) \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Donc, ∂_q est un endomorphisme de $H_q(M_\bullet)$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$, et au vu de l'exemple 11.87(i), il suffit de montrer que $\partial_q = (-1)^{q-1} x \cdot Id_{H_q(M_\bullet)}$. Or, la suite $(*)$ est le système de morphismes de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{q+1} & \longrightarrow & M_q \oplus M_{q+1} & \longrightarrow & M_q \longrightarrow 0 \\ & & d_{q+1}^M \downarrow & & \downarrow \delta_{q+1} & & \downarrow d_q^M \\ 0 & \longrightarrow & M_q & \longrightarrow & M_{q-1} \oplus M_q & \longrightarrow & M_{q-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où δ_{q+1} est donné par la matrice en blocs

$$\begin{pmatrix} d_q^M & 0 \\ (-1)^q x \cdot Id_{M_q} & d_{q+1}^M \end{pmatrix} \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

et les flèches horizontales sont les injections et surjections canoniques. Soit donc $\overline{m} \in H_q(M_\bullet)$; par inspection de la construction des homomorphismes de bord, on obtient la description suivante de $\partial_{q+1}(\overline{m})$. On choisit un représentant $m \in \text{Ker } d_q^M$ de la classe $\overline{m}$, et on relève m en un élément $m' \in M_q \oplus M_{q+1}$; par exemple, on peut prendre $m' := (m, 0)$. Avec ce choix, il vient $\delta_{q+1}(m') = (0, (-1)^q xm)$, l'image dans $M_{q-1} \oplus M_q$ de l'élément $(-1)^q xm \in M_q$ via l'injection canonique; alors, $\partial_{q+1}(\overline{m})$ est la classe de $(-1)^q xm$ dans $H_q(M_\bullet)$, i.e. $\partial_{q+1}(\overline{m}) = (-1)^q x \cdot \overline{m}$.

(ii) : Soit $(m, m') \in M_{q-1} \oplus M_q$ tel que $\delta_q(m, m') = (0, 0)$; ainsi, $d_{q-1}^M(m) = 0$ et $d_q^M(m') = (-1)^q xm$, par suite $x \cdot (m, m') = \delta_{q+1}((-1)^q m', 0)$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 11.89. Soient M un A -module, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite d'éléments de A , et $I \subset A$ l'idéal engendré par $x_\bullet$. Alors :

- (i) $H_0(x_\bullet, M) = M/IM$ et $H_n(x_\bullet, M) = \text{Ann}_M(I)$.
- (ii) $I \cdot H_q(x_\bullet, M) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.
- (iii) $H_q(x_\bullet, M) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si la suite $x_\bullet$ est M -régulière.
- (iv) Si $H_1(x_\bullet, M) = 0$, la suite $x_\bullet$ est M -quasi-régulière.

Démonstration. (i) : On raisonne par récurrence sur n ; le cas $n = 1$ est l'exemple 11.87(i). Soit donc $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute suite de longueur $n - 1$; on pose :

$$x'_\bullet := (x_1, \dots, x_{n-1}) \quad I' := Ax_1 + \dots + Ax_{n-1} \quad N_\bullet := M[0]_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x'_\bullet).$$

D'après l'exercice 8.123, on a un isomorphisme naturel de complexes de A -modules :

$$(*) \quad N_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x_n) \xrightarrow{\sim} M[0]_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x_\bullet).$$

Par hypothèse de récurrence, $H_0(N_\bullet) = M/I'M$ et $H_{n-1}(N_\bullet) = \text{Ann}_M(I')$. D'après la proposition 11.88(ii), il vient ainsi $H_0(x_\bullet, M) = H_0(x_n, M/I'M) = M/IM$ et

$$H_n(x_\bullet, M) = H_1(x_n, \text{Ann}_M(I')) = \text{Ann}_M(I').$$

(ii) : Pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, soit $x_\bullet^\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$; le corollaire 8.121(i) fournit pour toute telle σ un isomorphisme $K_\bullet^A(x_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet^A(x_\bullet^\sigma)$ de complexes de A -modules. On est ainsi ramené à vérifier que $x_n \cdot H_q(x_\bullet, M) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Au vu de l'isomorphisme $(*)$, il suffit pour cela d'appliquer la proposition 11.88(ii) au complexe $N_\bullet$.

(iii) : On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'assertion est évidente. Soit $n > 1$, et supposons que (iii) soit connue pour toute suite de longueur $n - 1$; définissons $x'_\bullet$, I' et $N_\bullet$ comme ci-dessus, de sorte que $H_0(N_\bullet) = H_0(x'_\bullet, M) = M' := M/I'M$. La suite $x'_\bullet$ est M -régulière, donc $H_q(N_\bullet) = 0$ pour $q \neq 0$, par hypothèse de récurrence. D'après (i), $H_0(x_n, M') = M/IM$ et $H_1(x_n, M') = 0$, car x_n est M' -régulier. Au vu de l'isomorphisme $(*)$, il suffit alors d'appliquer la proposition 11.88(i) au complexe $N_\bullet$.

(iv) : Soient $R := \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$, et $f : R \rightarrow A$ l'unique homomorphisme d'anneaux tel que $f(T_i) := x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$; évidemment $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ est une suite R -régulière, et si $J \subset R$ est l'idéal engendré par $T_\bullet$, on a un isomorphisme unique $\omega : R/J \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$; d'après (iii), le complexe $K_\bullet^R(T_\bullet)$ est alors une résolution libre de $\mathbb{Z}$, que l'on muni de la structure de R -module déduite de ω . Par suite, on a des isomorphismes de R -modules :

$$H_q(x_\bullet, M)_{[f]} \xrightarrow{\sim} H_q(T_\bullet, M_{[f]}) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_q^R(M, \mathbb{Z}) \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, la condition de (iv) équivaut à : $\text{Tor}_1^R(M, \mathbb{Z}) = 0$. Ensuite, noter que $Q_k := J^k/J^{k+1}$ est isomorphe au $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les polynômes homogènes $P \in R$ de degré k , d'où, plus généralement : $\text{Tor}_1^R(M, Q_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite exacte courte $0 \rightarrow J^{k+1} \rightarrow J^k \rightarrow Q_k \rightarrow 0$ induit alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow M \otimes_R J^{k+1} \rightarrow M \otimes_R J^k \rightarrow M \otimes_R Q_k \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(exemple 7.69). On obtient ainsi un diagramme commutatif de R -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes_R J^{k+1} & \longrightarrow & M \otimes_R J^k & \longrightarrow & M \otimes_R Q_k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu_{k+1} & & \downarrow \mu_k & & \downarrow \phi_k \\ 0 & \longrightarrow & I^{k+1}M & \longrightarrow & I^kM & \longrightarrow & I^kM/I^{k+1}M \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes courtes, et dont les flèches verticales sont surjectives; explicitement : $\mu_k(m \otimes P) = P(x_\bullet) \cdot m$ pour tout $P(T_\bullet) \in J^k$, tout $m \in M$, et tout $k \in \mathbb{N}$. Evidemment μ_0 est bijectif; par suite, une simple récurrence sur k montre que chaque μ_k est un isomorphisme, et alors il en est de même pour chaque ϕ_k (exercice 2.104). Mais noter que la somme directe $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} M \otimes_R Q_k$ s'identifie naturellement avec le A/I -module $M_0[T_\bullet]$ du §11.3.1, et $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \phi_k$ correspond à $\phi_M : M_0[T_\bullet] \rightarrow G(M)$ sous cette identification (remarque 11.53(i)), d'où l'assertion. $\square$

11.4.1. Complexe de Koszul et profondeur. Soient A un anneau local noethérien, et M un A -module de type fini; avec la proposition 11.55, le corollaire 11.89(iv) fournit un critère nécessaire et suffisant pour la M -régularité d'une suite finie $x_\bullet$ d'éléments de A . Le résultat suivant montre que, même si $x_\bullet$ n'est pas M -régulière, l'homologie de $K_\bullet^A(x_\bullet, M)$ détecte la I -profondeur de M , où I dénote l'idéal engendré par $x_\bullet$.

Proposition 11.90. *Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini, $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de A , et $I \subset A$ l'idéal engendré par $x_\bullet$. On suppose que $M \neq IM$; alors on a :*

$$t := \sup\{q \in \mathbb{N} \mid H_q(x_\bullet, M) \neq 0\} = n - \text{prof}(I, M).$$

Démonstration. Soit $y_1, \dots, y_r$ une suite M -régulière I -maximale (exercice 11.68); on raisonne par récurrence sur r . Si $r = 0$, on a $\text{Ann}_M(I) = \text{Hom}_A(A/I, M) \neq 0$ (remarque 11.67(ii)), d'où $H_n(x_\bullet, M) \neq 0$ (corollaire 11.89(i)), comme souhaité.

Soit ensuite $r > 0$, et supposons que la proposition soit déjà connue pour tout A -module dont la I -profondeur est $< r$; on considère la suite exacte de A -modules :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{y_1 \cdot Id_M} M \rightarrow Q := M/y_1 M \rightarrow 0$$

et noter que $y_1 \cdot Id_M$ induit l'endomorphisme zéro $H_q(x_\bullet, M) \rightarrow H_q(x_\bullet, M)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, car $I \cdot H_q(x_\bullet, M) = 0$ (corollaire 11.89(ii)); compte tenu de l'exemple 11.87(ii), on déduit alors des suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_{q+1}(x_\bullet, M) \rightarrow H_{q+1}(x_\bullet, Q) \rightarrow H_q(x_\bullet, M) \rightarrow 0 \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Par suite, $H_{t+1}(x_\bullet, Q) \neq 0$ et $H_q(x_\bullet, Q) = 0$ pour $q > t + 1$; mais $\text{prof}(I, Q) = r - 1$, donc $t + 1 = n - (r - 1)$, par hypothèse de récurrence, i.e. $t = n - r$. $\square$

Problème 11.91. (Complexes de l'algèbre extérieure) (i) Soient A un anneau, M un A -module, et $\phi \in \text{Hom}_A(M, A)$. Exhiber un complexe de A -modules

$$K_\bullet^A(\phi) : \dots \xrightarrow{d_{i+1}^\phi} \Lambda_A^i(M) \xrightarrow{d_i^\phi} \dots \xrightarrow{d_2^\phi} \Lambda_A^1(M) \xrightarrow{d_1^\phi} \Lambda_A^0(M) = A$$

dont la différentielle d_r^ϕ en tout degré $r > 0$ est définie par l'association :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \mapsto \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \cdot \phi(x_i) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_r \quad \forall x_1, \dots, x_r \in M.$$

(ii) Montrer que l'application A -linéaire

$$d_\bullet^\phi : \Lambda_A^\bullet(M) \rightarrow \Lambda_A^\bullet(M) \quad \text{telle que} \quad d_\bullet^\phi(x) := d_r^\phi(x) \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Lambda_A^r(M)$$

est une *dérivation* de l'algèbre alternée $\Lambda_A^\bullet(M)$, i.e. vérifie la *formule de Leibniz* :

$$d_\bullet^\phi(x \wedge y) = d_\bullet^\phi(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge d_\bullet^\phi(y) \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Lambda_A^p(M) \quad \forall y \in \Lambda_A^q(M).$$

(iii) Soient M, N deux A -modules, $\phi : M \rightarrow A, \psi : N \rightarrow A$ deux applications A -linéaires, et $\phi + \psi : M \oplus N \rightarrow A$ l'application telle que $(x, y) \mapsto \phi(x) + \psi(y)$ pour tout $(x, y) \in M \oplus N$. Montrer que l'isomorphisme naturel de A -algèbres alternées :

$$\Lambda_A^\bullet(M) \otimes_A \Lambda_A^\bullet(N) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^\bullet(M \oplus N)$$

fourni par le problème 3.91(iv), est un isomorphisme de complexes de A -modules :

$$K_\bullet^A(\phi) \otimes_A K_\bullet^A(\psi) \xrightarrow{\sim} K_\bullet^A(\phi + \psi).$$

(iv) Soient $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite d'éléments de A (pour $n \geq 1$), et $\phi_{x_\bullet} : A^n \rightarrow A$ la forme A -linéaire avec $\phi_{x_\bullet}(a_\bullet) := \sum_{j=1}^n x_j a_j$ pour tout $a_\bullet := (a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Exhiber un isomorphisme naturel de complexes de A -modules :

$$K_\bullet^A(x_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet^A(\phi_{x_\bullet}).$$

(v) Soient L un A -module, $B := \text{Sym}_A^\bullet(L)$, (notation du problème 3.89), $M := B \otimes_A L$, et notons par $\beta_L : M = B \otimes_A \text{Sym}_A^1(L) \rightarrow B$ la restriction de la loi de multiplication $B \otimes_A B \rightarrow B$ de la A -algèbre B . Montrer que le complexe $K_\bullet^B(\beta_L)$ est la somme directe de complexes de A -modules :

$$\Sigma_{L,n}^\bullet := (0 \rightarrow \Lambda_A^n(L) \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_A^j(L) \otimes_A \text{Sym}_A^{n-j}(L) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Sym}_A^n(L) \rightarrow 0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(vi) Montrer que si L est un A -module plat, $\Sigma_{L,n}^\bullet$ est acyclique pour tout $n > 0$.

Voici une application classique du problème 11.91 :

Problème 11.92. (i) Soient A un anneau, P un A -module projectif de type fini, $\phi : P \rightarrow P$ un endomorphisme A -linéaire ; on pose

$$\begin{aligned}\chi_\phi(t) &:= \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}_{\Lambda_A^i(P)/A}(\Lambda_A^i \phi) \cdot t^i \in A[t] \\ \psi_\phi(t) &:= \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}_{\text{Sym}_A^i(P)/A}(\text{Sym}_A^i \phi) \cdot t^i \in A[[t]]\end{aligned}$$

(notation du problème 4.111). Montrer que $\chi_\phi(-t) \cdot \psi_\phi(t) = 1$ dans $A[[t]]$.

(ii) Dans la situation de (i), soit P un A -module libre de rang $n \in \mathbb{N}$. On pose $P[t] := A[t] \otimes_A P$, où $A[t]$ dénote la A -algèbre des polynômes de l'indéterminée t ; soit aussi $t \cdot \phi := t \cdot \text{Id}_{A[t]} \otimes_A \phi \in \text{End}_{A[t]}(P[t])$. Montrer que :

$$\det(\text{Id}_{P[t]} - t \cdot \phi) = \chi_\phi(-t) \quad \text{dans } A[t].$$

(iii) (Formule de Molien) Soient K un corps de caractéristique nulle, V un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ une représentation K -linéaire d'un groupe fini G sur V . L'homomorphisme ρ induit une G -action

$$\text{Sym}_K^\bullet(\rho) : G \rightarrow \text{Aut}_{K\text{-Alg}}(\text{Sym}_K^\bullet(V)) \quad g \mapsto \text{Sym}_K^\bullet(\rho(g))$$

dans le groupe des automorphismes de la K -algèbre $\text{Sym}_K^\bullet(V) \xrightarrow{\sim} K[T_1, \dots, T_n]$, et évidemment la partie $\text{Sym}_K^\bullet(V)^G$ des éléments de $\text{Sym}_K^\bullet(V)$ invariants sous l'action de G est une sous- K -algèbre graduée, dont la composante homogène en tout degré $d \in \mathbb{N}$ est $\text{Sym}_K^d(V)^G := \text{Sym}_K^d(V) \cap \text{Sym}_K^\bullet(V)^G$. Ainsi, $\text{Sym}_K^\bullet(V)^G$ est un K -module gradué borné, et sa série de Hilbert-Poincaré $P(\text{Sym}_K^\bullet(V)^G, t)$ est bien définie. Soit $o(G)$ l'ordre du groupe G ; avec la notation de (ii), montrer l'identité :

$$P(\text{Sym}_K^\bullet(V)^G, t) = \frac{1}{o(G)} \cdot \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\text{Id}_{V[t]} - t \cdot \rho(g))} \quad \text{dans } K[[t]].$$

Remarque 11.93. (i) Le corollaire 11.89(iii) montre que si $x_\bullet$ est une suite M -régulière, le complexe $M[0]_\bullet \otimes_A K_\bullet^A(x_\bullet)$ est une résolution de $M/x_\bullet M$; il est même une résolution projective (resp. libre), si M est un A -module projectif (resp. libre).

(ii) Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier, et $x_\bullet := (x_1, \dots, x_d)$ un système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$; compte tenu de (i) et du corollaire 11.59, on déduit que le complexe de Koszul $K_\bullet^A(x_\bullet)$ est une résolution libre de longueur finie du corps résiduel $k(\mathfrak{m})$. On verra que l'existence d'une résolution libre de longueur finie du corps résiduel est, en fait, caractéristique des anneaux locaux réguliers, et plus généralement, A est local régulier $\Leftrightarrow$ tout A -module de type fini admet une résolution libre de longueur finie. Cette caractérisation purement homologique de la régularité est un profond résultat de Serre, et fût l'un des premiers succès éclatants des méthodes homologiques dans l'algèbre commutative. En même temps, elle éclaire l'importance de la classe de modules contemplée dans la définition suivante.

Définition 11.94. Soient A un anneau, M un A -module. On dit que M est de dimension projective finie, s'il admet une résolution projective de longueur finie. Dans ce cas, la dimension projective de M , notée

$$\text{proj.dim}_A M$$

est le plus petit $d \in \mathbb{N}$ tels qu'on a une résolution projective $P_\bullet \rightarrow M$ avec $P_{d+1} = 0$. Si M n'est pas de dimension projective finie, on pose $\text{proj.dim}_A M := +\infty$.

Remarque 11.95. Soient A un anneau, M un A -module.

(i) Evidemment M est projectif si et seulement si $\text{proj.dim}_A M = 0$.

(ii) Noter que si la dimension projective de M est finie, on a $L_i FM = 0$ pour tout $i > \text{proj.dim}_A M$ et tout foncteur additif F défini sur la catégorie $A\text{-Mod}$.

Pour un anneau A général, l'étude de la dimension projective des A -modules s'effectue à l'aide des foncteurs $\text{Ext}_A^\bullet(-, -)$, les foncteurs dérivés des foncteurs $\text{Hom}_A(-, -)$. Toutefois, dans la suite on s'intéressera exclusivement aux modules de type fini sur un anneau local noethérien ; dans ce cas, on peut se passer de ces outils abstraits, et employer plutôt certaines résolutions concrètes, introduites par la définition suivante, qui simplifient notablement la théorie.

Définition 11.96. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local, M un A -module de type fini. Une *résolution minimale* $(L_\bullet, d_\bullet) \rightarrow M$ est une résolution telle que :

- L_i est un A -module libre de rang fini, pour tout $i \in \mathbb{N}$
- on a $d_i(L_i) \subset \mathfrak{m}L_{i-1}$ pour tout $i > 0$.

Exemple 11.97. Dans la situation de la définition 11.96, soit $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n)$ une suite régulière de A . Par la remarque 11.93, le complexe de Koszul $K_\bullet^A(x_\bullet)$ est une résolution libre de $A/(x_1A + \dots + x_nA)$, et une simple inspection de la construction montre qu'il s'agit d'une résolution minimale.

Proposition 11.98. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $k := A/\mathfrak{m}$, et M un A -module de type fini. Alors :

(i) M admet une résolution minimale.

(ii) Si $(P_\bullet, d_\bullet^P) \xrightarrow{\varepsilon} M$ est une résolution projective, et si $(L_\bullet, d_\bullet^L) \xrightarrow{\varepsilon'} M$ est une résolution minimale, il existe un complexe exact $Q_\bullet$ de A -modules tel que

$$P_\bullet = L_\bullet \oplus Q_\bullet \quad \text{et} \quad \varepsilon(x, y) = \varepsilon'(x) \quad \forall (x, y) \in L_0 \oplus Q_0.$$

(iii) Si $L_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ et $L'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} M$ sont deux résolutions minimales, il existe un isomorphisme de complexes de A -modules

$$\omega_\bullet : L_\bullet \xrightarrow{\sim} L'_\bullet \quad \text{tel que} \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ \omega_0.$$

(iv) Pour toute résolution minimale $(L_\bullet, d_\bullet) \rightarrow M$ on a

$$\dim_k \text{Tor}_i^A(k, M) = \text{rk}_A L_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

et $\text{proj.dim}_A M = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid L_i \neq 0\}$. (Ici on pose $\sup(\emptyset) := 0$.)

Démonstration. Au vu du problème 3.53(ii), l'assertion (iii) découle aussitôt de (ii).

(i) : On va construire de proche en proche une résolution minimale de M . D'abord, soit $r_0 := \dim_k M/\mathfrak{m}M$; par la proposition 3.51, on a une surjection A -linéaire $\varepsilon_M : L_0 := A^{r_0} \rightarrow M$. Or, $M_1 := \text{Ker } \varepsilon_M$ est un A -module de type fini, et $M_1 \subset \mathfrak{m}L_0$, car $k \otimes_A \varepsilon_M$ est bijectif. On pose $r_1 := \dim_k M_1/\mathfrak{m}M_1$, $L_1 := A^{r_1}$, et on choisit une application A -linéaire $d_1 : L_1 \rightarrow L_0$ avec $\text{Im } d_1 = M_1$; à nouveau, $M_2 := \text{Ker } d_1 \subset \mathfrak{m}L_1$, car d_1 induit un isomorphisme $L_1/\mathfrak{m}L_1 \xrightarrow{\sim} M_1/\mathfrak{m}M_1$. Ainsi de suite on obtient les A -modules L_i et les différentielles d_{i+1} , pour tout $i \geq 0$.

(iv) : En effet, on a $k \otimes_A d_i = 0$ pour tout $i \geq 1$, car $\text{Im}(d_i) \subset \mathfrak{m}L_{i-1}$, donc $H_i(k \otimes_A L_\bullet) = k \otimes_A L_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où la première assertion. Compte tenu de la remarque 11.95(ii), il vient $\text{proj.dim}_A M \geq \max\{i \in \mathbb{N} \mid L_i \neq 0\}$; l'inégalité opposée est triviale.

(ii) : D'après le théorème 5.9 il existe des morphismes de complexes

$$\phi_\bullet : L_\bullet \rightarrow P_\bullet \quad \psi : P_\bullet \rightarrow L_\bullet \quad \text{tels que} \quad \varepsilon' = \varepsilon \circ \phi_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ \psi_0.$$

En outre, $\omega_\bullet := \psi_\bullet \circ \phi_\bullet$ est homotopiquement équivalent à $\text{Id}_{L_\bullet}$. Soit alors $s_\bullet$ une homotopie de $\omega_\bullet$ vers $\text{Id}_{L_\bullet}$; donc $\omega_i - \text{Id}_{L_i} = d_{i+1}^L \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i^L$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et d'autre part $\text{Im}(d_i^L) \subset \mathfrak{m}L_{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On déduit que $\text{Im}(\omega_i - \text{Id}_{L_i}) \subset \mathfrak{m}L_i$, donc $k \otimes_A \omega_i = \text{Id}_{L_i/\mathfrak{m}L_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par suite, ω_i est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$ (problème 3.53(ii) et proposition 3.51). En particulier, ψ_i est surjectif et ϕ_i est injectif pour tout $i \in \mathbb{N}$; on déduit un isomorphisme de complexes $L_\bullet \oplus (\text{Ker } \psi_\bullet) \xrightarrow{\sim} P_\bullet$, d'où l'assertion. $\square$

Problème 11.99. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $M \neq 0$ un A -module de type fini, et $(L_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ une résolution minimale de M . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $r_k := \text{rk}_A L_k$, et fixons un isomorphisme A -linéaire $\omega_k : A^{r_k} \xrightarrow{\sim} L_k$, de sorte que $d_{k+1} : L_{k+1} \rightarrow L_k$ correspond à une matrice à coefficients dans A :

$$a_{\bullet\bullet}^{(k)} := (a_{ij}^{(k)} \mid i = 1, \dots, r_k, j = 1, \dots, r_{k+1}).$$

Soit $J_k(M) \subset A$ l'idéal engendré par les coefficients de $a_{\bullet\bullet}^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que l'idéal $J_k(M)$ ne dépend que du A -module M et de k (et il ne dépend ni de la résolution minimale choisie $L_\bullet$, ni des isomorphismes fixés $\omega_\bullet$).

(ii) Supposons que $p := \text{proj.dim}_A M < +\infty$. Montrer que pour tout idéal $I \subset A$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} J_k(M) \subset I$, on a : $p + \text{prof}(I, M) = \text{prof}(I, A)$.

(iii) (Identité de Auslander-Buchsbaum) En particulier :

$$\text{proj.dim}_A(M) + \text{prof}_A(M) = \text{prof}_A(A) \quad \text{si } \text{proj.dim}_A(M) < +\infty.$$

Corollaire 11.100. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, et considérons une suite exacte courte de A -modules de type fini :

$$(*) \quad 0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow 0.$$

Posons $d_i := \text{proj.dim}_A M_i$ pour $i = 0, 1, 2$; alors on a :

$$d_0 \leq \max(d_1, d_2 + 1) \quad d_1 \leq \max(d_0, d_2) \quad d_2 \leq \max(d_0 - 1, d_1)$$

et si la suite $(*)$ est scindée, on a $d_1 = \max(d_0, d_2)$.

Démonstration. Posons aussi $k := k(\mathfrak{m})$; d'après l'exemple 7.69, la suite $(*)$ induit, pour tout $i > 0$, une suite exacte de A -modules :

$$\text{Tor}_{i+1}^A(k, M_0) \rightarrow \text{Tor}_i^A(k, M_2) \rightarrow \text{Tor}_i^A(k, M_1) \rightarrow \text{Tor}_i^A(k, M_0) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^A(k, M_2).$$

En particulier, si $\text{Tor}_i^A(k, M_1) = \text{Tor}_{i-1}^A(k, M_2) = 0$, il vient $\text{Tor}_i^A(k, M_0) = 0$; au vu de la proposition 11.98(iv), cela entraîne la première inégalité. On raisonne de même pour les autres deux inégalités. Ensuite, si $(*)$ est scindée, on a un isomorphisme A -linéaire $M_1 \xrightarrow{\sim} M_0 \oplus M_2$, d'où, avec la remarque 1.122(ii), un isomorphisme :

$$\text{Tor}_i^A(k, M_1) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(k, M_0) \oplus \text{Tor}_i^A(k, M_2) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

L'identité souhaitée en découle, encore par la proposition 11.98(iv). $\square$

Proposition 11.101. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un A -module de type fini, et $a \in \mathfrak{m}$ un élément A -régulier et M -régulier. Alors :

$$\text{proj.dim}_{A/aA} M/aM = \text{proj.dim}_A M.$$

Démonstration. Posons $\overline{A} := A/aA$ et $\overline{M} := M/aM$. On peut supposer que $M \neq 0$, et alors $\overline{M} \neq 0$ (corollaire 3.49). D'après le corollaire 11.70(i) on a $\text{prof}_{\overline{A}}(\overline{A}) = \text{prof}_A(\overline{A}) = \text{prof}_A(A) - 1$ et de même, $\text{prof}_{\overline{A}}(\overline{M}) = \text{prof}_A(M) - 1$; avec le problème 11.99(iii), on est alors ramené à vérifier :

Affirmation 11.102. $h := \text{proj.dim}_A M < +\infty \Leftrightarrow h' := \text{proj.dim}_{\overline{A}} \overline{M} < +\infty$.

Preuve : On peut supposer que $d(M) := \min(h, h') < +\infty$, et on raisonne par récurrence sur $d(M)$. Si $h = 0$, le A -module M est libre, donc de même pour le $\overline{A}$ -module $\overline{M}$, d'où $h' = 0$. Si $h' = 0$, le $\overline{A}$ -module $\overline{M}$ est libre de rang fini r ; choisissons $m_1, \dots, m_r \in M$ dont les classes dans $\overline{M}$ forment une base, et soit $\phi : A^r \rightarrow M$ l'application A -linéaire telle que $\phi(e_i) = m_i$ pour $i = 1, \dots, r$, où $e_1, \dots, e_r$ dénote la base canonique de A^r . Il vient $\phi(A^r) + aM = M$, donc ϕ est surjective (corollaire 3.50). Soit $x \in \text{Ker}(\phi)$; puisque $A/aA \otimes_A \phi$ est bijective, on a $x = ay$ pour quelque $y \in A^r$, et $a \cdot \phi(y) = 0$, d'où $y \in \text{Ker}(\phi)$, car a est M -régulier. Cela montre que $a \cdot \text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\phi)$; or, $\text{Ker}(\phi)$ est

un A -module de type fini (proposition 6.64), par suite $\text{Ker}(\phi) = 0$ (corollaire 3.49), donc M est un A -module libre, *i.e.* $h = 0$.

Soit alors $d(M) > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout A -module de type fini N avec $d(N) < d(M)$, et tel que a soit N -régulier. Considérons une suite exacte de A -modules :

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec L libre de type fini, et noter que :

$$\text{Tor}_1^A(\overline{A}, M) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_1^A(M, \overline{A}) = 0$$

en vertu du théorème 8.126, de l'exercice 7.62(v), et compte tenu des nos hypothèses sur l'élément a . La suite exacte longue des foncteurs $\text{Tor}_i^A(\overline{A}, -)$ associée à Σ (voir l'exemple 7.69) nous donne alors une suite exacte courte :

$$\overline{\Sigma} \quad : \quad 0 \rightarrow \overline{N} := N/aN \rightarrow L/aL \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0.$$

Or, on a $\text{proj.dim}_A N < h$ et $\text{proj.dim}_{\overline{A}} \overline{N} < h'$, par le corollaire 11.100 ; mais a est A -régulier, donc L -régulier, et *a fortiori*, a est aussi N -régulier, car $N \subset L$; par hypothèse de récurrence, on conclut que $\text{proj.dim}_{\overline{A}} \overline{N} < +\infty \Leftrightarrow \text{proj.dim}_A N < +\infty$. D'autre part, on a $\text{proj.dim}_A N < +\infty \Leftrightarrow \text{proj.dim}_{\overline{A}} \overline{M} < +\infty$ et $\text{proj.dim}_A \overline{N} < +\infty \Leftrightarrow \text{proj.dim}_{\overline{A}} \overline{M} < +\infty$ encore par le corollaire 11.100, d'où l'assertion. $\square$

11.4.2. *Le théorème de Serre.* On peut maintenant aborder la preuve du :

Théorème 11.103. (Serre) *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est local régulier.
- (b) $\text{proj.dim}_A k(\mathfrak{m}) = \dim A$.
- (c) $\text{proj.dim}_A k(\mathfrak{m}) < +\infty$.
- (d) Tout A -module de type fini est de dimension projective finie.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $d := \dim A$; d'après le corollaire 11.59, tout système $x_\bullet := (x_1, \dots, x_d)$ de générateurs de $\mathfrak{m}$ est une suite régulière, donc $K_\bullet^A(x_\bullet)$ est une résolution minimale de $k(\mathfrak{m})$ (exemple 11.97), et évidemment $K_i^A(x_\bullet) = 0$ si et seulement si $i > d$, d'où l'assertion, compte tenu de la proposition 11.98(iv).

(b) $\Rightarrow$ (c) est une conséquence triviale du corollaire 11.29.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Soit M un A -module de type fini, et $L_\bullet \rightarrow k(\mathfrak{m})$ une résolution minimale de $k(\mathfrak{m})$; par le théorème 8.126 on a des isomorphismes naturels

$$\text{Tor}_i^A(k(\mathfrak{m}), M) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}_i^A(M, k(\mathfrak{m})) \xrightarrow{\sim} H_i(M \otimes_A L_\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

d'où $\text{Tor}_i^A(k(\mathfrak{m}), M) = 0$ pour tout $i \geq \text{proj.dim}_A k(\mathfrak{m})$. Compte tenu de la proposition 11.98(iv), on déduit que $\text{proj.dim}_A M \leq \text{proj.dim}_A k(\mathfrak{m})$.

(d) $\Rightarrow$ (a) : On pose $h := \text{proj.dim}_A k(\mathfrak{m})$ et $e := \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On raisonne par récurrence sur e . Si $e = 0$, on a $\mathfrak{m} = 0$, par la proposition 3.51, *i.e.* A est un corps, et tout corps est évidemment un anneau régulier.

Soit donc $e > 0$. Alors $\mathfrak{m} \notin \text{Ass}_A(A)$: car sinon on aurait $a \in A$ non nul tel que $a \cdot \mathfrak{m} = 0$ (corollaire 7.8(ii)) ; or, si $L_\bullet \rightarrow k(\mathfrak{m})$ est une résolution minimale, on a $L_{h+1} = 0$, $L_h \neq 0$ (proposition 11.98(iv)) et $d_h(L_h) \subset \mathfrak{m}L_{h-1}$, d'où $a \cdot d_h(L_h) = 0$, et donc $a \cdot L_h = 0$, car d_h est injectif. Mais L_h est un A -module libre ; contradiction. Avec la proposition 1.58 et le théorème 7.18(ii), on trouve alors

$$x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)} \mathfrak{p})$$

et d'après la remarque 7.21(iii), x est un élément régulier de A ; *a fortiori*, x est $\mathfrak{m}$ -régulier. Soit $B := A/xA$; par la proposition 11.101 il vient

$$(*) \quad \text{proj.dim}_B \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} = \text{proj.dim}_A \mathfrak{m} < +\infty.$$

Affirmation 11.104. La surjection naturelle $\pi : \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}_B := \mathfrak{m}/xA$ est scindée.

Preuve : Puisque $x \notin \mathfrak{m}^2$, il existe un système minimal $x_1, \dots, x_e$ de générateurs de $\mathfrak{m}$ avec $x_1 = x$ (proposition 3.51); soit $I := Ax_2 + \dots + Ax_e$, et noter que $x \notin I$, donc $I \cap xA \subset x\mathfrak{m}$. On obtient ainsi une suite d'applications A -linéaires

$$\mathfrak{m}_B = (I + xA)/xA \xrightarrow{\sim} I/(I \cap xA) \rightarrow \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m}_B$$

dont la composition est l'identité de $\mathfrak{m}_B$, comme souhaité. $\diamond$

Avec l'observation 11.104 et le corollaire 11.100, on déduit

$$\text{proj.dim}_B \mathfrak{m}_B \leq \text{proj.dim}_B \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$$

et en particulier, $\text{proj.dim}_B \mathfrak{m}_B < +\infty$, compte tenu de (*). D'autre part, ce même corollaire 11.100, appliqué à la suite exacte courte de B -modules

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_B \rightarrow B \rightarrow k(\mathfrak{m}_B) \rightarrow 0$$

nous donne : $\text{proj.dim}_B k(\mathfrak{m}_B) \leq \text{proj.dim}_B (\mathfrak{m}_B) + 1$. Cela achève de montrer que

$$\text{proj.dim}_B k(\mathfrak{m}_B) < +\infty.$$

On vient de voir que cette dernière condition implique que B vérifie la condition (d) du théorème; par l'hypothèse de récurrence, B est alors régulier de dimension $d' := \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$, et évidemment $d' \leq e - 1$, car $\mathfrak{m}_B$ est engendré par les classes de $x_2, \dots, x_e$. Ensuite, soient $y_1, \dots, y_{d'} \in \mathfrak{m}$ dont les classes dans B engendrent $\mathfrak{m}_B$; puisque le système $x, y_1, \dots, y_{d'}$ engendre $\mathfrak{m}$, on a $d' + 1 \geq e$. Ainsi, $d' = e - 1$; mais on a aussi $\dim B = d - 1$ (corollaire 11.34(ii)), donc $d = e$, i.e. A est régulier. $\square$

Corollaire 11.105. Soient A un anneau local régulier, M un A -module de type fini, et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. On a :

- (i) $A_{\mathfrak{p}}$ est local régulier.
- (ii) M est libre $\Leftrightarrow M$ est de Cohen-Macaulay et $\text{Supp}_A M = \text{Spec } A$.

Démonstration. (i) : Comme est A régulier, le théorème 11.103 nous dit que le A -module $A/\mathfrak{p}$ admet une résolution projective $L_{\bullet} \rightarrow A/\mathfrak{p}$ de longueur finie; on en déduit la résolution projective de longueur finie du $A_{\mathfrak{p}}$ -module $k(\mathfrak{p})$:

$$A_{\mathfrak{p}} \otimes_A L_{\bullet} \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (A/\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}).$$

Par le théorème 11.103 il s'ensuit que $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier.

(ii) : Cela découle aussitôt du théorème 11.103 et du problème 11.99(iii). $\square$

Définition 11.106. On dit qu'un anneau noethérien A est *régulier*, si la localisation $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

Remarque 11.107. (i) Il résulte du corollaire 11.105(i), que la définition 11.106 coïncide avec la définition 11.49, lorsque A est local.

(ii) Soit A un anneau régulier; évidemment $S^{-1}A$ est régulier, pour toute partie $S \subset A$. En outre, il est clair que A est de Cohen-Macaulay (voir la définition 11.83); donc, toute A -algèbre de type fini est caténaire (théorème 11.85(ii)).

(iii) Avec la notation de la preuve du corollaire 11.105(i), noter que même si l'on choisit pour $L_{\bullet}$ une résolution minimale, la résolution localisée $L_{\bullet, \mathfrak{p}}$ ne sera minimale que dans le cas trivial où $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal.

Proposition 11.108. Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $k := A/\mathfrak{m}$, $x_{\bullet} := (x_i | i = 1, \dots, r)$ une suite finie d'éléments de $\mathfrak{m}$, et $I := Ax_1 + \dots + Ax_r$. Notons aussi par $\bar{x}_{\bullet} := (\bar{x}_i | i = 1, \dots, r)$ l'image de $x_{\bullet}$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est régulier et $x_{\bullet}$ est partie d'une suite régulière de A qui engendre $\mathfrak{m}$.
- (b) A est régulier, et $\bar{x}_{\bullet}$ est une famille libre du k -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.
- (c) A/I est régulier, et $x_{\bullet}$ fait partie d'un système de paramètres pour A .

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, I est un idéal premier de A .

Démonstration. La dernière assertion est claire, car si A/I est régulier, alors il est intègre (proposition 11.50(i)). Ensuite, si A est régulier, toute suite A -régulière qui engendre $\mathfrak{m}$ a longueur $d := \dim A$ (proposition 11.69(i)), et $d = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Or, si (a) est vérifiée, prenons $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que $(x_i \mid i = 1, \dots, d)$ soit une suite régulière qui engendre $\mathfrak{m}$; ainsi, l'image $(\bar{x}_i \mid i = 1, \dots, d)$ de cette suite engendre le k -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, et il est donc une base de ce dernier, d'où (b). En outre, on a $\dim A/I = d - r$ (corollaire 11.31), et évidemment les images de $x_{r+1}, \dots, x_d$ engendrent l'idéal maximal de A/I , d'où (c). Réciproquement, si (b) est vérifiée, on trouve $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tels que l'image de $(x_i \mid i = 1, \dots, d)$ soit une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; alors cette suite engendre $\mathfrak{m}$ (proposition 3.51), et elle est donc une suite A -régulière (corollaire 11.59), d'où (a). En dernier lieu, si (c) est vérifiée, alors $\dim A/I = d - r$ (corollaire 11.31), et il existe $x_{r+1}, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ dont les images dans A/I engendrent $\mathfrak{m}/I$; par suite, $(x_i \mid i = 1, \dots, d)$ engendrent $\mathfrak{m}$, donc A est régulier, d'où (a). $\square$

11.4.3. Régularité et fibres des homomorphismes. Soit $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, et posons $k_A := A/\mathfrak{m}$, $k_B := B/\mathfrak{n}$; ainsi f induit une extension résiduelle de corps $g : k_A \rightarrow k_B$, et une application k_A -linéaire $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)_{[g]}$, d'où une application k_B -linéaire adjointe

$$\psi_f : k_B \otimes_{k_A} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \rightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \quad 1 \otimes \bar{x} \mapsto \overline{f(x)}.$$

Théorème 11.109. Dans la situation du §11.4.3, on a :

- (i) Si f est un homomorphisme plat et si B est régulier, A est régulier.
- (ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) B est régulier et ψ_f est injectif.
 - (b) A et B sont réguliers, et il existe une suite A -régulière $(x_i \mid i = 1, \dots, d)$ qui engendre $\mathfrak{m}$, telle que la suite $(f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ fait partie d'un système de paramètres pour B qui engendre $\mathfrak{n}$.
 - (c) A et B sont réguliers, et pour toute suite A -régulière $(x_i \mid i = 1, \dots, d)$ qui engendre $\mathfrak{m}$, la suite $(f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ fait partie d'un système de paramètres pour B qui engendre $\mathfrak{n}$.
 - (d) B et $B \otimes_A k_A$ sont réguliers, et f est plat.
 - (e) A et $B \otimes_A k_A$ sont réguliers, et f est plat.
 - (f) A et B sont réguliers, et $\dim B = \dim A + \dim B \otimes_A k_A$.

Démonstration. (i) : Soit $L_\bullet \rightarrow k_A$ une résolution minimale du A -module k_A . Comme f est plat, le complexe $B \otimes_A L_\bullet \rightarrow B \otimes_A k_A$ est une résolution, et comme f est local, on voit aisément qu'il s'agit d'une résolution minimale du B -module $B \otimes_A k_B$. Comme B est régulier, cette résolution est alors de longueur finie (théorème 11.103 et proposition 11.98(iv)). Avec le problème 3.83(i.b), on déduit aussitôt que $L_\bullet$ est de longueur finie. Encore par le théorème 11.103, A est alors régulier.

Ensuite, supposons que A et B soient réguliers, et soit $x_\bullet := (x_i \mid i = 1, \dots, d)$ une suite A -régulière qui engendre $\mathfrak{m}$; alors $d = \dim_{k_A} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (proposition 11.69(i)), donc les classes $(\bar{x}_i \mid i = 1, \dots, d)$ des x_i forment une base du k_A -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. En outre, la suite $(y_i := f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ est B -régulière, si elle est partie d'un système de paramètres pour B qui engendre $\mathfrak{n}$ (corollaire 11.59), et dans ce cas les classes $(\bar{y}_i \mid i = 1, \dots, d)$ des y_i sont alors une famille libre du k_B -espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ (proposition 11.108); d'autre part, cette dernière condition équivaut à l'injectivité de ψ_f , d'où (ii.b) $\Leftrightarrow$ (ii.c) $\Rightarrow$ (ii.a).

(ii.b) $\Rightarrow$ (ii.d) : En effet, si (ii.b) est vérifiée, noter que $B/\mathfrak{m}B$ est trivialement un k_A -module plat, donc f est plat, d'après le corollaire 11.64 : en outre on a vu que l'image de la suite $(f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ forme une famille libre du k_B -espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, donc $B/\mathfrak{m}B$ est régulier, d'après la proposition 11.108, d'où (ii.d).

(ii.d) $\Leftrightarrow$ (ii.e) : Si (ii.d) est vérifiée, A est régulier, d'après (i), d'où (ii.e). Réciproquement, si (ii.e) est vérifiée, soit $(x_1, \dots, x_d)$ une suite A -régulière qui engendre $\mathfrak{m}$; la suite $(f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ est alors B -régulière (exercice 11.61(i.a)), et fait donc partie d'un système de paramètres pour B (proposition 11.65). Comme en outre $B/\mathfrak{m}B$ est régulier, il s'ensuit que B est régulier (proposition 11.108), d'où (ii.d).

(ii.d) $\Rightarrow$ (ii.f) $\Rightarrow$ (ii.b) : On vient de voir que si (ii.d) est vérifiée, A est régulier, et puisque f est plat, on a $\dim B = \dim A + \dim B/\mathfrak{m}B$ (proposition 11.37(ii) et théorème 3.84(ii)), d'où (ii.f). Si (ii.f) est vérifiée, prenons une suite A -régulière $x_\bullet := (x_i \mid i = 1, \dots, d)$ qui engendre $\mathfrak{m}$; par hypothèse, $\dim B/\mathfrak{m}B = \dim B - d$, donc la suite $f(x_\bullet) := (f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ fait partie d'un système de paramètres pour B (corollaire 11.31). Comme en outre $B/\mathfrak{m}B$ est régulier, $f(x_\bullet)$ est partie d'une suite B -régulière qui engendre $\mathfrak{n}$ (proposition 11.108), d'où (ii.b).

(ii.a) $\Rightarrow$ (ii.f) : Soient $d := \dim_{k_A} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, et $x_\bullet := (x_1, \dots, x_d)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$ dont les classes sont une base du k_A -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; par hypothèse, l'image de $f(x_\bullet) := (f(x_i) \mid i = 1, \dots, d)$ est une famille libre du k_B -espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, donc $f(x_\bullet)$ est partie d'une suite B -régulière engendrant $\mathfrak{n}$ (proposition 11.108). Alors $\dim B/\mathfrak{m}B = \dim B - d$ (corollaire 11.31), d'où $\dim A \geq \dim B - \dim B/\mathfrak{m}B = d$ (proposition 11.37(i)); mais on a aussi $\dim A \leq d$ (corollaire 11.29), d'où $\dim A = d$, i.e. A est régulier, et (ii.f) est vérifiée. $\square$

Corollaire 11.110. Soient A un anneau régulier, et $I \subset A$ un idéal; on a :

- (i) L'anneau $A[T_1, \dots, T_n]$ est régulier pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) La complétion I -adique $\hat{A}_I$ de A est un anneau régulier.

Démonstration. (i) : On raisonne comme dans la preuve du corollaire 11.84 : il suffit de vérifier que $A[T]_{\mathfrak{q}}$ est régulier pour tout $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A[T]$; pour cela, posons $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}' := \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}[T]$, et remarquons que $A[T]_{\mathfrak{q}} = (A_{\mathfrak{p}}[T])_{\mathfrak{q}'}$. Quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{q}$ par $\mathfrak{q}'$, on peut donc supposer que $(A, \mathfrak{p})$ soit local, et que l'homomorphisme induit $A \rightarrow A[T]_{\mathfrak{q}}$ soit local; en outre, $A[T]_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre plate, donc le théorème 11.109 nous ramène à vérifier que $A[T]_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est régulier. Mais ce dernier est une localisation de l'anneau $k(\mathfrak{p})[T]$, qui est intègre et intégralement clos de dimension 1, donc régulier (propositions 11.50(ii) et 6.14), d'où l'assertion.

(ii) : D'après le théorème 9.113, $B := \hat{A}_I$ est noethérien; compte tenu du corollaire 11.105(i), il suffit alors de montrer que la localisation $B_{\mathfrak{n}}$ est un anneau local régulier pour tout idéal maximal $\mathfrak{n} \subset B$. Mais $IB \subset \mathcal{J}(B)$ (lemme 9.101(i,iv)), donc $IB \subset \mathfrak{n}$, et d'autre part l'homomorphisme naturel $A/I \rightarrow B/IB$ est bijectif (lemme 9.101(i,ii)), donc il existe un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ tel que $I \subset \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$. En particulier, $\mathfrak{m}^k$ est un idéal ouvert pour la topologie I -adique de A , pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc la complétion $j : A \rightarrow B$ induit un isomorphisme $A/\mathfrak{m}^k \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (exercice 9.49(iii) et lemme 9.101(i)); par suite, j induit aussi un isomorphisme $\hat{A}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \hat{B}_{\mathfrak{n}}$ de la complétion $\mathfrak{m}$ -adique de A avec la complétion $\mathfrak{n}$ -adique de B (remarque 9.51). En outre, d'après le lemme 9.120, $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ (resp. $\hat{B}_{\mathfrak{n}}$) est aussi la complétion $\mathfrak{m}$ -adique (resp. $\mathfrak{n}$ -adique) de la localisation $A_{\mathfrak{m}}$ de A (resp. $B_{\mathfrak{n}}$ de B), et la complétion $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ (resp. $B_{\mathfrak{n}} \rightarrow \hat{B}_{\mathfrak{n}}$) est un homomorphisme local fidèlement plat d'anneaux locaux noethériens (corollaires 9.103(ii) et 9.104). Au vu du théorème 11.109(i), on est ainsi ramené à vérifier que $\hat{B}_{\mathfrak{n}}$ est régulier, et cela équivaut à montrer que $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ est régulier. Quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{m}}$, on peut alors supposer que $I = \mathfrak{m}$, et que $(A, \mathfrak{m})$ soit local régulier. Dans ce cas, j induit un isomorphisme $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B \otimes_A (A/\mathfrak{m})$, donc $B \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ est trivialement un anneau régulier, et l'assertion découle alors du théorème 11.109(ii). $\square$

Problème 11.111. Soient A un anneau, $I \subset A$ l'idéal engendré par une suite finie $f_\bullet := (f_0, \dots, f_n)$, et $Y \rightarrow X := \operatorname{Spec} A$ l'éclatement de l'idéal quasi-cohérent $I\mathcal{O}_X$.

(i) Soit $A[T_\bullet] := A[T_1, \dots, T_n]$ la A -algèbre des polynômes à n indéterminées ; posons $g_\bullet := (g_0, \dots, g_n)$ et $g'_\bullet := (g_1, \dots, g_n)$, avec $g_0 := f_0$ et $g_i := f_i - f_0 T_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et supposons que $H_i(f_\bullet, A) = 0$ pour tout $i > 0$. Montrer que

$$H_i(g_\bullet, A[T_\bullet]) = H_i(g'_\bullet, A[T_\bullet]) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(ii) Dans la situation de (i), montrer que si A est de Cohen-Macaulay, il en est de même pour Y , i.e. $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau de Cohen-Macaulay, pour tout $y \in Y$.

(iii) Supposons que A soit régulier, et que l'image de $f_\bullet$ soit partie d'un système de paramètres de $A_{\mathfrak{p}}$ qui engendre $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p} \in V(I)$. Montrer que Y est régulier, i.e. $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau régulier, pour tout $y \in Y$.

11.5. Critères de normalité et de factorialité. Cette section est consacrée à deux applications classiques de la théorie de la profondeur : la première est une condition nécessaire et suffisante, dégagée par J.-P. Serre, pour qu'un anneau noethérien soit normal (définition 6.6(iii)) ; la deuxième est un théorème de Auslander et Buchsbaum, établissant la factorialité des anneaux locaux réguliers, dont on présentera une preuve essentiellement due à I.Kaplansky. On démarre avec le critère suivant de factorialité, une application du Hauptidealsatz :

Proposition 11.112. *Soit A un anneau intègre noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est factoriel.
- (b) Tout idéal premier de A de hauteur 1 est principal.
- (c) $\text{Pic } A = 0$ et $A_{\mathfrak{p}}$ est factoriel pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b),(c) par le lemme 4.118(i,ii) et le théorème 4.120.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Comme A est noethérien, il vérifie la condition (a) de l'exercice 4.122 ; d'après le lemme 4.137, tout $x \in A \setminus \{0\}$ est alors produit d'éléments irréductibles (voir la définition 1.9(ii)). Il suffit ainsi de montrer que tout élément irréductible $x \in A$ est premier. Pour cela, soit $\mathfrak{p} \in \text{Max } V(Ax) \subset \text{Spec } A$; d'après le Hauptidealsatz (corollaire 11.34), $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1, et il est donc principal, par hypothèse. Disons que $\mathfrak{p} = Ay$; il vient $x = ay$ pour quelque $a \in A$, et alors $a \in A^\times$, car x est irréductible. Donc $Ax = \mathfrak{p}$, comme souhaité.

(c) $\Rightarrow$ (b) : Il suffit de montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur 1 est inversible, car la nullité du groupe $\text{Pic } A$ entraînera alors que $\mathfrak{p}$ soit principal. Pour cela, il suffit de vérifier que le A -module $\mathfrak{p}$ est de rang constant 1 (voir le problème 4.109(ii)). Soit donc $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$; si $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ on a $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$, d'où $\text{rk}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = 1$. Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, l'idéal premier $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ de $A_{\mathfrak{q}}$ a hauteur 1, et $A_{\mathfrak{q}}$ est factoriel par hypothèse ; par ce qui précède, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ est alors principal, d'où a nouveau $\text{rk}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = 1$. $\square$

Le problème 11.115 et la partie non noethérienne de l'exercice suivant m'ont été suggérées par O.Gabber ; le cas noethérien (partie (i.a)) est dû à M.Nagata ([57, Lemma 2]), et la partie (iii) généralise [9, §3, exerc.7].

Exercice 11.113. (i) Soient A un anneau intègre, $S \subset A$ un ensemble d'éléments premiers de A , et supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (a) A est noethérien.
- (b) $\bigcap_{s' \in S'} s'A = 0$ pour toute partie infinie $S' \subset S$, et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} s^n A = 0 \quad \forall s \in S$.

Montrer que A est factoriel $\Leftrightarrow S^{-1}A$ est factoriel.

(ii) Soient $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma := \mathbb{Z}^m$ et $A := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ un anneau intègre Γ -gradué. Montrer que A est factoriel $\Leftrightarrow$ tout élément homogène de $A \setminus (\{0\} \cup A^\times)$ est un produit essentiellement unique (au sens de la remarque 1.10(ii)) d'éléments irréductibles.

(iii) Soient A un anneau factoriel $\mathbb{Z}$ -gradué, $a \in A$ un élément premier homogène de degré $d \in \mathbb{Z}$, et $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $\text{pgcd}(d, c) = 1$. Montrer que $B := A[X]/(X^c - a)$ est factoriel.

Exemple 11.114. (i) Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ un sous-anneau factoriel, et revenons aux $\mathcal{R}$ -algèbres $\mathcal{A}_n$ des exercices 4.130 et 4.131. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{R}[Y_1, \dots, Y_n] \quad \mathcal{C}_n := \mathcal{B}_{n+1}[T]/(Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2 - T^2).$$

Puisque $\mathcal{R}$ est factoriel, il en est de même pour $\mathcal{B}_{n+1}[T]$ (problème 1.39(ii)), et le polynôme $Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2 - T^2$ est irréductible dans $\mathcal{B}_{n+1}[T]$, si $n \geq 1$, car $Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2$ est irréductible dans $\mathcal{B}_{n+1}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur); par suite, $\mathcal{C}_n$ est intègre pour $n \geq 1$, et noter l'isomorphisme de $\mathcal{R}$ -algèbres :

$$(*) \quad \mathcal{C}_n[T^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_n[T, T^{-1}] \quad Y_i \mapsto TX_i.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme de $\mathcal{B}_n$ -algèbres :

$$\mathcal{B}_n[U, V]/(Y_1^2 + \dots + Y_n^2 + UV) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_n \quad U \mapsto Y_{n+1} + T \quad V \mapsto Y_{n+1} - T$$

induit un isomorphisme : $\mathcal{B}_n[U, U^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_n[(Y_{n+1} + T)^{-1}]$. Comme $\mathcal{R}$ est factoriel, il en est de même pour $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_n[U, U^{-1}]$ (problème 1.39(iii) et lemme 4.118(ii)). Si de plus l'on montre que $Y_{n+1} + T$ est premier dans $\mathcal{C}_n$, et que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (Y_{n+1} + T)^k \mathcal{C}_n = 0$, on déduira que $\mathcal{C}_n$ est factoriel, en vertu de l'exercice 11.113(i). Mais on a un isomorphisme évident de $\mathcal{R}$ -algèbres :

$$\overline{\mathcal{C}}_n := \mathcal{C}_n/(Y_{n+1} + T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_n/(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)$$

et on a déjà remarqué que si $n > 1$ le polynôme $Y_1^2 + \dots + Y_n^2$ est irréductible dans l'anneau factoriel $\mathcal{B}_n$, donc $\overline{\mathcal{C}}_n$ est intègre pour tout $n > 1$, et alors $Y_{n+1} + T$ est premier dans $\mathcal{C}_n$ pour ces mêmes valeurs de n . Ensuite, noter que $\mathcal{C}_n$ est un $\mathcal{R}$ -module libre; par suite l'inclusion $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ induit une injection $\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{D}_n := \mathbb{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}_n$, et on est ramené à vérifier que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (Y_{n+1} + T)^k \mathcal{D}_n = 0$ pour $n > 1$. Mais $\mathcal{D}_n$ est noethérien, et par ce qui précède, $\mathcal{D}_n$ est intègre pour $n \geq 1$, et $Y_{n+1} + T$ est premier dans $\mathcal{D}_n$ pour $n > 1$, donc l'assertion découle du corollaire 9.106(i). Ainsi, $\mathcal{C}_n$ est factoriel, et de même pour sa localisation $\mathcal{C}_n[T^{-1}]$, pour $n > 1$. Compte tenu de (*) et de l'exercice 11.113(i), il s'ensuit que $\mathcal{A}_n[T]$ est factoriel, et on déduit aisément qu'il en est de même pour $\mathcal{A}_n$. Au vu de l'exercice 4.131(ii), on conclut que si $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ est factoriel, l'anneau $\mathcal{A}_n$ est factoriel si et seulement si $n \neq 0, 1$.

(ii) Noter que le polynôme $Y_1^2 + Y_2^2$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[Y_1, Y_2]$; toutefois, les mêmes arguments s'adaptent aisément pour prouver que l'anneau

$$\mathcal{A}'_n := \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_{n+1}]/(Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2 - 1)$$

est factoriel pour tout $n \neq 0, 1, 2$: les détails sont confiés aux soins du lecteur.

Problème 11.115. Soient K un corps, $n \in \mathbb{N}$, $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$, et munissons la K -algèbre $A := K[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées, de la graduation telle que tout $a \in K$ soit homogène de degré 0, et X_j soit homogène de degré d_j , pour $j = 1, \dots, n$ (exemple 1.17(ii)). Soient en outre $i \in \mathbb{Z}$ et $p, q \in A \setminus \{0\}$ homogènes respectivement de degré i et $i + 1$, avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Montrer que $\overline{A} := A/(p + q)$ est intègre, et $\text{Frac } \overline{A}$ est une extension transcendante pure de K .

Problème 11.116. (Suggéré par O.Gabber) Soit A la limite d'un système d'anneaux $A_\bullet := (A_n, p_n : A_{n+1} \rightarrow A_n \mid n \in \mathbb{N})$ indexé par l'ensemble totalement ordonné $\mathbb{N}^{\text{op}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ supposons que :

(a) A_n est un anneau factoriel.

(b) p_n est un homomorphisme surjectif d'anneau avec $\text{Ker}(p_n) \subset \mathcal{J}(A_{n+1})$.

Montrer que A est factoriel.

Théorème 11.117. Tout anneau régulier est normal et de Cohen-Macaulay.

Démonstration. On peut supposer que A soit local régulier, donc intègre (proposition 11.50(i)), et le corollaire 11.59 montre alors que A est de Cohen-Macaulay. Il reste à vérifier que A est intégralement clos. Or, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1, la

localisation $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension 1 (corollaire 11.105(i)), donc de valuation discrète (proposition 11.50(ii)). Soit $a \in A \setminus \{0\}$, et noter que A/aA est un A -module de Cohen-Macaulay (proposition 11.81), donc tout idéal premier associé à A/aA est de hauteur un (corollaire 11.34 et lemme 11.80(ii)), et il suffit d'invoquer le théorème 7.49 pour conclure. $\square$

Définition 11.118. Soient A un anneau noethérien, et $i \in \mathbb{N}$.

(i) On dit que A vérifie la condition (R_i) si $A_{\mathfrak{p}}$ est local régulier pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur $\leq i$.

(ii) On dit que A vérifie la condition (S_i) si l'on a :

$$\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \geq \min(i, \text{ht}(\mathfrak{p})) \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A.$$

Remarque 11.119. Soit A un anneau noethérien.

(i) Evidemment, A est régulier (resp. de Cohen-Macaulay) si et seulement s'il vérifie la condition (R_i) (resp. (S_i)) pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(ii) En outre, la condition (S_0) est trivialement toujours vérifiée, et avec la remarque 11.67(iii) (et la proposition 7.6) on voit aisément que (S_1) est vérifiée si et seulement si A n'a aucun idéal premier associé immergé.

(iii) A est réduit $\Leftrightarrow A$ vérifie (R_0) et (S_1) . En effet, supposons que (R_0) et (S_1) soient vérifiées, et soit $x \in \mathcal{N}(A)$. Si $x \neq 0$, alors $\text{Ass}_A(Ax) \neq \emptyset$ (corollaire 7.8(i)), et si $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(Ax)$, alors $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}x)$ (proposition 7.6); mais $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$, donc $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, d'après (ii), et alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps, par (R_0) (proposition 11.50(ii)), d'où $A_{\mathfrak{p}}x = 0$, contradiction. Réciproquement, si $\mathcal{N}(A) = 0$, alors $A_{\mathfrak{p}}$ est réduit de dimension zéro, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur zéro (exercice 3.38), donc $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps pour tout tel $\mathfrak{p}$ (proposition 7.32), i.e. (R_0) est vérifiée pour A . Il reste à montrer que (S_1) est vérifiée si $\mathcal{N}(A) = 0$; pour cela, il suffit de montrer que tout idéal premier associé de A est minimal, d'après (ii). Soit par l'absurde $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$ avec $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$; alors $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})$, donc on a $x \in A_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\}$ avec $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cdot x = 0$, en particulier $x^2 = 0$, mais $\mathcal{N}(A_{\mathfrak{p}}) = 0$, contradiction.

Exercice 11.120. Montrer qu'un anneau noethérien A vérifie $(S_2) \Leftrightarrow A$ vérifie (S_1) et pour tout $x \in A$ régulier, A/xA n'a aucun idéal premier associé immergé.

Théorème 11.121. (Critère de normalité de Serre) *Un anneau noethérien A est normal si et seulement s'il vérifie (R_1) et (S_2) .*

Démonstration. On peut supposer que A soit local. Dans ce cas, si A est normal, il est intègre et intégralement clos, et alors il en est de même pour $A_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ (proposition 6.13); en particulier $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps, si $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, et $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, si $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, donc A vérifie (R_1) (proposition 11.50(ii)). En outre, évidemment $\text{Ass}_A(A) = \{0\}$, donc A vérifie S_1 (remarque 11.119(ii)), et pour tout $x \in A \setminus \{0\}$, tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/xA)$ est de hauteur 1 (théorème 7.49); d'après l'exercice 11.120, on conclut que A vérifie (S_2) .

Réciproquement, supposons que A vérifie (R_1) et (S_2) ; d'après la remarque 11.119(iii), A est alors réduit, et la solution de l'exercice 7.22 montre que son anneau total des fractions K est le produit $\prod_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} k(\mathfrak{p})$. Montrons d'abord que A est intégralement fermé dans K ; soient donc $a/b \in K$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$(*) \quad (a/b)^n + a_1(a/b)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{dans } K$$

et rappelons que b est A -régulier, donc $(*)$ revient à l'identité :

$$(**) \quad a^n + a_1ba^{n-1} + \dots + a_nb^n = 0 \quad \text{dans } A.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et tout $x \in A$, soit $x_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}$ l'image de x ; par hypothèse, $A_{\mathfrak{p}}$ est intègre et intégralement clos si $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, et $b_{\mathfrak{p}}$ est évidemment $A_{\mathfrak{p}}$ -régulier, donc $(**)$ entraîne aussitôt que $a_{\mathfrak{p}}/b_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}$, i.e. $a_{\mathfrak{p}} \in b_{\mathfrak{p}}A_{\mathfrak{p}}$ pour tout tel $\mathfrak{p}$. Soit $\text{Ass}_A(A/bA) =$

$\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$, et choisissons une décomposition primaire non redondante $bA = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$, où $\mathfrak{q}_i \subset A$ est un idéal $\mathfrak{p}_i$ -primaire, pour $i = 1, \dots, n$; d'après l'exercice 11.120, chaque $\mathfrak{p}_i$ est de hauteur un, donc $\mathfrak{q}_i = A \cap bA_{\mathfrak{p}_i}$ pour $i = 1, \dots, n$ (corollaire 7.20), d'où $a \in \mathfrak{q}_i$ pour tout tel i , et finalement $a \in bA$, i.e. $a/b \in A$, comme souhaité. Or, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)$, soit $\pi_{\mathfrak{p}} : K \rightarrow k(\mathfrak{p})$ la projection, et $e^{\mathfrak{p}} \in K$ l'élément tel que $\pi_{\mathfrak{p}}(e^{\mathfrak{p}}) = 1$ et $\pi_{\mathfrak{q}}(e^{\mathfrak{p}}) = 0$ pour $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$; chaque $e^{\mathfrak{p}}$ est idempotent, en particulier il est entier sur A , donc $e^{\mathfrak{p}} \in A$, par ce qui précède, et noter que $\sum_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} e^{\mathfrak{p}} = 1$. On déduit une décomposition de A comme produit d'anneaux : $A = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} Ae^{\mathfrak{p}}$ (cf. la solution de l'exercice 3.66(iii)), d'où $\text{Max } A = \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)} \text{Max}(Ae^{\mathfrak{p}})$; mais A est local, donc $\text{Min}(A)$ contient un seul élément, et alors cet élément est l'idéal 0, car A est réduit. Par suite, A est intègre et K est son corps des fractions, donc A est normal. $\square$

Exercice 11.122. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux noethériens, et $i \in \mathbb{N}$. Montrer les assertions suivantes :

- (i) Si B vérifie (R_i) (resp. (S_i)), il en est de même pour A .
- (ii) Si A et $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ vérifient (R_i) (resp. (S_i)), alors B vérifie (R_i) (resp. (S_i)).
- (iii) Si A et $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ sont normaux, alors B est normal.

11.5.1. *Groupe de Picard d'un espace annelé.* Pour la preuve de notre dernier résultat, il est utile de généraliser aux schémas les constructions du §4.4.2.

Définition 11.123. Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé; on dénote par

$$\text{Pic } \underline{X}$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{O}_X$ -modules inversibles (définition 5.67(iii)). On écrit $[\mathcal{L}] \in \text{Pic } \underline{X}$ pour la classe de tout $\mathcal{O}_X$ -module inversible $\mathcal{L}$, et on munit $\text{Pic } \underline{X}$ de la loi d'addition telle que :

$$[\mathcal{L}] + [\mathcal{L}'] := [\mathcal{L} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'] \quad \forall [\mathcal{L}], [\mathcal{L}'] \in \text{Pic } \underline{X}$$

(notation du §5.3.2). On vérifie aisément que la loi $+$ est associative et commutative sur $\text{Pic } \underline{X}$, et $[\mathcal{O}_X]$ fournit un élément neutre pour cette loi.

Lemme 11.124. Avec la notation de la définition 11.123, la donnée

$$(\text{Pic } \underline{X}, +, [\mathcal{O}_X])$$

est un groupe abélien, qu'on appelle le groupe de Picard de $\underline{X}$.

Démonstration. Pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ et toute partie ouverte $U \subset X$, soit $\mathcal{F}|_U$ la restriction de $\mathcal{F}$ à U ; évidemment $\mathcal{F}|_U$ est un $\mathcal{O}_{X|U}$ -module, et on pose :

$$\mathcal{F}^{\vee}(U) := \mathcal{O}_{X|U} - \text{Mod}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_{X|U}).$$

L'ensemble $\mathcal{F}^{\vee}(U)$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X(U)$ -module telle que $s \cdot \phi = \phi \circ (s \cdot \text{Id}_{\mathcal{F}|_U})$ pour tout $s \in \mathcal{O}_X(U)$ et tout $\phi \in \mathcal{F}^{\vee}(U)$. En outre, toute inclusion $V \subset U$ de parties ouvertes de X induit une application de restriction

$$\mathcal{F}^{\vee}(U) \rightarrow \mathcal{F}^{\vee}(V) \quad (\phi : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{O}_{X|U}) \mapsto (\phi|_V : \mathcal{F}|_V \rightarrow \mathcal{O}_{X|V}).$$

Il est alors clair que l'association : $U \mapsto \mathcal{F}^{\vee}(U)$ définit un pré- $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}^{\vee}$ (définition 5.52(i)), et avec le lemme 5.36(i) on voit aussitôt que $\mathcal{F}^{\vee}$ est même un $\mathcal{O}_X$ -module. Or, soient $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et L un A -module inversible; l'adjonction de l'exercice 5.56 fournit des isomorphismes naturels

$$(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L)^{\vee}(U) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(L, \mathcal{O}_X(U)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U) \otimes_A L^{\vee} = (\mathcal{O}_X \otimes_A L^{\vee})(U)$$

avec $L^{\vee} := \text{Hom}_A(L, A)$ (exercice 4.110). Ainsi, $\mathcal{O}_X \otimes_A L^{\vee}$ est déjà un $\mathcal{O}_X$ -module, i.e. le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \otimes_A L^{\vee} \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L^{\vee}$ est un isomorphisme, et cela montre que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible, il en est de même pour $\mathcal{F}^{\vee}$.

En outre, on a un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$\omega_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^\vee \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

défini comme suit. D'abord, pour toute partie ouverte $U \subset X$ on considère l'application $\mathcal{O}_X(U)$ -bilinéaire $\beta_U : \mathcal{F}^\vee(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{O}_X : (\phi, s) \mapsto \phi(s)$. Evidemment, si $V \subset U$ est une inclusion de parties ouvertes de X , on a $(\beta_U(\phi, s))|_V = \beta_V(\phi|_V, s|_V)$ pour tout $(\phi, s) \in \mathcal{F}^\vee(U) \times \mathcal{F}(U)$. Par suite, le système $(\beta_U | U \in \text{Ouv}(X))$ induit un morphisme de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules $\beta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$, et ce dernier correspond, par adjonction, au morphisme $\omega_{\mathcal{F}}$ souhaité. On est alors ramené à vérifier :

Affirmation 11.125. Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible, $\omega_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

Preuve : La question étant locale sur X , on peut supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A L$, avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$ et un A -module inversible L . Mais on a un isomorphisme naturel

$$(\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A L) \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A L^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A (L \otimes_A L^\vee)$$

(exercice 5.59) et sous cette identification, le morphisme $\omega_{\mathcal{L}}$ correspond à $\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A \omega_L : \mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A (L \otimes_A L^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$, où $\omega_L : L \otimes_A L^\vee \rightarrow A$ est la trace de L (voir le problème 4.111), qui est un isomorphisme, car L est inversible. $\square$

Remarque 11.126. (i) Avec le problème 5.58(i.b) et l'exercice 5.69(ii), on obtient, pour tout anneau A , un isomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\text{Pic}(\text{Spec } A) \xrightarrow{\sim} \text{Pic } A \quad [\mathcal{L}] \mapsto [\Gamma(\mathcal{L})].$$

(ii) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ et $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, et $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme d'espaces annelés ; si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible, alors $\mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module inversible (notation du §5.3.2) : en effet, la question étant locale sur X , on peut supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X \otimes_A L$, avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$ et un A -module inversible L , auquel cas $\mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_A \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_A L$, d'où l'assertion. Compte tenu de l'exercice 5.62(iii), il vient un homomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\text{Pic}(f) : \text{Pic}(\underline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\underline{Y}) \quad [\mathcal{L}] \mapsto [\mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}].$$

On obtient ainsi un foncteur bien défini

$$\text{Pic} : \text{EspAnn}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}.$$

Exercice 11.127. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma, et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent de type fini. Montrer que $\mathcal{L}$ est inversible si et seulement si $\mathcal{L}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre de rang 1 pour tout $x \in X$.

11.5.2. K -groupe d'un espace annelé. On utilisera en outre la construction suivante, introduite originellement par A.Grothendieck, pour formuler sa vaste généralisation du théorème de Riemann-Roch. Soit $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé ; notons par $L(\underline{X})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini (définition 5.57(iii)), et soit $\mathbb{Z}^{(L(\underline{X}))}$ le $\mathbb{Z}$ -module libre sur l'ensemble $L(\underline{X})$ (voir l'exemple 1.12(iv)). On écrit $[\mathcal{F}] \in L(\underline{X})$ pour la classe de tout $\mathcal{O}_X$ -module localement projectif $\mathcal{F}$ de rang fini ; ainsi, tout élément de $\mathbb{Z}^{(L(\underline{X}))}$ est une somme finie $\sum_{i=1}^n a_i [\mathcal{F}_i]$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$ et certains $[\mathcal{F}_1], \dots, [\mathcal{F}_n] \in L(\underline{X})$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. En outre, pour toute suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini

$$\Sigma : 0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

posons $R(\Sigma) := [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}''] - [\mathcal{F}] \in \mathbb{Z}^{(L(\underline{X}))}$ et soit $R \subset \mathbb{Z}^{(L(\underline{X}))}$ le sous-groupe engendré par la famille $(R(\Sigma) | \Sigma \in \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes telles suites exactes courtes Σ . Le K -groupe de $\underline{X}$ est le groupe abélien quotient :

$$K(\underline{X}) := \mathbb{Z}^{(L(\underline{X}))} / R.$$

Remarque 11.128. Comme déjà observé pour les groupes de Picard des anneaux, la construction de $\text{Pic}\underline{X}$ de la définition 11.123, et celle de $K(\underline{X})$ ci-dessus se heurtent aux usuelles objections de nature logique, car elles font intervenir des classes qui ne sont pas des ensembles. Cette difficulté peut être contournée, avec des considérations analogues à celles de la remarque 4.113, mais un peu plus élaborées. On confie les détails aux soins du lecteur pointilleux.

Lemme 11.129. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et $x \in X$. On a :

(i) Le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \otimes_A P \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A P$ est un isomorphisme, pour tout A -module projectif P de type fini.

(ii) Soit une suite d'homomorphismes de A -modules projectifs de type fini

$$\Sigma : 0 \rightarrow P_2 \xrightarrow{i} P_1 \xrightarrow{p} P_0 \rightarrow 0.$$

Si $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A \Sigma$ est un complexe exact de $\mathcal{O}_X$ -modules, x admet un voisinage $U \subset X$ tel que $\mathcal{O}_X(V) \otimes_A \Sigma$ soit une suite exacte courte, pour toute partie ouverte $V \subset U$.

Démonstration. (i) : Choisissons un A -module Q tel que $L := P \oplus Q$ soit un A -module libre de rang fini (lemme 4.99(ii)) ; évidemment le morphisme naturel $\eta_L : \mathcal{O}_X \otimes_A L \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L$ est un isomorphisme. Mais η_L est la somme directe des morphismes naturels $\eta_P : \mathcal{O}_X \otimes_A P \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A P$ et $\eta_Q : \mathcal{O}_X \otimes_A Q \rightarrow \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A Q$, donc ces derniers sont aussi des isomorphismes.

(ii) : Si $U \subset X$ est une partie ouverte telle que $\mathcal{O}_X(U) \otimes_A \Sigma$ soit une suite exacte, alors $\mathcal{O}_X(U) \otimes_A \Sigma$ est universellement exacte, d'après le problème 4.24(ii), donc $\mathcal{O}_X(V) \otimes_A \Sigma$ est encore exacte, pour toute partie ouverte $V \subset U$. Par suite, il suffit d'exhiber un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{O}_X(U) \otimes_A \Sigma$ soit exacte. Or, d'après (i), Σ s'identifie naturellement avec la suite des sections globales $\Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A \Sigma)$; mais le foncteur Γ est exact à gauche, car il est adjoint à droite (exercice 5.56 et proposition 2.49(i)), donc Σ est un complexe exact à gauche (proposition 2.102(i)). En outre $p_x : \mathcal{P}_{1,x} \rightarrow \mathcal{P}_{0,x}$ est surjectif (exercice 5.65(i)), et avec (i), s'identifie naturellement avec $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A p : \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A P_1 \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A P_0$. Or, $\mathcal{O}_{X,x}$ représente la colimite du système $(A_U \mid U \in \mathcal{U}_x^{\text{op}})$ indexé par la famille cofiltrante $\mathcal{U}_x^{\text{op}}$ des voisinages ouverts de x dans X ; puisque P_0 est de type fini, il existe alors $U \in \mathcal{U}_x$ tel que $A_U \otimes_A p : A_U \otimes_A P_1 \rightarrow A_U \otimes_A P_0$ soit déjà surjectif. Quitte à remplacer X par U , on peut alors supposer que $\Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A p)$ soit surjectif, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 11.130. (i) Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ et $\underline{Y} := (Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme d'espaces annelés ; alors pour toute suite exacte Σ comme au §11.5.2, la suite $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_X \Sigma := (0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}'' \rightarrow 0)$ est exacte. En effet, l'assertion étant locale sur Y , on peut supposer que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L$ avec $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$ et un A -module L projectif de type fini, et de même pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$. En vertu du lemme 11.129, on peut en outre supposer que $\Sigma = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A \Sigma_0$, pour une suite exacte courte $\Sigma_0 := (0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0)$ de A -modules projectifs de type fini. Mais Σ_0 est scindée, donc de même pour Σ , et finalement $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_X \Sigma$ est une suite exacte scindée de $\mathcal{O}_Y$ -modules.

(ii) On obtient avec (i) un homomorphisme naturel de groupes abéliens

$$K(f) : K(\underline{X}) \rightarrow K(\underline{Y}) \quad [\mathcal{F}] \mapsto [\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}]$$

d'où un foncteur bien défini :

$$K : \text{EspAnn}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}.$$

Exercice 11.131. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $n \in \mathbb{N}$, et

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_0 \rightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [\mathcal{F}_i] = 0 \quad \text{dans } K(\underline{X}).$$

11.5.3. *Déterminant d'un $\mathcal{O}_X$ -module.* Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{A}$ un préfaisceau d'anneaux sur X . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout pré- $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$, posons

$$(\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F})(U) := \Lambda_{\mathcal{A}(U)}^k \mathcal{F}(U) \quad \forall U \in \mathcal{T}$$

(voir le problème 3.91(i)). Toute inclusion de parties ouvertes $U' \subset U \subset X$ induit une application $\mathcal{A}(U)$ -multilinéaire alternée

$$(*) \quad \mathcal{F}(U) \times \cdots \times \mathcal{F}(U) \rightarrow (\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F})(U')_{[\rho]} \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_{1,U'} \wedge \cdots \wedge x_{k,U'}$$

où $\rho : \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}(U')$ est l'homomorphisme de restriction, et $x_{i,U'} \in \mathcal{F}(U')$ dénote la restriction de la section $x_i \in \mathcal{F}(U)$, pour tout $i = 1, \dots, k$. D'après l'exercice 3.93, l'application $(*)$ correspond à une unique application $\mathcal{A}(U)$ -linéaire

$$(\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F})(U) \rightarrow (\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F})(U')_{[\rho]} \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \mapsto x_{1,U'} \wedge \cdots \wedge x_{k,U'}$$

qui fournit les applications de restriction d'un pré- $\mathcal{A}$ -module $\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F}$. D'après le §5.3.1, on a une structure naturelle de $\mathcal{A}^a$ -module sur le faisceau associé

$$\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F} := (\Lambda_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F})^a.$$

Exercice 11.132. (i) Avec la notation ci-dessus, exhiber un isomorphisme naturel :

$$\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}^a}^k (\mathcal{F}^a) \quad \text{dans } \mathcal{A}^a - \text{Mod.}$$

(ii) Soit en outre $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de préfaisceaux d'anneaux sur X ; exhiber un isomorphisme naturel $\mathcal{B}^a \tilde{\otimes}_{\mathcal{A}^a} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}}^k (\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{B}}^k (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F})$ dans $\mathcal{B}^a - \text{Mod}$.

(iii) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$, et M un A -module ; pour tout $k \in \mathbb{N}$, exhiber un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A (\Lambda_A^k M) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^k (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M) \quad \text{dans } \mathcal{O}_X - \text{Mod.}$$

(iv) Dédurre de (ii) que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent (resp. de type fini, resp. localement projectif de type fini, resp. plat), il en est de même pour $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^k \mathcal{F}$.

(v) En outre, exhiber une identification naturelle $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^1 \mathcal{F}$.

(vi) Soit $\phi : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés ; exhiber une identification naturelle : $\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^k (\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_Y}^k (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

11.5.4. Soient $\underline{X} := (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module ; munissons

$$Z := \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \neq 0\}$$

de la topologie induite par l'inclusion $j : Z \rightarrow X$, et posons $(Z, \mathcal{O}_Z) := Z \times_X \underline{X}$. D'après l'exercice 5.66(iv), le morphisme naturel d'espaces annelés $\underline{j} : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \underline{X}$ induit une équivalence $\underline{j}_* : \mathcal{O}_Z - \text{Mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X - \text{Mod}$, et $\mathcal{F}$ est localement projectif de type fini (resp. inversible) si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{O}_Z \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \tilde{j}^{-1} \mathcal{F}$. On a alors des isomorphismes de groupes abéliens :

$$\text{Pic}(j) : \text{Pic}(\underline{X}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(Z, \mathcal{O}_Z) \quad K(\underline{j}) : K(\underline{X}) \xrightarrow{\sim} K(Z, \mathcal{O}_Z).$$

• Si $\mathcal{F}$ est localement libre de type fini, on voit aussitôt que pour tout $r \in \mathbb{N}$ la partie $Z_r := \{x \in Z \mid \text{rk}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x) = r\}$ est ouverte dans Z , et $Z = \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} Z_r$. La restriction $\mathcal{F}|_{Z_r} := (\tilde{j}^{-1} \mathcal{F})|_{Z_r}$ est un $\mathcal{O}_{Z|Z_r}$ -module localement libre de rang constant r ; au vu de l'exercice 11.132(iii,iv) et la remarque 3.92(ii), $\mathcal{L}_r := (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_Z}^r (\tilde{j}^{-1} \mathcal{F}))|_{Z_r}$ est alors un $\mathcal{O}_{Z|Z_r}$ -module inversible pour tout $r \in \mathbb{N}$. On notera par

$$\det \mathcal{F}$$

l'unique $\mathcal{O}_X$ -module inversible tel que $(\det \mathcal{F})|_{Z_r} = \mathcal{L}_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

• Noter que tout isomorphisme $h : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini induit un isomorphisme unique

$$\det(h) : \det(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{G}) \quad \text{tel que} \quad \det(h)|_{Z_r} := \Lambda_{\mathcal{O}_{Z|Z_r}}^r (h|_{Z_r}) \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

• Soient en outre $\underline{X}' := (X', \mathcal{O}_{X'})$ un deuxième espace annelé, et $\phi : \underline{X}' \rightarrow \underline{X}$ un morphisme d'espaces annelés ; avec la remarque 5.64(ii), on voit aussitôt que

$$Z'_r := \{x' \in X' \mid \mathrm{rk}_{\mathcal{O}_{X',x'}}(\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{x'} = r\} = \phi^{-1}(Z_r) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

de sorte que ϕ induit par restriction un morphisme $\phi_r : Z'_r \times_{X'} \underline{X}' \rightarrow Z_r \times_X \underline{X}$ d'espaces annelés, pour tout $r \in \mathbb{N}$. Compte tenu de l'exercice 11.132(vi), on déduit une identification naturelle :

$$\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}).$$

11.5.5. Bien que le cas des $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres suffise (largement) pour notre discussion, on souhaite montrer comment prolonger la construction du déterminant aux $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini. Pour cela, soient d'abord A un anneau, P un A -module projectif de type fini, $(Y, \mathcal{O}_Y) := \mathrm{Spec} A$; noter que

$$\det(P) := \Gamma(\det \mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_A P)$$

est bien défini, car $\mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_A P$ est localement libre de rang fini (exercice 5.65(ii)), et il est un A -module inversible (exercice 5.69(ii)).

• Soit alors $\mathcal{P}$ la sous-catégorie de $\mathbf{AlgMod}$ dont les objets sont les $(A, P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AlgMod})$ avec P projectif de type fini, et dont les morphismes $(A, P) \rightarrow (A', P')$ sont les $(f, g) \in \mathbf{AlgMod}((A, P), (A', P'))$ tels que l'adjoint de $g : P \rightarrow P'_{[f]}$ est un isomorphisme A' -linéaire $g^* : A' \otimes_A P \xrightarrow{\sim} P'$ (voir le §3.2.6). Notons en outre par $\mathcal{S}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ dont les objets sont les couples (A, L) avec L inversible. Pour $(f, g) \in \mathcal{S}((A, P), (A', P'))$, posons aussi $(Y', \mathcal{O}_{Y'}) := \mathrm{Spec} A'$; la discussion du §11.5.4 permet d'associer à (f, g) un isomorphisme A' -linéaire :

$$\omega_{(f,g)}^* : A' \otimes_A \det(P) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{O}_{Y'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \det(\mathcal{O}_Y \widetilde{\otimes}_A P)) \xrightarrow{\det(\mathcal{O}_{Y'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} g^*)} \det(P')$$

dont l'adjoint A -linéaire $\omega_{(f,g)} : \det(P) \rightarrow \det(P')_{[f]}$ admet la description suivante. Supposons que P soit engendré par un système de m éléments ; alors il existe des uniques suites d'anneaux quotients $(\pi_i : A \rightarrow A_i \mid i = 0, \dots, n)$ et $(\pi'_i : A' \rightarrow A'_i \mid i = 0, \dots, n)$ avec $n \leq m$, induisant des isomorphismes d'anneaux :

$$(*) \quad A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^n A_i \quad A' \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^n A'_i$$

et telles que $A_i \otimes_A P$ et $A'_i \otimes_{A'} P'$ soient de rang constant i , pour chaque $i = 0, \dots, n$. Sous les identifications (*), l'homomorphisme f est le produit d'homomorphismes d'anneaux $(f_i : A_i \rightarrow A'_i \mid i = 0, \dots, n)$ tels que les carrés :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi'_i \\ A_i & \xrightarrow{f_i} & A'_i \end{array} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

soient cocartésiens, et g est la somme directe d'applications A_i -linéaires

$$g_i : A_i \otimes_A P \rightarrow (A'_i \otimes_{A'} P')_{[f_i]} \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Avec cette notation, $\det(P) = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda_{A_i}^i(A_i \otimes_A P)$, $\det(P') = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda_{A'_i}^i(A'_i \otimes_{A'} P')$ et $\omega_{(f,g)}$ est la somme directe des applications A_i -linéaires

$$\Lambda_{A_i}^i(g_i) : \Lambda_{A_i}^i(A_i \otimes_A P) \rightarrow \Lambda_{A'_i}^i(A'_i \otimes_{A'} P')_{[f_i]} \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_i \mapsto g_i(x_1) \wedge \dots \wedge g_i(x_i).$$

On voit ainsi aussitôt que les associations : $(A, P) \mapsto \det(P)$ et $(f, g) \mapsto (f, \omega_{(f,g)})$ définissent un foncteur $\mathrm{Det} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$.

• Or, soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement projectif de type fini, et notons par $\mathcal{S}$ le site de X formé des parties ouvertes $U \subset X$ telle que $\mathcal{F}(U)$

soit un $\mathcal{O}_X(U)$ -module projectif de type fini et $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{X|U} \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U)$ (lemme 11.129(i)); ainsi $\mathcal{F}$ induit un foncteur

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P} \quad U \mapsto (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{F}(U)).$$

Posons alors

$$\det(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}) := \text{Det} \circ \mathcal{F}|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{L}.$$

Soit $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ la restriction de $\mathcal{O}_X$ à $\mathcal{S}^{\text{op}}$; en outre, pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ soit $\mathcal{S}/U$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}$ avec $\text{Ob}(\mathcal{S}/U) := \{V \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \mid V \subset U\}$. Par inspection directe de la construction, on voit que $\det(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}})$ est un pré- $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ -module, et sa restriction $\det(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}})|_U$ à $(\mathcal{S}/U)^{\text{op}}$ est isomorphe à la restriction de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \det(\mathcal{F}(U))$, pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$. Avec le lemme 11.129(i) on déduit que $\det(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}})$ est en fait un $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ -module, donc il admet un prolongement canonique $\det(\mathcal{F})$ qui est un $\mathcal{O}_X$ -module (exercice 5.35(i,ii)), et $\det(\mathcal{F})|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X(U)} \det(\mathcal{F}(U))$ pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Ainsi, $\det(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible; en dernier lieu, si $\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini, on vérifie aisément que cet $\mathcal{O}_X$ -module est naturellement isomorphe au déterminant de $\mathcal{F}$ exhibé au §11.5.4.

Proposition 11.133. (i) *L'association : $[\mathcal{F}] \mapsto [\det \mathcal{F}]$ pour tout $\mathcal{O}_X$ -module localement projectif $\mathcal{F}$ de type fini, définit un homomorphisme de groupes abéliens :*

$$\det_X : K(\underline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\underline{X}).$$

(ii) *L'association : $\underline{X} \mapsto \det_X$ définit une transformation naturelle :*

$$\det : K(-) \Rightarrow \text{Pic}(-).$$

Démonstration. (i) : Soit $\underline{Z} := (Z, \mathcal{O}_Z)$ défini comme au §11.5.4; quitte à remplacer $\underline{X}$ par $\underline{Z}$, on peut supposer que $\mathcal{O}_{X,x} \neq 0$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, on va exhiber d'abord, pour toute suite exacte $\Sigma := (0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \rightarrow 0)$ de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini, un isomorphisme canonique :

$$\tilde{\omega}^\Sigma : \det(\mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{F}) \quad \text{dans } \mathcal{O}_X\text{-Mod}.$$

Pour cela, quitte à remplacer X par une partie ouverte et fermée, on se ramène aisément au cas où $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont de rang constant r et s , et donc $\mathcal{F}$ est de rang constant $r+s$. Pour toute partie ouverte $U \subset X$, posons $A_U := \mathcal{O}_X(U)$, et soit

$$\psi^\Sigma : \Lambda_{\mathcal{O}_X}^r(\mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda_{\mathcal{O}_X}^s(\mathcal{F}) \rightarrow \Lambda_{\mathcal{O}_X}^{r+s}(\mathcal{F})$$

l'homomorphisme de pré- $\mathcal{O}_X$ -modules tel que, pour toute telle U on a :

$$\psi_U^\Sigma(\alpha \otimes \beta) := (\Lambda_{A_U}^r i_U)(\alpha) \wedge \beta \quad \forall \alpha \in (\Lambda_{\mathcal{O}_X}^r \mathcal{F}')(U), \forall \beta \in (\Lambda_{\mathcal{O}_X}^s \mathcal{F})(U).$$

Posons ensuite $\tilde{\psi}^\Sigma := (\psi^\Sigma)^a : (\det \mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s(\mathcal{F}) \rightarrow \det(\mathcal{F})$, et remarquons :

Affirmation 11.134. $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s p : \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s \mathcal{F} \rightarrow \det \mathcal{F}''$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$.

Preuve : Pour tout $x \in X$, posons $A(x) := \mathcal{O}_{X,x}$; par l'exercice 5.65(i), il suffit de vérifier que l'application $A(x)$ -linéaire $(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s p)_x : (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s \mathcal{F})_x \rightarrow (\det \mathcal{F}'')_x$ est surjective. D'après l'exercice 11.132(iii), cette dernière s'identifie naturellement avec

$$\Lambda_{A(x)}^s(p_x) : \Lambda_{A(x)}^s \mathcal{F}_x \rightarrow \Lambda_{A(x)}^s \mathcal{F}_x'' \quad \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_s \mapsto p_x(\beta_1) \wedge \cdots \wedge p_x(\beta_s).$$

Mais p_x est surjective (exercice 5.65(i)), donc de même pour $\Lambda_{A(x)}^s(p_x)$. $\diamond$

Soit $\mathcal{K} := \text{Ker}(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s p)$; il vient une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$0 \rightarrow (\det \mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \rightarrow (\det \mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^s \mathcal{F} \rightarrow (\det \mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\det \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

car $\det \mathcal{F}'$ est un $\mathcal{O}_X$ -module plat. Remarquons ensuite :

Affirmation 11.135. $(\det \mathcal{F}') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \subset \text{Ker}(\widetilde{\psi}^\Sigma)$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $((\det \mathcal{F}') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})_x \subset \text{Ker}(\widetilde{\psi}^\Sigma)_x$ pour tout $x \in X$. Au vu des identifications naturelles :

$$((\det \mathcal{F}') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})_x \xrightarrow{\sim} \Lambda_{A(x)}^r(\mathcal{F}'_x) \otimes_{A(x)} \mathcal{K}_x \quad \text{Ker}(\psi_x^\Sigma) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\widetilde{\psi}^\Sigma)_x$$

on est alors ramené à vérifier que $\Lambda_{A(x)}^r(\mathcal{F}'_x) \otimes_{A(x)} \mathcal{K}_x \subset \text{Ker}(\psi_x^\Sigma)$. Or, $\mathcal{K}_x$ est le $A(x)$ -module engendré par tous les termes de la forme

$$i(\tau) \wedge \gamma \quad \text{avec } \tau \in \mathcal{F}'_x \text{ et } \gamma \in \Lambda_{A(x)}^{s-1} \mathcal{F}_x$$

et on a $\psi_x^\Sigma(\alpha \otimes (i(\tau) \wedge \gamma)) = (\Lambda_{A(x)}^{r+1} i_x)(\alpha \wedge \tau) \wedge \gamma = 0$ pour tous tels τ et γ , et tout $\alpha \in \Lambda_{A(x)}^r \mathcal{F}'_x$, car $\Lambda_{A(x)}^{r+1} \mathcal{F}'_x = 0$ (remarque 3.92(ii)). $\diamond$

Au vu de l'observation 11.135, $\widetilde{\psi}^\Sigma$ se factorise à travers un unique morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{\omega}^\Sigma$ comme souhaité, et on vérifie aisément que $\widetilde{\omega}_x^\Sigma$ est un isomorphisme de $A(x)$ -modules libres de rang 1, pour tout $x \in X$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc $\widetilde{\omega}^\Sigma$ est un isomorphisme.

• Soit en outre $\phi : (X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés ; par inspection directe des constructions, on vérifie la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\det(\mathcal{F}') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}'')) & \xrightarrow{\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\omega}^\Sigma} & \mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det(\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \det(\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}'') & \xrightarrow{\widetilde{\omega}^{\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^\Sigma}} & \det(\mathcal{O}_{X'} \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les isomorphismes fournies par le §11.5.4.

• En dernier lieu, considérons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_1 & 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}''_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' & & \\ \Sigma_2 & 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}''_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini, et dont les flèches verticales sont des isomorphismes ; toujours par inspection directe, on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \det(\mathcal{F}'_1) \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}''_1) & \xrightarrow{\widetilde{\omega}^{\Sigma_1}} & \det(\mathcal{F}_1) \\ \det(h') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(h'') \downarrow & & \downarrow \det(h) \\ \det(\mathcal{F}'_2) \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}''_2) & \xrightarrow{\widetilde{\omega}^{\Sigma_2}} & \det(\mathcal{F}_2). \end{array}$$

• Soient ensuite A un anneau, $\Theta := (0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de A -modules projectifs de type fini, et posons $(Y, \mathcal{O}_Y) := \text{Spec } A$. En vertu du lemme 11.129(i), on a un isomorphisme A -linéaire naturel

$$\Gamma(\det(\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A P') \widetilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A P'')) \xrightarrow{\sim} \det(P') \otimes_A \det(P'')$$

et en vertu de ce qui précède, on déduit alors un isomorphisme naturel

$$\omega^\Theta : \det(P') \otimes_A \det(P'') \xrightarrow{\sim} \det(P) \quad \text{dans } A - \text{Mod}.$$

Soient un homomorphisme d'anneaux $f : A_1 \rightarrow A_2$, et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta_1 & 0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P''_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow g' & & \downarrow g & & \downarrow g'' & & \\ \Theta_2 & 0 & \longrightarrow & P'_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P''_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en haut (resp. en bas) est une suite exacte courte de A_1 -modules (resp. de A_2 -modules) projectifs de type fini, et tel que les couples (f, g') , (f, g) et (f, g'') soient des morphismes de la catégorie $\mathcal{P}$ (voir le §11.5.5) ; par ce qui précède, on déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \det(P'_1) \otimes_{A_1} \det(P''_1) & \xrightarrow{\omega^{\Theta_1}} & \det(P_1) \\ \omega_{(f, g')} \otimes_{A_1} \omega_{(f, g'')} \downarrow & & \downarrow \omega_{(f, g)} \\ \det(P'_1) \otimes_{A_2} \det(P''_2) & \xrightarrow{\omega^{\Theta_2}} & \det(P_2). \end{array}$$

Or, revenons à une suite exacte courte $\Sigma := (0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0)$ de $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini, et soit $\mathcal{S}$ la sous-catégorie pleine de $\text{Ouv}(X)$ dont les objets sont les parties ouvertes $U \subset X$ telles que :

- (a) $\mathcal{F}|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X|U} \otimes_{A_U} \mathcal{F}(U)$, et de même pour $\mathcal{F}'|_U$ et $\mathcal{F}''|_U$
- (b) la suite induite $\Sigma(U) := (0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0)$ est exacte.

Avec le lemme 11.129 on voit aussitôt que $\mathcal{S}$ est un site de X , et par ce qui précède on déduit un système d'isomorphismes

$$\omega^{\Sigma(U)} : \det \mathcal{F}'(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \det \mathcal{F}''(U) \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{F}(U)) \quad \forall U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$$

compatibles aux restrictions des U -sections, pour toute inclusion $V \subset U$ d'objets de $\mathcal{S}$. Soit alors $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ la restriction à $\mathcal{S}$ du faisceau $\mathcal{O}_X$, et pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{M}$, soit $\mathcal{M}_{|\mathcal{S}}$ le $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ -module obtenu par restriction de $\mathcal{M}$ à la sous-catégorie $\mathcal{S}$; on obtient ainsi un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}$ -modules

$$\omega_{|\mathcal{S}}^{\Sigma} : \det(\mathcal{F}')_{|\mathcal{S}} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_{X|\mathcal{S}}} \det(\mathcal{F}'')_{|\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{F})_{|\mathcal{S}}$$

qui, d'après l'exercice 5.35(i,ii), se prolonge en un unique isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\omega^{\Sigma} : \det(\mathcal{F}') \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{F})$, et cela achève la preuve de (i).

(ii) : Cela découle aussitôt de (i), par inspection directe des constructions. $\square$

Théorème 11.136. (Auslander-Buchsbaum) *Tout anneau local régulier est factoriel.*

Démonstration. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un tel anneau. On raisonne par récurrence sur $d := \dim A$. L'assertion est déjà connue pour $d = 0, 1$, d'après la proposition 11.50(ii) ; soit donc $d \geq 2$, et supposons que le théorème soit connu pour tout anneau local régulier de dimension $< d$.

D'après la proposition 11.112 il suffit de vérifier que tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1 est principal. Posons $(X, \mathcal{O}_X) := \text{Spec } A$, $U := X \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U}$, et $\underline{U} := (U, \mathcal{O}_U)$; d'après le théorème 11.103, il existe une résolution $L_{\bullet} \rightarrow \mathfrak{p}$, de longueur finie n , par des A -modules libres de rang fini, et avec $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L_i$ pour tout $i \leq n$, on obtient alors un complexe exact de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents :

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathfrak{p}\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

(notation de la remarque 5.68(i)).

Affirmation 11.137. $\mathfrak{p}\mathcal{O}_U$ est un $\mathcal{O}_U$ -module inversible.

Preuve : La localisation $\mathcal{O}_{U, \mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$ est régulière (corollaire 11.105(i)) de dimension $< d$, pour tout $\mathfrak{q} \in U$. Si $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$, alors $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{U, \mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{U, \mathfrak{q}}$, et si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, l'idéal premier $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ est de hauteur 1, donc il est principal, par hypothèse de récurrence (proposition 11.112). Ainsi, $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{U, \mathfrak{q}}$ est un $\mathcal{O}_{U, \mathfrak{q}}$ -module libre de rang 1, pour tout $\mathfrak{q} \in U$, et on conclut avec l'exercice 11.127. $\diamond$

D'après l'observation 11.137, la suite exacte Σ induit par restriction à U , un complexe exact $\Sigma|_U$ de $\mathcal{O}_U$ -modules localement libres de type fini ; avec l'exercice 11.131, on a alors

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [\mathcal{L}_i|_U] = [\mathfrak{p}\mathcal{O}_U] \quad \text{dans } K(\underline{U})$$

d'où $\sum_{i=0}^n (-1)^i \det[\mathcal{L}_i|_U] = [\mathfrak{p}\mathcal{O}_U]$ dans $\text{Pic}(U)$, d'après la proposition 11.133(i) et l'exercice 11.132(v). Mais chaque $\mathcal{L}_i$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X^{r_i}$, avec $r_i := \text{rk}_A L_i$, donc $\det[\mathcal{L}_i] = r_i \cdot [\mathcal{O}_X] = 0$ dans $\text{Pic}(X)$; par suite $\det[\mathcal{L}_i|_U] = 0$, et finalement, $[\mathfrak{p}\mathcal{O}_U] = 0$ dans $\text{Pic}(U)$, i.e. il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_U$ -linéaire $\omega : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p}\mathcal{O}_U$.

Soit aussi $\beta : \mathfrak{p}\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ l'inclusion, et posons $t_U := \beta_U \circ \omega_U(1) \in \Gamma(\mathcal{O}_U)$; d'après le problème 11.75(ii) et le théorème 11.117, l'homomorphisme de restriction $A = \Gamma(\mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme, donc t_U est la restriction d'un unique $t \in A$. Evidemment $t \neq 0$, donc tout idéal premier associé à A/tA est de hauteur 1 (théorème 7.49); soient $\text{Ass}_A(A/tA) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$, et $tA = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$ l'unique décomposition primaire non redondante, où $\mathfrak{q}_i \subset A$ est un idéal $\mathfrak{p}_i$ -primaire pour chaque $i = 1, \dots, r$. Par construction, $(tA)_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ pour $i = 1, \dots, r$, car $\mathfrak{p}_i \in U$; par suite, $(tA)_{\mathfrak{p}_i} = A_{\mathfrak{p}_i}$ si $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$, et d'autre part $A \cap (tA)_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{q}_i$ (corollaire 7.20). Cela montre que $r = 1$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, et $tA = \mathfrak{q}_1 = A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, CQFD. $\square$

Exemple 11.138. (i) Soit A un anneau local régulier; pour tout $n \in \mathbb{N}$, munissons l'anneau de polynômes en n indéterminées $A_n := A[T_1, \dots, T_n]$ de sa topologie I_n -adique $\mathcal{T}_n$, où I_n désigne l'idéal engendré par $T_1, \dots, T_n$. La complétion de $(A_n, \mathcal{T}_n)$ est l'anneau des séries formelles en n indéterminées $B_n := A[[T_1, \dots, T_n]]$; par suite, B_n est régulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ (corollaire 11.110). En outre, B_n est local, d'après l'exercice 1.52(iii), donc il est factoriel (théorème 11.136).

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\pi_n : (A_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1}) \rightarrow (A_n, \mathcal{T}_n)$ l'homomorphisme de A -algèbres topologiques tel que $\pi_n(T_i) := T_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et $\pi_n(T_{n+1}) = 0$; puisque p_n est surjective, il en est de même pour sa complétion $\hat{\pi}_n : B_{n+1} \rightarrow B_n$ (corollaire 9.58), et évidemment $\text{Ker}(\hat{\pi}_n) = T_{n+1}B_{n+1} \subset \mathcal{J}(B_{n+1})$, encore d'après l'exercice 1.52(iii). Avec le problème 11.116, on conclut que la limite B du système projectif $(B_n, \hat{\pi}_n \mid n \in \mathbb{N}^{\text{op}})$ est un anneau factoriel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{M}_n := \{T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n} \mid \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}\} \subset A_n$, et posons $\mathcal{M} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$; l'anneau B peut se décrire plus explicitement comme l'ensemble des séries formelles $\sum_{M \in \mathcal{M}} a_M \cdot M$ à coefficients $a_M \in A$, muni des lois d'addition et de multiplication évidentes.

(iii) Si l'on fait $A := \mathbb{C}$ dans (i) et (ii), on retrouve un anneau $B = \mathbb{C}[[T_n \mid n \in \mathbb{N}]]$ bien connu aux arithméticiens : il est en fait isomorphe à l'anneau D des fonctions $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, muni du *produit de convolution* :

$$f * g(n) := \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g(n/d) \quad \forall f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Afin d'expliciter un tel isomorphisme, notons par $(p_i \mid i \in \mathbb{N})$ la suite des nombres premiers entiers, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, soient $k \in \mathbb{N}$ et $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$ tels que $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ (pour $n = 1$ on pose $k = 0$); avec cette notation, posons $\tau(n) := T_1^{\nu_1} \cdots T_k^{\nu_k} \in \mathcal{M}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (donc $\tau(1) = 1$). On a alors un isomorphisme :

$$D \xrightarrow{\sim} B \quad f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n) \cdot \tau(n).$$

On retrouve ainsi un théorème de E.D.Cashwell et C.J.Everett ([13]) : l'anneau D des fonctions arithmétiques (appelé parfois *anneau de Dirichlet*) est factoriel.

Exercice 11.139. Soit A un anneau intègre noethérien, tel que tout A -module de type fini admet une résolution de longueur finie par des A -modules libres de rang fini. Montrer que A est factoriel.

11.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 11.6 : Soit $(M_i \mid i = 0, \dots, n)$ une série de composition pour M . On a des identifications naturelles : $S^{-1}(M_i/M_{i-1}) \simeq S^{-1}M_i/S^{-1}M_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$. D'autre part, l'exemple 11.2(ii) nous dit que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{m}$ pour quelque $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, donc

$$S^{-1}M_i/S^{-1}M_{i-1} \simeq S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{m}.$$

Or, $S^{-1}\mathfrak{m}$ est soit un idéal maximal de $S^{-1}A$, soit égal à $S^{-1}A$. Dans le premier cas on voit aisément que la localisation $A/\mathfrak{m} \rightarrow S^{-1}(A/\mathfrak{m}) \simeq S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{m}$ est un isomorphisme,

donc $S^{-1}M_i/S^{-1}M_{i-1}$ est à la fois un $S^{-1}A$ -module simple et un A -module simple ; dans le deuxième cas on a $S^{-1}M_i = S^{-1}M_{i-1}$. On conclut que, quitte à éliminer des répétitions, la suite $(S^{-1}M_i \mid i = 0, \dots, n)$ est une série de composition pour le $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$, et aussi pour le A -module $(S^{-1}M)_{[j]}$ d'où l'assertion.

Exercice 11.11 : On a $l_A(A/I) = l_{A/I}(A/I)$, en vertu de l'exemple 11.5(iii), donc $l_A(A/I) < +\infty$ si et seulement si A/I est artinien, par la proposition 11.9. Mais A/I est artinien $\Leftrightarrow$ le radical de I est $\mathfrak{m} \Leftrightarrow I$ est $\mathfrak{m}$ -primaire.

Exercice 11.19 : On utilise la présentation de $B^{(\sigma)}$ fournie par l'exercice 6.76(ii). A savoir, on a un homomorphisme surjectif $g : C := K[S, T, Z] \rightarrow B^{(\sigma)}$ de K -algèbres dont le noyau est l'idéal principal engendré par $ST - Z^n$. On remarque que g est un homomorphisme de K -algèbres graduées, pourvu que l'on munisse C de la graduation telle que $\deg S = \deg T = n$ et $\deg Z = 2$, et notons aussi que $ST - Z^n$ est homogène de degré $2n$, par rapport à cette graduation. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit E_k l'ensemble des $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n\nu_1 + n\nu_2 + 2\nu_3 = k$; la composante homogène C_k de C est le K -espace vectoriel engendré par les monômes $S^{\nu_1}T^{\nu_2}Z^{\nu_3}$ avec $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in E_k$. Avec cette notation, la deuxième méthode de comptage de l'exemple 11.17 se généralise aisément : on développe en série de puissances

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t^n)^2 \cdot (1-t^2)} &= \left(\sum_{\nu_1 \in \mathbb{N}} t^{n\nu_1} \right) \cdot \left(\sum_{\nu_2 \in \mathbb{N}} t^{n\nu_2} \right) \cdot \left(\sum_{\nu_3 \in \mathbb{N}} t^{2\nu_3} \right) \\ &= \sum_{\nu_{\bullet} \in \mathbb{N}^3} t^{n\nu_1 + n\nu_2 + 2\nu_3} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\nu_{\bullet} \in E_k} t^k \right) \end{aligned}$$

et il vient $P(C, t) = (1-t^n)^{-2} \cdot (1-t^2)^{-1}$. Pour conclure, on raisonne comme dans la preuve la proposition 11.18, et on trouve :

$$P(B^{(\sigma)}, t) = \frac{1-t^{2n}}{(1-t^n)^2 \cdot (1-t^2)} = \frac{1+t^n}{(1-t^n) \cdot (1-t^2)}.$$

Le cas de $B^{D_{2n}}$ est analogue : on munit $K[S, T]$ de la graduation telle que $\deg S = 2$ et $\deg T = n$, et grâce à la présentation fournie par la solution de l'exercice 6.76(ii) on trouve par le même argument l'identité

$$P(B^{D_{2n}}, t) = P(K[S, T], t) = \frac{1}{(1-t^n) \cdot (1-t^2)}.$$

Problème 11.28, partie (i) : Soit $I \neq 0$ un idéal de A ; par hypothèse, l'ensemble $E := \{\mathfrak{m} \in A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ est fini, disons $E = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$. Soit $x_0 \in I \setminus \{0\}$, et notons par $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r+s}$ les idéaux maximaux de A contenant x_0 , de sorte que pour tout $i = 1, \dots, s$ il existe $x_i \in I \setminus \mathfrak{m}_{r+i}$. Par hypothèse, $IA_{\mathfrak{m}_i}$ est un idéal de type fini de $A_{\mathfrak{m}_i}$, pour tout $i = 1, \dots, r$, donc on trouve une partie finie $\Sigma_i \subset I$ dont l'image dans $A_{\mathfrak{m}_i}$ engendre $IA_{\mathfrak{m}_i}$. Soit $J \subset A$ l'idéal engendré par $\{x_0, x_1, \dots, x_s\} \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_r$; évidemment $J \subset I$. Montrons que $JA_{\mathfrak{m}} = IA_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$: en effet, cela est clair si $\mathfrak{m} \in E$, et si $\mathfrak{m} \notin E$, on a $IA_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} = JA_{\mathfrak{m}}$, car $I, J \not\subset \mathfrak{m}$. Avec la proposition 3.55, on conclut que $J = I$; cela achève de vérifier que tout idéal de A est de type fini, i.e. A est noethérien.

Partie (ii) : Comme chaque $\mathfrak{p}_i$ est premier, il est clair que S est une partie multiplicative de A . Ainsi, tout idéal premier de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}\mathfrak{q}$, pour un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A avec $\mathfrak{q} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}_i$ (proposition 3.31) ; montrons qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_i$. Si $\mathfrak{q} = 0$, l'assertion est triviale ; si $\mathfrak{q} \neq 0$, soient $A_n := K[X_0, \dots, X_{r_{n+1}-1}]$, $S_n := S \cap A_n$ et $\mathfrak{q}_n := \mathfrak{q} \cap A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{q}_N \neq \emptyset$. Il s'ensuit aussitôt que $\mathfrak{q}_n \not\subset \bigcup_{i > N} \mathfrak{p}_i$ pour tout $n \geq N$. Noter que $S_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$, donc $\mathfrak{q}_n \subset \bigcup_{i=0}^n A_n \cap \mathfrak{p}_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la proposition 1.58, pour tout $n \geq N$ il existe alors $i \in \{0, \dots, N\}$ tel que $\mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{p}_i$. Pour tout $n \geq N$, soit $Z_n := \{0 \leq i \leq N \mid \mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{p}_i\}$; évidemment on a $\emptyset \neq Z_m \subset Z_n$ pour tout $m \geq n \geq N$. Par suite, $Z := \bigcap_{n \geq N} Z_n \neq \emptyset$, et $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_i$ pour tout $i \in Z$.

Cela montre que $\text{Max } S^{-1}A = \{S^{-1}\mathfrak{p}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, soient $\mathfrak{m}_k := S^{-1}\mathfrak{p}_k$ et $E_k := \text{Frac } K[X_i \mid i \geq r_{k+1}]$; on voit aisément que $(S^{-1}A)_{\mathfrak{m}_k}$ est une localisation de $E_k[X_0, \dots, X_{r_{k+1}-1}]$, donc il est noethérien (remarque 6.61(iv)).

Ensuite, soit $x \in S^{-1}A \setminus \{0\}$; montrons que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid x \in \mathfrak{m}_i\}$ est fini. Pour cela, écrivons $x = a/b$ avec $a \in A$ et $b \in S$; d'après la proposition 3.31, on est ramené à vérifier que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid a \in \mathfrak{p}_i\}$ est fini, mais cela est clair.

On peut maintenant invoquer (i) pour conclure que $S^{-1}A$ est noethérien.

Partie (iii) : Avec la notation ci-dessus, soient aussi

$$F_k := \text{Frac } E_k[X_0, \dots, X_{r_k-1}] \quad B_k := F_k[X_{r_k}, \dots, X_{r_{k+1}-1}] \quad \mathfrak{n}_k := \mathfrak{p}_k B_k$$

de sorte que $\mathfrak{n}_k \in \text{Max } B_k$ et $(S^{-1}A)_{\mathfrak{m}_k} = (B_k)_{\mathfrak{n}_k}$. D'après le problème 6.82(i), il vient $r_{k+1} - r_k = \text{tr.deg}(\text{Frac}(B_k)/F_k) = \dim(S^{-1}A)_{\mathfrak{m}_k} = \text{ht}(S^{-1}\mathfrak{p}_k)$.

Exercice 11.30, partie (i) : Soit $\pi : V \rightarrow W$ la projection, et $\mathfrak{n} \in W$ l'unique point tel que $\pi^{-1}(\mathfrak{n}) = S := \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n\}$. On montrera plus précisément que

$$\dim_K \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \dim_K(\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1^2) + \dots + \dim_K(\mathfrak{m}_n/\mathfrak{m}_n^2).$$

L'assertion s'ensuivra aussitôt, compte tenu du corollaire 11.29 et de la remarque 6.95(iii). Or, la construction de W montre que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ (lemme 1.60), en particulier, on peut regarder $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^2$ comme des idéaux de A . Notons ensuite que $\text{Supp}_A \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = S$; en effet, si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, on a

$$(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)_{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{m}_{1,\mathfrak{p}} \cdots \mathfrak{m}_{n,\mathfrak{p}}}{\mathfrak{m}_{1,\mathfrak{p}}^2 \cdots \mathfrak{m}_{n,\mathfrak{p}}^2} = \begin{cases} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & \text{si } \mathfrak{p} \in S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, si $I := \text{Ann}_A(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$, on voit que $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ est un A/I -module, et $\text{Spec } A/I = S$ est un espace topologique discret; par l'exercice 3.66(i,iii) on déduit un isomorphisme naturel de K -espaces vectoriels

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1^2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_n/\mathfrak{m}_n^2$$

d'où l'identité souhaitée.

Partie (ii) : c'est un cas particulier de (i), compte tenu du problème 6.82(i).

Exercice 11.35 : Si $\dim A = 0$, alors A est déjà un corps, car il est intègre par hypothèse. Si A est semi-local de dimension 1, disons que $\text{Max } A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\}$, et noter que $\text{Spec } A = \text{Max}(A) \cup \{0\}$, car A est intègre; pour $i = 1, \dots, k$, soit $f_i \in \mathfrak{m}_i$, et posons $f := f_1 \cdots f_k \in (\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k) \setminus \{0\}$. Par suite $\{0\}$ est l'unique idéal premier de l'anneau intègre A_f (exemple 3.32(i)), i.e. A_f est un corps.

Réciproquement, soit $f \in A \setminus \{0\}$ tel que A_f est un corps; cela revient à dire que tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq 0$ de A contient f ; ainsi l'ensemble

$$\text{Max } V(f) = \text{Min}(A/fA) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$$

est fini (exercice 6.109(iii)), et il suffit de montrer que $\text{Max } A \subset \text{Max } V(f)$. Soit par l'absurde, $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ avec $\mathfrak{m} \notin \text{Max } V(f)$; alors il existe $g \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Max } V(f)} \mathfrak{p}$ (proposition 1.58). Soit $\mathfrak{q} \in \text{Max } V(g)$; d'après le corollaire 11.34(i), on a $\text{ht}(\mathfrak{q}) = 1$, mais alors $\mathfrak{q} \in \text{Max } V(f)$, et $g \in \mathfrak{q}$, contradiction.

Problème 11.40, partie (i) : D'un côté, $Y := \text{Max}(A \otimes_K B)$ est dense dans la topologie constructible de $X := \text{Spec}(A \otimes_K B)$ (problème 6.117(iv)); de l'autre côté, d'après l'exercice 6.109(ii), X n'a qu'un nombre fini $Z_1, \dots, Z_k$ de composantes irréductibles, et disons que $Z = Z_1$. Alors $T := Z \setminus \bigcup_{j=2}^k Z_j$ est une partie constructible dense dans Z , et avec le problème 6.82(i) il vient :

$$Y \cap T \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \dim Z = \text{ht}(\mathfrak{m}) \quad \forall \mathfrak{m} \in Y \cap T.$$

Soient donc $\mathfrak{m} \in Y \cap T$, $g : K \rightarrow A$ l'homomorphisme structurel de A , et $f := g \otimes_K B : B \rightarrow C$; alors $\mathfrak{n} := f^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de B (corollaire 6.80), et $k(\mathfrak{n})$ est une extension finie de K (proposition 6.78(ii)). L'exercice 3.63(ii) fournit un isomorphisme de K -algèbres $C \otimes_B k(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} A \otimes_K k(\mathfrak{n})$ qui identifie l'image de $\mathfrak{m}$ dans $C \otimes_B k(\mathfrak{n})$ avec un idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}}$ de $A \otimes_K k(\mathfrak{n})$. En outre, g est évidemment plat, donc de même pour f (remarque 3.74(vi)), et ainsi, $\text{Spec } f$ est générissante (théorème 3.84(ii)); par la proposition 11.37(ii) et le problème 6.82(i), on a alors :

$$(*) \quad \text{ht}(\mathfrak{m}) = \text{ht}(\mathfrak{n}) + \dim C_{\mathfrak{m}} \otimes_B k(\mathfrak{n}) = \dim B + \dim(A \otimes_K k(\mathfrak{n}))_{\overline{\mathfrak{m}}}$$

et on doit vérifier que $\text{ht}(\overline{\mathfrak{m}}) = \dim A$. Quitte à remplacer B et $\mathfrak{m}$ respectivement par $k(\mathfrak{n})$ et $\overline{\mathfrak{m}}$, on est donc ramené au cas où B est un corps, extension finie de K . Ensuite, compte tenu de l'homomorphisme de K -algèbres $A \otimes_K B \xrightarrow{\sim} B \otimes_K A$ (exercice 3.61), on peut échanger A et B , et supposer plutôt que A soit une extension finie de K (et que B soit une K -algèbre intègre de type fini quelconque); alors $A \otimes_K k(\mathfrak{n})$ est une $k(\mathfrak{n})$ -algèbre finie, d'où $\dim(A \otimes_K k(\mathfrak{n})) = \dim k(\mathfrak{n}) = 0$ (corollaire 6.20(iii)), et $(*)$ devient l'égalité $\text{ht}(\mathfrak{m}) = \dim B$, comme souhaité.

Partie (ii) : Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ les points génériques de Z et Z' ; les projections

$$\pi : A \rightarrow \overline{A} := A/\mathfrak{p} \quad \text{et} \quad \pi' : A \rightarrow \overline{A}' := A/\mathfrak{p}'$$

induisent des identifications naturelles $\text{Spec } \overline{A} \xrightarrow{\sim} Z$ et $\text{Spec } \overline{A}' \xrightarrow{\sim} Z'$ (remarque 1.45(i)). En outre, soient $\mu : A \otimes_K A \rightarrow A$ la loi de multiplication de A (i.e. $\mu(a \otimes a') := aa'$ pour tous $a, a' \in A$), et $I := \text{Ker } \mu$; on vérifie aisément que le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_K A & \xrightarrow{\mu} & A \\ \pi \otimes_K \pi' \downarrow & & \downarrow \pi'' \\ \overline{A} \otimes_K \overline{A}' & \longrightarrow & A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \end{array}$$

est cocartésien dans la catégorie $\mathbb{Z} - \text{Alg}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Autrement dit, la flèche horizontale en bas induit un isomorphisme : $(\overline{A} \otimes_K \overline{A}')/\overline{I} \xrightarrow{\sim} A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}')$, où $\overline{I} \subset \overline{A} \otimes_K \overline{A}'$ dénote l'image de I . Or, la projection π'' induit de même une identification naturelle $\text{Spec } A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \xrightarrow{\sim} Z \cap Z'$, et en raisonnant comme dans la preuve de (i) on trouve $\mathfrak{m} \in Z'' \cap \text{Max } A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}')$ avec $\dim Z'' = \dim(A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'))_{\mathfrak{m}}$. Soit $\mathfrak{n} \subset \overline{A} \otimes_K \overline{A}'$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}$. D'après (i) et le problème 6.82(i), on a

$$\dim(\overline{A} \otimes_K \overline{A}')_{\mathfrak{n}} = \dim Z + \dim Z'.$$

D'autre part, I est engendré par $(X_i \otimes 1 - 1 \otimes X_i \mid i = 1, \dots, n)$. Avec le corollaire 11.33(ii), il vient $\dim(A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'))_{\mathfrak{m}} = \dim(\overline{A} \otimes_K \overline{A}')_{\mathfrak{n}}/\overline{I}_{\mathfrak{n}} \geq \dim Z + \dim Z' - n$, d'où l'assertion.

Exercice 11.41, partie (i) : Posons $\mathfrak{p}' := f^{-1}(\mathfrak{q})$; évidemment $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, et puisque $\text{Spec } f$ est générissante, il existe un idéal premier $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{q}$ avec $f^{-1}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p}B \subset \mathfrak{r}$, par suite $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. En outre, $B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p}) = (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}}$ et $\dim(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}} = 0$, donc l'assertion découle de la proposition 11.37(ii).

Partie (ii) : Posons $B' := B/J$. Evidemment le radical de $J + XB = IB + XB$ est l'idéal maximal $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}B + XB$ de B . Par suite, dans l'espace $\text{Spec}(B')$ on a : $\{\mathfrak{n}B'\} = V((J + XB)/J) = V(XB')$. D'après le corollaire 11.33(i), il vient $\text{ht}(\mathfrak{n}B') \leq 1$; mais $\mathfrak{m}B' \subsetneq \mathfrak{n}B'$ est un idéal premier de B' , d'où $\text{ht}(\mathfrak{m}B') = 0$, i.e. $\mathfrak{m}B$ est un point maximal de la partie fermée $V(J) \subset \text{Spec } B$.

Exercice 11.45 : Soient $\mathfrak{m} \subset A[X_{\bullet}] := A[X_1, \dots, X_n]$ un idéal maximal, et $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{m}$; alors $\dim k(\mathfrak{p})[X_{\bullet}]_{\mathfrak{m}} = n$ (problème 6.82(i)), et évidemment $A[X_{\bullet}]$ est une A -algèbre plate, donc $\dim A[X_{\bullet}] = n + \dim A$, d'après la proposition 11.37(ii) et le théorème 3.84(ii). Ensuite, avec l'exemple 9.115 et le corollaire 9.103(i) on voit que $A[[X_{\bullet}]]$ est une A -algèbre plate noethérienne; en outre, pour tout idéal maximal $\mathfrak{n} \subset A[[X_{\bullet}]]$, on

a $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{n} \in \text{Max } A$, et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + X_\bullet A[[X_\bullet]]$ (exercice 1.52(iii)). Réciproquement, pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$, l'idéal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + X_\bullet A[[X_\bullet]]$ est maximal dans $A[[X_\bullet]]$. Noter que $A[[X_\bullet]] \otimes_A k(\mathfrak{m}) = A[[X_\bullet]]/\mathfrak{m}A[[X_\bullet]] = k(\mathfrak{m})[[X_\bullet]]$, et $k(\mathfrak{m})[[X_\bullet]]$ est la complétion $X_\bullet$ -adique de l'anneau local $k(\mathfrak{m})[X_\bullet]_{\mathfrak{p}}$, avec $\mathfrak{p} \subset k(\mathfrak{m})[X_\bullet]$ l'idéal maximal engendré par $X_\bullet$ (lemme 9.120); ainsi, $\dim k(\mathfrak{m})[[X_\bullet]] = \dim k(\mathfrak{m})[X_\bullet]_{\mathfrak{p}} = n$ (corollaire 11.36), et avec la proposition 11.37(ii) et le théorème 3.84(ii), il vient $\dim A[[X_\bullet]] = n + \dim A$.

Problème 11.60, partie (i) : On raisonne par récurrence sur r . Si $r = 0$, la suite vide engendre $\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p} = 0$, et alors A est intègre. Si $r = 1$, par hypothèse il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ strictement contenu dans $\mathfrak{p} = Ax_1$; pour tout $a \in \mathfrak{q}$, il existe alors $b \in A$ tel que $a = bx_1$, et comme $x_1 \notin \mathfrak{p}$, il vient $b \in \mathfrak{q}$. Ainsi, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot x_1$, d'où $\mathfrak{q} = 0$ (corollaire 3.49), donc A est intègre, et le générateur x_1 de $\mathfrak{p}$ est régulier. Si $r > 1$, posons $A' := A/x_1 A$ et $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}/x_1 A$; si l'on applique le corollaire 11.33(iii) avec $I_k := Ax_1 + \dots + Ax_k$ pour tout $k = 1, \dots, r$, on obtient $\text{ht}(\mathfrak{p}') = r - 1$, et évidemment $\mathfrak{p}'$ est engendré par l'image $x'_2, \dots, x'_r \in A'$ de la suite $x_2, \dots, x_r$. Par hypothèse de récurrence, $x'_2, \dots, x'_r$ est alors une suite A' -régulière et A' est intègre, et il reste à vérifier que x_1 est régulier. Mais puisque A' est intègre, $\mathfrak{r} := Ax_1$ est un idéal premier; par le cas $r = 1$, on est alors ramené à montrer que $\text{ht}(\mathfrak{r}) = 1$, et on sait déjà que $\text{ht}(\mathfrak{r}) \leq 1$ (corollaire 11.33(i)). Or, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier, car son idéal maximal est engendré par l'image de $x_\bullet$; ainsi, $A_{\mathfrak{p}}$ est intègre (proposition 11.50(i)), par suite il en est de même pour sa localisation $A_{\mathfrak{r}}$, et on est ramené à vérifier que $\mathfrak{r}A_{\mathfrak{r}} \neq 0$. Mais l'image de x_1 dans $A_{\mathfrak{p}}$ est régulière (corollaire 11.59), donc de même pour son image dans $A_{\mathfrak{r}}$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : On raisonne encore par récurrence sur r . Si $r = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit alors $r > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau noethérien A' et toute suite $x'_2, \dots, x'_r$ engendrant un idéal premier de A' de hauteur $r - 1$. Or, soit $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A(A)$, et supposons que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$; alors $\text{ht}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}) = r$, et $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ est engendré par l'image dans $A_{\mathfrak{q}}$ de la suite $x_\bullet$. D'après (i), $A_{\mathfrak{q}}$ est alors intègre, et $\text{ht}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}) \geq r$; mais $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{q}}}(A_{\mathfrak{q}})$ (proposition 7.6), contradiction. Donc $\mathfrak{p} \not\subset \Sigma := \bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A(A)} \mathfrak{q}$ (théorème 7.18(iii) et proposition 1.58); appliquons l'exercice 1.59 avec $x := x_1$ et $I := Ax_2 + \dots + Ax_r$: on trouve $b_2, \dots, b_r \in A$ tels que $x'_1 := x + b_2x_2 + \dots + b_rx_r \notin \Sigma$. Noter que la suite $x'_1, x_2, \dots, x_r$ engendre I , et que x'_1 est A -régulier (remarque 7.21(iii)); posons $A' := A/x'_1 A$, de sorte que les images $x'_2, \dots, x'_r$ de $x_2, \dots, x_r$ engendrent $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}/x'_1 A$, et en raisonnant comme dans la preuve de (i) on voit que $\text{ht}(\mathfrak{p}') = r - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe alors une matrice $(a'_{ij} \mid i, j = 2, \dots, r)$ d'éléments de A' avec $a'_{ii} = 1$ pour tout $i = 2, \dots, r$ et $a'_{ij} = 0$ pour $2 \leq j < i \leq r$, telle que la suite

$$(y'_i := \sum_{j=2}^r a'_{ij} x'_j \mid i = 2, \dots, r)$$

soit A' -régulière et engendre $\mathfrak{p}'$. Prenons $(a_{ij} \mid i, j = 2, \dots, r)$ dans A avec $a_{ii} = 1$ pour $i = 2, \dots, r$ et $a'_{ij} = 0$ pour $2 \leq j < i \leq r$, et tels que l'image de a_{ij} dans A' coïncide avec a'_{ij} pour tous $i, j = 2, \dots, r$; posons aussi $a_{11} := 1$, $a_{j1} := 0$ et $a_{1j} := b_j$ pour tout $j = 2, \dots, r$; on voit aussitôt que la matrice $(a_{ij} \mid i, j = 1, \dots, r)$ ainsi obtenue convient. (Ce résultat est emprunté à l'article [15] de E.Davis.)

Exercice 11.61, partie (i.a) : Posons $M_i := M/\sum_{j=1}^{i-1} x_i M$ pour $i = 1, \dots, r + 1$. En vertu de la proposition 3.11, l'application A -linéaire naturelle

$$\beta_i : (N_{[f]} \otimes_A M) / (\sum_{j=1}^{i-1} x_j (N_{[f]} \otimes_A M)) \rightarrow N_{[f]} \otimes_A M_i \quad \forall i = 1, \dots, r + 1$$

est un isomorphisme; en outre, on voit aisément que β_i est même un isomorphisme B -linéaire $P_i := (N \otimes_A M) / (\sum_{j=1}^{i-1} x_j (N \otimes_A M)) \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M_i$, pour les structures naturelles de B -modules détaillées au §3.2.1. Pour $i \leq r$, cet isomorphisme identifie la multiplication par le scalaire $f(x_i)$ sur le B -module P_i , avec l'endomorphisme $N \otimes_A x_i \cdot \text{Id}_{M_i}$ de $N \otimes_A M_i$;

donc, si x_i est M_i -régulier et si $N_{[f]}$ est un A -module plat, alors $f(x_i)$ est P_i -régulier (remarque 3.74(ii)), d'où l'assertion.

Partie (i.b) : Si $N_{[f]}$ est un A -module plat, la discussion de (i) identifie naturellement $\text{Ann}_{P_i}(f(x_i))$ avec $N \otimes_A \text{Ann}_{M_i}(x_i)$, pour $i = 1, \dots, r$. Si, en outre, $N_{[f]}$ est fidèlement plat, on a $N \otimes_A \text{Ann}_{M_i}(x_i) = 0 \Leftrightarrow \text{Ann}_{M_i}(x_i) = 0$, et $P_{r+1} = 0 \Leftrightarrow M_{r+1} = 0$ (voir la solution du problème 3.83(i.a)) ; l'assertion s'ensuit aussitôt.

Partie (ii) : Chaque M_i est le conoyau de l'application A -linéaire

$$f_i : M^i \rightarrow M \quad (m_1, \dots, m_i) \mapsto \sum_{j=1}^i x_j m_j.$$

Par suite, le A' -module M'_i s'identifie naturellement avec le conoyau de $A' \otimes_A f_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$ (proposition 3.11). Comme chaque M_i est un A -module plat, il s'ensuit qu'il en est de même pour chaque A' -module M'_i (remarque 3.74(vi)).

Ensuite, posons $M_0 := M$, et $g_i := x_{i+1} \cdot \text{Id}_{M_i}$ pour $i = 0, \dots, n-1$; par hypothèse, pour tout $0 = 1, \dots, n-1$ on a une suite exacte de A -modules :

$$\Sigma_i : 0 \rightarrow M_i \xrightarrow{g_i} M_i \rightarrow M_{i+1} \rightarrow 0$$

donc la suite $A' \otimes_A \Sigma_i$ est exacte (problème 4.24(ii.a)), i.e. $x'_\bullet$ est M' -régulière.

Exercice 11.68 : On raisonne par l'absurde : si l'assertion était fausse, on aurait une famille $(x_{r+1+i} \mid i \in \mathbb{N})$ d'éléments de I , telle que $(x_1, \dots, x_n)$ soit une suite proprement M -régulière pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $x_{i+1}M \not\subset x_1M + \dots + x_iM$, pour tout $i \in \mathbb{N}$; on aurait alors une suite strictement croissante $(\sum_{j=1}^n x_j M \mid n \in \mathbb{N})$ de sous-modules de M , et cela contredit la proposition 6.64.

Exercice 11.72 : Soit $a \in A \setminus \{0\}$; d'après le théorème 7.49, tout idéal premier associé à A/aA est de hauteur 1 ; en particulier, $\mathfrak{m} \notin \text{Ass}_A(A/aA)$, d'où $\text{prof}_A(A/aA) > 0$ (remarque 11.67(iii)), et donc $\text{prof}_A(A) > 1$ (corollaire 11.70(i)).

Problème 11.73, partie (i) : Noter d'abord que pour tout couple de A -modules N, P de type fini, le A -module $Q := \text{Hom}_A(N, P)$ est de type fini : en effet, soit $\phi : A^n \rightarrow N$ une surjection A -linéaire ; alors Q s'identifie au sous-module $\{\psi \in \text{Hom}_A(A^n, P) \mid \text{Ker}(\phi) \subset \text{Ker}(\psi)\}$, et on a un isomorphisme A -linéaire : $\text{Hom}_A(A^n, P) \xrightarrow{\sim} P^n$, donc l'assertion découle de la proposition 6.64. D'autre part, on a un homomorphisme naturel de A -algèbres associatives (voir l'exemple 3.90) :

$$B \rightarrow \text{End}_A(M) \quad b \mapsto b \cdot \text{Id}_M$$

dont le noyau est $\text{Ann}_B(M)$; ainsi, $\overline{B} := B/\text{Ann}_B(M)$ s'identifie avec un sous- A -module de $\text{End}_A(M)$, et il est donc une A -algèbre finie. L'homomorphisme induit d'anneaux $\overline{A} := A/\text{Ann}_A(M) \rightarrow \overline{B}$ est alors injectif et entier, d'où $\dim \overline{B} = \dim \overline{A}$ (corollaire 6.20(iii)), et finalement $\dim M = \dim M_{[f]}$ (remarque 3.58(ii)).

Partie (ii) : Avec la notation de la preuve de (i), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{A} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{B} \end{array}$$

et $M = N_{[\pi_B]}$ pour un $\overline{B}$ -module N . Par simple inspection des définitions, il vient :

$$\text{prof}(J, M) = \text{prof}(J\overline{B}, N) \quad \text{prof}(I, M_{[f]}) = \text{prof}(I\overline{A}, N_{[\overline{f}]})$$

pour tout idéal $I \subset A$ et $J \subset B$. Par suite, il suffit de vérifier l'assertion pour l'homomorphisme $\overline{f}$ et le $\overline{B}$ -module N , et en particulier, on peut supposer que B soit noethérien.

Soient $J := IB$, $n := \text{prof}(I, M_{[f]})$ et $m := \text{prof}(J, M)$; si $(x_1, \dots, x_r)$ est une suite $M_{[f]}$ -régulière d'éléments de I , alors $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est une suite M -régulière d'éléments de J , et le corollaire 11.70(i) donne :

$$(*) \quad \text{prof}(I, M_{[f]}/\sum_{i=1}^r x_i M_{[f]}) = n - r \quad \text{prof}(J, M/(\sum_{i=1}^r f(x_i)M)) = m - r.$$

Donc, si $n = +\infty$, on a $m = +\infty$. Supposons alors que $n < +\infty$, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une suite M -régulière I -maximale; toujours en vertu de $(*)$, on peut remplacer M par $M/(\sum_{i=1}^n f(x_i)M)$, et on est ainsi ramené au cas où $n = 0$. D'après la remarque 11.67(ii), il existe alors $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M_{[f]})$ tel que $I \subset \mathfrak{p}$; d'autre part, d'après l'exercice 7.10, il existe $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(M)$ tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, d'où $IB \subset \mathfrak{q}$, et finalement $m = 0$, encore avec la remarque 11.67(ii).

Partie (iii) : Gardons les notations de la preuve de (ii). On peut évidemment supposer que $M \neq 0$, et alors $\bar{A}, \bar{B} \neq 0$ sont encore des anneaux locaux. Ainsi, en raisonnant comme dans la preuve de (ii), on se ramène au cas d'un homomorphisme $f : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ fini, injectif, et local d'anneaux locaux noethériens. On a $M_{[f]} = \mathfrak{m}M_{[f]} \Leftrightarrow M = \mathfrak{n}M \Leftrightarrow M = 0$ (corollaire 3.49), donc on peut supposer que $n := \text{prof}_A(M_{[f]}) < +\infty$ (proposition 11.69(iii)). En outre, en raisonnant comme dans la preuve de (ii), on se ramène aisément au cas où $n = 0$, et alors $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_A(M_{[f]})$ (remarque 11.67(iii)); avec l'exercice 7.10 et le corollaire 6.18(i), on déduit que $\mathfrak{n} \in \text{Ass}_B(M)$, d'où $\text{prof}_B(M) = 0$, encore par la remarque 11.67(iii).

Exercice 11.74, partie (i) : Montrons d'abord que pour tout A -module M et toute suite M -régulière $y_\bullet := (y_1, \dots, y_r)$ de longueur r arbitraire, la suite $y_\bullet^{(k)} := (y_1^k, y_2, \dots, y_r)$ est encore M -régulière, pour tout entier $k > 0$. On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 1$ il n'y a rien à montrer; soit alors $k > 1$, et supposons que la suite $y_\bullet^{(k-1)}$ soit M -régulière. Soient $i \in \{2, \dots, r\}$ et $m_1, \dots, m_i \in M$ avec

$$y_i m_i = y_1^k m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_{i-1} m_{i-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on alors $m'_1, \dots, m'_{i-1} \in M$ tels que

$$m_i = y_1^{k-1} m'_1 + y_2 m'_2 + \dots + y_{i-1} m'_{i-1}.$$

Posons $P(T_1, \dots, T_{i-1}) := (y_1 m_1 - y_i m'_1)T_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (m_j - y_i m'_j)T_j \in M[T_\bullet]$ (notation de la remarque 11.53(ii)); alors $P(y_1^{k-1}, y_2, \dots, y_{i-1}) = 0$, et comme la suite $y_\bullet^{(k-1)}$ est M -quasi-régulière (proposition 11.55), il vient $P \in I_{k-1} M[T_\bullet]$, avec $I_{k-1} \subset A$ l'idéal engendré par $y_\bullet^{(k-1)}$. En particulier, $y_1 m_1 - y_i m'_1 \in I_{k-1} M$, et ainsi $y_i m'_1 \in y_1 M + \dots + y_{i-1} M$. Puisque $y_\bullet$ est M -régulière, on déduit que $m'_1 \in y_1 M + \dots + y_{i-1} M$, et finalement $m_i \in y_1^k M + y_2 M + \dots + y_{i-1} M$. Cela achève de montrer que $y_\bullet^{(k)}$ est M -régulière. Montrons ensuite, par récurrence sur la longueur r de $x_\bullet$, que $(x_1^{k_1}, \dots, x_r^{k_r})$ est une suite M -régulière pour tous $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'assertion est claire si $r = 1$. Soit alors $r > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout A -module N et toute suite N -régulière de longueur $r - 1$. Posons $N := M/x_1^{k_1} M$; par ce qui précède, la suite $(x_1^{k_1}, x_2, \dots, x_r)$ est M -régulière, donc $(x_2, \dots, x_r)$ est N -régulière, et par hypothèse de récurrence, il en est de même pour la suite $(x_2^{k_2}, \dots, x_r^{k_r})$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $(x_1, \dots, x_r)$ une suite M -régulière d'éléments de I ; comme $V(I) = V(J)$, on trouve $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $x_1^{k_1}, \dots, x_r^{k_r} \in J$ (remarque 1.56(i)); au vu de (i), cela entraîne que $\text{prof}(J, M) \geq \text{prof}(I, M)$, et en échangeant les rôles de I et J on obtient de même l'inégalité opposée.

Problème 11.75, partie (i) : Soit $Z = V(I)$ pour un idéal $I \subset A$; par hypothèse, I contient une suite A -régulière (f, g) . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j_f} & A[f^{-1}] \\ j_g \downarrow & & \downarrow i_f \\ A[g^{-1}] & \xrightarrow{i_g} & A[(fg)^{-1}] \end{array}$$

dont toutes les flèches sont les localisations; on va montrer que ce diagramme est cartésien, *i.e.* qu'il induit un isomorphisme d'anneaux :

$$\omega : A \xrightarrow{\sim} A[f^{-1}] \times_{A[(fg)^{-1}]} A[g^{-1}] \quad a \mapsto (j_f(a), j_g(a)).$$

Noter que j_f est injectif, car par hypothèse f est régulier dans A ; l'injectivité de ω s'ensuit aussitôt. Ensuite, soient $a/f^n \in A[f^{-1}]$ et $b/g^m \in A[g^{-1}]$ tels que $a/f^n = b/g^m$ dans $A[(fg)^{-1}]$; ainsi, $g^m a = f^n b$ dans $A[(fg)^{-1}]$, donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tels que $g^{m+q} f^q a = f^{n+q} g^q b$ dans A . Puisque f est régulier dans A , il vient :

$$g^{m+q} a = f^n g^q b \quad \text{dans } A.$$

Par contre, g n'est pas forcément régulier dans A , donc on ne peut pas directement éliminer le facteur g^q de cette dernière identité. C'est ici que notre hypothèse sur la suite (f, g) nous vient au secours; on a :

Lemme 11.140. *Il existe $c \in A$ tel que $f^n c = a$ et $g^{m+q} c = g^q b$.*

Démonstration. On va exhiber, par récurrence sur $i = 0, \dots, n$ des éléments $c_i \in A$ tels que $f^i c_i = a$ et $g^{m+q} c_i = f^{n-i} g^q b$. Evidemment, on obtiendra le lemme avec $c := c_n$. Pour $i = 0$, on peut prendre $c_0 := a$. Supposons que c_i soit déjà connu pour un indice $i \geq 0$; si $i = n$, on a terminé. Sinon, soient $\bar{c}_i, \bar{b} \in A/fA$ les classes de c_i et b ; on remarque que $g^{m+q} \bar{c}_i = f^{n-i} g^q \bar{b} = 0$ dans A/fA , car $n - i > 0$. D'autre part, g est régulier dans le quotient A/fA , car la suite (f, g) est régulière; ainsi $\bar{c}_i = 0$, *i.e.* il existe $c_{i+1} \in A$ tel que $c_i = f \cdot c_{i+1}$, d'où $g^{m+q} f c_{i+1} = f^{n-i} g^q b$, et comme f est régulier dans A , il vient $g^{m+q} c_{i+1} = f^{n-i-1} g^q b$, comme souhaité. $\square$

Avec $c \in A$ comme dans le lemme 11.140, on a $\omega(c) = (a/f^n, b/g^m)$, d'où la surjectivité de ω . Supposons maintenant par l'absurde, que U soit représentable par une A -algèbre $j_U : A \rightarrow A_U$; puisque $f, g \in I$, on a $Z \subset V(f) \cap V(g)$, d'où $D(f) \cup D(g) \subset U$ (notation du §1.3.2), et rappelons que les A -algèbres $A[f^{-1}]$, $A[g^{-1}]$ et $A[(fg)^{-1}]$ représentent respectivement les parties ouvertes $D(f)$, $D(g)$ et $D(fg)$. D'après le lemme 5.31(iii), l'application $\text{Spec}(j_U)$ induit un homéomorphisme $\text{Spec } A_U \xrightarrow{\sim} U$; on a alors des homomorphismes uniques de A -algèbres $j'_f : A_U \rightarrow A[f^{-1}]$, $j'_g : A_U \rightarrow A[g^{-1}]$ tels que $i_f \circ j'_f = i_g \circ j'_g$. Par suite, on a un unique homomorphisme de A -algèbres $\phi : A_U \rightarrow A$ tel que $j_f \circ \phi = j'_f$ et $j_g \circ \phi = j'_g$. Evidemment, $\phi \circ j_U = \text{Id}_A$, donc $\text{Spec}(j_U) \circ \text{Spec}(\phi) = \mathbf{1}_{\text{Spec}(A)}$, et en particulier $\text{Spec}(j_U)$ serait surjective, mais cela contredit l'hypothèse $Z \neq \emptyset$.

Partie (ii) : Soient $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U}$, $B := \mathcal{O}_X(U)$, et $\rho_U : A = \mathcal{O}_X(X) \rightarrow B$ l'homomorphisme de restriction; en raisonnant comme dans la preuve de (i), on obtient un homomorphisme de A -algèbres $h : B \rightarrow A$. D'autre part, d'après l'exercice 5.94(i), le $\mathcal{O}_X$ -module $j_* \mathcal{O}_U$ est quasi-cohérent; en vertu du problème 5.58(i.b), ρ_U et h induisent alors des morphismes de faisceaux d'anneaux sur X :

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} j_* \mathcal{O}_U \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X \quad \text{avec} \quad \phi \circ \eta = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X}$$

où $\eta : \mathcal{O}_X \rightarrow j_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{O}_X$ est évidemment l'unité d'adjonction, et $\phi_X = h$. Il suffit de montrer que h est injectif; soit alors $s \in \text{Ker}(h)$; il vient $s_x \in \text{Ker}(\phi_x)$ pour tout $x \in X$, et noter que la restriction $\eta|_U : \mathcal{O}_{X|U} \rightarrow (j_* \tilde{j}^{-1} \mathcal{O}_X)|_U$ de η sur la partie ouverte U est un isomorphisme, donc η_x et ϕ_x sont des isomorphismes, pour tout $x \in U$. Ainsi, $s_x = 0$

pour tout $x \in U$, i.e. s est dans le noyau de la restriction $j_*\mathcal{O}_U(X) \rightarrow j_*\mathcal{O}_U(U)$; mais cette restriction est l'identité de B , donc $s = 0$, CQFD.

Partie (iii) : Si U est disconnexe, on a $U = U' \sqcup U''$ pour deux parties ouvertes $U', U'' \subset U$, par suite l'anneau $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U') \times \mathcal{O}_X(U'')$ admet un élément idempotent $\neq 0, 1$; d'après (ii), il en est de même pour l'anneau A , et la solution de l'exercice 3.66(ii) montre alors que $\text{Spec } A$ est disconnexe.

Exercice 11.86, partie (i) : Soient $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$, et $Z_1, \dots, Z_k$ les composantes irréductibles de $\text{Spec } A$ contenant $\mathfrak{q}$; munissons $V(\mathfrak{q})$ et chaque Z_i de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spec } A$, et posons $d_i := \dim Z_i$ et $e_i := \dim Z_i(\mathfrak{q})$ pour $i = 1, \dots, k$ (notation de l'exemple 4.65(i)). Par définition :

$$\dim_{\mathfrak{q}}(A/K) = \max(d_1, \dots, d_k) \quad \text{et} \quad \text{ht}(\mathfrak{q}) = \max(e_1, \dots, e_k).$$

D'autre part, $d_0 := \dim V(\mathfrak{q}) = \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q})/K)$, d'après le problème 6.82(i). Fixons alors une chaîne strictement croissante $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{d_0}$ d'éléments de $V(\mathfrak{q})$; pour $i = 1, \dots, k$, soit en outre $\mathfrak{p}_i$ le point générique de Z_i , et choisissons une chaîne strictement croissante $\mathfrak{p}_{i,0} := \mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i,1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{i,e_i} = \mathfrak{q}$ de points de Z_i . Ainsi, pour tout tel i , on obtient une chaîne saturée :

$$(*) \quad \mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i,1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{d_0}$$

avec $\mathfrak{q}_{d_0} \in \text{Min}(Z_i)$; rappelons aussi que Z_i s'identifie naturellement avec $\text{Spec } A/\mathfrak{p}_i$, et évidemment $A/\mathfrak{p}_i$ est une K -algèbre intègre de type fini. Compte tenu du problème 6.82(i) et du théorème 11.85(ii), on déduit que la longueur $e_i + d_0$ de la chaîne $(*)$ coïncide avec d_i , pour tout $i = 1, \dots, k$; l'assertion en découle aussitôt.

Partie (ii) : Par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ et un idéal $I \subset B := K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $A = B/I$; posons $B' := K'[X_1, \dots, X_n]$, de sorte que $A' = B'/IB'$, et soient $\mathfrak{p} \in V(I)$, $\mathfrak{p}' \in V(IB')$ les idéaux premiers de B et respectivement B' tels que $\mathfrak{p}/I = \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}'/IB' = \mathfrak{q}'$. Avec cette notation, la projection $B' \rightarrow A'$ induit un isomorphisme $B'_{\mathfrak{p}'} / \mathfrak{p}B'_{\mathfrak{p}'} \xrightarrow{\sim} A'_{\mathfrak{q}'} / \mathfrak{q}A'_{\mathfrak{q}'}$ de K' -algèbres. D'autre part, puisque les inclusions $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$ sont des homomorphismes plats d'anneaux, on a :

$$\text{ht}(\mathfrak{q}') = \text{ht}(\mathfrak{q}) + \dim A'_{\mathfrak{q}'} / \mathfrak{q}A'_{\mathfrak{q}'} \quad \text{ht}(\mathfrak{p}') = \text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim B'_{\mathfrak{p}'} / \mathfrak{p}B'_{\mathfrak{p}'}$$

(proposition 11.37(ii) et théorème 3.84(ii)), d'où :

$$(*) \quad \text{ht}(\mathfrak{p}') - \text{ht}(\mathfrak{q}') = \text{ht}(\mathfrak{p}) - \text{ht}(\mathfrak{q}).$$

En outre, d'après (i) on a les égalités :

$$\dim_{\mathfrak{q}}(A/K) = \text{ht}(\mathfrak{q}) + \text{tr.deg}(k(\mathfrak{q})/K) \quad \dim_{\mathfrak{p}}(B/K) = \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{tr.deg}(k(\mathfrak{p})/K)$$

et noter que $k(\mathfrak{q}) = k(\mathfrak{p})$ et $k(\mathfrak{q}') = k(\mathfrak{p}')$; aussi, $\dim_{\mathfrak{p}}(B/K) = \dim_{\mathfrak{p}'}(B'/K') = n$, car $\text{Spec } B$ et $\text{Spec } B'$ sont irréductibles de dimension n (problème 6.82(i)); de même on calcule $\dim_{\mathfrak{q}'}(A'/K')$, d'où les égalités :

$$\dim_{\mathfrak{q}}(A/K) = n + \text{ht}(\mathfrak{q}) - \text{ht}(\mathfrak{p}) \quad \dim_{\mathfrak{q}'}(A'/K') = n + \text{ht}(\mathfrak{q}') - \text{ht}(\mathfrak{p}').$$

Avec $(*)$, l'identité souhaitée découle aussitôt.

Partie (iii) : Soient $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B'$, $\mathfrak{q} := \phi(\mathfrak{q}') \in \text{Spec } B$; on doit vérifier que

$$\dim_{\mathfrak{q}'}(B'/A') = \dim_{\mathfrak{q}}(B/A).$$

Pour cela, soient aussi $\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A'$ et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ les images de $\mathfrak{q}'$, respectivement $\mathfrak{q}$, et posons $\overline{B} := B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ et $\overline{B}' := B' \otimes_{A'} k(\mathfrak{p}')$. On identifie naturellement $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ avec des points $\overline{\mathfrak{q}} \in \text{Spec } \overline{B}$ et $\overline{\mathfrak{q}'} \in \text{Spec } \overline{B}'$ (voir le §3.4.2), et par définition on a $\dim_{\mathfrak{q}}(B/A) = \dim_{\overline{\mathfrak{q}}}(\overline{B}/k(\mathfrak{p}))$ et $\dim_{\mathfrak{q}'}(B'/A') = \dim_{\overline{\mathfrak{q}'}}(\overline{B}'/k(\mathfrak{p}'))$. En outre, f induit une extension de corps résiduel $f_{(\mathfrak{p}')} : k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{p}')$, et on a un isomorphisme naturel de $k(\mathfrak{p}')$ -algèbres $\overline{B}' \xrightarrow{\sim} \overline{B} \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{p}')$. Par suite, quitte à remplacer f et B par $f_{(\mathfrak{p}')}$ et B' ,

on se ramène au cas où A et A' sont des corps, et dans ce cas l'assertion est déjà connue, par (ii).

Partie (iv) : Soit $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ la famille filtrante des $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de A de type fini ; d'après le problème 3.69(i), il existe $\lambda \in \Lambda$ et une A_λ -algèbre B_λ de type fini, avec un isomorphisme de A -algèbres $g : A \otimes_{A_\lambda} B_\lambda \xrightarrow{\sim} B$. Soient alors $f : B_\lambda \rightarrow B$ la composition de g avec l'homomorphisme naturel d'anneaux $B_\lambda \rightarrow A \otimes_{A_\lambda} B_\lambda$, et $\phi := \text{Spec}(f)$; d'après (iii), il vient $U_n(B/A) = \phi^{-1}U_n(B_\lambda/A_\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais A_λ est noethérien, donc de même pour B_λ (théorème 6.65), par suite $U_n(B_\lambda/A_\lambda)$ est une partie ouverte compacte de $\text{Spec } B_\lambda$ (problème 6.120(ii) et remarque 6.106(i,v)), donc de même pour $U_n(B/A)$ (remarque 4.59(iii)).

Problème 11.91, partie (i) : Posons $M^{\otimes 0} := A$ et $M^{\otimes r+1} := M \otimes_A M^{\otimes r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. pour tous $r, i \in \mathbb{N}$ avec $i \leq r+1$, soit $\partial_{r+1}^i : M^{\otimes r+1} \rightarrow M^{\otimes r}$ l'application A -linéaire telle que :

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_{r+1} \mapsto \phi(x_i) \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{r+1} \quad \forall x_1, \dots, x_{r+1} \in M.$$

Posons $d'_{r+1} := \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \cdot \partial_{r+1}^i : M^{\otimes r+1} \rightarrow M^{\otimes r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, et soit $d'_0 : A \rightarrow 0$ l'application nulle. Montrons d'abord que la donnée $(M_r, d'_r \mid r \in \mathbb{N})$ est un complexe de A -modules. Pour cela, on remarque que :

$$\partial_r^j \circ \partial_{r+1}^i = \partial_r^{i-1} \circ \partial_{r+1}^j \quad \forall i, j, r \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad 1 \leq j < i \leq r+1$$

et on calcule comme dans la solution du problème 5.12 : les détails sont confiés au lecteur. Or, rappelons que pour tout $r \in \mathbb{N}$, le A -module $\Lambda_A^r(M)$ est le quotient de $M^{\otimes r}$ par le sous-module J_r engendré par les tenseurs élémentaires $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ tels qu'il existe $i \in \{1, \dots, r-1\}$ avec $x_i = x_{i+1}$: voir la solution du problème 3.91(i). On est ainsi ramené à vérifier que $d'_{r+1}(J_{r+1}) \subset J_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Soit alors $x_\bullet := x_1 \otimes \cdots \otimes x_{r+1}$ et $i \leq r$ avec $x_i = x_{i+1}$; évidemment $\partial_{r+1}^j(x_\bullet) \in J_r$ pour tout $j = 1, \dots, i-1, i+2, \dots, r+1$, et $\partial_{r+1}^i(x_\bullet) = \partial_{r+1}^{i+1}(x_\bullet)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Il suffit de remarquer les identités :

$$\partial_{p+q}^i(x \otimes y) = \begin{cases} \partial_p^i(x) \otimes y & \text{pour } i = 1, \dots, p \\ x \otimes \partial_q^{i-p}(y) & \text{pour } i = p+1, \dots, p+q. \end{cases}$$

Partie (iii) : D'après l'exemple 8.120, la différentielle en tout degré $r \in \mathbb{N}$ du complexe $K_\bullet^A(\phi) \otimes_A K_\bullet^A(\psi)$ est l'application A -linéaire telle que $x \otimes y \mapsto d_p^\phi(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q^\psi(y)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p+q = r$, tout $x \in \Lambda_A^p(M)$ et tout $y \in \Lambda_A^q(N)$. De l'autre côté, le problème 3.91(iv) fournit un isomorphisme $\oplus_{p+q=r} \Lambda_A^p(M) \otimes_A \Lambda_A^q(N) \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^r(M \oplus N)$ tel que :

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \mapsto (x_1, 0) \wedge \cdots \wedge (x_p, 0) \wedge (0, y_1) \wedge \cdots \wedge (0, y_q)$$

pour tous $x_1, \dots, x_p \in M$ et $y_1, \dots, y_q \in N$. Cet isomorphisme identifie

$$d_p^\phi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \quad \text{et} \quad (x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \otimes d_q^\psi(y_1 \wedge \cdots \wedge y_q)$$

avec $d_p^{\phi+\psi}((x_1, 0) \wedge \cdots \wedge (x_p, 0) \wedge (0, y_1) \wedge \cdots \wedge (0, y_q))$ et $(x_1, 0) \wedge \cdots \wedge (x_p, 0) \wedge d_q^{\phi+\psi}((0, y_1) \wedge \cdots \wedge (0, y_q))$ respectivement ; ainsi, l'assertion équivaut à la formule de Leibniz pour la différentielle $d_r^{\phi+\psi}$, en tout degré $r \in \mathbb{N}$, et on conclut avec (ii).

Partie (iv) : On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$; le cas $n = 1$ est immédiat, car les isomorphismes naturels $\Lambda_A^0(A) \xrightarrow{\sim} A \xrightarrow{\sim} \Lambda_A^1(A)$ identifient $d_1^{\phi_\bullet}$ avec $x_1 \cdot \text{Id}_A$, si $x_\bullet = (x_1)$. Si $n > 1$, posons $x'_\bullet := (x_1, \dots, x_{n-1})$ et $x''_\bullet := (x_n)$, et supposons que l'isomorphisme souhaité ait déjà été exhibé pour $\phi_{x'_\bullet} : A^{n-1} \rightarrow A$; comme $\phi_{x_\bullet} = \phi_{x'_\bullet} + \phi_{x''_\bullet} : A^{n-1} \oplus A \rightarrow A$, avec (iii) on déduit un isomorphisme :

$$K_\bullet^A(x_\bullet) = K_\bullet^A(x'_\bullet) \otimes_A K_\bullet^A(x''_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet^A(\phi_{x'_\bullet}) \otimes_A K_\bullet^A(\phi_{x''_\bullet}) \xrightarrow{\sim} K_\bullet^A(\phi_{x_\bullet}).$$

Partie (v) : L'exercice 3.95 fournit des isomorphismes naturels :

$$\Lambda_B^q(M) \xrightarrow{\sim} B \otimes_A \Lambda_A^q(L) = \mathrm{Sym}_A^\bullet(L) \otimes_A \Lambda_A^q(L) \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Par inspection, directe, on voit que ces isomorphismes identifient la restriction au facteur directe $\mathrm{Sym}_A^p(L) \otimes_A \Lambda_A^q(L)$ de la différentielle $d_q^{\beta^L}$, avec l'application telle que :

$$(x_1 \cdots x_p) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \mapsto \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} (y_j x_1 \cdots x_p) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_{j-1} \wedge y_{j+1} \wedge \cdots \wedge y_q)$$

pour tous $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in L$ (notation de la remarque 3.92(iii)). En particulier, $d_q^{\beta^L}(\mathrm{Sym}_A^p(L) \otimes_A \Lambda_A^q(L)) \subset \mathrm{Sym}_A^{p+1}(L) \otimes_A \Lambda_A^{q-1}(L)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion.

Partie (vi) : Soit L un A -module plat ; d'après le théorème 3.86, L est la colimite d'un système filtrant $(F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules libres de rang fini. Avec le problème 3.91(i,v) et la proposition 2.49(ii), il s'ensuit que $\Lambda_A^\bullet(L)$ représente la colimite du système filtrant induit de A -algèbres alternées $(\Lambda_A^\bullet(F_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$, et $\Lambda_A^n(L)$ représente la colimite du système filtrant induit $(\Lambda_A^n(F_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ de A -modules, pour tout $n \in \mathbb{N}$; de même, d'après le problème 3.89(i,ii) et la proposition 2.49(ii), $\mathrm{Sym}_A^\bullet(L)$ représente la colimite du système filtrant induit de A -algèbres $(\mathrm{Sym}_A^\bullet(F_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$, et $\mathrm{Sym}_A^n(L)$ représente la colimite du système filtrant induit de A -modules $(\mathrm{Sym}_A^n(F_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec l'exercice 3.14, on déduit aisément que $K_\bullet^A(\beta^L)$ représente la colimite du système filtrant induit de complexes de A -modules $(K_\bullet^A(\beta^{F_\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$, et $\Sigma_{n,L}^\bullet$ représente la colimite du système filtrant induit $(\Sigma_{n,F_\lambda}^\bullet \mid \lambda \in \Lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Au vu de l'exercice 2.100, on est ainsi ramené au cas où $L = A^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Soit $e_1, \dots, e_k$ la base canonique de A^k , et rappelons l'identification naturelle $A[T_\bullet] := A[T_1, \dots, T_k] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_A^\bullet(A^k)$ de A -algèbres graduées, donnée par l'association : $T_i \mapsto e_i \in \mathrm{Sym}_A^1(A^k)$, pour tout $i = 1, \dots, k$ (voir la solution du problème 3.89(iii)). Posons $T_\bullet := (T_1, \dots, T_k)$; sous ces identifications, l'application $\beta^L : \mathrm{Sym}_A^\bullet(A^k) \otimes_A A^k \rightarrow \mathrm{Sym}_A^\bullet(A^k)$ correspond à l'application

$$(*) \quad A[T_\bullet]^k = A[T_\bullet] \otimes_A A^k \rightarrow A[T_\bullet] \quad (P_1, \dots, P_k) \mapsto T_1 P_1 + \cdots + T_k P_k.$$

D'après (iv), $K_\bullet(\beta^L)$ est alors naturellement identifié avec $K_\bullet^{A[T_\bullet]}(T_\bullet)$. Evidemment, la suite $T_\bullet$ est $A[T_\bullet]$ -régulière, donc $H_q(T_\bullet, A[T_\bullet]) = 0$ pour tout $q > 0$ (corollaire 11.89(iii)), et on obtient déjà $H_q(\Sigma_{n,L}^\bullet) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $q > 0$. En dernier lieu, notons par $\mathrm{gr}_n A[T_\bullet]$ le facteur direct du A -module $A[T_\bullet]$ formé des polynômes homogènes de degré total n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$; avec cette notation, la différentielle $d_1 : \mathrm{Sym}_A^{n-1}(A^k) \otimes_A \Lambda_A^1(A^k) \rightarrow \mathrm{Sym}_A^n(A^k)$ de $\Sigma_{n,L}^\bullet$ en degré un correspond à la restriction $(\mathrm{gr}_{n-1} A[T_\bullet])^k = \mathrm{gr}_{n-1} A[T_\bullet] \otimes_A A^k \rightarrow \mathrm{gr}_n A[T_\bullet]$ de (*). Cette dernière est une surjection pour tout $n > 0$, donc $H_0(\Sigma_{n,L}^\bullet) = 0$ pour tout $n > 0$, comme souhaité.

Problème 11.92, partie (i) : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons

$$a_i := \mathrm{tr}_{\Lambda_A^i(P)/A}(\Lambda_A^i \phi) \quad \text{et} \quad b_i := \mathrm{tr}_{\mathrm{Sym}_A^i(P)/A}(\mathrm{Sym}_A^i \phi)$$

de sorte que $\chi_{P/A}(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i t^i$ et $\psi_{P/A}(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i t^i$. Rappelons que $\mathrm{Sym}_A^0 P = \Lambda_A^0 P = A$, et $\Lambda_A^0 \phi = \mathrm{Sym}_A^0 \phi = \mathrm{Id}_A$, donc $a_0 = b_0 = 1$. Par inspection directe des définitions, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\Sigma_{n,P}^\bullet$ du problème 11.91(v) admet un endomorphisme $\phi_\bullet$ tel que $\phi_i := \Lambda_A^{n-i}(\phi) \otimes_A \mathrm{Sym}_A^i(\phi)$ pour $i = 0, \dots, n$. Les problèmes 11.91(vi) et 4.111(i.b,iii) montrent alors que $\sum_{j=0}^n (-1)^j a_j b_{n-j} = 0$ pour tout $n > 0$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $e_1, \dots, e_n$ une base du A -module libre P , et pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$ notons par $\mathcal{P}_r(\Sigma)$ l'ensemble des parties de $\Sigma := \{1, \dots, n\}$ de cardinalité r ; pour tout $I := \{i_1 < \cdots < i_r\} \in \mathcal{P}_r(\Sigma)$ posons $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \in \Lambda_A^r P$, et rappelons que $(e_I \mid I \in \mathcal{P}_r(\Sigma))$ est une base de $\Lambda_A^r P$. Il existe alors une matrice $(a_{IJ} \mid I, J \in \mathcal{P}_r(\Sigma))$ d'éléments de A telle que

$$\Lambda_A^r(\phi)(e_I) = \sum_{J \in \mathcal{P}_r(\Sigma)} a_{IJ} e_J \quad \forall I \in \mathcal{P}_r(\Sigma).$$

Ainsi, pour $I := \{i_1 < \dots < i_r\} \in \mathcal{P}_r(\Sigma)$, $J := \{j_1 < \dots < j_{n-r}\} \in \mathcal{P}_{n-r}(\Sigma)$ on a :

$$\Lambda_A^r(\phi)(e_I) \wedge e_J = \varepsilon(I) \cdot a_{I, \Sigma \setminus J} \cdot e_\Sigma$$

où $\varepsilon(I)$ dénote la signature de la permutation $\sigma_I : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma$ telle que $\sigma_I(k) := i_k$ pour $k = 1, \dots, r$, et $\sigma_I(k) := j_{k-r}$ pour $k = r+1, \dots, n$. D'autre part, on a l'identité :

$$\Lambda_{A[t]}^n(f)(1 \otimes e_\Sigma) = \det(f) \otimes e_\Sigma \quad \forall f \in \text{End}_{A[t]}(P[t]).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \Lambda_{A[t]}^n(Id_{P[t]} - t \otimes \phi)(1 \otimes e_\Sigma) &= (1 \otimes e_1 - t \otimes \phi(e_1)) \wedge \dots \wedge (1 \otimes e_n - t \otimes \phi(e_n)) \\ &= \sum_{r=0}^n (-t)^r \otimes \sum_{I \in \mathcal{P}_r(\Sigma)} \varepsilon(I) \cdot \Lambda_A^r(\phi)(e_I) \wedge e_{\Sigma \setminus I} \\ &= \sum_{r=0}^n (-t)^r \otimes \sum_{I \in \mathcal{P}_r(\Sigma)} a_{II} \cdot e_\Sigma \\ &= \sum_{r=0}^n (-t)^r \cdot \text{tr}_{\Lambda_A^r(P)/A}(\Lambda_A^r \phi) \otimes e_\Sigma \end{aligned}$$

d'où, avec la notation de (i) et (ii) :

$$\det(Id_{P[t]} - t \cdot \phi) = \sum_{r=0}^n (-t)^r \text{tr}_{\Lambda_A^r(P)/A}(\Lambda_A^r \phi) = \chi_\phi(-t).$$

Partie (iii) : Pour tout $d \in \mathbb{N}$, considérons le projecteur K -linéaire

$$\pi_d := \frac{1}{o(G)} \cdot \sum_{g \in G} \text{Sym}_K^d(\rho(g)) \in \text{End}_K(\text{Sym}_K^d(V))$$

et noter que $\text{Im}(\pi_d) = \text{Sym}_K^d(V)^G$. Ainsi, $\text{Sym}_K^d(V) = \text{Im}(\pi_d) \oplus \text{Ker}(\pi_d)$, et

$$l_d := \text{tr}_{\text{Sym}_K^d(V)/K}(\pi_d) = \text{tr}_{\text{Im}(\pi_d)/K}(Id_{\text{Im}(\pi_d)}) = \dim_K \text{Sym}_A^d(V)^G \quad \forall d \in \mathbb{N}$$

d'après le problème 4.111(iii). Par suite, avec la notation de (i) :

$$\begin{aligned} P(\text{Sym}_K^\bullet(V)^G, t) &= \sum_{d \in \mathbb{N}} l_d t^d = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{d \in \mathbb{N}} \text{tr}_{\text{Sym}_K^d(V)/K}(\rho(g)) \cdot t^d \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \psi_{\rho(g)}(t) \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \frac{1}{\chi_{\rho(g)}(-t)} \end{aligned}$$

et pour conclure, il suffit d'invoquer (ii).

Problème 11.99, partie (i) : Soit $(L'_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon'} M$ une deuxième résolution minimale ; d'après la proposition 11.98(iii) il existe un isomorphisme de résolutions $\phi_\bullet : L'_\bullet \xrightarrow{\sim} L_\bullet$, en particulier $\text{rk}_A(L'_k) = r_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons également des isomorphismes A -linéaires $\omega'_k : A^{r_k} \xrightarrow{\sim} L'_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte que $d'_{k+1} : L'_{k+1} \rightarrow L'_k$ correspond à une matrice $b_{\bullet\bullet}^{(k)} := (b_{ij}^{(k)} \mid i = 1, \dots, r_{k+1}, j = 1, \dots, r_k)$, et soit $J'_k(M) \subset A$ l'idéal engendré par les $b_{ij}^{(k)}$. Alors, l'automorphisme

$$\omega_k^{-1} \circ \phi_k \circ \omega'_k : A^{r_k} \xrightarrow{\sim} A^{r_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

correspond à une matrice inversible $\Psi_{\bullet\bullet}^{(k)}$ de taille $r_k \times r_k$ à coefficients dans A , et il vient :

$$b_{\bullet\bullet}^{(k)} = \Psi_{\bullet\bullet}^{(k)-1} \circ a_{\bullet\bullet}^{(k)} \circ \Psi_{\bullet\bullet}^{(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela entraîne aussitôt que $J'_k(M) \subset J_k(M)$, et en échangeant les rôles de $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ on trouve de même l'inclusion opposée, d'où l'assertion.

Partie (ii) : On raisonne par récurrence sur p . Si $p = 0$, le A -module M est libre, donc $\text{prof}(I, M) = \text{prof}(I, A)$ (et $J_k(M) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), d'où l'identité souhaitée, dans ce cas. Soit ensuite $p > 0$, de sorte que $N := \text{Ker}(\varepsilon) \neq 0$, et supposons que l'identité de

(ii) soit déjà connue pour tout A -module non nul de type fini et de dimension projective $< p$; on considère la suite exacte de A -modules :

$$(*) \quad 0 \rightarrow N \xrightarrow{j} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0.$$

On déduit un complexe exact $\cdots \rightarrow L_2 \rightarrow L_1 \xrightarrow{\varepsilon'} N \rightarrow 0$, où ε' est la surjection telle que $j \circ \varepsilon' = d_1$, et où les différentielles $L_{i+1} \rightarrow L_i$ sont les mêmes que pour le complexe $(L_\bullet, d_\bullet)$, pour tout $i \geq 1$; ce complexe est évidemment une résolution minimale de N , d'où : $\text{proj.dim}_A(N) = p - 1$ (proposition 11.98(iv)), et par simple inspection des définitions on trouve aussi : $J_k(N) = J_{k+1}(M)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $\sum_{k=0}^{p-2} J_k(N) \subset I$; on a alors :

$$p - 1 + \text{prof}(I, N) = d := \text{prof}(I, A)$$

par hypothèse de récurrence. On est ainsi ramené à vérifier que :

$$(**) \quad \text{prof}(I, N) = \text{prof}(I, M) + 1.$$

Or, d'après la remarque 7.71, la suite $(*)$ induit pour tout $i \in \mathbb{N}$ une suite exacte :

$$\text{Ext}_A^i(A/I, L_0) \rightarrow \text{Ext}_A^i(A/I, M) \xrightarrow{\partial^i} \text{Ext}_A^{i+1}(A/I, N) \xrightarrow{\beta^{i+1}} \text{Ext}_A^{i+1}(A/I, L_0).$$

Au vu de la proposition 11.69(ii), on déduit que ∂^i est bijective pour $i < d - 1$, et que $(**)$ est vérifiée si $p > 1$. Il reste donc à traiter le cas où $p = 1$, dans lequel on a $N = L_1$, $j = d_1$, et $\text{prof}(I, N) = d$; en outre, $\text{Ext}_A^i(A/I, M) = 0$ pour tout $i < d - 1$, par ce qui précède. Noter que $\beta^d = \text{Ext}_A^d(A/I, d_1)$; on remarque :

Lemme 11.141. $\text{Ext}_A^n(A/I, d_1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Rappelons que l'on a choisi un isomorphisme $\omega_k : A^{r_k} \xrightarrow{\sim} L_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et soient $(p_{kj} : A^{r_k} \rightarrow A \mid j = 1, \dots, r_k)$ et $(e_{ki} : A \rightarrow A^{r_k} \mid i = 1, \dots, r_k)$ les projections et respectivement les injections canoniques; la matrice $a_{ij}^{(0)}$ est caractérisée par l'identité :

$$\omega_0^{-1} \circ d_1 \circ \omega_1 = \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{r_1} e_{0i} \circ (a_{ij}^{(0)} \cdot Id_A) \circ p_{1j}.$$

Soit $F : A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}$ le foncteur $\text{Hom}_A(A/I, -)$, de sorte que $\text{Ext}_A^n(A/I, \phi) = R^n F(\phi)$ pour tout homomorphisme ϕ de A -modules; comme $R^n F$ est un foncteur additif, il vient :

$$R^n F(\omega_0^{-1}) \circ R^n F(d_1) \circ R^n F(\omega_1) = \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{r_1} R^n F(e_{0i}) \circ R^n F(a_{ij}^{(0)} Id_A) \circ R^n F(p_{1j})$$

et puisque $R^n F(\omega_k)$ est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on est alors ramené à vérifier que $R^n F(a \cdot Id_A) = 0$ pour tout $a \in J_0(M)$. Pour cela, considérons plus généralement un anneau R et un R -module P quelconque, et soit $G : R - \text{Mod} \rightarrow R - \text{Mod}$ le foncteur $\text{Hom}_R(P, -)$; tout $x \in R$ induit une transformation naturelle

$$\eta_x : G \Rightarrow G \quad (\phi : P \rightarrow Q) \mapsto \eta_{x,Q}(\phi) := x \cdot \phi \quad \forall Q \in \text{Ob}(R - \text{Mod})$$

d'où une transformation naturelle $R^n \eta_x : R^n G \Rightarrow R^n G$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (remarque 7.61(i,v)). Avec cette notation, on a :

Affirmation 11.142. $R^n \eta_{x,Q} = R^n G(x \cdot Id_Q)$ pour tout R -module Q et tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Soit $Q \xrightarrow{\varepsilon} J^\bullet$ la résolution injective du R -module Q que l'on a choisi pour la construction des foncteurs dérivés à droite de G ; alors η_x induit un endomorphisme $\eta_{x,J^\bullet} : GJ^\bullet \rightarrow GJ^\bullet$ du complexe de R -modules $GJ^\bullet$, et par définition $R^n \eta_{x,Q} = H^n(\eta_{x,J^\bullet})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Explicitement, $\eta_{x,J^\bullet}$ est donné par la multiplication par le scalaire x sur chaque R -module $GJ^n = \text{Hom}_R(P, J^n)$. De l'autre côté, l'endomorphisme $R^n G(x \cdot Id_Q)$ est donné par $H^n(G\psi^\bullet)$, où $\psi^\bullet : J^\bullet \rightarrow J^\bullet$ est un certain endomorphisme du complexe de R -modules $J^\bullet$, tel que

$$(***) \quad \psi^0 \circ \varepsilon = \varepsilon \circ (x \cdot Id_Q).$$

Or, l'endomorphisme $\psi^n : J^n \rightarrow J^n$ n'est pas forcément égal à $x \cdot Id_{J^n}$, mais le système $(x \cdot Id_{J^n} \mid n \in \mathbb{N})$ définit un deuxième endomorphisme $x \cdot Id_{J^\bullet}$ de $J^\bullet$ qui évidemment vérifie encore $(**)$; par suite $H^n(G\psi^\bullet) = H^n(G(x \cdot Id_{J^\bullet}))$ (remarque 7.59(i)). Mais il est clair que $\eta_{x, J^\bullet} = G(x \cdot Id_{J^\bullet})$, d'où l'assertion. $\diamond$

Dans notre situation, on prend $R := A$ et $P := A/I$, et l'observation 11.142 nous ramène à vérifier que $\eta_{a, Q}$ est l'endomorphisme zéro de Q , pour tout A -module Q et tout $a \in J_0(M)$; pour cela, il suffit de vérifier que la multiplication par a sur A/I est l'endomorphisme zéro. Mais cela est clair, car $J_0(M) \subset I$. $\square$

Le lemme 11.141 nous dit que $\beta^d = 0$, par suite ∂^{d-1} est surjective, et comme d'autre part $\text{Ext}_A^d(A/I, N) \neq 0$, il vient $\text{Ext}_A^{d-1}(A/I, M) \neq 0$, d'où $(**)$.

Partie (iii) : Il s'agit du cas particulier de (ii) avec $I = \mathfrak{m}$.

Problème 11.111, partie (i) : Puisque $A[T_\bullet]$ est une A -algèbre plate, il est clair que $H_i(f_\bullet, A[T_\bullet]) = A[T_\bullet] \otimes_A H_i(f_\bullet, A) = 0$ pour tout $i > 0$. Ensuite, soient $\phi, \psi : A[T_\bullet]^{n+1} \rightarrow A[T_\bullet]$ les formes $A[T_\bullet]$ -linéaires telles que

$$\phi(x_\bullet) := \sum_{i=0}^n f_i x_i \quad \psi(x_\bullet) := \sum_{i=0}^n g_i x_i \quad \forall x_\bullet := (x_0, \dots, x_n) \in A[T_\bullet]^{n+1}.$$

Soit aussi $\omega : A[T_\bullet]^{n+1} \xrightarrow{\sim} A[T_\bullet]^{n+1}$ l'automorphisme $A[T_\bullet]$ -linéaire tel que $\omega(e_0) := e_0$ et $\omega(e_i) := e_i - T_i e_0$ pour $i = 1, \dots, n$, où $e_0, \dots, e_n$ dénote la base canonique de $A[T_\bullet]^{n+1}$. Notons en outre par $(K_\bullet(\phi), d_\bullet^\phi)$ (resp. $(K_\bullet(\psi), d_\bullet^\psi)$) le complexe de l'algèbre extérieure $\Lambda_{A[T_\bullet]}^\bullet(A[T_\bullet]^{n+1})$ associé à ϕ (resp. à ψ), comme dans le problème 11.91(i); par inspection directe des constructions, on vérifie aisément que

$$\Lambda_{A[T_\bullet]}^{r-1}(\omega) \circ d_r^\psi = d_r^\phi \circ \Lambda_{A[T_\bullet]}^r(\omega) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

i.e. $(\Lambda_{A[T_\bullet]}^r(\omega) \mid r \in \mathbb{N})$ est un isomorphisme de complexes $K_\bullet(\psi) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\phi)$. D'autre part, le problème 11.91(iv) fournit des isomorphismes de complexes : $K_\bullet^{A[T_\bullet]}(f_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\phi)$ et $K_\bullet^{A[T_\bullet]}(g_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\psi)$, d'où $H_i(g_\bullet, A[T_\bullet]) = 0$ pour tout $i > 0$. Ensuite, appliquons la proposition 11.88(i) avec $M_\bullet := K_\bullet^{A[T_\bullet]}(g'_\bullet)$ et $x := f_0$; il vient, pour tout $q \in \mathbb{N}$, une suite exacte courte de $A[T_\bullet]$ -modules :

$$0 \rightarrow H_0(f_0, H_q(g'_\bullet, A[T_\bullet])) \rightarrow H_q(g_\bullet, A[T_\bullet]) \rightarrow H_1(f_0, H_{q-1}(g'_\bullet, A[T_\bullet])) \rightarrow 0$$

et compte tenu de l'exemple 11.87, on voit que la multiplication par le scalaire f_0 est injective sur $H_q(g'_\bullet, A[T_\bullet])$, pour tout $q \in \mathbb{N}$; en particulier, la localisation $H_q(g', A[T_\bullet]) \rightarrow A[f_0^{-1}] \otimes_A H_q(g', A[T_\bullet]) = H_q(g', A[f_0^{-1}, T_\bullet])$ est injective pour tout $q \in \mathbb{N}$. Quitte à remplacer A par $A[f_0^{-1}]$, on peut alors supposer que $f_0 \in A^\times$. Soient alors $\mu, \nu : A[T_\bullet]^n \rightarrow A[T_\bullet]$ les formes $A[T_\bullet]$ -linéaires telles que

$$\mu(x_\bullet) := \sum_{i=1}^n T_i x_i \quad \nu(x_\bullet) := \sum_{i=1}^n g_i x_i \quad \forall x_\bullet := (x_1, \dots, x_n) \in A[T_\bullet]^n$$

et $\lambda : A[T_\bullet] \xrightarrow{\sim} A[T_\bullet]$ l'automorphisme de A -algèbre tel que $\lambda(T_i) := f_i - f_0 T_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Noter que λ est aussi un isomorphisme de $A[T_\bullet]$ -modules $A[T_\bullet] \xrightarrow{\sim} A[T_\bullet]_{[\lambda]}$ (notation du §3.2.1), et on a un diagramme commutatif de $A[T_\bullet]$ -modules :

$$\begin{array}{ccc} A[T_\bullet]^n & \xrightarrow{\vartheta} & A[T_\bullet]_{[\lambda]}^n \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu_{[\lambda]} \\ A[T_\bullet] & \xrightarrow{\lambda} & A[T_\bullet]_{[\lambda]} \end{array}$$

où ϑ est l'isomorphisme $A[T_\bullet]$ -linéaire tel que $\vartheta(x_1, \dots, x_n) := (\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n))$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in A[T_\bullet]^n$. Notons par $(K_\bullet(\mu), d_\bullet^\mu)$ (resp. $(K_\bullet(\nu), d_\bullet^\nu)$) le complexe de l'algèbre extérieure $\Lambda_{A[T_\bullet]}^\bullet(A[T_\bullet]^n)$ associé à μ (resp. à ν); après restriction de scalaires

terme à terme suivant l'automorphisme λ , on obtient un dernier complexe de $A[T_\bullet]$ -modules $K_\bullet(\nu)_{[\lambda]}$, et par inspection des constructions, il vient :

$$\Lambda_{A[T_\bullet]}^{r-1}(\vartheta) \circ d_r^\mu = d_r^\nu \circ \Lambda_{A[T_\bullet]}^r(\vartheta) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

i.e. le système $(\Lambda_{A[T_\bullet]}^r(\vartheta) \mid r \in \mathbb{N})$ est un isomorphisme de complexes de $A[T_\bullet]$ -modules $K_\bullet(\mu) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\nu)_{[\lambda]}$. Or, d'un côté, le problème 11.91(iv) fournit des isomorphismes

$$K_\bullet^{A[T_\bullet]}(T_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\mu) \quad \text{et} \quad K_\bullet^{A[T_\bullet]}(g'_\bullet) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\nu)$$

et de l'autre côté, la suite $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ est régulière dans $A[T_\bullet]$, d'où $H_i(T_\bullet, A[T_\bullet]) = 0$ pour tout $i > 0$ (corollaire 11.89(iii)); par suite, $H_i(g'_\bullet, A[T_\bullet]) = 0$ pour tout $i > 0$.

Partie (ii) : Dans la situation de (i), soit $A[f_\bullet/f_0]$ la A -sous-algèbre de $A[1/f_0]$ engendrée par $f_1/f_0, \dots, f_n/f_0$; montrons d'abord que l'idéal $J \subset A[T_\bullet]$ engendré par $g_1, \dots, g_n$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif de A -algèbres :

$$\pi : A[T_\bullet] \rightarrow A[f_\bullet/f_0] \quad T_i \mapsto f_i/f_0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Pour cela, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A[T_\bullet]/J & \xrightarrow{\bar{\pi}} & A[f_\bullet/f_0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A[T_\bullet]/J)[1/f_0] & \longrightarrow & A[1/f_0] \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les localisations, et où $\bar{\pi}$ est induit par π . On voit aisément que la flèche horizontale en bas est un isomorphisme ; d'autre part, on a déjà remarqué que la multiplication par le scalaire f_0 est injective sur $H_0(g'_\bullet, A[T_\bullet]) = A[T_\bullet]/J$ (corollaire 11.89(i)), par suite la flèche verticale à gauche est injective, donc de même pour $\bar{\pi}$, d'où l'assertion. Soient maintenant A un anneau de Cohen-Macaulay, et $X := \text{Spec } A$; rappelons que l'éclatement Y de $I\mathcal{O}_X$ admet un recouvrement affine $Y = U_0 \cup \dots \cup U_n$ avec $U_i = \text{Spec } A[f_0/f_i, \dots, f_n/f_i]$ pour $i = 0, \dots, n$; quitte à permuter les f_i , on se ramène donc à vérifier que $A[f_\bullet/f_0]$ est de Cohen-Macaulay. D'après (i), $A[f_\bullet/f_0] = A[T_\bullet]/J$, et $A[T_\bullet]$ est de Cohen-Macaulay, d'après le corollaire 11.84; tout $\bar{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } A[f_\bullet/f_0]$ correspond à un unique $\mathfrak{p} \in V(J)$, de sorte que $A[f_\bullet/f_0]_{\bar{\mathfrak{p}}} = A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}/J_{\mathfrak{p}}$, et d'après la proposition 11.81 on est ramené à vérifier que l'image de $g'_\bullet$ est une suite régulière de $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$. Mais comme $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ est une $A[T_\bullet]$ -algèbre plate, avec (i) il vient $H_i(g'_\bullet, A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}) = H_i(g'_\bullet, A[T_\bullet])_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $i > 0$, donc l'assertion découle des corollaires 11.58 et 11.89(iv).

Partie (iii) : Vérifions d'abord que $H_i(f_\bullet, A) = 0$ pour tout $i > 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $H_i(f_\bullet, A)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour $i > 0$ et tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, et en vertu de l'identification naturelle $H_i(f_\bullet, A)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} H_i(f_\bullet, A_{\mathfrak{p}})$, on peut ainsi supposer que $(A, \mathfrak{m})$ soit local régulier ; or, si $I = A$, on a $H_i(f_\bullet, A) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (corollaire 11.89(ii)), donc on peut aussi supposer que $I \subset \mathfrak{m}$, et dans ce cas, par hypothèse l'image de $f_\bullet$ fait partie d'un système de paramètres qui engendre $\mathfrak{m}$, donc $f_\bullet$ est une suite régulière de $\mathfrak{m}$ (corollaire 11.59), et l'assertion découle du corollaire 11.89(iii).

En raisonnant comme dans la solution de (ii), on se ramène à prouver que l'anneau $A[T_\bullet]/J$ est régulier. Soient donc $\mathfrak{p} \in V(J)$ et $\mathfrak{q} := A \cap \mathfrak{p}$, et posons $k := k(\mathfrak{q})$; si la suite $f_\bullet$ n'est pas contenue dans $\mathfrak{q}$, on a $IA_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$, et alors l'homomorphisme induit

$$\mathcal{O}_{X, \mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, \mathfrak{p}} = A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}/J_{\mathfrak{p}}$$

est un isomorphisme, par la propriété universelle des éclatements, donc $\mathcal{O}_{Y, \mathfrak{p}}$ est régulier dans ce cas. Soient alors $f_0, \dots, f_n \in \mathfrak{q}$; on sait que $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier (corollaire 11.110(i)), et il est une localisation de $A_{\mathfrak{q}}[T_\bullet]$. Par suite, $k \otimes_{A_{\mathfrak{q}}} A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ est une localisation de $k[T_\bullet]$, donc il est régulier ; puisque l'homomorphisme naturel $A_{\mathfrak{q}} \rightarrow A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ est fidèlement plat, il s'ensuit que l'image de $f_\bullet$ dans $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ fait partie d'un système de

paramètres engendrant $\mathfrak{n} := \mathfrak{p}A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ (théorème 11.109(ii)). Or, noter que le $k(\mathfrak{p})$ -sous-espace vectoriel de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ engendré par l'image de $f_\bullet$ coïncide avec le $k(\mathfrak{p})$ -sous-espace vectoriel engendré par l'image de $g_\bullet$; au vu de la proposition 11.108, il s'ensuit que l'image de $g_\bullet$ dans $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}$ est partie d'une suite régulière engendrant $\mathfrak{n}$, et alors $A[T_\bullet]_{\mathfrak{p}}/J_{\mathfrak{p}}$ est régulier, toujours par la proposition 11.108, CQFD.

Exercice 11.113, partie (i) : Si A est factoriel, il en est de même pour $S^{-1}A$, en vertu du lemme 4.118(ii). Réciproquement, si $S^{-1}A$ est factoriel, supposons d'abord que A soit noethérien; d'après la proposition 11.112, il suffit de montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ de hauteur 1 est principal. Si $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, soit $s \in \mathfrak{p} \cap S$, de sorte que As est un idéal premier de A contenu dans l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1; donc $As = \mathfrak{p}$ est bien principal. Si $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, l'idéal $S^{-1}\mathfrak{p}$ de $S^{-1}A$ est premier et de hauteur 1, donc principal, toujours par la proposition 11.112. Dans ce cas, $\mathcal{F} := \{a \in \mathfrak{p} \mid S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}(Aa)\} \neq \emptyset$, et comme A est noethérien, on peut choisir $x \in \mathcal{F}$ tel que Ax soit maximal dans l'ensemble $\{Aa \mid a \in \mathcal{F}\}$ partiellement ordonné par inclusion. En particulier, aucun $s \in S$ ne divise x , car si $x = sy$, on aurait $y \in \mathfrak{p}$ et $S^{-1}(Ax) = S^{-1}(Ay)$, d'où $y \in \mathcal{F}$, mais Ax serait strictement contenu dans Ay , contradiction. Or, si $a \in \mathfrak{p}$, il existe $s_1, \dots, s_k \in S$ et $b \in A$ avec $s_1 \cdots s_k a = xb$; montrons, par récurrence sur k , que $a \in Ax$. L'assertion est triviale si $k = 0$. Si $k > 0$, on a $xb \in As_k$ et $x \notin As_k$, donc $b \in As_k$, car s_k est premier; disons $b = s_k b'$ avec $b' \in A$. Il vient $s_1 \cdots s_{k-1} a = xb'$, d'où $a \in Ax$, par hypothèse de récurrence. Cela achève de montrer que $\mathfrak{p} = Ax$, et en particulier, $\mathfrak{p}$ est principal.

Ensuite, si A vérifie (b), soient $\tilde{S} \subset A$ la plus petite partie multiplicative contenant S , et $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de A , telle que $a_n = s_n a_{n+1}$ avec $s_n \in S$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $a_0 \neq 0$, la condition (b) entraîne aisément que $S' := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit une partie finie de S ; mais alors il existe $s \in S'$ tel que $a_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} s^n A$, contradiction. Cela montre que tout $a \in A \setminus \{0\}$ s'écrit sous la forme $a = a's$ pour quelque $s \in \tilde{S}$ et $a' \in A$ avec $S \nmid a'$, i.e. tel que a' ne soit divisible par aucun élément de S .

Lemme 11.143. Soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $s_1, \dots, s_n$ une suite finie d'éléments de S . Alors $\text{pgcd}(a, \prod_{i=1}^n s_i)$ existe dans A , et il est un élément de $\tilde{S}$.

Démonstration. Posons $b := \prod_{i=1}^n s_i$; on raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, on a $b = 1$, et $\text{pgcd}(a, 1) = 1$. Soit donc $n > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ et toute suite $s_1, \dots, s_{n-1}$ d'éléments de S . Par ce qui précède, on trouve $c \in A \setminus \{0\}$ et une suite finie $s'_1, \dots, s'_m$ d'éléments de S tels que $a = c \cdot \prod_{j=1}^m s'_j$ et $S \nmid c$. Supposons d'abord que $s_i \nmid s'_j$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, m$; au vu de l'exercice 1.11(iii), on déduit aisément que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Soient alors $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ avec $s_{i_0} \mid s'_{j_0}$, de sorte que $s_{i_0} = s'_{j_0}$; posons $b' := b/s_{i_0}$ et $a' := a/s_{i_0}$. Par hypothèse de récurrence, $d := \text{pgcd}(a', b')$ existe dans A , et $d \in \tilde{S}$; montrons que $s_{i_0}d$ est le $\text{pgcd}(a, b)$. Evidemment $s_{i_0}d$ divise a et b ; d'autre part, soit $d' \in A$ un diviseur de a et b . Si $s_{i_0} \mid d'$, alors $d'' := d'/s_{i_0}$ est un diviseur de a' et b' , d'où $d'' \mid d$, et alors $d' \mid s_{i_0}d$. Si $s_{i_0} \nmid d'$, alors d' divise déjà a' et b' , d'où $d' \mid d$, et *a fortiori* $d' \mid s_{i_0}d$. Cela achève la preuve. $\square$

Il suffit ainsi de montrer que tout $a \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ avec $S \nmid a$, est produit d'éléments premiers de A . Mais on a $a/1 \notin (S^{-1}A)^\times$ (exercice 3.33(ii)); par hypothèse, $a/1$ est alors produit d'éléments premiers de $S^{-1}A$, disons $a/1 = p_1 \cdots p_k$, et on peut écrire $p_i = b_i/s_i$ pour certains $b_1, \dots, b_k \in A$ et $s_1, \dots, s_k \in \tilde{S}$. Soit $s := s_1 \cdots s_k$; on peut en outre supposer que

$$(*) \quad \text{pgcd}(b_i, s) = 1 \quad \text{dans } A \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Pour cela, on procède en deux étapes : d'abord on divise chaque b_i et chaque s_i par $\text{pgcd}(b_i, s_i) \in \tilde{S}$ (lemme 11.143), afin d'obtenir $\text{pgcd}(b_i, s_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, k$; ensuite,

si $\text{pgcd}(b_i, s_j) \neq 1$ pour quelque $i \neq j$, on pose $q_i := b_i/s_j$, $q_j := b_j/s_i$, et $q_t := b_t/s_t$ pour tout $t \neq i, j$; on répète ensuite la première étape avec la nouvelle factorisation $a = q_1 \cdots q_k$. Il est clair qu'au but d'un nombre fini de répétitions, on atteint (*).

Ainsi, $sa = b_1 \cdots b_k$; montrons que $S \nmid b_i$ pour chaque $i = 1, \dots, k$. En effet, si $t \in S$ et si $t|b_i$, on doit avoir $t|a$, en vertu de (*); mais cela est absurde, car $S \nmid a$. D'après l'exercice 3.33(i), on est ainsi ramené à vérifier que $s = 1$. Mais si $s \neq 1$, alors s est un produit d'éléments premiers, et cela est absurde, au vu de (*).

Partie (ii) : Soit $T \subset A$ l'ensemble des éléments irréductibles homogènes de A , et $S \subset T$ une partie telle que pour tout $t \in T$ il existe un unique $s \in S$ et $u \in A^\times$ avec $t = us$; posons $B := S^{-1}A$. Soit aussi $\tilde{S} \subset A$ la plus petite partie multiplicative de A contenant S et tout élément inversible homogène de A ; évidemment tout élément de $\tilde{S}$ est homogène. Montrons d'abord :

Lemme 11.144. (i) *Tout facteur d'un élément homogène de $A \setminus \{0\}$ est homogène.*

(ii) *Tout élément de S est premier dans A .*

(iii) *La partie S vérifie la condition (b) de l'exercice 11.113(i).*

Démonstration. (i) : Munissons le groupe abélien $\mathbb{Z}$ de son ordre standard, et Γ de l'ordre lexicographique induit (voir l'exemple 8.4(ii)). Pour tout $a \in A$ et tout $\gamma \in \Gamma$, on dénote par a_γ l'image de a suivant la projection $A \rightarrow A_\gamma$, et on pose $\Delta(a) := \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$. Soient alors $x, y \in A \setminus \{0\}$; posons $z := xy$, et

$$\delta := \min(\Delta(x)) \quad \delta' := \min(\Delta(y)) \quad \lambda := \max(\Delta(x)) \quad \lambda' := \max(\Delta(y)).$$

On voit aussitôt que $\delta'' := \delta + \delta' = \min(\Delta(z))$ et $\lambda'' := \lambda + \lambda' = \max(\Delta(z))$, car A est intègre. En particulier, si $xy \in A_\gamma$, il vient $\delta'' = \lambda'' = \gamma$, d'où $\delta = \lambda$ et $\delta' = \lambda'$, i.e. x et y sont homogènes.

(ii) : Pour tout $a \in A$, notons aussi par $c(a) \in \mathbb{N}$ la cardinalité de $\Delta(a)$. Or, soient $s \in S$, $x, y \in A \setminus \{0\}$, et $z := xy$; on doit vérifier que si $s|z$, alors s divise x ou y . On raisonne par récurrence sur $c(x, y) := c(x) + c(y)$. Si $c(x, y) = 2$, les éléments x et y sont homogènes, donc par hypothèse on a $x = u \cdot \prod_{i=1}^n s_i$, $y = v \cdot \prod_{i=n+1}^m s_i$ pour une suite finie $s_1, \dots, s_m$ d'éléments de S et avec $u, v \in A^\times$, d'où $z = uv \cdot \prod_{i=1}^m s_i$; mais cette dernière factorisation est essentiellement unique par hypothèse, donc $s_i/s \in A^\times$ pour quelque $i \in \{1, \dots, m\}$, d'où l'assertion, dans ce cas. Soit ensuite $c(x, y) > 2$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tous $x', y' \in A \setminus \{0\}$ avec $c(x', y') < c(x, y)$. Soient $\lambda := \max(\Delta(x))$ et $\lambda' := \max(\Delta(y))$, de sorte que $\lambda'' := \lambda + \lambda' = \max(\Delta(z))$, et $z_{\lambda''} = x_\lambda y_{\lambda'}$; puisque s est homogène, évidemment $s|z_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et en particulier $s|x_\lambda y_{\lambda'}$, donc s divise x_λ ou $y_{\lambda'}$, par ce qui précède. Quitte à échanger les rôles de x et y , on peut supposer que s divise x_λ ; soit $x' := x - x_\lambda$. Si $x' = 0$, la preuve est achevée; sinon, on voit aussitôt que $s|x'y$, et évidemment $c(x', y) < c(x, y)$. Par hypothèse de récurrence, s divise alors x' ou y ; si $s|y$, la preuve est achevée, et si $s|x'$, alors $s|x$, et encore la preuve est achevée.

(iii) : Supposons par contradiction, que $I := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} As^n \neq 0$ pour quelque $s \in S$, et soit $a \in I \setminus \{0\}$. Il s'ensuit aisément que $a_\gamma \in I$ pour tout $\gamma \in \Delta(a)$; mais, au vu de (i), cela contredit l'essentielle unicité de la factorisation de a_γ comme produit d'éléments de $S \cup A^\times$. On montre de même que $\bigcap_{s \in S'} As = 0$ pour toute partie infinie $S' \subset S$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

Or, d'après le lemme 11.144(i), $\tilde{S}$ est l'ensemble des éléments homogènes non nuls de A , car par hypothèse tout tel élément est soit inversible, soit un produit d'éléments irréductibles. Soit $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ la Γ -graduation de B fournie par l'exercice 3.40; en particulier, on voit que B_0 est un corps. En outre, on voit aisément que la partie $\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma \mid B_\gamma \neq 0\}$ est un sous-groupe de Γ , et donc il est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ pour un entier $n \leq m$; quitte à remplacer Γ par Γ' , on peut alors supposer que $B_\gamma \neq 0$ pour tout $\gamma \neq 0$. Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ la base canonique du $\mathbb{Z}$ -module Γ , et fixons pour $i = 1, \dots, m$ un élément

$b_i \in B_{\gamma_i} \setminus \{0\}$; il vient

$$B_\gamma = B_0 b_1^{d_1} \cdots b_m^{d_m} \quad \forall \gamma := (d_1, \dots, d_m) \in \Gamma.$$

On obtient alors un homomorphisme surjectif de B_0 -algèbres Γ -graduées :

$$\phi : C := B_0[T_1^{\pm 1}, \dots, T_m^{\pm 1}] \rightarrow B \quad T_i \mapsto b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

où l'on munit C de la Γ -gradation telle que $C_\gamma = B_0 T_1^{d_1} \cdots T_m^{d_m}$ pour tout $\gamma := (d_1, \dots, d_m) \in \Gamma$. Noter que $C = \Sigma^{-1}D$, avec $D = B_0[T_1, \dots, T_m]$ et $\Sigma = \{T_1, \dots, T_m\}$; ainsi, C est factoriel, d'après (i) et le problème 1.39(iii). En dernier lieu, ϕ induit par restriction une surjection B_0 -linéaire de B_0 -espaces vectoriels $C_\gamma \rightarrow B_\gamma$ de dimension 1, en tout degré $\gamma \in \Gamma$; donc ϕ est un isomorphisme, et en particulier B est factoriel, donc de même pour A , par (i) et le lemme 11.144(ii,iii).

Partie (iii) : Par hypothèse, $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$, et $a \in A_d$. Montrons d'abord que $X^c - a$ est premier dans $A[X]$; puisque ce dernier est un anneau factoriel (problème 1.39(iii)), il suffit de vérifier que $X^c - a$ est irréductible. Pour cela, soit K une clôture algébrique de $\text{Frac } A$; si $P, Q \in K[X]$ sont des polynômes unitaires avec $P \cdot Q = X^c - a$, on a $P = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$, $Q = \prod_{i=r+1}^s (X - \alpha_i)$ avec $r + s = c$ et $\alpha_i \in K$ pour $i = 1, \dots, s$; en outre $\alpha_i^c = a$ pour tout tel i . Or, si $P, Q \in A[X]$, on a $P(0) \cdot Q(0) = -a$; d'après le lemme 11.144(i), il existe alors $t \in \mathbb{Z}$ tel que $P(0) = \prod_{i=1}^r (-\alpha_i) \in A_t$ et $P(0)^c = (-1)^{rc} a^r \in A_{tc}$, donc $dr = tc$. Mais par hypothèse, $\text{pgcd}(d, c) = 1$, par suite $c|r$, et ainsi $r \in \{0, c\}$, d'où l'assertion.

Noter ensuite que $\{1, X, \dots, X^{c-1}\}$ est une base du A -module libre B , donc B est la somme directe des A_0 -modules $(A_n X^i \mid n \in \mathbb{Z}, i = 0, \dots, c-1)$. Posons alors

$$B_{cn+di} := A_n X^i \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, \dots, c-1.$$

Noter que si $cn + di = cm + dj$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$ et $i, j \in \{0, \dots, c-1\}$, il vient $c(n-m) = d(j-i)$, d'où $c|j-i$, et alors $j = i$, donc $n = m$. Ainsi $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} B_k$, et on voit aisément que $B_r \cdot B_s \subset B_{r+s}$ pour tous $r, s \in \mathbb{Z}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. On a ainsi muni B d'une structure d'anneau $\mathbb{Z}$ -gradué.

Le quotient $B/(X) = A/(a)$ est intègre, donc X est premier dans B , en particulier il est irréductible et homogène. Montrons que tout élément homogène et irréductible x de $A \setminus Aa$ est aussi irréductible dans B . D'abord, $x \notin B^\times$, d'après le problème 3.83(i.d), car B est évidemment une A -algèbre fidèlement plate; ensuite, si $x = yz$, les facteurs $y, z \in B$ sont homogènes, en vertu du lemme 11.144(i), i.e. $y = y'X^i$ et $z = z'X^j$ pour certains y', z' homogènes dans A , et $0 \leq i, j < c$. Puisque $x \in A$, on a $i+j \in \{0, c\}$, d'où $x = y'z'a^k$ avec $k \in \{0, 1\}$. Mais alors $k = 0$, car $x \notin Aa$, d'où $i = j = 0$, ainsi $y, z \in A$, et quitte à échanger les rôles de y et z , on peut supposer que $y \in A^\times$, donc $y \in B^\times$, d'où l'assertion.

Puisque $a = X^c$ dans B , on voit aussitôt que tout élément homogène $b \in B \setminus \{0\}$ est un produit $wX^u \cdot \prod_{i=1}^n s_i$ avec $u \in \mathbb{N}$, $w \in A^\times$, et $s_1, \dots, s_n$ des éléments irréductibles de $A \setminus Aa$, et ces derniers, sont alors irréductibles dans B , par ce qui précède; en outre, chaque facteur de la décomposition est homogène dans B , toujours en vertu du lemme 11.144(i). Au vu de (ii), il ne reste qu'à vérifier que cette factorisation est essentiellement unique. Soit alors $b = w'X^v \cdot \prod_{j=1}^m t_j$ une deuxième factorisation de cette forme; écrivons $u = cq + r$ et $v = cq' + r'$ avec $q, q' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r, r' < c$; ainsi $wX^r a^q \cdot \prod_{i=1}^n s_i = w'X^{r'} a^{q'} \cdot \prod_{j=1}^m t_j$ dans B , d'où $r = r'$. Par suite, on a deux factorisations $wa^q \prod_{i=1}^n s_i = w'a^{q'} \prod_{j=1}^m t_j$ du même élément homogène de A , avec $w, w' \in A^\times$ et $s_i, t_j \in A \setminus Aa$ pour chaque i et j ; l'essentielle unicité de la factorisation dans A entraîne alors que $q = q'$, $n = m$, et il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ avec $s_i/t_{\sigma(i)} \in A^\times$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi, $u = v$, et cela conclut la preuve.

Problème 11.115 : D'après l'exercice 1.18 et le problème 1.39(iii), l'élément $p+q$ est premier dans A , donc $\bar{A}$ est intègre. Ensuite, soient $S := \{X_1, \dots, X_n\}$, $B := S^{-1}A$ et

$E := \text{Frac}(\overline{A})$; puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$, on voit aisément qu'aucun élément de S ne divise $p+q$, donc $p+q$ est aussi un élément premier de B (exercice 3.33(i)), et ainsi $E = \text{Frac}(\overline{B})$, avec $\overline{B} := B/(p+q)$. En outre, la graduation de A se prolonge en une unique $\mathbb{Z}$ -graduation de B (exercice 3.40). Soit $\Gamma \subset B^\times$ le sous-groupe engendré par S ; évidemment tout $x \in \Gamma$ est homogène, disons de degré $d(x)$; on a alors un homomorphisme de groupes $d : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$, qui est surjectif, car par hypothèse p et q sont homogènes de degrés i et $i+1$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur).

Le sous-groupe $\Delta := \text{Ker}(d)$ est libre de rang $n-1$; soit $y_1 \in \Gamma$ avec $d(y_1) = 1$, et prenons une base $y_2, \dots, y_n$ du $\mathbb{Z}$ -module libre Δ , de sorte que $y_1, \dots, y_n$ est une base de Γ . Il vient $p = y_1^i p_0$ et $q = y_1^{i+1} q_0$ avec $p_0, q_0 \in B_0$, la composante homogène des éléments de degré 0 de B . Evidemment, $B_0 = K[y_2^{\pm 1}, \dots, y_m^{\pm 1}]$, et on a

$$\overline{B} = B_0[y_1^{\pm 1}]/(p_0 + y_1 q_0).$$

Posons $E_0 := \text{Frac}(B_0)$; d'après le lemme 11.144(i), $p_0 + y_1 q_0$ ne divise ni p_0 , ni q_0 dans B , donc $E = \text{Frac}(\overline{B}[p_0^{-1}, q_0^{-1}]) = \text{Frac}(E_0[y_1^{\pm 1}]/(1 + y_1 p_0^{-1} q_0)) = E_0$.

On est ainsi ramené à vérifier que E_0 est une extension transcendante pure de K . Mais noter que B est aussi naturellement une K -algèbre Γ -graduée : sa composante homogène de degré x est Kx , pour tout $x \in \Gamma$; ainsi B_0 est naturellement Δ -graduée. Soient $Y_2, \dots, Y_n$ des indéterminées, notons par $f : K[Y_2, \dots, Y_m] \rightarrow B_0$ l'homomorphisme de K -algèbres tel que $Y_i \mapsto y_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$, et munissons $K[Y_2, \dots, Y_n]$ de la Δ -graduation telle que Y_i est homogène de degré y_i , pour tout $i = 2, \dots, n$; on déduit aisément f se prolonge en un isomorphisme $K[Y_2^{\pm 1}, \dots, Y_m^{\pm 1}] \xrightarrow{\sim} B_0$ de K -algèbres Δ -graduées, d'où l'assertion.

Problème 11.116 : Soit $\mathcal{P} \subset A$ la partie des suites cohérentes $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ vérifiant la condition suivante : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que a_n soit un élément premier de A_n , pour tout $n \geq k$. Montrons d'abord que tout $a_\bullet \in \mathcal{P}$ est un élément premier de A . D'abord, il est clair que $a_\bullet \notin A^\times$; ensuite, soient $x_\bullet, y_\bullet \in A$ tels que $a_\bullet$ divise $x_\bullet \cdot y_\bullet$ dans A ; cela revient à dire que a_n divise $x_n y_n$ dans A_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$Z_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \text{ divise } x_n\} \quad \text{et} \quad Z_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \text{ divise } y_n\}.$$

Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\{k+n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Z_1 \cup Z_2$; d'autre part, pour $i = 1, 2$ il est clair que si $n \in Z_i$, alors $m \in Z_i$, pour tout $m = 0, \dots, n$. Il s'ensuit aisément que l'on a soit $Z_1 = \mathbb{N}$, soit $Z_2 = \mathbb{N}$, i.e. soit $a_\bullet$ divise $x_\bullet$, soit $a_\bullet$ divise $y_\bullet$, d'où l'assertion. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que tout élément de $A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ est un produit d'éléments de $\mathcal{P}$; cela montrera en outre que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des éléments premiers de A . Soit donc $a_\bullet \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$; il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \in A_k \setminus (A_k^\times \cup \{0\})$, d'où $a_n \in A_n \setminus (A_n^\times \cup \{0\})$ pour tout $n \geq k$. Pour tout $n \geq k$, écrivons alors $a_n = \prod_{i=1}^{r(n)} q_{n,i}$ pour des éléments $q_{n,1}, \dots, q_{n,r(n)}$ premiers dans A_n . Or, noter que l'hypothèse sur p_n entraîne que $\text{Spec}(p_n)$ induit par restriction une bijection $\text{Max } A_n \xrightarrow{\sim} \text{Max } A_{n+1}$ (corollaire 1.51(ii)); on déduit aisément que $p_n^{-1}(A_n^\times) = A_{n+1}^\times$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $p_n(q_{n+1,i}) \notin A_n^\times$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, \dots, r(n+1)$; par suite :

$$r(n+1) \leq r(n) \quad \forall n \geq k.$$

Ainsi, il existe $k' \geq k$ tel que $r(n+1) = r(n)$ pour tout $n \geq k'$, et on pose $R(a_\bullet) := r(k')$. Montrons alors plus précisément qu'il existe $x_{1,\bullet}, \dots, x_{R(a_\bullet),\bullet} \in \mathcal{P}$ tels que $a_\bullet = \prod_{i=1}^{R(a_\bullet)} x_{i,\bullet}$. On raisonne par récurrence sur $R(a_\bullet)$. L'assertion est triviale si $R(a_\bullet) = 1$. Soit alors $R(a_\bullet) > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout $b_\bullet \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ avec $R(b_\bullet) < R(a_\bullet)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, \dots, R(a_\bullet)$, soit $[q_{n,i}] \in A_n/A_n^\times$ la classe de $q_{n,i}$, et posons $Q(n) := \{[q_{n,1}], \dots, [q_{n,R(a_\bullet)}]\}$; soit aussi $\pi_n : A_{n+1}/A_{n+1}^\times \rightarrow A_n/A_n^\times$ l'application induite par p_n ; évidemment $\pi_n(Q_{n+1}) \subset Q_n$ pour tout $n \geq k'$, donc on obtient un système projectif d'ensembles finis $Q_\bullet := (Q_{n+k} \mid n \in \mathbb{N}^{\text{op}})$ (et la cardinalité

de chaque Q_{n+k} est bornée par $R(a_\bullet)$; d'après la remarque 2.33(ii), la limite Q de $Q_\bullet$ est alors non vide. Soit donc $[x_\bullet] := ([x_{n+k'}] \mid n \in \mathbb{N}) \in Q$; par construction, $[x_\bullet]$ est une suite cohérente de classes d'éléments premiers $x_{n+k'}$ de $A_{n+k'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $p_n(x_{n+1}) = u_n x_n$ avec $u_n \in A_n^\times$, pour tout $n \geq k'$. Puisque $p_n(A_{n+1}^\times) = A_n^\times$, on trouve alors par récurrence une suite $(v_n \mid n \geq k')$ avec $v_{k'} = 1$ et $v_n \in A_n^\times$ pour tout $n \geq k' + 1$, telle que $p_n(v_{n+1}x_{n+1}) = v_n x_n$ pour tout $n \geq k'$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. La suite $y_\bullet := (x_n v_n \mid n \geq k')$ est alors un élément de $\mathcal{P}$ (exercice 2.35(iv)), et évidemment $y_\bullet$ divise $a_\bullet$ dans A . Posons $b := a_\bullet / x_\bullet \in A$; il vient $R(b_\bullet) = R(a_\bullet) - 1$; par hypothèse de récurrence, $b_\bullet$ est alors un produit de $R(b_\bullet)$ éléments de $\mathcal{P}$, donc $R(a_\bullet)$ est un produit de $R(a_\bullet)$ éléments de $\mathcal{P}$.

Exercice 11.120 : Si A vérifie (S_2) , alors évidemment A vérifie (S_1) , et il reste à vérifier que pour tout $x \in A$ régulier, A/xA n'a aucun idéal premier associé immergé. Or, soit $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/xA)$; si $\mathfrak{p}$ est immergé, on a $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$, d'après le corollaire 11.34(i), donc $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \geq 2$, par hypothèse. Mais $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/xA_{\mathfrak{p}})$ (proposition 7.6), d'où $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) - 1 = \text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/xA_{\mathfrak{p}}) = 0$ (corollaire 11.70(i) et remarque 11.67(ii)), contradiction. Réciproquement, supposons que A vérifie (S_1) et que pour tout $x \in A$ régulier, A/xA n'ait aucun idéal premier associé immergé. On doit montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ avec $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ on a $r := \text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \geq 2$, et on sait déjà que $r \geq 1$. Or, d'après la remarque 11.119(ii), $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}_A(A)$, donc il existe un élément A -régulier $x \in \mathfrak{p}$ (remarque 7.21(iii)); si $r = 1$, il vient $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/xA_{\mathfrak{p}}) = 0$ (corollaire 11.70(i)), et cela équivaut à $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/xA_{\mathfrak{p}})$ (remarque 11.67(ii)), d'où $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/xA)$ (proposition 7.6), contradiction.

Exercice 11.122, partie (i) : Supposons d'abord que B vérifie (R_i) , et soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; comme $\text{Spec } f$ est surjectif (problème 3.83(i.c)), on a $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spec } B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$. Soit donc $\mathfrak{q}$ un point maximal de $(\text{Spec } f)^{-1}(\mathfrak{p})$, et posons $C := B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$, de sorte que $\dim C = 0$; alors f induit un homomorphisme plat et local $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$, et d'après la proposition 11.37(ii), on a $\text{ht}(\mathfrak{q}) = \text{ht}(\mathfrak{p})$. Or, si $\text{ht}(\mathfrak{q}) \leq i$, par hypothèse $B_{\mathfrak{q}}$ est régulier, donc de même pour $A_{\mathfrak{p}}$ (théorème 11.109(i)); cela montre que A vérifie (R_i) . Ensuite, si B vérifie (S_i) , noter que $\text{prof}_C(C) = 0$ (corollaire 11.70(ii)), d'où $\text{prof}_{B_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{q}}) = \text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})$ (proposition 11.76), et il s'ensuit aussitôt que A vérifie (S_i) .

Partie (ii) : Si A et $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ vérifient (R_i) , soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ avec $\text{ht}(\mathfrak{q}) \leq i$; posons $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q})$ et $C := B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$. On a $\dim C \leq i$, et $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq i$ en vertu de la proposition 11.37(ii), donc C et $A_{\mathfrak{p}}$ sont réguliers, par hypothèse; en outre, f induit un homomorphisme plat et local $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$, par suite $B_{\mathfrak{q}}$ est régulier (théorème 11.109(ii)). Ensuite, si A et $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ vérifient (S_i) , on calcule avec les propositions 11.76 et 11.37(ii) :

$$\begin{aligned} \text{prof}_{B_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{q}}) &= \text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) + \text{prof}_C(C) \geq \min(i, \text{ht}(\mathfrak{p})) + \min(i, \dim C) \\ &\geq \min(i, \text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim C) \\ &\geq \min(i, \text{ht}(\mathfrak{q})) \end{aligned}$$

et cela achève de montrer que B vérifie (S_i) .

Partie (iii) : Cela découle aussitôt de (ii) et du théorème 11.121.

Exercice 11.127 : La question étant locale sur X , on peut supposer que $\underline{X} = \text{Spec } A$ pour un anneau A , et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X \otimes_A L$ pour un A -module L de type fini. Soit $\mathfrak{p} \in X$; par hypothèse, $L_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre de rang 1, engendré par un élément x/s , avec $x \in L$ et $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Soit $f : A \rightarrow L$ l'application A -linéaire telle que $f(1) = x$; évidemment $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow L_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme, donc $\mathfrak{p} \notin Z := \text{Supp}_A(\text{Coker } f)$. Mais $\text{Coker } f$ est un A -module de type fini, donc Z est une partie fermée de X (remarque 3.58(ii)); il existe alors un voisinage ouvert affine U de $\mathfrak{p}$ dans X avec $U \cap Z = \emptyset$. Par suite,

$\phi : \mathcal{O}_{X|U} \tilde{\otimes}_A f : \mathcal{O}_{X|U} \rightarrow \mathcal{L}_U$ est un épimorphisme (proposition 3.55), i.e. $\phi_q : A_q \rightarrow L_q$ est une surjection A_q -linéaire de A_q -modules libres de rang un, pour tout $q \in U$; d'après le problème 3.53(ii), ϕ_q est alors un isomorphisme pour tout tel q , i.e. ϕ est un isomorphisme.

Exercice 11.131 : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'assertion est claire si la longueur $n+1$ de la suite exacte est ≤ 3 . Soit alors $n \geq 3$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute suite exacte de longueur n . On pose $\mathcal{G} := \text{Ker } d_1$, de sorte que l'on a un complexe exact de $\mathcal{O}_X$ -modules $\Sigma_\bullet := (0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_0 \rightarrow 0)$, où l'on a placé $\mathcal{G}$ en degré cohomologique 0.

Lemme 11.145. $\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_0$ est un $\mathcal{O}_X$ -module localement projectif de type fini.

Démonstration. Il s'agit du $\mathcal{O}_X$ -module tel que $(\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_0)(U) := \mathcal{G}(U) \oplus \mathcal{F}_0(U)$ pour toute partie ouverte $U \subset X$, et on doit vérifier que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert $U \subset X$ avec un isomorphisme $\mathcal{O}_{X|U}^s \xrightarrow{\sim} (\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_0)|_U$ de $\mathcal{O}_{X|U}$ -modules, pour quelque $s \in \mathbb{N}$. L'assertion étant locale sur X , on peut supposer que $\mathcal{F}_i = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L_i$ pour $A := \Gamma(\mathcal{O}_X)$ et certains A -modules projectifs de type fini L_0, L_1 .

Affirmation 11.146. L'unité d'adjonction $L_i \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L_i)$ est un isomorphisme.

Preuve : Soient $r_i \in \mathbb{N}$ et L'_i un A -module projectif de type fini, avec un isomorphisme $L_i \oplus L'_i \xrightarrow{\sim} A^{r_i}$ (lemme 4.99(ii)). On voit aussitôt que l'unité d'adjonction $\eta_{A^{r_i}} : A^{r_i} \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X^{r_i})$ est un isomorphisme; mais $\eta_{A^{r_i}}$ est la somme directe des unités d'adjonction $\eta_{L_i} : L_i \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L_i)$ et $\eta_{L'_i} : L'_i \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A L'_i)$. Donc η_{L_i} et $\eta_{L'_i}$ sont des isomorphismes. $\diamond$

L'observation 11.146 entraîne aisément que $d_1 = \mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A \phi$ pour une application A -linéaire $\phi : L_1 \rightarrow L_0$, et $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A \phi$ s'identifie naturellement avec $d_{1,x} : \mathcal{F}_{1,x} \rightarrow \mathcal{F}_{0,x}$. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 11.129, on trouve alors un voisinage ouvert U de x dans X tel que $d_{1,U} = \mathcal{O}_X(U) \otimes_A \phi : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_0(U)$ soit déjà surjective, et quitte à remplacer X par U , on peut supposer que ϕ soit surjective. Posons $P := \text{Ker } \phi$; ainsi P est un A -module projectif de type fini, et ϕ est la composition d'un isomorphisme A -linéaire $L_1 \xrightarrow{\sim} P \oplus L_0$ avec la projection $P \oplus L_0 \rightarrow L_0$, d'où des isomorphismes $\mathcal{O}_X$ -linéaires $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A P) \oplus \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A P \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$. $\square$

Considérons aussi le complexe exact $\Sigma'_\bullet := (0 \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0)$ de $\mathcal{O}_X$ -modules, où l'on a placé $\mathcal{G}$ en degré cohomologique 1, et soit $\Delta_\bullet := (0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}_0 \rightarrow 0)$ le complexe concentré au degrés cohomologiques 0 et 1, et dont la différentielle d est l'identité de $\mathcal{F}_0$. D'après le lemme 11.145, les complexes :

$$\Sigma_\bullet \oplus \Delta_\bullet \quad \text{et} \quad \Sigma'_\bullet \oplus \Delta_\bullet$$

sont des suites exactes de $\mathcal{O}_X$ -modules localement projectifs de type fini, de longueur 2 et respectivement n ; par hypothèse de récurrence, il vient dans $K(\underline{X})$:

$$[\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_0] + \sum_{i=3}^n (-1)^i [\mathcal{F}_i] = [\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_0] \quad \text{et} \quad [\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_0] = [\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_0] - [\mathcal{F}_0]$$

et en outre $[\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_0] = [\mathcal{F}_2] + [\mathcal{F}_0]$ et $[\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_0] = [\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_0]$, d'où l'assertion.

Exercice 11.132, partie (i) : Cela est analogue à l'exercice 5.59. Pour tout $\mathcal{A}^a$ -module $\mathcal{G}$, soit $\text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'ensemble des morphismes de préfaisceaux $\beta : \mathcal{F}^k = \mathcal{F} \times \cdots \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ qui sont $\mathcal{A}$ -multilinéaires alternés, i.e. tels que pour tout $U \in \mathcal{T}$ l'application $\beta_U : \mathcal{F}(U)^k \rightarrow \mathcal{G}(U)$ soit $\mathcal{A}(U)$ -multilinéaire alternée. Tout morphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ de $\mathcal{A}^a$ -modules induit l'application

$$\text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, \phi) : \text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \quad \beta \mapsto \phi \circ \beta$$

d'où un foncteur $\text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, -) : \mathcal{A}^a\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$. En raisonnant comme dans la solution de l'exercice 5.59, on vérifie aisément que le $\mathcal{A}^a$ -module $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}}^k \mathcal{F}$ représente ce foncteur.

D'autre part, tout β comme ci-dessus se factorise à travers l'unité d'adjonction $\mathcal{F}^k \rightarrow (\mathcal{F}^a)^k$ et un unique morphisme de faisceaux $\beta^a : (\mathcal{F}^a)^k \rightarrow \mathcal{G}$; on voit aisément que β^a est $\mathcal{A}^a$ -multilinéaire alterné, donc se factorise à son tour à travers un unique morphisme $\mathcal{A}^a$ -linéaire $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}^a}^k(\mathcal{F}^a) \rightarrow \mathcal{G}$. Ainsi, $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}^a}^k(\mathcal{F}^a)$ représente le même foncteur $\text{Alt}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}, -)$, et on conclut avec le lemme 2.4(i).

Partie (ii) : Compte tenu de (i), il suffit d'exhiber un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{B}}^k(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F})$$

c'est-à-dire, un système d'isomorphismes $\mathcal{B}(U)$ -linéaires

$$\mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \Lambda_{\mathcal{A}(U)}^k(\mathcal{F}(U)) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{B}(U)}^k(\mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}(U)) \quad \forall U \in \mathcal{I}$$

compatibles avec toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes de X . Ces isomorphismes sont fournis par l'exercice 3.95.

Partie (iii) : Compte tenu de (i), il suffit d'exhiber un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{O}_X \otimes_A (\Lambda_A^k M) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{O}_X}^k(\mathcal{O}_X \otimes_A M) \quad \text{dans } \mathcal{O}_X - \text{pré.Mod}$$

c'est-à-dire, un système d'isomorphismes $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaires

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_A (\Lambda_A^k M) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{O}_X(U)}^k(\mathcal{O}_X(U) \otimes_A M)$$

compatibles avec toute inclusion $U' \subset U$ de parties ouvertes de X . A nouveau, ces isomorphismes sont fournis par l'exercice 3.95.

Parties (iv), (v) : Avec (iii), on voit aussitôt que si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, il en est de même pour $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_X}^k(\mathcal{F})$. Ensuite, si M est un A -module de type fini, on voit aisément qu'il en est de même pour $\Lambda_A^k M$, et si M est plat (resp. projectif de type fini), il en est de même pour $\Lambda_A^k M$, d'après le problème 3.91(vi) et la remarque 3.74(iii) (resp. d'après l'exercice 4.108(i)); les assertions correspondantes de (iv) s'ensuivent aussitôt. La partie (v) découle aussitôt du problème 3.91(ii) et de (iii).

Partie (vi) : Compte tenu de (i), il suffit d'exhiber une bijection naturelle

$$\text{Alt}_{\mathcal{O}_X}^k(\mathcal{F}, \phi_* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}_{\mathcal{O}_Y}^k(\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{G}$. Soit donc $\beta : \mathcal{F}^k \rightarrow \phi_* \mathcal{G}$ un morphisme $\mathcal{O}_X$ -multilinéaire alterné; l'adjonction du §4.3.2 associe à β un morphisme de faisceaux $\beta^* : \tilde{\phi}^{-1} \mathcal{F}^k \rightarrow \mathcal{G}$, et une inspection directe des définitions montre que β^* est $\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X$ -multilinéaire alterné, pour la structure de $\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X$ -module de $\mathcal{G}$ obtenue par restriction des scalaires, suivant $\phi^\sharp : \tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$; les détails sont laissés aux soins du lecteur. Donc, β^* correspond à un unique morphisme de $\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X$ -modules :

$$\Lambda_{\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X}^k(\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}_{[\phi^\sharp]}$$

qui, par adjonction, correspond à son tour à un unique morphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules

$$\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X} \Lambda_{\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X}^k(\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}.$$

Mais d'après (ii) on a un isomorphisme naturel

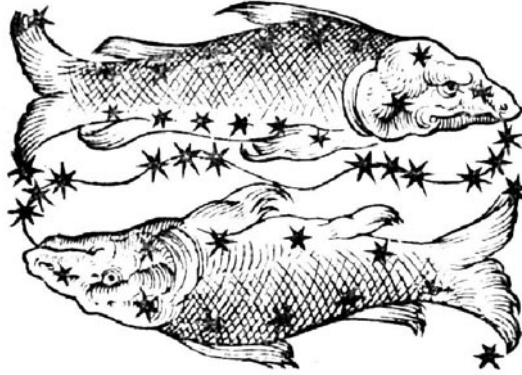
$$\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X} \Lambda_{\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{O}_X}^k(\tilde{\phi}^{-1} \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_Y}^k(\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$$

d'où un morphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules : $\tilde{\Lambda}_{\mathcal{O}_Y}^k(\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$ qui, encore d'après (i), correspond à un unique morphisme $\mathcal{O}_Y$ -linéaire alterné $\beta^\dagger : (\mathcal{O}_Y \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^k \rightarrow \mathcal{G}$. On vérifie aisément que l'association $\beta \mapsto \beta^\dagger$ réalise la bijection souhaitée.

Exercice 11.139 : Soient $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ et M un $A_{\mathfrak{p}}$ -module de type fini; d'après l'exercice 6.70(i) il existe $m, n \in \mathbb{N}$ et une application $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire $\phi : A_{\mathfrak{p}}^n \rightarrow A_{\mathfrak{p}}^m$ avec un isomorphisme $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire $\text{Coker}(\phi) \xrightarrow{\sim} M$. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de A^n ; pour $i =$

$1, \dots, n$ on a alors $\phi(e_i/1) = (a_{i1}/s, \dots, a_{im}/s)$, pour certains $a_{i1}, \dots, a_{im} \in A$ et un élément $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Soit $\psi : A^n \rightarrow A^m$ l'application A -linéaire telle que $\psi(e_i) := (a_{i1}, \dots, a_{im})$ pour $i = 1, \dots, n$, et posons $N := \text{Coker}(\psi)$; on a un isomorphisme $A_{\mathfrak{p}}$ -linéaire évident $N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} M$. Par hypothèse, il existe une résolution finie $L_{\bullet} \rightarrow N$ par des A -modules libres de rang fini; la localisation $(L_{\bullet})_{\mathfrak{p}}$ est alors une résolution finie de M par des $A_{\mathfrak{p}}$ -modules libres de rang fini. D'après le théorème 11.103, cela achève de montrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; en particulier $A_{\mathfrak{p}}$ est factoriel pour tout tel $\mathfrak{p}$ (théorème 11.136). D'après la proposition 11.112, on est ainsi ramené à vérifier que $\text{Pic } A = 0$.

Pour cela on raisonne comme dans la preuve du théorème 11.136 : soient P un A -module inversible, et $0 \rightarrow L_n \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow P$ une résolution finie de P par des A -modules libres de rang fini; avec $(X, \mathcal{O}_X) := \text{Spec } A$, il vient $\sum_{i=0}^n [\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A L_i] = [\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A P]$ dans $K(\underline{X})$ (exercice 11.131), d'où $\sum_{i=0}^n \det[\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A L_i] = [\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A P]$ dans $\text{Pic}(\underline{X})$ (proposition 11.133(i) et exercice 11.132(v)). Mais $\det[\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_X L_i] = 0$, car L_i est libre pour tout $i = 0, \dots, n$, d'où $[\mathcal{O}_X \widetilde{\otimes}_A P] = 0$ dans $\text{Pic}(\underline{X})$, *i.e.* $[P] = 0$ dans $\text{Pic}(A)$ (remarque 11.126(i)).



CETTE douzième et dernière leçon est une introduction aux aspects élémentaires de la théorie des *espaces adiques* de R.Huber. Dans la section 12.1, on munit le spectre adique $\mathrm{Spa} \, \underline{A}$ de tout anneau affinoïde $\underline{A}$ d'un *préfaisceau de fonctions adiques* $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \, \underline{A}}$ à valeurs dans la catégorie des anneaux topologiques complets et séparés, et dont les fibres sont des anneaux locaux. Quand ce préfaisceau est un faisceau, on dit que l'espace localement annelé $(\mathrm{Spa} \, \underline{A}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \, \underline{A}})$ est un *espace adique affinoïde* : tout comme pour les schémas, ces données affinoïdes sont ensuite recollées pour construire des *espaces adiques* généraux. On doit à Huber la découverte de deux classes importantes d'espaces adiques affinoïdes : les spectres adiques des anneaux affinoïdes *fortement noethériens*, et les spectres adiques des anneaux affinoïdes à *définition noethérienne*. La section 12.2 introduit une notion plus générale d'*anneau universellement analytiquement noethérien*, qui a été dégagée dans l'article récent [29] de K.Fujiwara, F.Kato et O.Gabber (avec une terminologie différente), et qui englobe et unifie les deux classes considérées par Huber. Cette section inclut aussi une revue des propriétés fondamentales des *algèbres de Tate*, i.e. des anneaux complets, séparés et topologiquement de type fini sur un corps valué de rang un ; en particulier, avec les versions non-archimédiennes des *théorèmes de division et de préparation de Weierstrass* (théorèmes 12.49 et 12.52) on verra que ces algèbres sont fortement noethériennes, et fournissent ainsi une ample provision d'espaces adiques affinoïdes concrets.

Tout comme dans la théorie des schémas, pour pouvoir avancer au-delà des premières formalités basiques, il est nécessaire d'ajouter aussi des conditions de finitudes adaptées, sur les morphismes d'anneaux que l'on souhaite étudier ; on consacre la section 12.3 à quelques unes des ces questions : le résultat principal nous assure que le morphisme d'anneaux affinoïdes représentant tout *domaine affinoïde* de tout spectre adique, est *topologiquement de présentation finie* (théorème 12.69).

Le but de la section 12.4 est de prouver le théorème 12.92, montrant que le complexe de Čech de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \, \underline{A}}$ relatif à tout recouvrement affinoïde fini de $\mathrm{Spa} \, \underline{A}$ est exact si $\underline{A}$ est *universellement analytiquement noethérien* : ce résultat est une remarquable généralisation du *théorème d'acyclicité de Tate* qui, aux années 60, signala le coup d'envoi de la théorie des variétés rigides. Notre preuve est inspirée directement de l'argument original de Tate, et évite le recours aux méthodes moins élémentaires de géométrie algébrique, suggérées par M.Raynaud, et adoptées par R.Huber afin de démontrer ce même théorème pour ses anneaux à définition noethérienne.

Signalons que, plus récemment, P.Scholze a mis en évidence une nouvelle, et très surprenante classe d'espaces adiques affinoïdes : les spectres adiques des *anneaux perfectoides* introduits dans son ouvrage [64], le premier d'une série imposante de travaux fondateurs, dont la parution a déclenché une révolution dans l'étude de nombreuses questions d'algèbre et arithmétique.

La cinquième section propose quelques applications et exemples : en premier lieu, un théorème de R. Huber, l'homologue pour les spectres valuatifs du théorème de Chevalley 6.115, qui – en conjonction avec le problème 12.109 – est essentiellement équivalent à l'élimination des quantificateurs pour la théorie des corps valués algébriquement clos ; ensuite, un critère assurant qu'un morphisme adique $\underline{A} := (A, A^+) \xrightarrow{f} \underline{B} := (B, B^+)$ d'anneaux affinoïdes induise une application ouverte $\mathrm{Spa}(f)_{\mathrm{an}} : \mathrm{Spa}(\underline{B})_{\mathrm{an}} \rightarrow \mathrm{Spa}(\underline{A})_{\mathrm{an}}$ (théorème 12.120) : cela est analogue à l'exercice 12.108 (et au corollaire 6.116), mais la preuve est bien plus délicate, car on suppose seulement que $\mathrm{Spec}(f)$ se restreigne en un morphisme de schémas plat et de présentation finie sur les lieux analytiques $(\mathrm{Spec} B)_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spec} A)_{\mathrm{an}}$. En dernier lieu, on propose un exemple un peu technique : un anneau analytiquement noethérien – fabriqué à partir des K -algèbres de Tate rencontrées au §12.2.3 – dont la complétion n'est pas analytiquement noethérienne.

12.1. Espaces adiques. On souhaite maintenant associer à tout anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A^+)$ un préfaisceau d'anneaux topologiques complets $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$ sur l'espace spectral $\mathrm{Spa} \underline{A}$, et un sous-préfaisceau $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+$; ces préfaisceaux ne sont pas toujours des faisceaux, mais le cas échéant on dira que la donnée $(\mathrm{Spa} \underline{A}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}^+)$ est un *espace adique*. On montrera dans la section 12.2.3 que c'est notamment le cas, lorsque A est une *algèbre de Tate* sur un corps valué complet K de rang un.

12.1.1. Domaines affinoïdes. On va d'abord munir tout anneau affinoïde (A, A^+) d'un site de parties représentables de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, analogue au site $\mathrm{Rep}(A)$ des parties représentables de $\mathrm{Spec} A$, associé à tout anneau A (voir le §5.2.1).

- Considérons les sous-catégories pleines de Afd , notées :

$$\mathrm{l.Afd} \quad \text{et} \quad \mathrm{c.Afd}$$

dont les objets sont les anneaux affinoïdes topologiquement locaux et respectivement les anneaux affinoïdes complets et séparés (voir la définition 10.24(ii,iii)).

- Les inclusions $\mathrm{l.Afd} \rightarrow \mathrm{Afd} \leftarrow \mathrm{c.Afd}$ admettent des adjoints à gauche :

$$\mathrm{c.Afd} \xleftarrow{(-)} \mathrm{Afd} \xrightarrow{(-)_{\mathrm{loc}}} \mathrm{l.Afd} \quad (\widehat{A}, \widehat{A}^+) \leftarrow (A, A^+) \mapsto (A, A^+)_{\mathrm{loc}}.$$

En effet, soit $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $S := 1 + I_0$; d'après le corollaire 9.72(ii) on peut supposer que $A_0 \subset A^+$, et la construction explicite dans la solution de l'exercice 9.81(ii) montre que $A_{\mathrm{loc}} = S^{-1}A$ et $(A^+)_{\mathrm{loc}} = S^{-1}(A^+)$ sont des anneaux de Huber avec sous-anneau de définition $S^{-1}A_0$. De plus, $(A^+)_{\mathrm{loc}} \subset (A_{\mathrm{loc}})^\circ$ d'après l'exercice 9.81(iii), et il est clair que $(A^+)_{\mathrm{loc}}$ est un sous-anneau ouvert et intégralement fermé dans A_{loc} (proposition 6.13). Ainsi, $(A, A^+)_{\mathrm{loc}} := (A_{\mathrm{loc}}, (A^+)_{\mathrm{loc}})$ est un objet de $\mathrm{l.Afd}$. Or soit $f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ un morphisme d'anneaux affinoïdes avec $(B, B^+) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{l.Afd})$; alors B et B^+ sont des anneaux de Huber topologiquement locaux (exercice 9.21(v)), donc f se prolonge en un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $(A, A^+)_{\mathrm{loc}} \rightarrow (B, B^+)$, et compte tenu du problème 2.10(i), cela achève de montrer l'existence de l'adjoint à gauche $(-)_{\mathrm{loc}}$ souhaité. De même, l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathrm{c.Afd} \rightarrow \mathrm{Afd}$ associe à $\underline{A} := (A, A^+)$ le couple $\widehat{\underline{A}} := (\widehat{A}, \widehat{A}^+)$, formé des complétions de A et A^+ : en effet, d'après l'exercice 9.88(i,ii), $\widehat{A}^+$ est un sous-anneau ouvert de $(\widehat{A})^\circ$ intégralement clos dans $\widehat{A}$, ainsi $\widehat{\underline{A}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{c.Afd})$, l'homomorphisme de complétion $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes $j_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$, et tout morphisme d'anneaux affinoïdes $\underline{A} \rightarrow \underline{B}$ avec $\underline{B}$ complet et séparé se factorise par $j_{\underline{A}}$ et un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $\widehat{\underline{A}} \rightarrow \underline{B}$.

Exercice 12.1. (i) Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde. Montrer que les morphismes naturels $\underline{A} \rightarrow \underline{A}_{\mathrm{loc}} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$ induisent des homéomorphismes :

$$\mathrm{Spa} \widehat{\underline{A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa} \underline{A}_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa} \underline{A}.$$

(ii) Soit $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes, avec $\underline{B}$ topologiquement local. Montrer que f est adique si et seulement si $\mathrm{Spa} f$ se restreint en une application $(\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$.

(iii) Soient $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ et $g : \underline{A} \rightarrow \underline{C}$ deux morphismes adiques de Afd (resp. de $\star\mathrm{Afd}$, pour $\star \in \{\mathrm{l}, \mathrm{c}\}$). Montrer que la somme amalgamée $\underline{B} \sqcup_{(f,g)} \underline{C}$ est représentable dans Afd (resp. dans $\star\mathrm{Afd}$).

- Tout anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A^+)$ induit un foncteur

$$\mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}} : \mathrm{lAfd} \rightarrow \mathrm{Ens} \quad \underline{B} \mapsto \mathrm{Afd}(\underline{A}, \underline{B})$$

qui associe à tout morphisme $f : \underline{B} \rightarrow \underline{B}'$ d'anneaux affinoïdes topologiquement locaux l'application $\mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(f) : \mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(\underline{B}) \rightarrow \mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(\underline{B}')$: $(g : \underline{A} \rightarrow \underline{B}) \mapsto f \circ g$. Toute partie $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ induit un sous-foncteur de $\mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$, à savoir le foncteur

$$\mathrm{h}_U : \mathrm{lAfd} \rightarrow \mathrm{Ens} \quad \underline{B} \mapsto \{f \in \mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}(\underline{B}) \mid (\mathrm{Spa} f)(\mathrm{Spa} \underline{B}) \subset U\}$$

et on s'intéressera aussi à la restriction $\widehat{\mathrm{h}}_U : \mathrm{cAfd} \rightarrow \mathrm{Ens}$ de h_U .

Définition 12.2. Avec la notation ci-dessus, on dit que U est un *l-domaine affinoïde* (resp. un *c-domaine affinoïde*) de $\mathrm{Spa} \underline{A}$, si U est une partie ouverte de $\mathrm{Spa} \underline{A}$, et si h_U (resp. $\widehat{\mathrm{h}}_U$) est représentable par un anneau affinoïde topologiquement local $\underline{A}_U := (A_U, A_U^+)$ (resp. un anneau affinoïde complet séparé $\widehat{\underline{A}}_U := (\widehat{A}_U, \widehat{A}_U^+)$). On dit alors aussi que $\underline{A}_U$ *l-représente* U (resp. que $\widehat{\underline{A}}_U$ *c-représente* U).

Remarque 12.3. Soient $U \subset \mathrm{Spa} \underline{A}$ une partie ouverte, et $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$ un morphisme d'anneaux affinoïdes représentant le sous-foncteur $\mathrm{h}_U \subset \mathrm{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$; on dira aussi brièvement que ρ_U *l-représente* U . Soit aussi $\widehat{\rho}_U : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}_U$ la composition de ρ_U avec la complétion $\underline{A}_U \rightarrow \widehat{\underline{A}}_U := (\widehat{A}_U, \widehat{A}_U^+)$ (voir le §12.1.1); il s'ensuit aussitôt que $(\widehat{\underline{A}}_U, \widehat{\rho}_U)$ est un couple universel pour le foncteur $\widehat{\mathrm{h}}_U$, i.e. $\widehat{\underline{A}}_U$ *c-représente* U . Cela montre que tout l-domaine affinoïde de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est aussi un c-domaine affinoïde.

Lemme 12.4. Soient $\underline{B} := (B, B^+)$ un anneau affinoïde topologiquement local, et $b \in B$. Alors $b \in B^\times$ si et seulement si $v(b) \neq +\infty$ pour tout $v \in \mathrm{Spa} \underline{B}$.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si $b \notin B^\times$, soient $\mathfrak{q} \subset B$ un idéal premier contenant b (corollaire 1.35(ii)), et $\mathfrak{m} \subset B^\circ$ un idéal maximal contenant $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap B^\circ$. Choisissons un anneau de valuation V de $k(\mathfrak{q})$ dominant l'image de B_m° dans $k(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{q})$ (théorème 8.21). Alors V correspond à une valuation v de B dont le support $\mathfrak{q}$ contient b , avec $v(b') \geq 0$ pour tout $b' \in B^\circ$ et $v(b') > 0$ pour tout $b' \in \mathfrak{m}$. Mais noter que $B^{\circ\circ} \subset \mathfrak{m}$, car B est topologiquement local. Posons $\Delta := c\Gamma_v^*$ et $w := v^\Delta$ (notation du §10.1.2); d'après le théorème 10.12(i) on a $w \in \mathrm{Spa} \underline{B}$, et évidemment $w(b) = +\infty$. $\square$

Théorème 12.5. Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde; tout sous-ensemble rationnel de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est un l-domaine affinoïde.

Démonstration. Soit $R := \mathrm{Spa} \underline{A} \cap R_A(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0})$ pour $f_0, \dots, f_n \in A$ engendrant un idéal ouvert de A ; soient aussi $A_0 \subset A^+$ un sous-anneau de définition de A (corollaire 9.72(ii)), et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. La proposition 9.85 associe à $T := \{f_0, \dots, f_n\}$ un anneau de Huber $(A[X], \mathcal{T}_T)$ avec sous-anneau de définition $A_0[TX]$; munissons la A -algèbre

$$A(\frac{f_\bullet}{f_0}) := A[X]/(1 - f_0 X)$$

de la topologie induite par $\mathcal{T}_T$ via la projection naturelle. Alors $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$ est un anneau de Huber, et l'homomorphisme structurel $\bar{h} : A \rightarrow A(\frac{f_\bullet}{f_0})$ est adique, d'après la proposition 9.85(ii,iii) et l'exercice 9.81(v). Noter que la A -algèbre sous-jacente à $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$ est la localisation $A[\frac{1}{f_0}]$ de A , et sous cette identification l'image de $A_0[TX]$ dans $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$ correspond

à $A_0[\frac{f_\bullet}{f_0}] := A_0[\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}] \subset A[\frac{1}{f_0}]$; ainsi, $A_0[\frac{f_\bullet}{f_0}]$ est un sous-anneau de définition de $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$ (voir la solution de l'exercice 9.81(v)). En outre, la partie $\{f_1/f_0, \dots, f_n/f_0\}$ est à puissances bornées dans $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$, et compte tenu de la proposition 9.85(iv) on trouve que pour tout anneau de Huber B et tout homomorphisme continu d'anneaux $g : A \rightarrow B$ avec $g(f_0) \in B^\times$ et tel que la partie $\{g(f_i)/g(f_0) \mid i = 1, \dots, n\}$ soit à puissances bornées dans B , il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux $g' : A(\frac{f_\bullet}{f_0}) \rightarrow B$ tel que $g' \circ \bar{h} = g$.

D'après le lemme 9.77(iv), $\bar{h}(A^\circ) \subset A(\frac{f_\bullet}{f_0})^\circ$, par suite $C := A^+[\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}]$ est un sous-anneau de $A(\frac{f_\bullet}{f_0})^\circ$, et il est ouvert dans $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$, car il contient $A_0[\frac{f_\bullet}{f_0}]$. On dénote par $A(\frac{f_\bullet}{f_0})^+ \subset A(\frac{f_\bullet}{f_0})^\circ$ la fermeture intégrale de C dans $A(\frac{f_\bullet}{f_0})$. On obtient ainsi un anneau affinoïde bien défini

$$\underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0}) := (A(\frac{f_\bullet}{f_0}), A(\frac{f_\bullet}{f_0})^+)$$

et $\bar{h}$ est un morphisme adique d'anneaux affinoïdes $\underline{A} \rightarrow \underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0})$. Posons

$$\underline{A}_R := \underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0})_{\text{loc}}$$

et soit $j_R : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_R$ la composition de $\bar{h}$ avec la localisation $\underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0}) \rightarrow \underline{A}_R$. Montrons que $(\underline{A}_R, j_R)$ est un couple universel pour le foncteur $\mathbf{h}_R : \mathbf{l.Afd} \rightarrow \mathbf{Ens}$. En effet, soit $\underline{B} := (B, B^+) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{l.Afd})$, et $\phi \in \mathbf{h}_R(\underline{B})$; on remarque :

Affirmation 12.6. $\phi(f_0) \in B^\times$ et $\phi(f_i)/\phi(f_0) \in B^+$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve : Par hypothèse, on a $v \circ \phi \in R$ pour tout $v \in \mathbf{Spa} \underline{B}$, donc $v(\phi(f_0)) \neq +\infty$ pour tout tel v , et ainsi $\phi(f_0) \in B^\times$, d'après le lemme 12.4. De même, on a $v(\phi(f_i)/\phi(f_0)) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbf{Spa} \underline{B}$, d'où $\phi(f_i)/\phi(f_0) \in B^+$, d'après la proposition 10.21. $\diamond$

Par ce qui précède, et par l'observation 12.6, le morphisme ϕ se factorise à travers j_R et un unique morphisme $\bar{\phi} : \underline{A}_R \rightarrow \underline{B}$ d'anneaux affinoïdes topologiquement locaux. Remarquons ensuite :

Affirmation 12.7. L'application $\mathbf{Spa}(j_R) : \mathbf{Spa} \underline{A}_R \rightarrow \mathbf{Spa} \underline{A}$ établit un homéomorphisme entre $\mathbf{Spa} \underline{A}_R$ et la partie R , munie de la topologie induite par $\mathbf{Spa} \underline{A}$.

Preuve : Au vu de l'exercice 12.1(i), il suffit de montrer que $\mathbf{Spa}(\bar{h})$ induit un homéomorphisme entre $\mathbf{Spa} \underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0})$ et R . Or, la topologie de $\mathbf{Spa} \underline{A}(\frac{f_\bullet}{f_0})$ est induite par l'inclusion dans $\mathbf{Spv} A[1/f_0]$, et celle de $\mathbf{Spa} \underline{A}$ est induite par l'inclusion dans $\mathbf{Spv} A$; compte tenu de l'exercice 8.104(i), il suffit alors de vérifier que R est l'image de $\mathbf{Spa}(\bar{h})$, et par construction, il est clair que l'image de $\mathbf{Spa}(\bar{h})$ est contenue dans R . Réciproquement, soit $v \in R$; comme $v(f_0) \neq +\infty$, la valuation v se prolonge en une unique valuation w de $A[1/f_0]$, et il est clair que $w(a) \geq 0$ pour tout $a \in A(\frac{f_\bullet}{f_0})^+$. Le lemme 10.4(i), nous ramène à vérifier que $w(a)$ est cofinal dans $\Gamma_w = \Gamma_v$ pour tout $a \in A(\frac{f_\bullet}{f_0})^\circ$; mais pour tout tel a il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \in I_0 \cdot A_0[\frac{f_\bullet}{f_0}]$, donc on peut supposer que $a = bf_i/f_0$ pour quelque $b \in I_0$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Mais $w(b) = v(b)$ est cofinal dans Γ_v , et $w(f_i/f_0) \geq 0$, d'où l'assertion. $\diamond$

L'observation 12.7 montre que, réciproquement, pour tout morphisme d'anneaux affinoïdes $\phi : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ qui se factorise à travers $\underline{A}_R$, l'image de $\mathbf{Spa} \phi$ est contenue dans R , et cela achève la preuve du théorème. $\square$

Problème 12.8. Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, $\star \in \{\mathbf{l}, \mathbf{c}\}$, U un $\star$ -domaine affinoïde de $\mathbf{Spa} \underline{A}$, et $\phi_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$ un morphisme d'anneaux affinoïdes $\star$ -représentant U .

- (i) Montrer que $\mathbf{Spa} \phi_U$ se factorise à travers un homéomorphisme $\mathbf{Spa} \underline{A}_U \xrightarrow{\sim} U$.
- (ii) En déduire que U est une partie compacte de $\mathbf{Spa} \underline{A}$.
- (iii) Montrer que ϕ_U est un morphisme adique.
- (iv) Montrer que les $\star$ -domaines affinoïdes forment un site de $\mathbf{Spa} \underline{A}$.

Définition 12.9. On a vu que pour $\star \in \{\mathbf{l}, \mathbf{c}\}$, les $\star$ -domaines affinoïdes forment un site de l'espace spectral $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ (problème 12.8(iv)), que l'on notera :

$$\star.\mathrm{Dom}(\underline{A}).$$

D'après le théorème 12.5, ce site contient tous les sous-ensembles rationnels, qui eux même forment le *site rationnel de X* , que l'on notera :

$$\mathrm{Rat}(\underline{A})$$

et qui est, à certains égards, mieux adapté aux considérations de cette section.

12.1.2. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $\star \in \{\mathbf{l}, \mathbf{c}\}$. Pour tout $\star$ -domaine affinoïde U de $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$, choisissons $\underline{A}_U^\star := (A_U^\star, A_U^{\star+}) \in \mathrm{Ob}(\star.\mathrm{Afd})$ avec un morphisme d'anneaux affinoïdes $\rho_U^\star : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U^\star$ $\star$ -représentant U ; ainsi, un morphisme d'anneaux affinoïdes $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ avec $\underline{B} \in \mathrm{Ob}(\star.\mathrm{Afd})$ se factorise à travers $\rho_U^\star$ si et seulement si l'image de $\mathrm{Spa} f$ est contenue dans U , et dans ce cas la factorisation est unique. De plus, $\rho_U^\star$ est un morphisme adique et $\mathrm{Spa} \rho_U^\star$ induit par restriction un homéomorphisme $\mathrm{Spa} \underline{A}_U^\star \xrightarrow{\sim} U$, pour la topologie de U induite par X (problème 12.8(i,iii)). Par suite, pour toute inclusion $U' \subset U$ de $\star$ -domaines affinoïdes de $\mathrm{Spa} \underline{A}$, il existe un unique morphisme d'anneaux affinoïdes

$$\rho_{UU'}^\star : \underline{A}_U^\star \rightarrow \underline{A}_{U'}^\star \quad \text{tel que} \quad \rho_{UU'}^\star \circ \rho_U^\star = \rho_{U'}^\star.$$

Si $U'' \subset U'$ est un troisième $\star$ -domaine affinoïde, il vient alors $\rho_{UU''}^\star = \rho_{U''U'}^\star \circ \rho_{UU'}^\star$, et $\rho_{UU}^\star = \mathrm{Id}_{\underline{A}_U^\star}$. On a donc un couple de préfaisceaux sur le site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})$:

$$A_\bullet^{\star+} \subset A_\bullet^\star.$$

Pour toute partie ouverte $U \subset \mathrm{Spa} \underline{A}$, notons en outre par $\mathrm{Rat}(\underline{A})/U$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rat}(\underline{A})$ avec $\mathrm{Ob}(\mathrm{Rat}(\underline{A})/U) := \{W \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rat}(\underline{A})) \mid W \subset U\}$, et définissons de même la sous-catégorie pleine $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})/U$ de $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})$. Evidemment, $\mathrm{Rat}(\underline{A})/U$ et $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})/U$ sont deux sites du sous-espace U de X ; pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur le site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})$ (resp. $\mathrm{Rat}(\underline{A})$), on notera par $\mathcal{F}|_U$ la restriction de $\mathcal{F}$ au site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})/U$ (resp. au site $\mathrm{Rat}(\underline{A})/U$).

12.1.3. Dans la situation du §12.1.2, soient $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme *adique* d'anneaux affinoïdes, $Y := \mathrm{Spa} \underline{B}$, et $\phi := \mathrm{Spa} f : Y \rightarrow X$. Pour tout $\star$ -domaine affinoïde U de X , le morphisme $\rho_U^\star : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U^\star$ est adique (problème 12.8(iii)), donc la somme amalgamée $\underline{B} \sqcup_{(f, \rho_U^\star)} \underline{A}_U^\star$ est représentée dans Afd par un anneau affinoïde $\underline{B}_U$ (exercice 12.1(iii)). Par comparaison des propriétés universelles, on vérifie aisément que si $\star = \mathbf{l}$ (resp. si $\star = \mathbf{c}$), alors $(\underline{B}_U)_{\mathrm{loc}}$ (resp. $\widehat{\underline{B}}_U$) $\star$ -représente la partie $\phi^{-1}U$ de Y : les détails sont laissés aux soins du lecteur. On a ainsi un foncteur :

$$\star.\mathrm{Dom}(f) : \star.\mathrm{Dom}(\underline{A}) \rightarrow \star.\mathrm{Dom}(\underline{B}) \quad U \mapsto \phi^{-1}U.$$

En outre, puisque $\phi(\phi^{-1}U) \subset U$, il existe un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $f_U^\star : \underline{A}_U^\star \rightarrow \underline{B}_{\phi^{-1}U}^\star$ faisant commuter le diagramme d'anneaux affinoïdes :

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{f} & \underline{B} \\ \rho_U^\star \downarrow & & \downarrow \rho_{\phi^{-1}U}^\star \\ \underline{A}_U^\star & \xrightarrow{f_U^\star} & \underline{B}_{\phi^{-1}U}^\star \end{array}$$

Cela définit un morphisme de préfaisceaux sur le site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})$:

$$\phi^{\star\flat} : A_\bullet^\star \rightarrow \phi_\star B_\bullet^\star := B_\bullet^\star \circ \star.\mathrm{Dom}(f)^{\mathrm{op}} \quad U \mapsto (f_U^\star : A_U^\star \rightarrow B_{\phi^{-1}U}^\star).$$

Proposition 12.10. (i) Dans la situation du §12.1.3, le foncteur $\star.\text{Dom}(f)$ induit par restriction un foncteur

$$\text{Rat}(f) : \text{Rat}(\underline{A}) \rightarrow \text{Rat}(\underline{B}) \quad U \mapsto \phi^{-1}U.$$

(ii) Si $U \subset X$ est un sous-ensemble rationnel (resp. un $\star$ -domaine affinoïde), le foncteur $\star.\text{Dom}(\rho_U^*)$ induit par restriction un isomorphisme de catégories

$$\text{Rat}(\rho_U^*)|_U : \text{Rat}(\underline{A})/U \xrightarrow{\sim} \text{Rat}(\underline{A}_U^*) \quad (\text{resp. } \star.\text{Dom}(\underline{A})/U \xrightarrow{\sim} \star.\text{Dom}(\underline{A}_U^*)).$$

(iii) La complétion $j : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$ induit les isomorphismes de catégories :

$$\text{c.Dom}(j) : \text{c.Dom}(\underline{A}) \xrightarrow{\sim} \text{c.Dom}(\widehat{\underline{A}}) \quad \text{Rat}(j) : \text{Rat}(\underline{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Rat}(\widehat{\underline{A}}).$$

(iv) La localisation $i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{\text{loc}}$ induit les isomorphismes de catégories :

$$\text{l.Dom}(i) : \text{l.Dom}(\underline{A}) \xrightarrow{\sim} \text{l.Dom}(\underline{A}_{\text{loc}}) \quad \text{Rat}(i) : \text{Rat}(\underline{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Rat}(\underline{A}_{\text{loc}}).$$

Démonstration. Soient $A_0 \subset A^+$ un sous-anneau de définition de A (corollaire 9.72(ii)), $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, $a_1, \dots, a_t$ un système de générateurs de I_0 .

(i) : Cela est déjà connu, d'après l'exercice 10.13(i).

(ii) : Soit U un $\star$ -domaine affinoïde ; noter que $\rho_U^* : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U^*$ est un morphisme adique (problème 12.8(iii)), donc $\star.\text{Dom}(\rho_U^*)$ est bien défini. Or, soit $V \subset U$ une partie ouverte ; en raisonnant comme dans la preuve du lemme 5.31(iv), on voit que V est un $\star$ -domaine affinoïde de $X \Leftrightarrow V' := (\text{Spa } \rho_U^*)^{-1}(V)$ est un $\star$ -domaine affinoïde de $X_U := \text{Spa } \underline{A}_U^*$, et un morphisme $\rho_{V'} : \underline{A}_U^* \rightarrow \underline{A}_{V'}^*$ $\star$ -représente $V' \Leftrightarrow \rho_{V'} \circ \rho_U^* : \underline{A}_U^* \rightarrow \underline{A}_{V'}^*$ $\star$ -représente V , d'où l'isomorphisme souhaité pour $\star.\text{Dom}(\underline{A})/U$.

Ensuite, soit U un sous-ensemble rationnel ; on considère d'abord le cas où $\star = \text{l}$. On sait déjà que $\text{Spa } \rho_U^{\text{l}}$ induit un homéomorphisme $\text{Spa } \underline{A}_U^{\text{l}} \xrightarrow{\sim} U$, pour la topologie de U induite par X (problème 12.8(i)). Compte tenu de (i), il ne reste alors qu'à vérifier que si $W \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{A}_U^{\text{l}}))$, alors $(\text{Spa } \rho_U^{\text{l}})(W) \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{A}))$. Disons que

$$W = R_{A_U} \left(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0} \right) \cap \text{Spa } \underline{A}_U^{\text{l}}$$

pour $g_0, \dots, g_m \in A_U^{\text{l}}$ engendrant un idéal ouvert ; comme A_U^{l} est une localisation de A , on peut supposer qu'il existe $h_0, \dots, h_m \in A$ avec $g_i = \rho_U(h_i)$ pour $i = 0, \dots, m$, de sorte que $(\text{Spa } \rho_U^{\text{l}})(W) = R_A \left(\frac{h_1}{h_0}, \dots, \frac{h_m}{h_0} \right) \cap U$. Posons $R_k := R_A \left(\frac{a_1^k}{h_0}, \dots, \frac{a_t^k}{h_0} \right) \cap X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; d'après le lemme 10.4(i), on a $R_k \subset R_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $(\text{Spa } \rho_U^{\text{l}})(W) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$. Comme W est compact, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ avec $(\text{Spa } \rho_U^{\text{l}})(W) \subset R_k$. Par suite, $W_k := R_A \left(\frac{h_1}{h_0}, \dots, \frac{h_m}{h_0} \right) \cap R_k$ est un sous-ensemble rationnel de X , et $(\text{Spa } \rho_U^{\text{l}})(W) = U \cap W_k$.

(iii) : On sait déjà que $\text{Spa}(j)$ est un homéomorphisme (exercice 12.1(i)) ; l'isomorphisme avec $\text{c.Dom}(\widehat{\underline{A}})$ est alors une conséquence immédiate : plus précisément, si $W \subset \text{Spa } \widehat{\underline{A}}$ est un c-domaine affinoïde, c-représenté par le morphisme $\rho_W^{\text{c}} : \widehat{\underline{A}} \rightarrow \widehat{\underline{A}}_W^{\text{c}}$, on voit aisément que $\rho_W^{\text{c}} \circ j : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}_W^{\text{c}}$ c-représente $(\text{Spa } j)(W)$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). En outre, j est adique ; au vu de (i), il ne reste qu'à montrer que pour tout $W \in \text{Ob}(\text{Rat}(\widehat{\underline{A}}))$, la partie $(\text{Spa } j)(W)$ est un sous-ensemble rationnel de X . Disons que $W = R_{\widehat{A}} \left(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0} \right) \cap \text{Spa } \widehat{\underline{A}}$ pour $g_0, \dots, g_m \in \widehat{A}$ engendrant un idéal ouvert J de $\widehat{A}$. On remarque d'abord :

Affirmation 12.11. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que toute suite $b_0, \dots, b_m \in \widehat{A}$ avec $b_i \in g_i + I_0^q \widehat{A}_0$ pour $i = 0, \dots, m$ engendre un idéal ouvert, et $W = R_{\widehat{A}} \left(\frac{b_1}{b_0}, \dots, \frac{b_m}{b_0} \right) \cap \text{Spa } \widehat{\underline{A}}$.

Preuve : Soient $r \in \mathbb{N}$ tel que $J_0 := I_0^r \widehat{A}_0 \subset J$, et $c_1, \dots, c_n$ une système fini de générateurs de J_0 . Alors toute suite $d_1, \dots, d_n \in \widehat{A}_0$ avec $d_i \in c_i + I_0 J_0$ pour $i = 1, \dots, n$ engendre l'idéal J_0 (corollaire 9.61(iii)). Pour $i = 1, \dots, n$ soient $x_{i0}, \dots, x_{im} \in \widehat{A}$ avec $c_i = \sum_{j=0}^m g_j x_{ij}$, et choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^p x_{ij} \subset I_0 J_0$ pour $i = 1, \dots, n$ et

$j = 0, \dots, m$. Pour toute suite $b_0, \dots, b_m \in \widehat{A}$ avec $b_j \in g_j + I_0^p \widehat{A}_0$ pour tout $j = 0, \dots, m$, il vient $\sum_{j=0}^m b_j x_{ij} \in c_i + I_0 J_0$ pour $i = 1, \dots, n$, donc toute telle suite engendre un idéal ouvert de $\widehat{A}$.

Ensuite, en raisonnant comme dans la preuve de (ii), on trouve $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$R_i := R_{\widehat{A}}\left(\frac{g_0}{g_i}, \dots, \frac{g_m}{g_i}\right) \cap \mathrm{Spa} \widehat{A} \subset R_{\widehat{A}}\left(\frac{j(a_1^k)}{g_i}, \dots, \frac{j(a_t^k)}{g_i}\right) \quad \forall i = 0, \dots, m.$$

Soit $q := \max(p, kt + 1)$; puisque $\widehat{A}_0 \subset \widehat{A}^+$, il s'ensuit aisément que :

$$(*) \quad v(x) > v(g_i) \quad \forall x \in I_0^q \widehat{A}_0, \forall i = 0, \dots, m, \forall v \in R_i.$$

Or, soient $b_0, \dots, b_m \in \widehat{A}$ avec $b_i \in g_i + I_0^q \widehat{A}_0$ pour $i = 0, \dots, m$, et posons $W' := R_{\widehat{A}}\left(\frac{b_1}{b_0}, \dots, \frac{b_m}{b_0}\right) \cap \mathrm{Spa} \widehat{A}$; soit aussi $v \in \mathrm{Spa} \widehat{A}$. Si $v \in W = R_0$, on calcule :

$$v(b_i) = v(g_i + (b_i - g_i)) \geq \min(v(g_i), v(b_i - g_i)) \geq v(g_0) = v(g_0 + (b_0 - g_0)) = v(b_0)$$

(l'avant-dernière égalité suit de $(*)$ et de la remarque 8.8(ii)), d'où $v \in W'$. Ensuite, supposons que $v \notin W$; considérons d'abord le cas où $v(g_i) = +\infty$ pour tout $i = 0, \dots, m$; alors v est non analytique, et par suite $v(g_0 - b_0) = +\infty$, donc aussi $v(b_0) = +\infty$, d'où $v \notin W'$. En dernier lieu, si $v(g_i) \neq +\infty$ pour quelque $i \in \{0, \dots, m\}$, on a $v \in R_j$ pour quelque $j \in \{0, \dots, m\}$, et on doit avoir $v(g_0) > v(g_j)$, car $v \notin W$; en outre, $v(b_i - g_i) > v(g_j)$ pour $i = 0, \dots, m$. On calcule :

$$v(b_0) = v(g_0 + (b_0 - g_0)) \geq \min(v(g_0), v(b_0 - g_0)) > v(g_j) = v(g_j + (b_j - g_j)) = v(b_j)$$

d'où encore $v \notin W'$. $\diamond$

D'après l'observation 12.11, il existe $b_0, \dots, b_m \in A$ tel que $W = R_{\widehat{A}}\left(\frac{j(b_1)}{j(b_0)}, \dots, \frac{j(b_m)}{j(b_0)}\right) \cap \mathrm{Spa} \widehat{A}$; en outre, en raisonnant comme dans la preuve de (ii) on trouve $k \in \mathbb{N}$ tel que $v(a_i^k) \geq v(b_0)$ pour tout $i = 1, \dots, t$ et tout $v \in (\mathrm{Spa} j)(W)$. Par suite $(\mathrm{Spa} j)(W) = R_{\widehat{A}}\left(\frac{b_1}{b_0}, \dots, \frac{b_m}{b_0}, \frac{a_1^k}{b_0}, \dots, \frac{a_t^k}{b_0}\right) \cap X$, d'où l'assertion. On peut maintenant compléter aussi la preuve de (ii) : il nous restait à exhiber l'isomorphisme de catégories $\mathrm{Rat}(\underline{A}_U^c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rat}(\underline{A})/U$; mais compte tenu de l'exercice 9.88(iv), on vient d'exhiber l'isomorphisme de catégories $\mathrm{Rat}(\underline{A}_U^c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rat}(\underline{A}_U^!)$, et il suffit alors de le composer avec l'isomorphisme $\mathrm{Rat}(\underline{A}_U^!) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rat}(\underline{A})/U$ déjà connu.

(iv) : D'après l'exercice 12.1(i), $\mathrm{Spa}(i)$ est un homéomorphisme; comme dans la preuve de la première assertion de (iii), l'assertion pour $\mathrm{l.Dom}(i)$ suit aussitôt. En dernier lieu, soit $j_{\mathrm{loc}} : \underline{A}_{\mathrm{loc}} \rightarrow \widehat{A}$ la complétion de $\underline{A}_{\mathrm{loc}}$ (exercice 9.88(iv)); noter que $j = j_{\mathrm{loc}} \circ i$, d'où $\mathrm{Rat}(j) = \mathrm{Rat}(j_{\mathrm{loc}}) \circ \mathrm{Rat}(i)$. Mais on sait déjà que $\mathrm{Rat}(j)$ et $\mathrm{Rat}(j_{\mathrm{loc}})$ sont des isomorphismes, donc de même pour $\mathrm{Rat}(i)$. $\square$

Remarque 12.12. (i) Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, U un $\star$ -domaine affinoïde de $X := \mathrm{Spa}(\underline{A})$, $\star$ -représenté par le morphisme $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$, et posons $\phi := \mathrm{Spa}(f) : \mathrm{Spa}(\underline{B}) \rightarrow X$; une inspection de la preuve de la proposition 12.10(ii) montre que le morphisme de préfaisceaux $\phi^{\star b} : A_{\star}^{\bullet} \rightarrow \phi_*(B_{\star}^{\bullet})$ sur le site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})$ se restreint en un isomorphisme $\phi|_U^{\star b} : (A_{\star}^{\bullet})|_U \xrightarrow{\sim} \phi_*(B_{\star}^{\bullet})|_U$ sur le site $\star.\mathrm{Dom}(\underline{A})/U$.

(ii) De même, la preuve de la proposition 12.10(iii,iv) montre que la complétion $j : \underline{A} \rightarrow \widehat{A}$ et la localisation topologique $i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{\mathrm{loc}}$ induisent des isomorphismes

$$\mathrm{Spa}(j)^{\mathrm{cb}} : A_{\bullet}^c \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(j)_*(\widehat{A})_{\bullet}^c \quad \mathrm{Spa}(i)^{\mathrm{lb}} : A_{\bullet}^! \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(i)_*(A_{\mathrm{loc}})_{\bullet}^!$$

sur les sites $\mathrm{c.Dom}(\underline{A})$ et respectivement $\mathrm{l.Dom}(\underline{A})$.

(ii) Signalons que la complétion $j : \underline{A} \rightarrow \widehat{A}$ induit un foncteur plein et fidèle $\mathrm{l.Dom}(j) : \mathrm{l.Dom}(\underline{A}) \rightarrow \mathrm{l.Dom}(\widehat{A})$, mais ce foncteur n'est pas toujours une équivalence de catégories; c'est l'une des raisons pour lesquelles on préfère utiliser dans la suite le site $\mathrm{Rat}(\underline{A})$. Alternativement, on pourrait utiliser le site $\mathrm{c.Dom}(\underline{A})$, qui est également invariant par complétion et par localisation topologique : ce site serait adéquat pour la discussion des

espaces affinoïdes associés aux anneaux universellement analytiquement noethériens que l'on introduira dans la section suivante ; toutefois, le site $\mathbf{c.Dom}(\underline{A})$ n'est pas bien adapté aux anneaux stablement uniformes (voir le §12.4.5), et en particulier, à l'étude des espaces perfectoides.

12.1.4. *Préfaisceaux adiques.* Or, prenons $\star = \mathbf{c}$, et noter que $A_{\bullet}^{\mathbf{c}}$ et $A_{\bullet}^{\mathbf{c}+}$ sont à valeurs dans la sous-catégorie pleine des anneaux topologiques *complets et séparés* :

$$\mathbb{Z} - \mathbf{c.AlgTop} \subset \mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop}.$$

On va d'abord désigner par $A_{\bullet}^r$ (resp. par $A_{\bullet}^{r+}$) la restriction de $A_{\bullet}^{\mathbf{c}}$ (resp. de $A_{\bullet}^{\mathbf{c}+}$) au site $\mathbf{Rat}(\underline{A})$; ensuite, on prolonge canoniquement $A_{\bullet}^r$ et $A_{\bullet}^{r+}$ en des préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{O}}_X^+ \subset \widehat{\mathcal{O}}_X : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{c.AlgTop} \quad \text{sur } X := \mathbf{Spa} \underline{A}$$

(voir les exercices 5.35(i), 9.4(ii) et 9.31). On appelle $\widehat{\mathcal{O}}_X$ le *préfaisceau des fonctions adiques*, et $\widehat{\mathcal{O}}_X^+$ le *préfaisceau des fonctions adiques entières sur X* . Rappelons que $\widehat{\mathcal{O}}_X$ est caractérisé (à isomorphisme unique près) par la condition suivante : pour toute partie ouverte $U \subset X$, le cône des restrictions

$$(\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(V) = A_V^r \mid V \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Rat}(\underline{A})/U))$$

est universel dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathbf{c.AlgTop}$, et de même on caractérise $\widehat{\mathcal{O}}_X^+$.

• Pour tout $x \in X$, soient $\mathcal{U}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X , partiellement ordonné par inclusion, et $(\rho_{U,x} : \widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \mid U \in \mathcal{U}_x^{\mathrm{op}})$ le co-cône universel ; évidemment la partie $\mathcal{E}_x := \mathbf{Ob}(\mathbf{Rat}(\underline{A})) \cap \mathcal{U}_x$ est finale dans $\mathcal{U}_x$ (voir l'exercice 2.35), donc on a un isomorphisme naturel de A -algèbres :

$$\lim_{U \in (\mathcal{E}_x)^{\mathrm{op}}} A_U^{\mathbf{c}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

D'autre part, d'après le problème 12.8(i) et le lemme 10.76(i), pour tout $U \in \mathcal{E}_x$ il existe une unique valuation continue $\widehat{x}_U : A_U^{\mathbf{c}} \rightarrow \Gamma_{x\circ}$ telle que $\widehat{x}_U \circ \rho_U^{\mathbf{c}} = x$ et $\widehat{x}_U(a) \geq 0$ pour tout $a \in A_U^{\mathbf{c}+}$. Par suite, toute inclusion $U' \subset U$ d'éléments de $\mathcal{E}_x$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\rho_U^{\mathbf{c}}} & A_U^{\mathbf{c}} & \xrightarrow{\rho_{U,U'}^{\mathbf{c}}} & A_{U'}^{\mathbf{c}} \\ & \searrow x & \downarrow \widehat{x}_U & \swarrow \widehat{x}_{U'} & \\ & & \Gamma_{x\circ} & & \end{array}$$

Il existe alors une unique application

$$v_x : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \Gamma_{x\circ} \quad \text{telle que} \quad v_x \circ \rho_{U,x} = \widehat{x}_U \quad \forall U \in \mathcal{E}_x$$

et on voit aisément que v_x est une valuation : les détails sont laissés au lecteur.

Exemple 12.13. (i) Soit $U \subset X := \mathbf{Spa} \underline{A}$ un sous-ensemble rationnel $\mathbf{c}$ -représenté par le morphisme $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$, et posons $X_U := \mathbf{Spa} \underline{B}$; d'après la proposition 12.10(ii), $\phi := \mathbf{Spa}(f)$ induit un isomorphisme $\mathbf{Rat}(f)|_U : \mathbf{Rat}(\underline{A})/U \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rat}(\underline{B})$. Avec la remarque 12.12(i), il s'ensuit que $\phi|_U^{\mathbf{cb}}$ se restreint en un isomorphisme

$$\phi|_U^{\mathbf{rb}} : (A_{\bullet}^r)|_U \xrightarrow{\sim} \phi_*(B_{\bullet}^r)|_U := B_{\bullet}^r \circ \mathbf{Rat}(f)|_U^{\mathrm{op}}$$

de préfaisceaux sur $\mathbf{Rat}(\underline{A})/U$. On déduit une identification naturelle de $\widehat{\mathcal{O}}_{X_U}$ avec $\phi^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_X$, et sous cette identification, $\phi^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_X^+$ correspond à $\widehat{\mathcal{O}}_{X_U}^+$.

(ii) De même, soit $Y := \mathbf{Spa} \widehat{\underline{A}}$; d'après l'exercice 12.1(i) la complétion $j : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$ induit un homéomorphisme $\mathbf{Spa}(j) : Y \xrightarrow{\sim} X$, et avec la proposition 12.12(iii) on déduit un isomorphisme naturel $\widehat{\mathcal{O}}_X \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Spa} j)_* \widehat{\mathcal{O}}_Y$ de préfaisceaux sur X ; en outre, sous cette identification, $\widehat{\mathcal{O}}_X^+$ correspond à $(\mathbf{Spa} j)_* \widehat{\mathcal{O}}_Y^+$.

Proposition 12.14. Avec la notation du §12.1.4, on a :

- (i) $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un anneau local, et le support de v_x est son idéal maximal.
- (ii) $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^+ = \{a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \mid v_x(a) \geq 0\}$.
- (iii) $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^+$ est un anneau local, avec idéal maximal $\mathfrak{m}_x^+ := \{a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \mid v_x(a) > 0\}$.
- (iv) Pour tout sous-ensemble rationnel $U \subset X$ on a

$$\widehat{\mathcal{O}}_X^+(U) = \{a \in \widehat{\mathcal{O}}_X(U) \mid v_x(\rho_{U,x}(a)) \geq 0 \ \forall x \in U\}.$$

Démonstration. (i) : Soit $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ tel que $v_x(a) \neq +\infty$, et soit $U \in \mathcal{E}_x$ tel que a soit dans l'image de $\rho_{U,x} : A_U^c \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Au vu de l'exemple 12.13(i), quitte à remplacer $\underline{A}$ par $\underline{A}_U$, on peut alors supposer que l'on a $b \in A$ avec $\rho_{X,x}^c(b) = a$. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, engendré par une suite finie $a_1, \dots, a_n \in A_0$. D'après le lemme 10.4(i), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x(a_i^k) \geq x(b)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, i.e. $x \in V := R_A(\frac{a_1^k}{b}, \dots, \frac{a_n^k}{b}) \cap X$, et noter que la suite $b, a_1^k, \dots, a_n^k$ engendre un idéal ouvert de A ; ainsi, $V \in \mathcal{E}_x$ et $\rho_V^c(b) \in (A_V^c)^\times$, par suite $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^\times$, d'où l'assertion.

(ii) : Par construction, il est clair que $v_x(a) \geq 0$ pour tout $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^+$. Réciproquement, soit $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ vérifiant cette condition; en raisonnant comme ci-dessus, on se ramène au cas où $a = \rho_{X,x}(b)$ pour quelque $b \in A$, de sorte que $x(b) \geq 0$, i.e. $x \in V := R_A(\frac{b}{1}) \cap X$, et par construction il vient $\rho_V^c(b) \in A_V^{c+}$, d'où $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^+$.

(iii) découle aussitôt de (i) et (ii).

(iv) suit du problème 12.8(i) et de la proposition 10.21(i). $\square$

12.1.5. Considérons maintenant la catégorie $\mathcal{V}$ dont les objets sont les données

$$\underline{T} := (T, \widehat{\mathcal{O}}_T, (v_t \mid t \in T))$$

constituées d'un espace topologique T , d'un faisceau $\widehat{\mathcal{O}}_T$ sur T à valeurs dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathbf{c.AlgTop}$, et pour tout $t \in T$, d'une valuation $v_t \in \mathrm{Spv}(\widehat{\mathcal{O}}_{T,t})$ de la fibre $\widehat{\mathcal{O}}_{T,t}$. Les morphismes $\phi : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T, (v_t \mid t \in T)) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S, (v_s \mid s \in S))$ de $\mathcal{V}$ sont les morphismes d'espaces annelés $\phi : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S)$ tels que $v_t \circ \phi_t^\sharp = v_{\phi(t)}$ pour tout $t \in T$ (où $\phi^\sharp : \phi^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_Y$ est l'adjoint de $\phi^\flat$: voir la remarque 5.39(iii)).

Remarque 12.15. (i) Soient $\underline{T} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ comme ci-dessus, $U \subset T$ une partie ouverte. Evidemment la donnée $U \times_T \underline{T} := (U, (\widehat{\mathcal{O}}_T)|_U, (v_t \mid t \in U))$ est aussi un objet de $\mathcal{V}$.

(ii) Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, et $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$; on vient d'associer à $\underline{A}$ une donnée $\underline{X} := (X, \widehat{\mathcal{O}}_X, (v_x \mid x \in X))$, où $\widehat{\mathcal{O}}_X$ est le préfaisceau des fonctions adiques sur X . On exhibera dans la suite des classes remarquables d'anneaux affinoïdes $\underline{A}$, tels que la donnée $\underline{X}$ soit un objet de $\mathcal{V}$; toutefois, pour un anneau affinoïde $\underline{A}$ quelconque, $\underline{X}$ n'est pas toujours un objet de $\mathcal{V}$; voici un contre-exemple :

Exercice 12.16. (Exemple de Rost) (i) Soit $A := \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]_{X_1 X_2}$, la localisation de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ qui rend X_1 et X_2 inversibles; soit $A_0 \subset A$ le sous-anneau engendré par $X_2, X_1 X_2, X_1^{-1} X_2, X_1^n X_2^{-n} X_3$ et $X_1^{-n} X_2^{-n} X_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique topologie $\mathcal{T}_A$ sur A tel que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un groupe (additif) topologique, et $(X_2^n A_0 \mid n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts. Montrer que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un anneau de Tate.

(ii) Soit $A^+ \subset A$ un sous-anneau d'éléments entiers quelconque, et posons $\underline{A} := (A, A^+)$. Montrer que le préfaisceau $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$ n'est pas un faisceau.

Définition 12.17. (i) Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, et $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$. Si le préfaisceau $\widehat{\mathcal{O}}_X$ des fonctions adiques sur X est un faisceau à valeurs dans $\mathbb{Z} - \mathbf{c.AlgTop}$, on dit que $(X, \widehat{\mathcal{O}}_X, (v_x \mid x \in X)) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ est l'espace adique associé à $\underline{A}$.

(ii) Un *espace adique affinoïde* est un objet de $\mathcal{V}$ isomorphe à l'espace adique associé à un anneau affinoïde.

(iii) Soit $\underline{T}$ un objet de $\mathcal{V}$. On dit que $\underline{T}$ est un *espace adique* si tout $t \in T$ admet un voisinage ouvert $U \subset T$ tel que $U \times_T \underline{T}$ soit un espace adique affinoïde.

(iv) Les espaces adiques sont les objets d'une sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ notée

EspAd.

Remarque 12.18. (i) Soient $\underline{T} := (T, \widehat{\mathcal{O}}_T, (v_t \mid t \in T))$ un espace adique, $U \subset T$ une partie ouverte; alors $U \times_T \underline{T}$ est un espace adique. Pour la preuve, on peut supposer que $\underline{T}$ soit affinoïde, et dans ce cas l'assertion découle de l'exemple 12.13(i).

(ii) Pour tout $t \in U$ et tout $a \in \widehat{\mathcal{O}}_T(U)$, soit $a_t \in \widehat{\mathcal{O}}_{T,t}$ le germe de a , et posons

$$\widehat{\mathcal{O}}_T^+(U) := \{a \in \widehat{\mathcal{O}}_T(U) \mid v_t(a_t) \geq 0 \ \forall t \in U\}.$$

Avec la proposition 12.14(iv), on déduit aisément que l'association : $U \mapsto \widehat{\mathcal{O}}_T^+(U)$ pour tout $U \in \text{Ouv}(T)$, définit un faisceau d'anneaux topologiques complets et séparés sur T , dont les fibres sont les anneaux locaux $\widehat{\mathcal{O}}_{T,t}^+ = \{a \in \widehat{\mathcal{O}}_{T,t} \mid v_t(a) \geq 0\}$, pour tout $t \in T$.

Ainsi, $(T, \widehat{\mathcal{O}}_T)$ et $(T, \widehat{\mathcal{O}}_T^+)$ sont des espaces localement annelés.

(iii) Avec la proposition 12.14(i) on voit que pour tout morphisme $\underline{\phi} := (\phi, \phi^b) : \underline{T} \rightarrow \underline{S}$ d'espaces adiques, et tout $t \in T$, l'homomorphisme $\phi_t^\sharp : \widehat{\mathcal{O}}_{S, \phi(t)} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{T,t}$ est local, et se restreint en un homomorphisme local $\phi_t^{\sharp+} : \widehat{\mathcal{O}}_{S, \phi(t)}^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{T,t}^+$. Ainsi, $\underline{\phi}$ induit deux morphismes d'espaces localement annelés

$$\underline{\phi} : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S) \quad \text{et} \quad \underline{\phi}^+ : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T^+) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S^+).$$

(iv) Réciproquement, soient $\underline{T}$ et $\underline{S}$ deux espaces adiques, et $\phi : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S)$ un morphisme d'espaces localement annelés induisant par restriction un morphisme d'espaces localement annelés $\phi^+ : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T^+) \rightarrow (S, \widehat{\mathcal{O}}_S^+)$; avec l'exercice 8.19 on voit aisément que ϕ est un morphisme $\underline{T} \rightarrow \underline{S}$ d'espaces adiques.

12.1.6. Fonctorialité de $\widehat{\mathcal{O}}_X$. Soient $f : \underline{A} := (A, A^+) \rightarrow \underline{B} := (B, B^+)$ un morphisme d'anneaux affinoïdes, $X := \text{Spa } \underline{A}$, $Y := \text{Spa } \underline{B}$, et $\phi := \text{Spa } f : Y \rightarrow X$. On suppose que $\widehat{\mathcal{O}}_X$ et $\widehat{\mathcal{O}}_Y$ soient des faisceaux d'anneaux topologiques, et on souhaite montrer que dans ce cas f induit naturellement un morphisme d'espaces adiques affinoïdes $\text{Spa } f := (\phi, \phi^b) : (Y, \widehat{\mathcal{O}}_Y, (v_y \mid y \in Y)) \rightarrow (X, \widehat{\mathcal{O}}_X, (v_x \mid x \in X))$.

• Si f est adique, le §12.1.3 associe à f un morphisme $\phi^{\text{cb}} : A_\bullet^c \rightarrow \phi_* B_\bullet^c$ de faisceaux sur $\text{c.Dom}(\underline{A})$, et la proposition 12.10(i) entraîne que ϕ^{cb} se restreint en un morphisme de faisceaux sur $\text{Rat}(\underline{A})$

$$\phi^{\text{rb}} : A_\bullet^r \rightarrow \phi_* B_\bullet^r := B_\bullet^r \circ \text{Rat}(f)^{\text{op}}.$$

Mais $\phi_* B_\bullet^r$ est la restriction à $\text{Rat}(\underline{A})$ du faisceau $\phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y$; d'après l'exercice 5.35(ii), ϕ^{rb} se prolonge ainsi en un unique morphisme de faisceaux d'anneaux topologiques

$$\phi^b : \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y.$$

• Si f n'est pas adique, le foncteur $\text{Rat}(f)$ n'est pas défini, mais on a toujours un morphisme naturel de faisceaux ϕ^b comme ci-dessus. En effet, pour tous $U \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{A}))$ et $V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\phi^{-1}U)$, le morphisme $\rho_V^c \circ f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}_V^c$ se factorise à travers ρ_U^c et un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $f_{UV} : \underline{A}_U^c \rightarrow \underline{B}_V^c$, d'où un cône

$$(f_{UV} : \underline{A}_U^c \rightarrow \underline{B}_V^c \mid V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\phi^{-1}U)).$$

D'autre part, le cône des restrictions $(\rho_{\phi^{-1}U, V} : \widehat{\mathcal{O}}_Y(\phi^{-1}U) \rightarrow B_V^c \mid V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\phi^{-1}U))$ est par construction universel dans la catégorie des anneaux topologiques complets et séparés. Ainsi, il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux topologiques

$$\phi_U^{\text{rb}} : A_U^c \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_Y(\phi^{-1}U) \quad \text{tel que} \quad \rho_{\phi^{-1}U, V} \circ \phi_U^{\text{rb}} = f_{UV} \quad \forall V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\phi^{-1}U).$$

Soit $\phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y^r$ la restriction de $\phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y$ au site $\text{Rat}(\underline{A})$; on voit aisément que l'association : $U \mapsto \phi_U^r$ définit un morphisme $A_*^r \rightarrow \phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y^r$ de faisceaux d'anneaux topologiques sur $\text{Rat}(\underline{A})$; ce dernier se prolonge alors en un unique morphisme $\phi^b : \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y$.

• En outre, soient $y \in Y$ et $x := \phi(y) \in X$; avec la notation du §12.1.4, il vient $\widehat{y}_V \circ f_{UV} = \widehat{x}_U$ pour tout $V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\phi^{-1}U)$; il s'ensuit aussitôt que

$$v_y \circ \phi_y^\# = v_x.$$

Cela achève la construction du morphisme d'espaces adiques affinoïdes (ϕ, ϕ^b) . Noter que $\phi_X^b : \Gamma(\widehat{\mathcal{O}}_X) \rightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{O}}_Y)$ est la complétion $\widehat{f} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ de f .

Proposition 12.19. *Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, $j_A : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$ la complétion, $X := \text{Spa } \underline{A}$ et $\widehat{X} := \text{Spa } \widehat{\underline{A}}$. Alors :*

(i) $\widehat{X} := (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}}, (v_x | x \in \widehat{X}))$ est un espace adique si et seulement s'il en est de même pour $\underline{X} := (X, \widehat{\mathcal{O}}_X, (v_x | x \in X))$.

(ii) Si $\underline{X}$ et $\widehat{X}$ sont des espaces adiques, j_A induit un isomorphisme d'espaces adiques

$$\text{Spa } j_A : \widehat{X} \xrightarrow{\sim} X.$$

(iii) Dans la situation du §12.1.6, l'application induite

$$\text{Afd}(\underline{A}, \underline{B}) \rightarrow \text{EspAd}(\underline{Y}, \underline{X}) \quad f \mapsto \text{Spa } f$$

est bijective, si $\underline{B}$ est complet et séparé.

(iv) Soient $\underline{T} := (T, \widehat{\mathcal{O}}_T, (v_t | t \in T))$ un espace adique, et $\underline{X} := \text{Spa } \underline{A}$ l'espace adique associé à un anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A^+)$. On a une bijection

$$\text{EspAd}(\underline{T}, \underline{X}) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathbb{Z} - \text{AlgTop}(A, \widehat{\mathcal{O}}_T(T)) \mid f(A^+) \subset \widehat{\mathcal{O}}_T^+(T)\} \quad (\phi, \phi^b) \mapsto \phi_X^b.$$

Démonstration. (i) et (ii) découlent aussitôt de l'exemple 12.13(ii).

(iii) : L'injectivité est claire, car le morphisme de faisceaux $\phi^b : \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \phi_* \widehat{\mathcal{O}}_Y$ induit l'homomorphisme $\widehat{f} = \phi_X^b$ sur les sections globales, et si $B = \widehat{B}$, on a $f = \widehat{f} \circ j_A$, avec la complétion $j_A : A \rightarrow \widehat{A}$. Ensuite, soient $\underline{\psi} := (\psi, \psi^b) : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ un morphisme d'espaces adiques, et $g := \psi_X^b : \widehat{A} \rightarrow B$; on doit vérifier que $\underline{\psi} = (\gamma, \gamma^b) := \text{Spa } g$. Or, soient $x \in X$ et $y := \psi(x)$; il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} & \xrightarrow{g} & B \\ \rho_{X,x} \downarrow & & \downarrow \rho_{Y,y} \\ \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} & \xrightarrow{\psi_x^\#} & \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \end{array}$$

et par définition on a $\text{Spv}(\psi_x^\#)(v_y) = v_x$, $\text{Spv}(\rho_{X,x})(v_x) = x$ et $\text{Spv}(\rho_{Y,y})(v_y) = y$. Par suite, $\text{Spa}(g)(y) = x$, et cela montre que $\psi = \gamma$. En dernier lieu, soient $U \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{A}))$ et $V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\psi^{-1}U)$; il vient un diagramme d'anneaux affinoïdes :

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{g} & \underline{B} \\ \rho_{X,U} \downarrow & & \downarrow \rho_{Y,V} \\ (\widehat{\mathcal{O}}_X(U), \widehat{\mathcal{O}}_X^+(U)) & \xrightarrow{\omega} & (\widehat{\mathcal{O}}_Y(V), \widehat{\mathcal{O}}_Y^+(V)) \end{array}$$

qui commute avec $\omega = \rho_{\psi^{-1}U,V} \circ \psi_U^b$ et aussi avec $\omega = \rho_{\psi^{-1}U,V} \circ \gamma_U^b$. Par la propriété universelle de $\rho_{X,U}$, il s'ensuit que $\rho_{\psi^{-1}U,V} \circ \psi_U^b = \rho_{\psi^{-1}U,V} \circ \gamma_U^b$ pour tous tels U et V ; mais par construction, le cône $(\rho_{\psi^{-1}U,V} | V \in \text{Ob}(\text{Rat}(\underline{B})/\psi^{-1}U))$ est universel, donc $\psi_U^b = \gamma_U^b$, et finalement $\psi^b = \gamma^b$.

(iv) : Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties ouvertes $U \subset T$ telles que $U \times_T \underline{T}$ soit un espace adique affinoïde; munissons $\mathcal{U}$ de l'ordre partiel donné par l'inclusion de parties ouvertes. Pour tout $U \in \mathcal{U}$ posons $\underline{B}_U := (\widehat{\mathcal{O}}_T(U), \widehat{\mathcal{O}}_T^+(U))$, et notons par $\rho_{T,U} : \widehat{\mathcal{O}}_T(T) \rightarrow$

$\widehat{\mathcal{O}}_T(U)$ l'application de restriction. Or, soit $f : A \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_T(T)$ un homomorphisme continu d'anneaux tel que $f(A^+) \subset \widehat{\mathcal{O}}_T^+(T)$; alors, $f_U := \rho_{T,U} \circ f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}_U$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes, pour tout $U \in \mathcal{U}$, et on voit aussitôt que $(f_U | U \in \mathcal{U}^{\text{op}})$ est un cône de sommet $\underline{A}$. On déduit un co-cône $(\text{Spa } f_U : U \times_T \underline{T} \rightarrow \underline{X} | U \in \mathcal{U})$ de morphismes d'espaces adiques. Si $U, U' \in \mathcal{U}$, l'ensemble $\mathcal{U}/U \cap U' := \{V \in \mathcal{U} | V \subset U \cap U'\}$ est un recouvrement de $U \cap U'$, et il vient $(\text{Spa } f_U)_{|V} = (\text{Spa } f_{U'})_{|V} : V \times_T \underline{T} \rightarrow \underline{X}$ pour tout $V \in \mathcal{U}/U \cap U'$; ainsi $(\text{Spa } f_U)_{|U \cap U'} = (\text{Spa } f_{U'})_{|U \cap U'}$. D'après le lemme 5.36(i), il existe alors un unique morphisme $\phi : (T, \widehat{\mathcal{O}}_T) \rightarrow (X, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ d'espaces annelés tel que $\phi|_U = \text{Spa } f_U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, et comme chaque $\text{Spa } f_U$ est un morphisme d'espaces adiques, il en est de même pour ϕ . $\square$

12.2. Anneaux analytiquement noethériens et algèbres de Tate. Evidemment, la théorie de la section précédente ne serait pas très utile, si l'on ne savait pas exhiber des exemples intéressants d'espaces adiques affinoïdes. La définition suivante, empruntée à l'article [29], introduit une classe d'anneaux topologiques qui nous fournira plein de tels exemples.

Définition 12.20. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, $\mathcal{T}_{A,I}$ la topologie I -adique de A , et M un A -module.

(i) On dit que M est un $(A, \mathcal{T}_{A,I})$ -module analytiquement de type fini, s'il existe un sous-module de type fini $N \subset M$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $I^n M \subset N$.

(ii) On dit que l'anneau topologique $(A, \mathcal{T}_{A,I})$ est analytiquement noethérien si tout idéal de A est analytiquement de type fini.

(iii) On dit que $(A, \mathcal{T}_{A,I})$ est universellement analytiquement noethérien, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'anneau des polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$ est analytiquement noethérien pour sa topologie I -adique.

(iv) On dit que $(A, \mathcal{T}_{A,I})$ vérifie la condition de Artin-Rees topologique, si pour tout A -module M de type fini, et tout sous-module $N \subset M$, la topologie I -adique de N est induite par la topologie I -adique de M .

(v) On dit que la I -torsion de M est bornée s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{Ann}_M(I^n) = \text{Ann}_M(I^{n+k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 12.21. (i) La définition 12.20(v) ne dépend que de la topologie $\mathcal{T}_{A,I}$: car si $J \subset A$ est un deuxième idéal de type fini avec $\mathcal{T}_{A,I} = \mathcal{T}_{A,J}$, alors il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $I^r \subset J^s \subset I$, d'où

$$\text{Ann}_M(I^k) \subset \text{Ann}_M(J^{sk}) \subset \text{Ann}_M(I^{rk}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aussi, la classe des A -modules analytiquement de type fini ne dépend que de $\mathcal{T}_{A,I}$, et de même pour la définition d'anneau analytiquement noethérien.

(ii) Par le théorème 6.65, tout anneau noethérien A est universellement analytiquement noethérien, pour la topologie I -adique de n'importe quel idéal $I \subset A$.

(iii) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, et $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -modules; si la I -torsion de M' et M'' est bornée, on voit aisément qu'il en est de même pour la I -torsion de M .

Proposition 12.22. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, $\mathcal{T}_{A,I}$ la topologie I -adique de A , et $\underline{X}_A := \text{Spec } A$. Considérons les conditions suivantes :

- (a) $(A, \mathcal{T}_{A,I})$ est un anneau analytiquement noethérien.
- (b) Le sous-schéma analytique $\underline{X}_A^{\text{an}}$ de $\underline{X}_A$ est noethérien (définition 9.79).
- (c) La I -torsion de tout A -module analytiquement de type fini est bornée.
- (d) La I -torsion de tout A -module cyclique est bornée.

Alors (a) $\Leftrightarrow$ ((b) et (c)) $\Leftrightarrow$ ((b) et (d)).

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $f_1, \dots, f_k$ un système fini de générateurs de I ; alors $(\text{Spec } A_{f_i} | i = 1, \dots, k)$ est un recouvrement de $\underline{X}_A$ par des sous-schémas ouverts affines,

donc il suffit de montrer que chaque localisation A_{f_i} est noethérienne. Or, tout idéal de A_{f_i} est de la forme J_{f_i} , pour un idéal J de A (lemme 3.30(i)), et par hypothèse il existe un idéal de type fini $J' \subset J$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $I^n(J/J') = 0$; par suite $(J/J')_{f_i} = 0$ (remarque 3.27(i)), i.e. $J_{f_i} = J'_{f_i}$, d'où l'assertion.

(c) $\Leftrightarrow$ (d) : Evidemment (c) $\Rightarrow$ (d), et si (d) est vérifiée, la remarque 12.21(iii) entraîne aussitôt que la I -torsion de tout A -module de type fini est bornée. Or, supposons que (d) soit vérifiée, soit M un A -module analytiquement de type fini, et prenons un sous-module $N \subset M$ de type fini, et $r \in \mathbb{N}$ avec $I^r M \subset N$; on vient de remarquer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ann}_N(I^s) = \text{Ann}_N(I^{s+1})$, d'où $\text{Ann}_M(I^{r+s}) = \text{Ann}_M(I^{r+s+1})$, i.e. la I -torsion de M est bornée.

(a) $\Rightarrow$ (d) : Soit M un A -module cyclique, de sorte que $M = A/J$ pour un idéal $J \subset A$; posons $J'_n := \{x \in A \mid I^n x \subset J\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $J' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J'_n$. Evidemment J' est un idéal de A , et on voit aisément que $J'/J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_M(I^n)$; par hypothèse, il existe un idéal de type fini $J'' \subset J'$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $I^n J' \subset J''$, et on a une suite exacte courte de A -modules :

$$0 \rightarrow N := (J + J'')/J \rightarrow J'/J \rightarrow Q := J'/(J + J'') \rightarrow 0.$$

Il vient $I^n Q = 0$, et N est un sous-module de type fini de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_M(I^n)$, donc $N \subset \text{Ann}_M(I^k)$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$; par suite $I^{k+n}(J'/J) = 0$, et cela montre que la I -torsion de M est bornée.

(b) et (d) $\Rightarrow$ (a) : Soient $f_1, \dots, f_k$ comme ci-dessus, et $J \subset A$ un idéal; puisque $\underline{X}_A$ est noethérien, la localisation A_{f_i} est noethérienne (exercice 6.67(i,iii)), donc l'idéal J_{f_i} de A_{f_i} est de type fini, pour tout $i = 1, \dots, k$. Ainsi, pour tout tel i on a un idéal de type fini $J'_i \subset J$ de A avec $(J'_i)_{f_i} = J_{f_i}$; posons $J' := J_1 + \dots + J_k$. On déduit aisément que $J/J' \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{A/J'}(I^n)$: les détails sont laissés au lecteur. D'autre part, par hypothèse la I -torsion du A -module cyclique A/J' est bornée, donc $I^n J \subset J'$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$, i.e. J est analytiquement de type fini. $\square$

Exercice 12.23. (i) Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini, et munissons A de sa topologie I -adique $\mathcal{T}$. Montrer que $(A, \mathcal{T})$ vérifie la condition de Artin-Rees topologique $\Leftrightarrow$ pour tout A -module M de type fini, tout $n \in \mathbb{N}$, et tout sous-module $N \subset M$ tel que $I^n N = 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $I^m M \cap N = 0$.

(ii) Supposons que $(A, \mathcal{T})$ vérifie les conditions équivalentes de (i), et soient M un A -module analytiquement de type fini, et $N \subset M$ un sous-module. Montrer que la topologie I -adique de N est induite par la topologie I -adique de M .

(iii) Si $(A, \mathcal{T})$ est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien), montrer les assertions suivantes :

(a) Toute localisation $S^{-1}A$ de A est analytiquement noethérienne (resp. universellement analytiquement noethérienne) pour sa topologie $S^{-1}I$ -adique.

(b) Toute A -algèbre B finie (resp. de type fini) est analytiquement noethérienne (resp. universellement analytiquement noethérienne) pour sa topologie IB -adique.

Proposition 12.24. Soient A un anneau, et $I, J \subset A$ deux idéaux de type fini; notons par $\mathcal{T}_I$ (resp. $\mathcal{T}_J$, resp. $\mathcal{T}_{I+J}$) la topologie I -adique (resp. J -adique, resp. $(I+J)$ -adique) de A . On a :

(i) Si $(A, \mathcal{T}_I)$ est analytiquement noethérien, et si $\mathcal{T}_J$ est plus fine que $\mathcal{T}_I$, alors $(A, \mathcal{T}_J)$ est analytiquement noethérien.

(ii) Si $(A, \mathcal{T}_I)$ et $(A, \mathcal{T}_J)$ sont analytiquement noethériens, il en est de même pour $(A, \mathcal{T}_{I+J})$.

(iii) Si $(A, \mathcal{T}_I)$ et $(A, \mathcal{T}_J)$ vérifient la condition de Artin-Rees topologique, il en est de même pour $(A, \mathcal{T}_{I+J})$.

Démonstration. (i) : Quitte à remplacer J par J^n pour quelque $n \in \mathbb{N}$, on peut supposer que $J \subset I$ (remarque 12.21(i)). Mais alors, il est évident que si un idéal $K \subset A$ est

analytiquement de type fini pour la topologie I -adique, il l'est aussi pour la topologie J -adique, d'où l'assertion.

(ii) : Soit $K \subset A$ un idéal ; par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ et des idéaux de type fini $K', K'' \subset K$ tels que $I^n K \subset K'$ et $J^n K \subset K''$. Par suite, $(I + J)^{2n-1} K \subset K' + K''$, d'où l'assertion.

(iii) : Soient M un A -module de type fini, $n \in \mathbb{N}$, et $N \subset M$ un sous-module tel que $(I + J)^n N = 0$; d'après l'exercice 12.23(i), il suffit d'exhiber $m \in \mathbb{N}$ tel que $(I + J)^m M \cap N = 0$. Or, encore d'après l'exercice 12.23(i), notre hypothèse sur $(A, \mathcal{T}_I)$ entraîne qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ avec $I^s M \cap N = 0$; posons $M' := M/I^s M$, et soit $N' \subset M'$ l'image de N , de sorte que $(I + J)^n N' = 0$. De même, notre hypothèse sur (A, J) entraîne qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ avec $J^t M' \cap N' = 0$, et noter que $J^t M' = (I^s + J^t)M/I^s M$ et $N' = (N + I^s M)/I^s M$; d'où $(I^s + J^t)M \cap (N + I^s M) \subset I^s M$, et alors $(I^s M + J^t M) \cap N = 0$; par suite $m := s + t - 1$ convient. $\square$

Corollaire 12.25. *Tout anneau analytiquement noethérien A vérifie la condition de Artin-Rees topologique.*

Démonstration. Soit $I \subset A$ un idéal de type fini tel que la topologie $\mathcal{T}$ de A soit I -adique. Soit aussi $f_1, \dots, f_n$ un système fini de générateurs de I , et pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $\mathcal{T}_i$ la topologie f_i -adique de A . Or, la proposition 12.24(iii) nous ramène aussitôt à vérifier que $(A, \mathcal{T}_i)$ vérifie la condition de Artin-Rees topologique pour tout $i = 1, \dots, n$, et d'autre part la proposition 12.24(i) montre que chaque $(A, \mathcal{T}_i)$ est un anneau analytiquement noethérien ; ainsi, on peut supposer que $I = Af$ pour quelque $f \in A$. Or, soit M un A -module de type fini, $N \subset M$ un sous-module, et posons $M' := M/N$; d'après la proposition 12.22, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ann}_{M'}(f^t) = \text{Ann}_{M'}(f^{t+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit aisément que $N \cap f^{n+t} M = f^n(N \cap f^t M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 12.26. *Soient A un anneau analytiquement noethérien, et*

$$\Sigma \quad : \quad 0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0.$$

une suite exacte courte de A -modules. Alors M_2 est analytiquement de type fini si et seulement s'il en est de même pour M_1 et M_3 .

Démonstration. Soit $I \subset A$ un idéal de type fini tel que la topologie de A soit I -adique, et notons par $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ dont les objets sont les A -modules M tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $I^n M = 0$. On voit aisément que $M_1, M_3 \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow M_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Avec la terminologie du problème 6.73, on vérifie alors aisément que les A -modules de type $\mathcal{C}$ -fini sont précisément les A -modules analytiquement de type fini ; en particulier, A est $\mathcal{C}$ -noethérien, et l'assertion découle aussitôt du problème 6.73(i.c,ii). $\square$

Proposition 12.27. *Soient A un anneau analytiquement noethérien, $I \subset A$ un idéal de type fini tel que la topologie de A soit I -adique, M un A -module analytiquement de type fini, et $n \in \mathbb{N}$. Notons par $\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle$ et $\widehat{M}\langle X_\bullet \rangle$ les complétions I -adiques de $A[X_\bullet] := A[X_1, \dots, X_n]$ et de $M[X_\bullet] := A[X_\bullet] \otimes_A M$. Alors on a :*

- (i) *L'application naturelle $\phi_M : \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A M \rightarrow \widehat{M}\langle X_\bullet \rangle$ est un isomorphisme.*
- (ii) *$\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle$ est une A -algèbre plate.*
- (iii) *Si A est topologiquement local, $\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle$ est une A -algèbre fidèlement plate.*

Démonstration. (i) : Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -modules ; si M est analytiquement de type fini, la topologie I -adique de M induit les topologies I -adiques sur M' et M'' (corollaire 12.25 et exercice 12.23(ii)) ; ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\nu(k) \in \mathbb{N}$ tel que $M'_{\nu(k)} := I^{\nu(k)} M \cap M' \subset I^k M'$. D'autre part, puisque $A[X_\bullet]$ est une A -algèbre plate, on a

$$I^{\nu(k)} M[X_\bullet] \cap M'[X_\bullet] = M'_{\nu(k)}[X_\bullet] \subset I^k M'[X_\bullet] \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, la topologie I -adique de $M[X_\bullet]$ induit les topologies I -adiques sur $M'[X_\bullet]$ et $M''[X_\bullet]$; par suite, la complétion terme à terme de la suite exacte courte de $A[X]$ -modules $0 \rightarrow M'[X_\bullet] \rightarrow M[X_\bullet] \rightarrow M''[X_\bullet] \rightarrow 0$ est une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \widehat{M'}\langle X_\bullet \rangle \rightarrow \widehat{M}\langle X_\bullet \rangle \rightarrow \widehat{M''}\langle X_\bullet \rangle \rightarrow 0$$

(corollaire 9.58). Or, supposons d'abord que M soit de type fini, et soient L un A -module de présentation finie, $\psi : L \rightarrow M$ une surjection A -linéaire, et $K := \text{Ker}(\psi)$. Notons également par $\widehat{L}$ et $\widehat{K}$ les complétions I -adiques de L et K , et considérons le diagramme induit d'applications $\widehat{A}$ -linéaires :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A K & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A L & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A M \longrightarrow 0 \\ & & \phi_K \downarrow & & \downarrow \phi_L & & \downarrow \phi_M \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{K}\langle X_\bullet \rangle & \longrightarrow & \widehat{L}\langle X_\bullet \rangle & \longrightarrow & \widehat{M}\langle X_\bullet \rangle \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est exacte courte, par ce qui précède, et la ligne horizontale en haut est exacte à droite (proposition 3.11). Si L est libre de rang fini, ϕ_L est évidemment un isomorphisme, donc ϕ_M est surjective; comme on trouve toujours une surjection A -linéaire $L \rightarrow M$ avec L libre de rang fini, on voit déjà que ϕ_M est une surjection si M est de type fini. Supposons ensuite que M soit de présentation finie, et L encore libre de rang fini; alors K est de type fini (exercice 2.110(iv)), donc dans ce cas ϕ_K est surjective et ϕ_L est bijective, et avec le lemme du serpent (proposition 2.106) on déduit que ϕ_M est injective. On conclut que ϕ_M est un isomorphisme si M est de présentation finie. Si M est seulement de type fini, noter que K est analytiquement de type fini, d'après le corollaire 12.26(i), donc soient $N \subset K$ un sous-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$ avec $I^n K \subset N$; posons $K' := K/N$ et $L' := L/N$, de sorte que L' est encore de présentation finie, et ψ se factorise à travers une surjection A -linéaire $\psi' : L' \rightarrow M$. Quitte à remplacer L et ψ par L' et ψ' , on peut alors supposer que $I^n K = 0$; en particulier, la topologie I -adique est discrète sur K , donc la complétion $K[X_\bullet] \rightarrow \widehat{K}\langle X_\bullet \rangle$ est bijective, et la projection

$$\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \rightarrow \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle / I^n \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \xrightarrow{\sim} A[X_\bullet] / I^n[X_\bullet]$$

induit un isomorphisme $\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A K \xrightarrow{\sim} A/I^n[X_\bullet] \otimes_A K \xrightarrow{\sim} K[X_\bullet]$ (corollaire 9.61(ii)), de sorte que ϕ_K est bijective. On sait aussi déjà que ϕ_L est une bijection, donc de même pour ϕ_M , par le lemme du serpent.

En dernier lieu, si M est analytiquement de type fini, soient $N \subset M$ un sous-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$ tels que $I^n M \subset N$; posons $Q := M/N$, et considérons le diagramme commutatif analogue :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A N & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A M & \longrightarrow & \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A Q \longrightarrow 0 \\ & & \phi_N \downarrow & & \downarrow \phi_M & & \downarrow \phi_Q \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{N}\langle X_\bullet \rangle & \longrightarrow & \widehat{M}\langle X_\bullet \rangle & \longrightarrow & \widehat{Q}\langle X_\bullet \rangle \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale en bas est encore exacte courte, et celle en haut est encore exacte à droite. Or, ϕ_N est une bijection, par ce qui précède, et de même pour ϕ_Q , car $I^n Q = 0$; par le lemme du serpent, ϕ_M est alors une bijection, comme souhaité.

(ii) : Soit $i : J \rightarrow A$ l'inclusion d'un idéal de type fini; d'après (i), l'application

$$\widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A i : \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle \otimes_A J \rightarrow \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle$$

s'identifie naturellement avec la complétion I -adique $\widehat{i}\langle X_\bullet \rangle : \widehat{J}\langle X_\bullet \rangle \rightarrow \widehat{A}\langle X_\bullet \rangle$ de $i[X_\bullet] := A[X_\bullet] \otimes_A i$; comme la preuve de (i) montre que $\widehat{i}\langle X_\bullet \rangle$ est injectif, on conclut avec la proposition 3.78.

(iii) Au vu de (ii), du théorème 3.84(ii), et du problème 3.83(i.c), il suffit de montrer que l'image de $\text{Max } \hat{A}\langle X_\bullet \rangle$ dans $\text{Spec } A$ contient $\text{Max } A$. Toutefois, par hypothèse on a $I \subset \mathcal{J}(A)$, et d'autre part $I\hat{A}\langle X_\bullet \rangle \subset \mathcal{J}(\hat{A}\langle X_\bullet \rangle)$ (exercice 9.88(iii)); avec $\bar{A} := A/I$, le corollaire 1.51(ii) fournit alors des identifications naturelles

$$\text{Max } \hat{A}\langle X_\bullet \rangle \xrightarrow{\sim} \text{Max } \hat{A}\langle X_\bullet \rangle / I\hat{A}\langle X_\bullet \rangle \xrightarrow{\sim} \text{Max } \bar{A}[X_\bullet] \quad \text{Max } A \xrightarrow{\sim} \text{Max } \bar{A}$$

et on voit aisément que l'image de $\text{Max } \bar{A}[X]$ dans $\text{Spec } \bar{A}$ contient $\text{Max } \bar{A}$. $\square$

12.2.1. Soient A un anneau, $f \in A$, et M un A -module que l'on munit de sa topologie f -adique. Pour tout sous-module $N \subset M$ soit $\bar{N}$ l'adhérence de N dans M (il s'agit d'un sous-module de M , d'après le lemme 9.5(iii)), et posons

$$N_k := \{x \in M \mid f^k x \in N\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad N^\dagger := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k.$$

Lemme 12.28. *Dans la situation du §12.2.1, supposons que les topologies f -adiques de A et M soient complètes et séparées, et considérons deux sous-modules $N' \subset N \subset M$ tels que N' soit dense dans N , et $N = N^\dagger$. Alors on a :*

- (i) *La topologie f -adique de N est induite par celle de M .*
- (ii) *$\bar{N} = (\bar{N})^\dagger$.*
- (iii) *Si en outre $N = \bar{N}$, et si N_f est un A_f -module de type fini, alors N est analytiquement de type fini, et $N' = N$.*

Démonstration. (i) : Puisque $N = N^\dagger$, il vient $f^m N = f^m M \cap N$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion.

(ii) : Si $x \in M$ et si $fx \in \bar{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in M$ avec $fx - f^n y_n \in N$, par suite $x - f^{n-1} y_n \in N$ pour tout $n \geq 1$, car $N = N^\dagger$, et donc $x \in \bar{N}$, d'où l'assertion.

(iii) : Noter que N est complet et séparé pour sa topologie f -adique, d'après (i) et la remarque 9.30(vii); en outre, l'hypothèse entraîne qu'il existe un sous-module $L \subset N$ de type fini avec $L_f = N_f$, et il vient :

$$N = L^\dagger = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{L}_k$$

(la première identité est évidente, et on a la deuxième car $N = \bar{N}$). D'après le théorème de Baire (problème 9.32), il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur U de la partie $\bar{L}_k$ de N soit non vide; mais comme $\bar{L}_k$ est un sous-module de N , on a $\bar{L}_k = \bigcup_{x \in \bar{L}_k} (x + U)$, et par suite $\bar{L}_k$ est un sous-module ouvert de N . Ainsi, $f^m N \subset \bar{L}_k$ pour quelque $m \in \mathbb{N}$, d'où $f^{m+k+1} N \subset f^{k+1} \bar{L}_k \subset f\bar{L}$, en particulier $f\bar{L}$ est ouvert dans N (proposition 9.12(i)), donc de même pour $L' := L + f\bar{L}$; par suite, L' est un sous-module fermé de N (proposition 9.12(i)) contenant L et contenu dans $\bar{L}$, i.e. $L' = \bar{L}$. D'après le corollaire 9.61(iii), on a alors $L = \bar{L}$, d'où $f^{m+k+1} N \subset fL$, et cela achève de montrer que N est analytiquement de type fini.

En dernier lieu, comme N' est dense dans N , avec (i) il vient

$$N = N' + f^{m+k+1} N \subset N' + fL$$

d'où $L = (N' \cap L) + fL$; mais $f \in \mathcal{J}(A)$ (exercice 9.88(iii)), donc $L = N' \cap L$ (corollaire 3.50), i.e. $L \subset N'$, ainsi N' est un sous-module ouvert de N , donc il est aussi fermé dans N (proposition 9.12(i)), et alors $N = N'$. $\square$

Théorème 12.29. *Soient A un anneau, et $I \subset A$ un idéal de type fini tel que la topologie I -adique $\mathcal{T}$ de A soit complète et séparée. Alors $(A, \mathcal{T})$ est analytiquement noethérien si et seulement si le sous-schéma $\mathcal{T}$ -analytique de $\text{Spec } A$ est noethérien.*

Démonstration. (Il s'agit du théorème 5.1.2 de [29]). Par la proposition 12.22, on peut supposer que le sous-schéma analytique de $\text{Spec } A$ soit noethérien, et il suffit de montrer que dans ce cas A est analytiquement noethérien. Soit $f_1, \dots, f_n$ un système fini de générateurs de I , et pour $i = 1, \dots, n$ soit $\mathcal{T}_i$ la topologie f_i -adique de A ; compte tenu de la proposition 12.24(ii), il suffit de montrer que $(A, \mathcal{T}_i)$ est analytiquement noethérien

pour $i = 1, \dots, n$. D'autre part, le sous-schéma $\mathcal{T}_i$ -analytique de $\text{Spec } A$ est un sous-schéma ouvert compact du sous-schéma $\mathcal{T}$ -analytique, donc il est noethérien, pour tout $i = 1, \dots, n$ (exercice 6.67(i)); en outre, la topologie $\mathcal{T}_i$ est complète et séparée, en vertu de la proposition 9.63. On est ainsi ramené au cas où $I = fA$ est principal. Or, soit M un A -module de type fini; on doit vérifier que la suite croissante de sous-modules $(\text{Ann}_M(f^n) \mid n \in \mathbb{N})$ est stationnaire (proposition 12.22). Pour cela, écrivons $M = L/Q$, pour un A -module libre L de rang fini, et un sous-module $Q \subset L$; posons $N := Q^\dagger$ (notation du §12.2.1). Noter que :

$$N/Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_M(f^n)$$

donc il suffit d'exhiber $k \in \mathbb{N}$ tel que $N/Q \subset \text{Ann}_M(f^k)$. Munissons L de sa topologie f -adique, et soit $\overline{N}$ l'adhérence de N dans L ; évidemment L est complet et séparé, et $N^\dagger = N$, donc $(\overline{N})^\dagger = \overline{N}$ (lemme 12.28(ii)). En outre, comme par hypothèse A_f est noethérien, $(\overline{N})_f$ est un A_f -module de type fini (proposition 6.64), donc $\overline{N}$ est analytiquement de type fini, et $\overline{N} = N$ (lemme 12.28(iii)). Par suite, aussi N/Q est analytiquement de type fini; soient alors $N' \subset N/Q$ un sous-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n(N/Q) \subset N'$; puisque N' est de type fini, il existe aussi $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m N' = 0$, et alors $k := n + m$ convient. $\square$

Lemme 12.30. *Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de type fini; munissons A de sa topologie I -adique, et supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (a) *La complétion $\hat{A}$ de A est une A -algèbre plate.*
- (b) *La $I\hat{A}$ -torsion de tout $\hat{A}$ -module de type fini est bornée.*

Alors la I -torsion de tout A -module de type fini est bornée.

Démonstration. Soit M un A -module de type fini; posons $M^* := \hat{A} \otimes_A M$ et $M_n := \text{Ann}_M(I^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'un côté, $\hat{A} \otimes_A M_n = M_n^* := \text{Ann}_{M^*}(I^n \hat{A})$, car $\hat{A}$ est une A -algèbre plate (exercice 3.75(i)); de l'autre côté, par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_n^* = M_{n+k}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais puisque $I^n M_n = 0$, l'application naturelle $M_n \rightarrow \hat{A} \otimes_A M_n$ est un isomorphisme, donc $M_n = M_{n+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Définition 12.31. Soit A un anneau topologique complet et séparé dont la topologie est adique. On dit que A est *fortement analytiquement noethérien* si l'anneau topologique $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est analytiquement noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 12.32. *Tout anneau fortement analytiquement noethérien est universellement analytiquement noethérien.*

Démonstration. (Il s'agit du théorème 6.2.2 de [29]) Soient A un anneau fortement analytiquement noethérien, et $I \subset A$ un idéal de type fini tel que la topologie de A soit I -adique. Soit aussi $n \in \mathbb{N}$, munissons $B := A[X_1, \dots, X_n]$ de sa topologie I -adique, et notons par $\underline{X}_A^{\text{an}}$ (resp. $\underline{X}_B^{\text{an}}$) le sous-schéma analytique de $\underline{X}_A := \text{Spec } A$ (resp. de $\underline{X}_B := \text{Spec } B$); le morphisme naturel de schéma $\phi : \underline{X}_B \rightarrow \underline{X}_A$ est de type fini, donc de même pour sa restriction $\underline{X}_B^{\text{an}} \rightarrow \underline{X}_A^{\text{an}}$, car $\phi^{-1}(X_A^{\text{an}}) = X_B^{\text{an}}$ (proposition 9.80(iv) et lemme 5.81(i)). Comme par hypothèse $\underline{X}_A^{\text{an}}$ est noethérien, il en est alors de même pour $\underline{X}_B^{\text{an}}$ (exercice 6.67(ii)). En outre, la complétion $\hat{B} = A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ de B est analytiquement noethérienne, par hypothèse; au vu du lemme 12.30 et de la proposition 12.22, il suffit alors de vérifier que $\hat{B}$ est une B -algèbre plate. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 1$, rappelons que $A\langle X \rangle$ et $B = A[X]$ sont deux A -algèbres plates (proposition 12.27(ii)), et $A\langle X \rangle / IA\langle X \rangle = B / IB$ (corollaire 9.61(ii)). Soient alors $U := X_B^{\text{an}}$, $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X_B|U}$, et $\mathcal{A} := \mathcal{O}_U \hat{\otimes}_B A\langle X \rangle$; d'après la proposition 10.46, il suffit de vérifier que $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{O}_U$ -module plat. Pour cela, soit $\mathfrak{p} \in X_A^{\text{an}}$, de sorte que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local noethérien; il suffit de montrer que $\hat{A}\langle X \rangle_{\mathfrak{p}}$ est une $B_{\mathfrak{p}}$ -algèbre plate (proposition 3.77). Pour cela, posons $(Y, \mathcal{O}_Y) := \text{Spec } B_{\mathfrak{p}}$, $V := Y \setminus V(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$, $\mathcal{O}_V := \mathcal{O}_{Y|V}$, et

$\mathcal{A}_V := \mathcal{O}_V \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_V} \mathcal{A}$ (noter que le morphisme naturel de schémas $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \underline{X}_B$ induit par restriction un morphisme de sous-schémas ouverts $(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$); remarquons :

Affirmation 12.33. Si $\mathcal{A}_V$ est un $\mathcal{O}_V$ -module plat, $A\langle X \rangle_{\mathfrak{p}}$ est une $B_{\mathfrak{p}}$ -algèbre plate.

Preuve : Appliquons la proposition 10.46 à l'homomorphisme plat d'anneaux $\phi : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ et l'idéal de type fini $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{p}}$, de sorte que $k := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est le corps résiduel de l'idéal premier $\mathfrak{p}$, i.e. le corps des fractions de $A_0 := A/\mathfrak{p}$; compte tenu de l'hypothèse, on doit alors prouver que $k \otimes_A A\langle X \rangle$ est une $k[X]$ -algèbre plate. Or, d'après la proposition 12.27(i), on a $A_0 \otimes_A A\langle X \rangle = A_0\langle X \rangle$ (on munit A_0 de sa topologie I -adique); rappelons que $A_0\langle X \rangle$ est un sous-anneau de l'anneau de séries de puissances $A_0[[X]]$ (corollaire 9.93(ii)), donc $k \otimes_A A\langle X \rangle = k \otimes_{A_0} A_0\langle X \rangle$ est un sous-anneau de $k[[X]]$. Mais évidemment le $k[X]$ -module $k[[X]]$ est sans torsion, donc de même pour le $k[X]$ -module $k \otimes_A A\langle X \rangle$; puisque $k[X]$ est un anneau de Dedekind, on conclut avec le problème 7.48(vi). $\diamond$

- Rappelons aussi que la dimension d de $A_{\mathfrak{p}}$ est finie (remarque 11.27(ii)); on va prouver la platitude de la $B_{\mathfrak{p}}$ -algèbre $A\langle X \rangle_{\mathfrak{p}}$ par récurrence sur d . Si $d = 0$, la partie ouverte V est vide, donc l'hypothèse de l'observation 12.33 est trivialement remplie, d'où l'assertion. Soit alors $d > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout $\mathfrak{q} \in X_A^{\text{an}}$ tel que $\dim A_{\mathfrak{q}} < d$. En particulier, l'assertion est alors connue pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \setminus \{\mathfrak{p}\}$, et par suite $\mathcal{A}_V$ est un $\mathcal{O}_V$ -module plat, donc on conclut encore avec l'observation 12.33.

- Soit ensuite $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour $C := A[X_1, \dots, X_{n-1}]$; ainsi, la complétion $i_C : C \rightarrow \hat{C}$ est plate, donc de même pour

$$A[X_n] \otimes_A i_C : B \rightarrow D := \hat{C}[X_n]$$

(remarque 3.74(vi)). D'autre part, évidemment $\hat{C}$ est fortement analytiquement noethérien, donc la complétion $\hat{C}[X_n] \rightarrow \hat{D} = \hat{B}$ est plate, d'où l'assertion (exercice 3.76(ii)). $\square$

Définition 12.34. Soient A un anneau de Huber, et (A, A^+) un anneau affinoïde.

(i) On dit que A est *analytiquement noethérien* (resp. *universellement analytiquement noethérien*, resp. *fortement analytiquement noethérien*) s'il admet un sous-anneau de définition qui est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien, resp. fortement analytiquement noethérien) pour la topologie induite par A .

(ii) On dit que A est à *définition noethérienne*, s'il admet un sous-anneau de définition noethérien.

(iii) On dit que A est *fortement noethérien* s'il est un anneau de Tate complet et séparé, et si l'anneau $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iv) On dit que (A, A^+) est *analytiquement noethérien* (resp. *universellement analytiquement noethérien*, resp. *fortement analytiquement noethérien*, resp. à *définition noethérienne*, resp. *fortement noethérien*) si A est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien, resp. fortement analytiquement noethérien, resp. à définition noethérienne, resp. fortement noethérien).

Remarque 12.35. (i) Les notions d'anneau à définition noethérienne et d'anneau fortement noethérien ont été introduits par R. Huber ([39], [41]) : notamment, il montre que si l'anneau affinoïde $\underline{A}$ appartient à l'une de ces deux classes, alors le préfaisceau $\hat{\mathcal{O}}_X$ des fonctions adiques sur $X := \text{Spa } \underline{A}$ est un faisceau d'anneaux topologiques; il prouve en outre un résultat d'acyclicité pour les complexes de Čech de $\hat{\mathcal{O}}_X$ généralisant le théorème d'acyclicité de Tate. Pour le cas fortement noethérien, la preuve de Huber s'inspire directement de celle de Tate; par contre, pour le cas d'un anneau à définition noethérienne, il adapte une méthode due à M. Raynaud, faisant appel à des techniques de géométrie algébrique assez sophistiquées.

(ii) Il est clair que tout anneau de Huber (resp. tout anneau affinoïde) à définition noethérienne est universellement analytiquement noethérien, et de même pour tout anneau

de Tate (resp. affinoïde) fortement noethérien, au vu du théorème 12.32 et de l'exercice 12.36(iv) ci-dessous. On montrera dans la section 12.4 que pour tout anneau affinoïde $\underline{A}$ universellement analytiquement noethérien, le prefaisceau des fonctions adiques sur $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ est un faisceau d'anneaux topologiques, et on verra un théorème d'acyclicité assez général pour les complexes de Čech de $\mathcal{O}_X$. On aboutira ainsi à une présentation unifiée des résultats de Huber, sans besoin de s'appuyer sur la géométrie algébrique, car notre preuve suivra plutôt les idées originaires de Tate.

Exercice 12.36. Soient $(A, \mathcal{T})$ un anneau de Huber, et $\hat{A}$ la complétion de A .

(i) Montrer que si la topologie de A est adique, alors A est analytiquement noethérien suivant la définition 12.34(i) si et seulement s'il est analytiquement noethérien suivant la définition 12.20(ii).

(ii) Soit $B \subset A$ un sous-anneau ouvert, que l'on munit de la topologie induite par A . Montrer que A est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien) si et seulement s'il en est de même pour B .

(iii) Soient A un anneau de Huber, $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ munissons $A_n := A[X_1, \dots, X_n]$ de l'unique topologie $\mathcal{T}_n$ telle que $(A_n, \mathcal{T}_n)$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition $A_{0,n} := A_0[X_1, \dots, X_n]$ et idéal de définition $I_0 A_{0,n} \subset A_{0,n}$ (proposition 9.85(ii)). Montrer que A est universellement analytiquement noethérien si et seulement si $(A_n, \mathcal{T}_n)$ est analytiquement noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Soit A un anneau de Huber complet et séparé. Montrer que A est analytiquement fortement noethérien si et seulement si $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est analytiquement noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, A est fortement noethérien $\Leftrightarrow A$ est un anneau de Tate fortement analytiquement noethérien.

(v) Montrer que si A est analytiquement noethérien, $\hat{A}$ est une A -algèbre plate, et si A est aussi topologiquement local, alors $\hat{A}$ est une A -algèbre fidèlement plate.

Remarque 12.37. (i) En contraste avec l'exercice 12.36(ii), un sous-anneau ouvert d'un anneau de Huber à définition noethérienne n'est pas forcément à définition noethérienne : *e.g.* soit $(V, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation discrète, muni de sa topologie $\mathfrak{m}$ -adique ; si $B \subset V$ est un sous-anneau ouvert, il existe $b \in B \setminus \{0\}$ tel que $Vb \subset B$, *i.e.* V est un sous- B -module du module de type fini Bb^{-1} . Par suite, si B est aussi noethérien, V est une B -algèbre finie. Or, supposons que le corps résiduel $k := V/\mathfrak{m}$ soit infini, et prenons $B := \mathbb{Z} + \mathfrak{m} \subset V$; l'image $\overline{B}_0$ dans k de tout sous-anneau $B_0 \subset B$ est un quotient de $\mathbb{Z}$, donc k n'est pas une $\overline{B}_0$ -algèbre finie, et par ce qui précède on conclut que B_0 ne peut pas être à la fois ouvert dans B et noethérien.

(ii) D'autre part, la complétion d'un anneau de Huber analytiquement noethérien peut faillir d'être analytiquement noethérienne (voir le §12.5.3 pour un exemple), alors que la complétion d'un anneau de Huber à définition noethérienne est toujours à définition noethérienne (proposition 9.86(i,ii) et théorème 9.113).

12.2.2. Topologie canonique des modules analytiquement bornés. Soient A un anneau de Huber, X_A^{na} le lieu non analytique de $X_A := \mathrm{Spec} A$, et M un A -module. On dit que M est *analytiquement borné*, s'il existe un sous-module $N \subset M$ de type fini tel que $\mathrm{Supp}_A(M/N) \subset X_A^{\mathrm{na}}$. Dans ce cas, soit $\mathcal{T}_N^A$ la topologie canonique de N (voir le §9.1.2) ; il existe une unique topologie $\mathcal{T}_M^A$ sur M telle que $(M, \mathcal{T}_M^A)$ soit un groupe abélien topologique, et $(N, \mathcal{T}_N^A)$ soit un sous-module ouvert de $(M, \mathcal{T}_M^A)$. On appelle $\mathcal{T}_M^A$ la *topologie canonique* de M .

Lemme 12.38. (i) Dans la situation du §12.2.2, la topologie $\mathcal{T}_M^A$ est indépendante du choix de N , et $(M, \mathcal{T}_M^A)$ est un A -module topologique.

(ii) Si M est analytiquement borné, pour tout sous-anneau de définition $A_0 \subset A$ il existe un A_0 -sous-module $N_0 \subset M$ de type fini avec $\mathrm{Supp}_A(M/AN_0) \subset X_A^{\mathrm{na}}$.

- (iii) Si M est de type fini, $\mathcal{T}_M^A$ est la topologie canonique de la définition 9.24.
 (iv) Si M est analytiquement borné, et si $(M', \mathcal{T}')$ est un A -module topologique, tout $f \in \text{Hom}_A(M, M')$ est un morphisme $(M, \mathcal{T}_M^A) \rightarrow (M', \mathcal{T}')$ de $A - \text{ModTop}$.
 (v) Si M et M' sont analytiquement bornés, si $f \in \text{Hom}_A(M, M')$, et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) f est surjective

(b) A est analytiquement noethérien

alors $f : (M, \mathcal{T}_M^A) \rightarrow (M', \mathcal{T}_{M'}^A)$ est un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$.

Démonstration. (ii) : Par hypothèse, il existe un A -sous-module N de type fini tel que $\text{Supp}_A(M/N) \subset X_A^{\text{na}}$; si $N = \sum_{i=1}^n Ax_i$, on peut prendre $N_0 := \sum_{i=1}^n A_0x_i$.

(i) : Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et $N_0 \subset N$ un A_0 -sous-module de type fini avec $AN_0 = N$; alors $(I_0^n N_0 \mid n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts pour $(N, \mathcal{T}_N^A)$, donc aussi pour $(M, \mathcal{T}_M^A)$. Or, soient $a \in A$ et $x \in M$; puisque $\text{Supp}_A(M/N) \subset X_A^{\text{na}}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^p x \subset N$, et comme $I_0^p x$ est un A_0 -sous-module de type fini, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^q I_0^p x \subset N_0$. Prenons $t \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^t a \in A_0$ et $t \geq p + q$; il vient

$$(a + I_0^{n+t}) \cdot (x + I_0^{n+t} N_0) \subset ax + I_0^n N_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'exercice 9.10(ii), cela montre que $(M, \mathcal{T}_M^A)$ est un A -module topologique.

Ensuite, soient $N' \subset M$ un autre sous-module de type fini avec $\text{Supp}_A(M/N') \subset X_A^{\text{na}}$, et $N'_0 \subset N$ un A_0 -sous-module de type fini avec $AN'_0 = N'$; notons par $\mathcal{T}'$ la topologie de M telle que $(M, \mathcal{T}')$ soit un groupe topologique et $(N', \mathcal{T}_{N'}^A)$ soit un sous-module ouvert. Puisque $\text{Supp}_A(M/N) \subset X_A^{\text{na}}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^p N'_0 \subset N$, et comme le A_0 -sous-module $I_0^p N'_0$ est de type fini, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^q I_0^p N'_0 \subset N_0$; cela montre que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}_M^A$. En échangeant les rôles de N et N' on voit de même que $\mathcal{T}_M^A$ est plus fine que $\mathcal{T}'$, i.e. $\mathcal{T}_M^A = \mathcal{T}'$.

(iii) : Dans ce cas, d'après (i) on peut faire $N := M$, et alors l'assertion est claire.

(iv) : Par hypothèse, il existe un sous-module ouvert de type fini $N \subset M$ tel que $\mathcal{T}_M^A$ induit la topologie canonique $\mathcal{T}_N^A$ sur N ; il suffit alors de vérifier que la restriction $(N, \mathcal{T}_N^A) \rightarrow (M', \mathcal{T}')$ de f est continue (remarque 9.3(ii)), et cela découle de la proposition 9.25(iii).

(v) : Soit $N \subset M$ un sous-module de type fini avec $\text{Supp}_A(M/N) \subset X_A^{\text{na}}$. Si f est surjective, alors $N' := f(N)$ est un sous-module de M' de type fini avec $\text{Supp}_A(M'/N') \subset X_A^{\text{na}}$; d'après (i), N (resp. N') est alors un sous-module ouvert de M (resp. de M'), et $\mathcal{T}_M^A$ (resp. $\mathcal{T}_{M'}^A$) induit la topologie canonique sur N (resp. sur N'), et d'après l'exercice 9.8, il suffit de montrer que la restriction $g : N \rightarrow N'$ de f est un morphisme strict. Cela découle du corollaire 9.26(i).

Si A est analytiquement noethérien, noter que $M'' := f(M)$ est analytiquement borné, et par le cas précédent la surjection $M \rightarrow M''$ induite par f est un morphisme strict; on est donc ramené à vérifier que l'inclusion $M'' \rightarrow M'$ est de même un morphisme strict, et ainsi, on peut supposer que f soit injective. Dans ce cas, soient $N_0 \subset M$ et $N'_0 \subset M'$ des A_0 -sous-modules de type fini tels que les supports de M/AN_0 et M'/AN'_0 soient dans X_A^{na} ; quitte à remplacer N'_0 par $N'_0 + f(N_0)$ on peut en outre supposer que f se restreint en une injection A_0 -linéaire $f_0 : N_0 \rightarrow N'_0$. D'après (i), N_0 (resp. N'_0) est un A_0 -sous-module ouvert de M (resp. de M'), et la topologie de M (resp. de M') induit la topologie I_0 -adique sur N_0 (resp. sur N'_0); d'après l'exercice 9.8, il suffit de vérifier que f_0 est un morphisme strict. Mais par définition, on peut aussi supposer que A_0 soit analytiquement noethérien, et l'assertion découle alors du corollaire 12.25. $\square$

Définition 12.39. Soient A un anneau de Huber, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que f est *analytiquement fini* (ou que B est une *A -algèbre analytiquement finie*) si le A -module $B_{[f]}$ est analytiquement borné.

Exercice 12.40. Soient $(A, \mathcal{T})$ un anneau de Huber, B une A -algèbre analytiquement finie, que l'on munit de la topologie canonique $\mathcal{T}_B^A$ du A -module sous-jacent.

(i) Montrer que $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau de Huber, et que le morphisme structurel $f : A \rightarrow B$ est un morphisme adique d'anneaux de Huber.

(ii) Soit M un B -module. Montrer que M est un $(B, \mathcal{T}_B^A)$ -module analytiquement borné si et seulement si $M_{[f]}$ est un $(A, \mathcal{T})$ -module analytiquement borné, et que dans ce cas $\mathcal{T}_{M_{[f]}}^A = \mathcal{T}_M^B$. En particulier, si $g : B \rightarrow C$ est une $(B, \mathcal{T}_B^A)$ -algèbre analytiquement finie, il en est de même pour la $(A, \mathcal{T})$ -algèbre $g \circ f : A \rightarrow C$.

(iii) Soient $h : A \rightarrow C$ un homomorphisme adique d'anneaux de Huber, et $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition; montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) h est analytiquement fini
- (b) C admet un sous-anneau de définition C_0 avec $h(A_0) \subset C_0$, et qui est une A_0 -algèbre finie
- (c) Pour tout couple de sous-anneaux de définition $A_0 \subset A$, $C_0 \subset C$ avec $h(A_0) \subset C_0$, le A_0 -module C_0 est analytiquement de type fini.
- (iv) Si A est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien, resp. à définition noethérienne), montrer qu'il en est de même pour B .
- (v) Dans la situation de (i), supposons en outre que $\mathcal{T}$ induise la topologie discrète sur $\text{Ker } f$. Montrer que $(A, \mathcal{T})$ est analytiquement noethérien si et seulement s'il en est de même pour $(B, \mathcal{T}_B^A)$.

Proposition 12.41. Soient A un anneau de Huber analytiquement noethérien, M un A -module analytiquement borné, $N \subset M$ un sous-module, $\mathcal{T}_M^A$ la topologie canonique de M , et $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{M}$) la complétion de A (resp. de $(M, \mathcal{T}_M^A)$). On a :

- (i) L'application naturelle $\widehat{A} \otimes_A M \rightarrow \widehat{M}$ est un isomorphisme.
- (ii) N est un A -module analytiquement borné.
- (iii) Si A est topologiquement local, N est une partie fermée de $(M, \mathcal{T}_M^A)$.

Démonstration. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition analytiquement noethérien, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, $M_0 \subset M$ un A_0 -sous-module de type fini tel que $\text{Supp}_A(M/AM_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$.

(i) : Munissons $B := A \oplus M$ de la loi de multiplication telle que

$$(a, x) \cdot (a', x') := (aa', ax' + a'x) \quad \forall a, a' \in A, \forall x, x' \in M.$$

Avec cette loi (et sa loi d'addition naturelle) B est un anneau, et l'inclusion $A \rightarrow B$ naturelle est un homomorphisme analytiquement fini d'anneaux. En outre, $B_0 := A_0 \oplus M_0$ est un sous-anneau de B , et l'inclusion naturelle $A_0 \rightarrow B_0$ est un homomorphisme fini d'anneaux. Munissons B de sa topologie canonique $\mathcal{T}_B^A$; d'après l'exercice 12.40(iv), $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau de Huber analytiquement noethérien, et B_0 est un sous-anneau ouvert; en outre, $\mathcal{T}_B^A$ induit la topologie I_0 -adique sur B_0 , donc ce dernier est un sous-anneau de définition de B . Soient $\widehat{B}$ la complétion de $(B, \mathcal{T}_B^A)$, et $\widehat{B}_0$ la complétion I_0 -adique de B_0 ; d'après la proposition 9.86(iii), l'application naturelle $\widehat{B}_0 \otimes_{B_0} B \rightarrow \widehat{B}$ est bijective. D'autre part, on a $\widehat{B}_0 = \widehat{A}_0 \otimes_{A_0} B_0$ (corollaire 12.27(i)); donc l'application naturelle $\widehat{A}_0 \otimes_{A_0} B \rightarrow \widehat{B}$ est bijective (exercice 3.63(ii)), et comme on a aussi $\widehat{A} = \widehat{A}_0 \otimes_{A_0} A$, cette dernière s'identifie avec l'application naturelle $\widehat{A} \otimes_A B \rightarrow \widehat{B}$. On conclut avec la proposition 9.25(i) et l'exercice 9.43.

(ii) : Soit $f_1, \dots, f_n$ un système de générateurs de I_0 , de sorte que

$$(\text{Spec } A)^{\text{an}} = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec } A_{f_i}$$

et A_{f_i} est noethérien pour $i = 1, \dots, n$ (exercice 6.67(iii)); en outre $M_{f_i} = (M_0)_{f_i}$ est un A_{f_i} -module de type fini. Par suite, N_{f_i} est un A_{f_i} -module de type fini, donc il existe un A -sous-module $Q_i \subset N$ de type fini avec $(Q_i)_{f_i} = N_{f_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Il vient $\text{Supp}_A(N/(Q_1 + \dots + Q_n)) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$, d'où l'assertion.

(iii) : Il suffit de montrer que $N \cap M_0$ est une partie fermée pour la topologie I_0 -adique de M_0 (remarque 9.3(iv)); pour cela, il suffit de vérifier que la topologie I_0 -adique de $Q := M_0/(N \cap M_0)$ est séparée, ou de façon équivalente, que la complétion I_0 -adique $j_Q : Q \rightarrow \hat{Q}$ est injective. Mais d'après la proposition 12.27(i), j_Q s'identifie avec

$$j_{A_0} \otimes_{A_0} Q : Q \rightarrow \hat{A}_0 \otimes_{A_0} Q$$

où $j_{A_0} : A_0 \rightarrow \hat{A}_0$ dénote la complétion de A_0 ; comme on a $I_0 \subset \mathcal{J}(A_0)$ (exercice 9.21(v)), l'assertion découle alors de la proposition 12.27(iii) et du problème 3.83(i.b). $\square$

Remarque 12.42. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ un morphisme adique d'anneaux de Huber, et M un A -module analytiquement borné; alors $M_B := B \otimes_A M$ est un B -module analytiquement borné, et l'application A -linéaire induite $h : M \rightarrow M_B$ est continue pour les respectives topologies canoniques. En effet, par hypothèse il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et un A_0 -sous-module $N_0 \subset M$ de type fini tel que $\text{Supp}_A(M/AN_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$; soit aussi Q_0 l'image de $B_0 \otimes_{A_0} N_0$ dans M_B , de sorte que BQ_0 est l'image de $B \otimes_A AN_0$ dans M_B . Avec la proposition 9.80(iv) et l'exercice 3.64(ii.b), il vient $\text{Supp}_B(M_B/BQ_0) \subset (\text{Spec } B)^{\text{na}}$, d'où la première assertion. En outre, h induit par restriction une application A_0 -linéaire $N_0 \rightarrow Q_0$, et les topologies de N_0 et Q_0 induites par M et M_B sont I_0 -adiques, si $I_0 \subset A_0$ dénote un idéal de définition. Comme N_0 et Q_0 sont des sous-groupes ouverts, cela entraîne la deuxième assertion (remarque 9.3(ii)).

(ii) Soient $A \rightarrow B$ un morphisme adique d'anneaux de Huber, et C une A -algèbre analytiquement finie; d'après (i), $D := B \otimes_A C$ est une C -algèbre analytiquement finie, que l'on peut munir de sa topologie canonique $\mathcal{T}_D^C$. Par inspection directe des constructions, on voit que $(D, \mathcal{T}_D^C)$ est le produit tensoriel topologique des A -algèbres topologiques B et $(C, \mathcal{T}_C^A)$ (définition 9.83).

(iii) Soient A un anneau de Huber fortement analytiquement noethérien, $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition fortement analytiquement noethérien, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme analytiquement fini d'anneaux, et munissons B de sa topologie canonique $\mathcal{T}_B^A$. D'après l'exercice 12.40(iii), $(B, \mathcal{T}_B^A)$ admet un sous-anneau de définition B_0 tel que f se restreint en un homomorphisme d'anneaux $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$, fini et adique pour la topologie de B_0 induite par $\mathcal{T}_B^A$. Rappelons que $B_0\langle X_\bullet \rangle := B_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est un sous-anneau de définition de $B\langle X_\bullet \rangle := B\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (proposition 9.91(ii)). D'autre part, $B_0\langle X_\bullet \rangle = A_0\langle X_\bullet \rangle \otimes_{A_0} B_0$ (proposition 12.27(i)), en particulier, $B_0\langle X_\bullet \rangle$ est une $A_0\langle X_\bullet \rangle$ -algèbre finie, et donc $B_0\langle X_\bullet \rangle$ est analytiquement noethérien, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (exercice 12.23(iii.b)), i.e. B_0 est fortement analytiquement noethérien, donc de même pour $(B, \mathcal{T}_B^A)$.

(iv) L'assertion (i) peut faillir si f n'est pas un morphisme adique. Par exemple, soient A et B deux anneaux noethériens, $I \subset A$, $J \subset B$ deux idéaux, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux avec $f(I) \subset J$, et munissons A et B de la topologie I -adique et respectivement J -adique; soit en outre Σ un ensemble infini, et $M := (A/I)^{(\Sigma)}$. Alors M est un A -module analytiquement borné, mais $B \otimes_A M$ est analytiquement borné si et seulement si f est adique.

12.2.3. Algèbres de Tate sur un corps valué. Le but de ce paragraphe et des suivants est d'exhiber une classe importante d'anneaux de Tate fortement noethériens : les corps valués dont la valuation a rang un; pour ma présentation, j'ai essentiellement suivi le traité [8]. Soit donc K un corps muni d'une valuation $v : K \rightarrow \Gamma_v$ de rang un, complet (et séparé) pour sa v -topologie $\mathcal{T}_v$ (voir le problème 9.53); notons par $(K^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de v , et fixons $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$.

Proposition 12.43. *Dans la situation du §12.2.3, soit E une extension finie du corps K . On a :*

(i) *Il existe une valuation w de E , unique à équivalence près, telle que $w|_K = v$.*

(ii) La valuation w est de rang un, et la w -topologie de E est complète et séparée.

Démonstration. L'existence d'une valuation w de E prolongeant v est assurée par l'exercice 8.25(ii), et si Γ' est le groupe des valeurs de w , on sait que $[\Gamma' : \Gamma]$ est borné par le degré de E sur K (exercice 8.15(i)), donc w est de rang un (exercice 8.5(iii)). Soit w' une deuxième valuation de E prolongeant v ; notons par $(E_w^+, \mathbf{m}_w)$ (resp. $(E_{w'}^+, \mathbf{m}_{w'})$) l'anneau de valuation de w (resp. de w'), et soit $\mathcal{T}_w$ (resp. $\mathcal{T}_{w'}$) la w -topologie (resp. la w' -topologie) de E . Puisque v, w, w' ont le même rang, on voit aisément que $(E, \mathcal{T}_w)$ et $(E, \mathcal{T}_{w'})$ sont des $(K, \mathcal{T}_v)$ -espaces vectoriels topologiques séparés, donc $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{w'}$ est complète (exercice 9.54(iii)). En outre, comme w et w' sont de rang un, on vérifie aisément que $\mathbf{m}_w = (E, \mathcal{T}_w)^{\circ\circ}$ et $\mathbf{m}_{w'} = (E, \mathcal{T}_{w'})^{\circ\circ}$, donc $\mathbf{m}_w = \mathbf{m}_{w'}$. Mais pour tout $x \in E^\times$ on a $x \in E_w^+ \Leftrightarrow x^{-1} \notin \mathbf{m}_w \Leftrightarrow x^{-1} \notin \mathbf{m}_{w'} \Leftrightarrow x \in E_{w'}^+$, d'où $E_w^+ = E_{w'}^+$, et finalement $w = w'$ dans $\text{Spv } E$. $\square$

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la K -algèbre topologique complète

$$\mathbb{T}_n := K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$$

consiste en les séries de puissances $\sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$ à coefficients $a_{\nu_\bullet} \in K$, telles que le filet $(a_{\nu_\bullet} \mid \nu_\bullet \in \mathbb{N}^n)$ converge vers 0 dans $(K, \mathcal{T}_v)$ (cela revient à dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une partie finie $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ telle que $v(a_{\nu_\bullet}) > \gamma$ pour tout $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n \setminus \Lambda$). Par suite, on a une application bien définie :

$$|\cdot| : \mathbb{T}_n \rightarrow \Gamma_0 \quad \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \mapsto \min(v(a_{\nu_\bullet}) \mid \nu_\bullet \in \mathbb{N}^n)$$

(avec $|0| = +\infty$). D'après la proposition 9.91(ii), $\mathbb{T}_n$ est un anneau de Tate, avec sous-anneau de définition $\mathbb{T}_n^+ := \{a \in \mathbb{T}_n \mid |a| \geq 0\} = K^+ \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ et idéal de définition $\pi \mathbb{T}_n^+$. Noter que la restriction de $|\cdot|$ à la K -sous-algèbre $K[X_\bullet] := K[X_1, \dots, X_n]$ est la valuation de Gauss $|\cdot|_{(0,1)}^v$ de centre 0 et rayon 1 (voir l'exercice 8.11(i)). Soit $\mathcal{T}_{K[X_\bullet]}$ la topologie de $K[X_\bullet]$ induite par l'inclusion dans $K\langle X_\bullet \rangle$.

Lemme 12.44. (i) La valuation $|\cdot|_{(0,1)}^v$ est continue pour la topologie $\mathcal{T}_{K[X_\bullet]}$.

(ii) $(K[X_\bullet], \mathcal{T}_{K[X_\bullet]})^\circ = K^+[X]$ et $(K[X_\bullet], \mathcal{T}_{K[X_\bullet]})^{\circ\circ} = \mathbf{m}[X_\bullet] := \mathbf{m} \cdot K^+[X_\bullet]$.

(iii) $|\cdot|$ est une valuation continue de $\mathbb{T}_n$.

(iv) $\mathbb{T}_n^\circ = \mathbb{T}_n^+$ et $\mathbb{T}_n^{\circ\circ} = \mathbf{m} \mathbb{T}_n^+$.

(v) $\mathbb{T}_n^\times = K^\times \cdot (1 + \mathbf{m} \mathbb{T}_n^+)$.

Démonstration. (i) : D'un côté, $(K[X_\bullet], \mathcal{T}_{K[X_\bullet]})$ est un anneau de Tate, avec sous-anneau de définition $K^+[X_\bullet] = K[X_\bullet] \cap K\langle X_\bullet \rangle^+$, et idéal de définition $\pi K^+[X_\bullet]$. De l'autre côté, $\pi K^+[X_\bullet] = \{P \in K[X_\bullet] \mid |P|_{(0,1)}^v \geq v(\pi)\}$; par suite, $P \in K[X_\bullet]^{\circ\circ}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n \in \pi K^+[X]$, si et seulement si $|P|_{(0,1)}^v > 0$, d'où $K[X_\bullet]^{\circ\circ} = \mathbf{m}[X_\bullet]$, et l'assertion découle du lemme 10.4(i) (noter qu'un élément $\gamma \in \Gamma$ est cofinal dans Γ si et seulement si $\gamma > 0$, car v est de rang un).

(ii) : On vient de voir qu'un polynôme $P \in K[X_\bullet]$ est topologiquement nilpotent si et seulement si $|P|_{(0,1)}^v > 0$; d'autre part, puisque $K[X_\bullet]^{\circ\circ}$ est un idéal radical de $K[X_\bullet]^\circ$ (exercice 9.21(iv)), on voit aisément que $Q \in K[X_\bullet]^\circ$ si et seulement si $Q^n P$ est topologiquement nilpotent pour tout $P \in K[X_\bullet]^{\circ\circ}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$K[X_\bullet]^\circ = \{Q \in K[X_\bullet] \mid |Q|_{(0,1)}^v \geq 0\} = K^+[X_\bullet].$$

(iii) : La valuation $|\cdot|_{(0,1)}^v$ se prolonge en une valuation w de $K(X_\bullet) := \text{Frac}(K[X_\bullet])$, et on voit aisément que $\mathcal{T}_{K[X_\bullet]}$ est induite par la w -topologie $\mathcal{T}_w$ de $K(X_\bullet)$ via l'inclusion $j : K[X_\bullet] \rightarrow K(X_\bullet)$. D'après le problème 9.53(iii), w se prolonge en une valuation $\widehat{w}$ de la complétion $(\widehat{K(X_\bullet)}, \widehat{\mathcal{T}_w})$ de $(K(X_\bullet), \mathcal{T}_w)$, et $\widehat{\mathcal{T}_w}$ coïncide avec la $\widehat{w}$ -topologie de $\widehat{K(X_\bullet)}$. D'autre part, la complétion de j est un homomorphisme injectif et adique d'anneaux topologiques $\widehat{j} : \mathbb{T}_n \rightarrow \widehat{K(X_\bullet)}$, et la topologie de $\mathbb{T}_n$ est induite par $\widehat{\mathcal{T}_w}$ via $\widehat{j}$ (exercices

9.49(i) et 10.17, et corollaire 9.93(ii)). Par inspection directe des constructions, on vérifie aisément que $|\cdot|$ coïncide avec $\widehat{w} \circ \widehat{j}$, d'où l'assertion.

(iv) : Cela découle de (ii) et des exercices 9.42(iii) et 9.88(ii).

(v) : Soit $a \in \mathbb{T}_n^\times$; prenons $u \in K^\times$ avec $v(u) = |a|$, et posons $b := u^{-1}a$; il vient $b, b^{-1} \in \mathbb{T}_n^+$, i.e. $b \in (\mathbb{T}_n^+)^{\times}$. D'autre part, avec (ii), (iv) et les exercices 9.49(iii) et 9.88(ii), on trouve un isomorphisme de $k(\mathfrak{m})$ -algèbres :

$$\omega : \mathbb{T}_n^+ / \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+ \xrightarrow{\sim} K^+[X_\bullet] / \mathfrak{m}[X] \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{m})[X_\bullet] \quad \text{tel que} \quad \omega(X_i) = X_i \quad \forall i \leq n.$$

Soit $\bar{b} \in \mathbb{T}_n^+ / \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+$ l'image de b ; alors $\omega(\bar{b}) \in k(\mathfrak{m})[X_\bullet]^\times = k(\mathfrak{m})^\times$. Cela revient à dire qu'il existe $b_0 \in (K^+)^\times$ et $c \in \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+$ tels que $b = b_0 + c = b_0(1 + b_0^{-1}c)$, d'où $b \in K^\times \cdot (1 + \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+)$. Réciproquement, si $b = u(1 + c)$ avec $u \in K^\times$ et $c \in \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+$, on doit montrer que $b \in \mathbb{T}_n^\times$, et il suffit de vérifier que $1 + c \in (\mathbb{T}_n^+)^{\times}$. Cela suit aussitôt de (iv), de l'exercice 9.88(iii), et du théorème 1.50(i). $\square$

12.2.4. Homomorphismes de substitution. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et notons par $\mathcal{F}(\mathbb{N}^n)$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^n$, muni de l'ordre partiel défini par l'inclusion de parties finies. Pour chaque $\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n$ et chaque $x_\bullet := (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{T}_m^+)^n$, posons $x_\bullet^{\nu_\bullet} := x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$. Pour tout $f := \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \in \mathbb{T}_n$, le filet $(\sum_{\nu_\bullet \in S} a_{\nu_\bullet} x_\bullet^{\nu_\bullet} \mid S \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^n))$ converge alors vers un (unique) élément $f(x_\bullet) \in \mathbb{T}_m$. En outre, pour tous $f, g \in \mathbb{T}_n$, on a $(f + g)(x_\bullet) = f(x_\bullet) + g(x_\bullet)$ et $(f \cdot g)(x_\bullet) = f(x_\bullet) \cdot g(x_\bullet)$, d'où un homomorphisme de K -algèbres

$$\varepsilon_{x_\bullet} : \mathbb{T}_n \rightarrow \mathbb{T}_m \quad f \mapsto f(x_\bullet).$$

Exercice 12.45. (i) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{T}_n$ avec $|f| = 0$. Montrer qu'il existe $c \in K$ avec $v(c) = 0$, tel que $f + c \notin \mathbb{T}_n^\times$.

(ii) Dédurre de (i) que $\mathcal{J}(\mathbb{T}_n) = 0$ (notation de la définition 1.48(i)).

Théorème 12.46. (i) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, tout homomorphisme $\phi : \mathbb{T}_n \rightarrow \mathbb{T}_m$ de K -algèbres est une contraction, i.e. $|\phi(f)| \geq |f|$ pour tout $f \in \mathbb{T}_n$.

(ii) En particulier, ϕ est un homomorphisme continu d'anneaux topologiques.

(iii) Posons $x_\bullet := (\phi(X_1), \dots, \phi(X_n))$; alors $x_\bullet \in (\mathbb{T}_m^+)^n$, et $\phi = \varepsilon_{x_\bullet}$.

(iv) On a une bijection naturelle :

$$K - \text{Alg}(\mathbb{T}_n, \mathbb{T}_m) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{T}_m^+)^n \quad \phi \mapsto (\phi(X_1), \dots, \phi(X_n)).$$

(v) Si ϕ est un isomorphisme, alors $|\phi(f)| = |f|$ pour tout $f \in \mathbb{T}_n$, et $n = m$.

Démonstration. (i) : Soit par l'absurde, $f \in \mathbb{T}_n$ avec $|\phi(f)| < |f|$; quitte à multiplier f par un élément de $K^\times$, on peut supposer que $|\phi(f)| = 0$, et d'après l'exercice 12.45(i) il existe alors $c \in K$ avec $v(c) = 0$ et $\phi(f) + c \notin \mathbb{T}_m^\times$. D'autre part, $|f| > 0$, donc :

$$f + c = c(1 + c^{-1}f) \in K^\times \cdot (1 + \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+) = \mathbb{T}_n^\times$$

(lemme 12.44(v)); par suite, $\phi(f) + c = \phi(f + c) \in \mathbb{T}_m^\times$, contradiction.

(ii) suit aussitôt de (i) et de la remarque 9.3(ii).

(iii), (iv) : D'après (ii), ϕ et $\varepsilon_{x_\bullet}$ sont continus, donc ils sont déterminés par leurs restrictions au sous-anneau dense $K[X_1, \dots, X_n]$ de $\mathbb{T}_n$. Mais $\varepsilon_{x_\bullet}$ et ϕ coïncident sur $K[X_1, \dots, X_n]$, d'où (iii), et l'assertion (iv) suit aussitôt de (iii).

(v) : Si ϕ est un isomorphisme, d'après (i) on a : $|\phi(f)| \geq |f| = |\phi^{-1} \circ \phi(f)| \geq |\phi(f)|$, d'où $|\phi(f)| = |f|$. Par suite, ϕ induit par restriction un isomorphisme de K^+ -algèbres

$$\phi^+ : \mathbb{T}_n^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_m^+$$

d'où l'isomorphisme $k(\mathfrak{m}) \otimes_{K^+} \phi^+ : k(\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_m]$ de $k(\mathfrak{m})$ -algèbres; ainsi $n = m$, grâce au problème 6.82(ii). $\square$

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $g \in \mathbb{T}_n$; on trouve aisément une unique suite $(g_k \mid k \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathbb{T}_{n-1}$ telle que g soit la limite du filet $(\sum_{k=0}^i g_k X_n^k \mid i \in \mathbb{N})$, i.e.

$$g = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^k.$$

Définition 12.47. Avec la notation ci-dessus, soit $s \in \mathbb{N}$. On dit que la série g est X_n -distinguée de degré s , si elle vérifie les conditions suivantes :

$$g_s \in \mathbb{T}_{n-1}^\times \quad |g| = |g_s| \quad \text{et} \quad |g_k| > |g_s| \quad \forall k > s.$$

Remarque 12.48. Soit $g \in \mathbb{T}_n$ avec $|g| = 0$. Par simple inspection des définitions, on voit que g est X_n -distinguée de degré s si et seulement si l'image de g dans $\mathbb{T}_n^+/\mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+ \simeq k(\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit sous la forme :

$$\bar{g}_0 + \bar{g}_1 X_n + \dots + \bar{g}_s X_n^s \quad \text{avec } \bar{g}_0, \dots, \bar{g}_{s-1} \in k(\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_{n-1}] \text{ et } \bar{g}_s \in k(\mathfrak{m})^\times.$$

Théorème 12.49. (Division de Weierstrass) Soient $f, g \in \mathbb{T}_n$, et supposons que g soit X_n -distinguée de degré s . Alors on a :

- (i) Il existe des uniques $q \in \mathbb{T}_n$, $r \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ avec $f = qg + r$ et $\deg_{X_n}(r) < s$.
- (ii) $|f| = \min(|qg|, |r|)$.
- (iii) Si de plus, $f, g \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ et g est unitaire de degré s , alors $q \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$.

Démonstration. Quitte à multiplier g par un élément de $K^\times$, on peut supposer que $|g| = 0$. Montrons d'abord que si $f = qg + r$ pour $q \in \mathbb{T}_n$ et $r \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ avec $\deg_{X_n}(r) < s$, alors $|f| = \min(|qg|, |r|)$. Cela est clair si $q = r = 0$; quitte à multiplier f, q et r par le même élément de $K^\times$, on peut alors supposer aussi que

$$(*) \quad \min(|q|, |r|) = 0$$

et par suite $|f| \geq 0$; ainsi, $f, g, q, r \in \mathbb{T}_n^+$, et il reste à voir que $|f| = 0$. Notons par $\bar{f}, \bar{g}, \bar{q}, \bar{r} \in \mathbb{T}_n^+/\mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+ = k(\mathfrak{m})[X_\bullet]$ les images de f, g, q, r , et supposons par l'absurde que $|f| > 0$, i.e. $\bar{f} \neq 0$. Mais noter que $\deg_{X_n}(\bar{g}) = s$, car g est X_n -distinguée de degré s , et $\deg_{X_n}(\bar{r}) \leq \deg_{X_n}(r) < s$; l'identité $0 = \bar{q} \cdot \bar{g} + \bar{r}$ entraîne alors que $\bar{q} = \bar{r} = 0$, et cela contredit (*).

(i) : Montrons d'abord l'unicité de q et r . En effet, si $q' \in \mathbb{T}_n, r' \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ avec $\deg_{X_n}(r') < s$ vérifiant aussi la condition $f = q'g + r'$, il vient $0 = (q - q')g + (r - r')$, d'où $|q - q'| = |r - r'| = 0$, par ce qui précède, i.e. $q = q'$ et $r = r'$. Posons :

$$B := \{qg + r \mid q \in \mathbb{T}_n, r \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n], \deg_{X_n}(r) < s\}.$$

Affirmation 12.50. B est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}_n$.

Preuve : Il suffit de montrer que B est complet pour la topologie induite par l'inclusion dans $\mathbb{T}_n$. Soit alors $b_\bullet := (b_\lambda = q_\lambda g + r_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ un filet de Cauchy de B ; ainsi, pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $|b_{\lambda'} - b_{\lambda''}| > \gamma$ pour tous $\lambda', \lambda'' \geq \lambda$. Par ce qui précède, il vient $|q_{\lambda'} - q_{\lambda''}|, |r_{\lambda'} - r_{\lambda''}| > \gamma$ pour tous $\lambda', \lambda'' \geq \lambda$, i.e. $q_\bullet := (q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ et $r_\bullet := (r_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ sont des filets de Cauchy de $\mathbb{T}_n$. Soient $q, r \in \mathbb{T}_n$ les limites de $q_\bullet$ et $r_\bullet$; on voit aisément que $r \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ et $\deg_{X_n}(r) < s$; de plus, $qg + r \in B$ est la limite de $b_\bullet$, d'où l'assertion. $\diamond$

Ecrivons $g = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^k$, et soient

$$\gamma := \min(|g_k| \mid k > s) \quad \text{et} \quad I := \{a \in K \mid v(a) \geq \gamma\}.$$

Par construction, $\gamma > 0$, donc $I \subset \mathfrak{m}$ est un idéal de K^+ .

Affirmation 12.51. Pour tout $f \in \mathbb{T}_n \setminus \{0\}$ il existe $b \in B$ tel que $|f - b| > |f| + \gamma$.

Preuve : Quitte à multiplier f par un élément de $K^\times$, on peut supposer que $|f| = 0$. Posons $A := K^+/I$, et pour tout $a \in K^+$ soit $\bar{a} \in A$ l'image de a ; on a un homomorphisme d'anneaux surjectif évident

$$\omega : \mathbb{T}_n^+ \rightarrow A[X_1, \dots, X_n] \quad \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} a_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet} \mapsto \sum_{\nu_\bullet \in \mathbb{N}^n} \bar{a}_{\nu_\bullet} X^{\nu_\bullet}$$

et $\text{Ker}(\omega) = I\mathbb{T}_n^+ = \{x \in \mathbb{T}_n \mid |x| \geq \gamma\}$. De plus, $\omega(g) = \sum_{k=0}^s \bar{g}_k(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^k$, avec $\deg_{X_n}(\omega(g)) = s$ et $\bar{g}_s \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]^\times$. La division euclidienne de $\omega(f)$ par $\omega(g)$ est alors disponible dans $A[X_1, \dots, X_n]$ (cf. la preuve de l'observation 8.79) : on a ainsi $\bar{q}, \bar{r} \in A[X_1, \dots, X_n]$ avec $\deg_{X_n}(\bar{r}) < s$ tels que $\omega(f) = \bar{q} \cdot \omega(g) + \bar{r}$. Soient $q' \in \mathbb{T}_n$,

$r' \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ avec $\deg_{X_n}(r') < s$ et $\omega(q') = \bar{q}$, $\omega(r') = \bar{r}$; il vient $f - q'g - r' \in \text{Ker}(\omega)$, i.e. $|f - (q'g + r')| > \gamma$. $\diamond$

Avec l'observation 12.51, et une simple récurrence, on trouve pour tout $f \in \mathbb{T}_n$ et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ des éléments $b_1, \dots, b_k \in B$ avec $|f - \sum_{i=1}^k b_i| > |f| + k\gamma$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Cela achève de montrer que B est dense dans $\mathbb{T}_n$; au vu de l'observation 12.50, il vient alors $B = \mathbb{T}_n$, d'où l'assertion.

(iii) Si $g \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ est unitaire par rapport à l'indéterminée X_n , la division euclidienne de f par g est disponible dans $\mathbb{T}_{n-1}[X_n]$; on trouve ainsi $q', r' \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ avec $f = q'g + r'$ et $\deg_{X_n}(r') < s$. D'après (i), on doit avoir $q = q'$ et $r = r'$. $\square$

Théorème 12.52. (Préparation de Weierstrass) *Soit $g \in \mathbb{T}_n$ un élément X_n -distingué de degré s . Alors il existe des uniques $h \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ et $u \in \mathbb{T}_n^\times$ avec*

$$g = u \cdot h \quad \deg_{X_n}(h) = s \quad \deg_{X_n}(h - X_n^s) < s.$$

De plus, $|h| = 0$, donc h est X_n -distingué de degré s .

Démonstration. Quitte à multiplier g par un élément de $K^\times$, on peut supposer que $|g| = 0$. D'après le théorème 12.49(i), il existe des uniques $l \in \mathbb{T}_n$, $r \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ tels que $\deg_{X_n}(r) < s$ et $X_n^s = gl + r$. Posons $h := X_n^s - r$; alors $h \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$, $\deg_{X_n}(h) = s$, et $gl = h$. De plus, $|r| \geq |X_n^s| = 0$, d'après le théorème 12.49(ii), donc $|h| = 0$. Il suffit alors de montrer que $l \in \mathbb{T}_n^\times$. Pour cela, soient $\bar{g}, \bar{h}, \bar{l} \in k(\mathbf{m})[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{T}_n^+/\mathbf{m}\mathbb{T}_n^+$ les images de g, h, l ; on a $\deg_{X_n}(\bar{g}) = \deg_{X_n}(\bar{h}) = s$, d'où $\bar{l} \in k(\mathbf{m})[X_1, \dots, X_{n-1}]$. De plus, $\bar{h}$ est unitaire, et $\bar{g} = \sum_{k=0}^s \bar{g}_k(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^k$ avec $\bar{g}_s \in k(\mathbf{m})^\times$; par suite, $\bar{l} \in k(\mathbf{m})^\times$, et ainsi $l \in (K^+)^\times + \mathbf{m}\mathbb{T}_n^+ \subset \mathbb{T}_n^\times$ (lemme 12.44(v)). Pour vérifier l'unicité de h et u , supposons que $h' \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ et $u' \in \mathbb{T}^\times$ soient deux autres éléments vérifiant les conditions du théorème, et posons $r' := X_n^s - h'$; alors $\deg_{X_n}(r') < s$ et $X_n^s = u'^{-1}g + r' = u^{-1}g + (X_n^s - h)$. D'après le théorème 12.49(i), il vient $u'^{-1} = u^{-1}$ et $r' = X_n^s - h$, i.e. $u = u'$ et $h = h'$. $\square$

Corollaire 12.53. (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la K -algèbre $\mathbb{T}_n$ est noethérienne.*

(ii) *Tout idéal de $\mathbb{T}_n$ est une partie fermée.*

(iii) *Pour tout $\mathbf{n} \in \text{Max } \mathbb{T}_n$, le corps résiduel $k(\mathbf{n})$ est une extension finie de K .*

Démonstration. (i) : On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial; soit donc $n > 0$, et supposons que l'assertion soit connue pour $\mathbb{T}_{n-1}$. On remarque :

Affirmation 12.54. Pour tout $g \in \mathbb{T}_n \setminus \{0\}$ il existe $s \in \mathbb{N}$ et un automorphisme ϕ de la K -algèbre $\mathbb{T}_n$ tel que $\phi(g)$ soit X_n -distingué de degré s .

Preuve : Comme d'habitude, on peut supposer que $|g| = 0$, de sorte que l'image $\bar{g}$ de g dans $\mathbb{T}_n^+/\mathbf{m}\mathbb{T}_n^+ \simeq k(\mathbf{m})[X_\bullet] := k(\mathbf{m})[X_1, \dots, X_n]$ soit non nulle. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons l'automorphisme $\bar{\phi}_N$ de la $k(\mathbf{m})$ -algèbre $k(\mathbf{m})[X_\bullet]$ tel que :

$$\bar{\phi}_N(X_n) := X_n \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_N(X_i) := X_i + X_n^{N^i} \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Par le problème 6.12(i), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $\bar{u} \in k(\mathbf{m})$ tel que $\bar{u} \cdot \bar{\phi}_{N_0}(\bar{g})$ soit unitaire par rapport à l'indéterminée X_n , et d'après le théorème 12.46(iv), il existe un unique endomorphisme de la K -algèbre $\mathbb{T}_n$ tel que

$$\phi(X_n) = X_n \quad \text{et} \quad \phi(X_i) = X_i + X_n^{N_0^i} \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Il est clair que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{T}_n$, donc il se restreint en un automorphisme ϕ^+ de la K^+ -algèbre $\mathbb{T}_n^+$ (théorème 12.46(v)), et évidemment on a $k(\mathbf{m}) \otimes_{K^+} \phi^+ = \bar{\phi}_{N_0}$. L'assertion découle alors de la remarque 12.48. $\diamond$

Or, soit $I \subset \mathbb{T}_n$ un idéal; on doit vérifier que I est de type fini. Si $I = 0$, l'assertion est triviale; soit donc $g \in I \setminus \{0\}$. D'après l'observation 12.54, il existe un automorphisme ϕ de $\mathbb{T}_n$ tel que $\phi(g)$ est X_n -distingué, et évidemment il suffit de montrer que $\phi(I)$ est un

idéal de type fini ; ainsi, on peut supposer que g soit X_n -distinguée. Or, si l'idéal $I/g\mathbb{T}_n$ de $\mathbb{T}_n/g\mathbb{T}_n$ est de type fini, il est clair qu'il en est de même pour l'idéal I de $\mathbb{T}_n$. Donc, on est ramené à vérifier que $\mathbb{T}_n/(g)$ est noethérien. Mais d'après le théorème 12.49(i), l'inclusion $\mathbb{T}_{n-1}[X_n] \rightarrow \mathbb{T}_n$ induit un homomorphisme surjectif d'anneaux $\mathbb{T}_{n-1}[X_n] \rightarrow \mathbb{T}_n/(g)$, et par hypothèse de récurrence, $\mathbb{T}_{n-1}$ est noethérien, donc de même pour $\mathbb{T}_n/(g)$ (théorème 6.65).

(ii) : Cela suit aussitôt de (i) et de la proposition 9.89(i).

(iii) : On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial ; soit alors $n > 0$, et supposons que l'assertion soit connue pour $\mathbb{T}_{n-1}$. Soit $g \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$; en raisonnant comme dans la preuve de (i), on peut supposer que g soit X_n -distinguée, et d'après le théorème 12.52 on peut même supposer que $g \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ soit unitaire par rapport à l'indéterminée X_n . La preuve de (i) montre que $\mathbb{T}_n/(g)$ est un quotient de l'anneau $A := \mathbb{T}_{n-1}[X_n]/(g)$, donc $\mathfrak{n}/g\mathbb{T}_n$ s'identifie naturellement avec un idéal maximal $\bar{\mathfrak{n}}$ de A , et il suffit de montrer que $k(\bar{\mathfrak{n}})$ est une extension finie de K . Mais noter que A est une extension finie de $\mathbb{T}_{n-1}$, donc $\bar{\mathfrak{n}}_0 := \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathbb{T}_{n-1}$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}_{n-1}$ (corollaire 6.18(i)). Par hypothèse de récurrence, $k(\bar{\mathfrak{n}}_0)$ est une extension finie de K , et $k(\bar{\mathfrak{n}})$ est un quotient de $k(\bar{\mathfrak{n}}_0)[X_n]$; pour conclure, il suffit alors d'invoquer la proposition 6.78(i). $\square$

Remarque 12.55. (i) Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\mathfrak{n} \in \text{Max } \mathbb{T}_n$; fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K , et munissons le corps résiduel $k(\mathfrak{n})$ de la topologie $\mathcal{T}_{k(\mathfrak{n})}$ induite par $\mathbb{T}_n$ via la projection canonique $\pi : \mathbb{T}_n \rightarrow k(\mathfrak{n})$. Alors $(k(\mathfrak{n}), \mathcal{T}_{k(\mathfrak{n})})$ est un anneau de Huber complet et séparé, et π est adique, par le corollaire 12.53(ii), la remarque 9.59(ii) et l'exercice 9.81(v) ; par suite, $\pi(X_1), \dots, \pi(X_n) \in (k(\mathfrak{n}), \mathcal{T}_{k(\mathfrak{n})})^\circ$ (lemme 9.77(iv)).

(ii) D'autre part, il existe une unique valuation w de $\bar{K}$ prolongeant v , et toute sous-extension finie $E \subset \bar{K}$ de K est complète pour la w -topologie $\mathcal{T}_w$ (proposition 12.43) ; noter que $(\bar{K}, \mathcal{T}_w)^\circ$ est l'anneau de valuation $\bar{K}^+$ de $\bar{K}$, car w est de rang un. En outre, avec le corollaire 12.53(iii), on a une inclusion de K -algèbres $i : k(\mathfrak{n}) \rightarrow \bar{K}$, et au vu de l'exercice 9.54(iii), $\mathcal{T}_{k(\mathfrak{n})}$ est alors la topologie induite par $\mathcal{T}_w$ via i ; en particulier, $(k(\mathfrak{n}), \mathcal{T}_{k(\mathfrak{n})})^\circ = i^{-1}(\bar{K}^+)$, et évidemment $\mathfrak{n} = \text{Ker}(i \circ \pi : \mathbb{T}_n \rightarrow \bar{K})$.

(iii) Réciproquement, en raisonnant comme au §12.2.4, on associe à tout élément $a_\bullet := (a_1, \dots, a_n) \in (\bar{K}^+)^n$ un unique homomorphisme continu $\varepsilon_{a_\bullet} : \mathbb{T}_n \rightarrow (\bar{K}, \mathcal{T}_w)$ tel que $\varepsilon_{a_\bullet}(X_i) = a_i$ pour $i = 1, \dots, n$; comme l'extension $K[a_\bullet]$ de K est complète pour la topologie $\mathcal{T}_w$, on a $\varepsilon_{a_\bullet}(\mathbb{T}_n) = K[a_\bullet]$, d'où $\mathfrak{n}_{a_\bullet} := \text{Ker}(\varepsilon_{a_\bullet}) \in \text{Max } \mathbb{T}_n$. En résumant, on obtient une surjection naturelle

$$(\bar{K}^+)^n \rightarrow \text{Max } \mathbb{T}_n \quad a_\bullet \mapsto \mathfrak{n}_{a_\bullet}.$$

Exercice 12.56. Montrer que l'anneau $\mathbb{T}_n$ est factoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le corollaire 12.53(i) montre que le corps K est un anneau fortement noethérien, donc tous nos résultats des sections précédentes sont applicables aux K -algèbres topologiquement de type fini : les espaces adiques que l'on obtient à partir de ces algèbres sont essentiellement les variétés rigides de la géométrie analytique non-archimédienne. Notre exposition s'arrête ici, au seuil de ce vaste sujet : le lecteur souhaitant poursuivre l'exploration de cette théorie et de ses applications à des nombreuses questions géométriques et arithmétiques, pourra consulter l'ouvrage encyclopédique [8] de Bosch, Güntzer et Remmert.

12.3. Morphismes topologiquement de type fini. Lorsqu'on s'intéresse aux conditions de finitude que l'on peut imposer sur les homomorphismes continus d'anneaux de Huber, il faut distinguer deux cas différents, selon que l'on considère des algèbres topologiquement locales, ou plutôt des algèbres complètes et séparées :

Définition 12.57. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux de Huber ; ainsi, $\hat{B}$ est naturellement une $\hat{A}$ -algèbre, via la complétion $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ de f .

(i) On dit que f est *topologiquement de type l-fini* (resp. *topologiquement de type c-fini*) s'il existe $n \in \mathbb{N}$, une suite $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ de parties *finies* de A telle que T_i engendre un idéal ouvert de A pour tout $i = 1, \dots, n$, et un homomorphisme de A -algèbres continu, surjectif et ouvert :

$$(A[X_1, \dots, X_n]_{T_\bullet})_{\text{loc}} \rightarrow B_{\text{loc}} \quad (\text{resp. } \widehat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet} \rightarrow \widehat{B})$$

(notation du §9.4.3, de la proposition 9.85 et de l'exercice 9.81(ii)). Dans ce cas, on dit aussi que B est une A -algèbre *topologiquement de type l-fini* (resp. *c-fini*).

(ii) On dit que f est *topologiquement fortement de type l-fini* (resp. *topologiquement fortement de type c-fini*) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme continu, surjectif et ouvert de A -algèbres

$$A[X_1, \dots, X_n]_{\text{loc}} \rightarrow B_{\text{loc}} \quad (\text{resp. } \widehat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \widehat{B})$$

(ici $A[X_1, \dots, X_n] := A[X_\bullet]_{T_\bullet}$, avec $T_\bullet := (\{1\}, \dots, \{1\})$). Dans ce cas, on dit aussi que B est une A -algèbre *topologiquement fortement de type l-fini* (resp. *c-fini*).

Proposition 12.58. Soient A un anneau de Huber complet et séparé, $n \in \mathbb{N}$, et $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ une suite de parties finies de A telle que T_i engendre un idéal ouvert de A pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors il existe un voisinage de zéro $U \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} := A\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) Pour tout $u \in U$ et tout $i = 1, \dots, n$ on a $\{(X_i + u) \cdot t \mid t \in T_i\} \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}^\circ$.
- (ii) pour tous $u_1, \dots, u_n \in U$, l'unique endomorphisme continu g de la A -algèbre $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ avec $g(X_i) = X_i + u_i$ pour $i = 1, \dots, n$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Par construction, $tX_i \in A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}^\circ$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $t \in T_i$; comme $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}^\circ$ est un sous-anneau ouvert de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, pour tous tels i et t on trouve un voisinage de zéro $U_t \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ avec $U_t \cdot t \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}^\circ$, et la condition (i) est satisfaite avec $U := \bigcap_{t \in T_1 \cup \dots \cup T_n} U_t$. Ensuite, l'existence et l'unicité de l'endomorphisme g de (ii) sont assurées par le corollaire 9.93(iii). Or, soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition; par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^p \subset AT_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit $a_1, \dots, a_k$ un système fini de générateurs de I_0^p ; pour tous $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k$ on a donc $a_j = \sum_{t \in T_i} a_{ijt} t$ pour certains $a_{ijt} \in A$, et on trouve $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^m a_{ijt} \subset A_0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, tout $j = 1, \dots, k$ et tout $t \in T_i$. Avec $N := p + m$ il vient

$$(*) \quad I_0^N \subset A_0 T_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons $I_0^{-r} := \{a \in A \mid I_0^r a \subset A_0\}$, et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des filtrations (décroissantes) $F_\bullet$ de $A[X_\bullet] := A[X_1, \dots, X_n]$ telles que :

- $I_0^r \subset F_r$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$
- $X_i t \in F_0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $t \in T_i$
- $X_1, \dots, X_n \in F_{-N}$
- $(A[X_\bullet], F_\bullet)$ est un anneau filtré (voir la définition 9.64(i)).

On voit aisément que $\mathcal{F} \neq \emptyset$; posons $\Phi_r := \bigcap_{F_\bullet \in \mathcal{F}} F_r$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$; évidemment $\Phi_\bullet := (\Phi_r \mid r \in \mathbb{Z})$ est un élément de $\mathcal{F}$. Explicitement, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe Φ_r est engendré par les produits de la forme :

$$(**) \quad f := aX_{i_1} \cdots X_{i_k} (X_{j_1} t_{j_1}) \cdots (X_{j_l} t_{j_l})$$

pour toute suite $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_l)$ d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ de longueurs arbitraires $k, l \in \mathbb{N}$, tout $t_{j_1} \in T_{j_1}, \dots, t_{j_l} \in T_{j_l}$, et tout $a \in I_0^{kN+r}$. En particulier, si $r \geq 0$, d'après (*) le produit $aX_{i_1} \cdots X_{i_k}$ est une somme d'éléments de la forme

$$b(X_{i_1} t_{i_1}) \cdots (X_{i_k} t_{i_k}) \quad \text{avec } b \in I_0^r \quad \text{et } t_{i_1} \in T_{i_1}, \dots, t_{i_k} \in T_{i_k}.$$

Ainsi, $\Phi_0 = A_0[X_\bullet]$ et $\Phi_r = I_0^r[X_\bullet]$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ (notation de la proposition 9.85(ii)). Il est clair que $\Phi_\bullet$ est une filtration exhaustive, et la topologie induite par $\Phi_\bullet$ (voir la remarque 9.67(i)) coïncide alors avec la topologie $\mathcal{T}_{T_\bullet}$ associée à $T_\bullet$ par la

proposition 9.85(ii). Rappelons que $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ est la complétion de $(A[X_\bullet], \mathcal{T}_{T_\bullet})$ (corollaire 9.93(ii)); pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\widehat{\Phi}_n \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ l'adhérence de l'image de Φ_n , et posons $\widehat{\Phi}_\bullet := (\widehat{\Phi}_n \mid n \in \mathbb{Z})$. Alors $(A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}, \widehat{\Phi}_\bullet)$ est un anneau filtré, et la topologie de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ coïncide avec celle induite par la filtration $\widehat{\Phi}_\bullet$ (remarque 9.67(v)); par suite, on trouve $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\widehat{\Phi}_M \subset U$ et $T_i \cdot \widehat{\Phi}_M \subset \widehat{\Phi}_1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi, pour tous $u_1, \dots, u_n \in \widehat{\Phi}_M$ il existe un unique endomorphisme continu g de la A -algèbre $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ avec $g(X_i) = X_i + u_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et on voit aisément que $g(\widehat{\Phi}_n) \subset \widehat{\Phi}_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit alors $h := \text{gr}_\bullet(g)$, l'endomorphisme de l'anneau gradué $\text{gr}_\bullet A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ associé à la filtration $\widehat{\Phi}_\bullet$ (remarque 9.65); soit aussi $\bar{f} \in \text{gr}_r A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ la classe de tout générateur f de Φ_r comme dans (**). On vérifie aisément que $h(\bar{f}) = \bar{f}$, donc h est l'identité de $\text{gr}_\bullet A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$, et g est alors un homéomorphisme (proposition 9.68(iv)). Quitte à remplacer U par $\widehat{\Phi}_M$, les assertions (i) et (ii) sont ainsi vérifiées. $\square$

Corollaire 12.59. *Dans la situation de la proposition 12.58, soit $g : A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \rightarrow B$ un homomorphisme continu, surjectif et ouvert d'anneaux de Huber. Alors il existe un voisinage de zéro $V \subset B$ vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *Pour tout $b \in V$ et tout $i = 1, \dots, n$ on a $\{(g(X_i) + b) \cdot t \mid t \in T_i\} \subset B^\circ$.*
- (ii) *pour tous $b_1, \dots, b_n \in V$, l'unique homomorphisme continu $h : A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \rightarrow B$ de A -algèbres avec $h(X_i) = g(X_i) + b_i$ pour $i = 1, \dots, n$ est surjectif et ouvert.*

Démonstration. (i) : Soit $U \subset A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ comme dans la proposition 12.58; alors $V := g(U)$ est un voisinage ouvert de zéro dans B . En outre, g est adique (proposition 9.78(iv)); l'assertion découle alors du lemme 9.77(iv).

(ii) : Ici on munit B de la structure de A -algèbre induite par la restriction $A \rightarrow B$ de g ; l'existence et unicité de h découlent alors de (i), du corollaire 9.93(iii), et de la remarque 9.19(ii). Ensuite, soient $u_1, \dots, u_n \in U$ avec $b_i = g(u_i)$ pour $i = 1, \dots, n$; d'après la proposition 12.58(ii), l'unique endomorphisme continu l de la A -algèbre $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ tel que $l(X_i) = X_i + u_i$ pour $i = 1, \dots, n$ est un homéomorphisme, et évidemment $h = g \circ l$, d'où l'assertion. $\square$

Exercice 12.60. Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de Huber, $j_B : B \rightarrow \widehat{B}$ la complétion de B . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) f est topologiquement de type c-fini.
- (b) Il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ et une partie finie $\Sigma \subset B$ tels que $f(A_0) \subset B_0$ et $\widehat{B} = j_B(f(A)[\Sigma]) \cdot \widehat{B}_0$, et tels que la restriction $A_0 \rightarrow B_0$ de f soit topologiquement fortement de type c-fini.
- (c) Pour tout sous-anneau ouvert $A_1 \subset A$ il existe un sous-anneau ouvert $B_1 \subset B$ et une partie finie $\Sigma \subset B$ tels que $f(A_1) \subset B_1$ et $\widehat{B} = j_B(f(A)[\Sigma]) \cdot \widehat{B}_1$, et tels que la restriction $A_1 \rightarrow B_1$ de f soit topologiquement fortement de type c-fini.
- (d) $j_B \circ f$ est adique, et il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ et des parties finies $\Sigma \subset B, \Sigma_0 \subset B_0$, tels que $f(A)[\Sigma]$ est dense dans B , $f(A_0) \subset B_0$, et $f(A_0)[\Sigma_0]$ est dense dans B_0 .

Exercice 12.61. Gardons la notation et les hypothèses de l'exercice 12.60. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) f est topologiquement fortement de type c-fini.
- (b) Il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ tels que $f(A_0) \subset B_0$ et $\widehat{B} = j_B \circ f(A) \cdot \widehat{B}_0$, et tels que la restriction $A_0 \rightarrow B_0$ de f soit topologiquement fortement de type c-fini.
- (c) Pour tout sous-anneau ouvert $A_1 \subset A$ il existe un sous-anneau ouvert $B_1 \subset B$ tel que $f(A_1) \subset B_1$ et $\widehat{B} = j_B \circ f(A) \cdot \widehat{B}_1$, et tels que la restriction $A_1 \rightarrow B_1$ de f soit topologiquement fortement de type c-fini.

(d) $j_B \circ f$ est adique, et il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ et une partie finie $\Sigma_0 \subset B_0$, tels que $f(A)[\Sigma_0]$ est dense dans B , $f(A_0) \subset B_0$, et $f(A_0)[\Sigma_0]$ est dense dans B_0 .

Lemme 12.62. (i) *Toute composition d'homomorphismes topologiquement de type c-fini (resp. topologiquement fortement de type c-fini) d'anneaux de Huber est topologiquement de type c-fini (resp. topologiquement fortement de type c-fini).*

(ii) *Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme topologiquement de type c-fini d'anneaux de Huber. Si $B = B^\circ \cdot f(A)$, alors f est topologiquement fortement de type c-fini.*

(iii) *Si l'anneau de Huber A est universellement analytiquement noethérien, il en est de même pour toute A -algèbre topologiquement locale et de type l-fini.*

(iv) *Si l'anneau de Huber A est fortement analytiquement noethérien, il en est de même pour toute A -algèbre complète, séparée et topologiquement de type c-fini.*

(v) *Si l'anneau de Huber A est à définition noethérienne, il en est de même pour toute A -algèbre complète, séparée et topologiquement de type c-fini.*

Démonstration. (i) : Soient A, B, C des anneaux de Huber, $g : \hat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \hat{B}$ et $h : \hat{B}\langle Y_1, \dots, Y_m \rangle \rightarrow \hat{C}$ deux homomorphismes d'anneaux continus, surjectifs et ouverts ; on voit aisément que g se prolonge en un homomorphisme surjectif, continu et ouvert $g(Y_\bullet) : \hat{A}\langle X_\bullet \rangle \langle Y_\bullet \rangle = \hat{A}\langle X_\bullet, Y_\bullet \rangle \rightarrow \hat{B}\langle Y_\bullet \rangle$, d'où un homomorphisme continu, surjectif et ouvert $h \circ g(Y_\bullet) : \hat{A}\langle X_\bullet, Y_\bullet \rangle \rightarrow \hat{C}$. Cela montre que la composition de morphismes topologiquement fortement de type c-fini est topologiquement fortement de type c-fini. Au vu de l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (c) de l'exercice 12.60, on déduit aussitôt ensuite l'assertion pour la composition de morphismes topologiquement de type c-fini.

(ii) : Soit $j : B \rightarrow \hat{B}$ la complétion, et noter que :

$$\hat{B} = j(B) + (\hat{B})^\circ = j(B^\circ \cdot f(A)) + (\hat{B})^\circ = (\hat{B})^\circ \cdot j \circ f(A).$$

Quitte à remplacer f par $j \circ f$, on peut alors supposer que B soit complet et séparé. D'après l'exercice 12.60, il existe $n \in \mathbb{N}$, une partie finie $\Sigma := \{b_1, \dots, b_m\} \subset B$, et des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ tels que $f(A_0) \hat{\subset} B_0$, la restriction $A_0 \rightarrow B_0$ de f se prolonge en un homomorphisme d'anneaux $g : \hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow B_0$ continu, surjectif et ouvert, et $B = C[\Sigma]$, avec $C := f(A) \cdot B_0$. Puisque $B = B^\circ \cdot f(A)$, on peut supposer que $\Sigma \subset B^\circ$, et alors le sous-anneau $B_1 := B_0[\Sigma]$ est ouvert et borné dans B (remarque 9.19(i) et exercice 9.21(i)), donc il est un sous-anneau de définition. Il existe un unique homomorphisme continu de A_0 -algèbres $h : \hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_{n+m} \rangle \rightarrow B_1$ avec $h(X_i) := g(X_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et $h(X_{n+i}) := b_i$ pour $i = 1, \dots, m$ (corollaire 9.93(iii)). Comme g est ouvert, il en est de même pour h , et par construction h est surjectif ; de plus, $B = f(A) \cdot B_1$. On conclut avec l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) de l'exercice 12.61.

(iv) : Soit B une telle A -algèbre ; d'un côté, il suffit de vérifier que

$$B\langle Y_\bullet \rangle := B\langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$$

est analytiquement noethérien pour tout $m \in \mathbb{N}$ (exercice 12.36(iv)). De l'autre côté, par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$, une suite $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ de parties finies de A telle que chaque T_i engendre un idéal ouvert de A , et un morphisme de A -algèbres $g : A\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet} \rightarrow B$ continu, surjectif et ouvert. Evidemment on a

$$A\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet} \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle = A\langle X_\bullet, Y_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \quad \text{avec } T'_\bullet := (T_1, \dots, T_n, \{1\}, \dots, \{1\})$$

et le morphisme induit $g(Y_\bullet) : A\langle X_\bullet, Y_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \rightarrow B\langle Y_\bullet \rangle$ est encore topologiquement de type c-fini. Donc, on est ramené à vérifier que B est analytiquement noethérien. Pour cela, soient $f : A \rightarrow B$ le morphisme structurel de B , et $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition ; d'après l'exercice 12.60 il existe un sous-anneau ouvert $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et tel que la restriction $A_0 \rightarrow B_0$ de f soit topologiquement fortement de type c-fini. Puisque les topologies de A et B sont complètes et séparées, il en est de même pour celles de A_0

et B_0 , donc on a un homomorphisme $A_0\langle X_\bullet \rangle := A_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow B_0$ continu, surjectif et ouvert, pour quelque $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $A_0\langle X_\bullet \rangle$ est un sous-anneau de définition de l'anneau analytiquement noethérien $A\langle X_\bullet \rangle$, donc il est analytiquement noethérien au sens de la définition 12.20(ii) (exercice 12.36(i,ii)); avec l'exercice 12.23(iii.b) on déduit que B_0 est analytiquement noethérien, et on conclut avec l'exercice 12.36(i,ii).

(iii) : Soit B une telle A -algèbre; en raisonnant comme dans la preuve de (iv), on se ramène aisément à vérifier que B est analytiquement noethérien. Or, par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$, une suite $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ de parties finies de A telle que chaque T_i engendre un idéal ouvert de A , et un morphisme continu, surjectif et ouvert de A -algèbres $g : (A[X_1, \dots, X_n]_{T_\bullet})_{\text{loc}} \rightarrow B$; si $A_0 \subset A$ est un sous-anneau de définition analytiquement noethérien et si $I_0 \subset A_0$ est un idéal de définition, il s'ensuit que $B_0 := g(A_0[T_\bullet X_\bullet]_{\text{loc}})$ est un sous-anneau de définition de B , et $I_0 B_0$ est un idéal de définition. Mais B_0 est analytiquement noethérien pour sa topologie $I_0 B_0$ -adique (exercice 12.23(iii.a,iii.b)), d'où l'assertion.

(v) : Comme dans la preuve de (iv), on trouve un sous-anneau de définition $A_0 \subset A$ et un sous-anneau ouvert $B_0 \subset B$ avec une surjection $\hat{A}_0\langle X_\bullet \rangle \rightarrow B_0$ continue et ouverte, où $\hat{A}_0$ désigne la complétion de A_0 ; mais $\hat{A}_0\langle X_\bullet \rangle$ est la complétion I_0 -adique de l'anneau noethérien $A_0[X_1, \dots, X_n]$, donc il est noethérien (théorème 9.113); ainsi B_0 est noethérien et sa topologie est $I_0 B_0$ -adique, d'où l'assertion. $\square$

Remarque 12.63. Si A est un anneau de Huber analytique, alors $B = f(A) \cdot B^\circ$ pour tout homomorphisme continu $f : A \rightarrow B$ d'anneaux de Huber. En effet, par hypothèse il existe $a_1, \dots, a_k \in A^\circ$ avec $A = \sum_{i=1}^k Aa_i$; d'autre part, pour tout $b \in B$ il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $f(a_i^t) \cdot b \in B^\circ$ pour $i = 1, \dots, k$. Soient $c_1, \dots, c_k \in A$ avec $\sum_{i=1}^k c_i a_i^t = 1$ dans A ; il vient $b = \sum_{i=1}^k f(c_i) \cdot f(a_i^t) \cdot b \in f(A) \cdot B^\circ$, CQFD.

Au vu du lemme 12.62(ii), on déduit que si A est analytique, toute A -algèbre topologiquement de type c-fini est topologiquement fortement de type c-fini.

Exercice 12.64. Soient A un anneau de Huber, B et C des A -algèbres topologiquement de type c-fini (resp. fortement topologiquement de type c-fini). Montrer que $B \otimes_A C$ est une A -algèbre topologiquement de type c-fini (resp. fortement topologiquement de type c-fini; notation de la définition 9.83(ii)).

Problème 12.65. (i) Soient A un anneau de Huber complet et séparé, $T \subset A$ une partie bornée qui engendre un idéal ouvert de A , et $a \in A$ tel que la partie $\{ta \mid t \in T\}$ soit à puissances bornées dans A . Montrer que pour tout $P \in A\langle X \rangle_T$ il existe un unique couple (Q, b) avec $Q \in A\langle X \rangle_T$ et $b \in A$, tel que $P = (X - a) \cdot Q + b$.

(ii) Dans la situation de (i), soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu, surjectif et ouvert d'anneaux de Huber complets et séparés, $\overline{T} := f(T)$, et $f_{\langle X \rangle} : A\langle X \rangle_T \rightarrow B\langle X \rangle_{\overline{T}}$ l'unique homomorphisme continu d'anneaux tel que $f_{\langle X \rangle}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, et $f_{\langle X \rangle}(X) = X$. Montrer que $f_{\langle X \rangle}$ est surjectif et ouvert.

(iii) Soient A, B deux anneaux de Huber complets et séparés, $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ une suite finie de parties bornées de A telle que T_i engendre un idéal ouvert de A pour tout $i = 1, \dots, n$. Posons $C := A\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet}$, et soit $g : C \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux, dont la restriction $g|_A : A \rightarrow B$ est surjective et ouverte. Montrer qu'il existe un idéal de type fini $J \subset C$ tel que $\text{Ker}(g)$ est l'adhérence de $J + \text{Ker}(g|_A) \cdot C$ dans C .

(iv) Dans la situation de (iii), soit en outre A à définition noethérienne. Montrer que $\text{Ker}(g)$ est un idéal de type fini si et seulement s'il en est de même pour $\text{Ker}(g|_A)$.

12.3.1. Morphismes topologiquement de présentation finie. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, $n \in \mathbb{N}$, et $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ une suite de parties finies de A telle que chaque T_i engendre un idéal ouvert de A . Munissons $A[X_\bullet] := A[X_1, \dots, X_n]$ de la topologie $\mathcal{T}_T$ associée à la suite $T_\bullet$ par la proposition 9.85(i), et rappelons que $A[X_\bullet]_{T_\bullet} :=$

$(A[X_\bullet], \mathcal{T}_{T_\bullet})$ est un anneau de Huber (proposition 9.85(ii)); notons par $A^+[T_\bullet X_\bullet]$ la A^+ -sous-algèbre de $A[X_\bullet]$ engendrée par $\bigcup_{i=1}^n \{tX_i \mid t \in T_i\}$, et soit $A[X_\bullet]_{T_\bullet}^+$ la fermeture intégrale de $A^+[T_\bullet X_\bullet]$ dans $A[X_\bullet]$. D'après la proposition 9.85(iv), on obtient un anneau affinoïde

$$\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet} := (A[X_\bullet]_{T_\bullet}, A[X_\bullet]_{T_\bullet}^+)$$

caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout anneau affinoïde $\underline{B} := (B, B^+)$, tout $b_1, \dots, b_n \in B$, et tout morphisme $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ d'anneaux affinoïdes avec :

$$\bigcup_{i=1}^n f(T_i) \cdot b_i \subset B^+$$

il existe un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $g : \underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet} \rightarrow \underline{B}$ tel que $g(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$ et $g(X_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

On notera par $\widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}$ la complétion de $\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet}$: d'après le §12.1.1, il s'agit de l'anneau affinoïde $(\widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}, \widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}^+)$, où $\widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}^+$ dénote la complétion de $\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet}^+$ pour la topologie induite par $\mathcal{T}_{T_\bullet}$; il est caractérisé à son tour par une propriété universelle correspondante, dont on laissera au lecteur le soin d'explicitier.

Définition 12.66. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$, $\underline{B} := (B, B^+)$ deux anneaux affinoïdes, $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes, et $\widehat{f} : \widehat{\underline{A}} \rightarrow \widehat{\underline{B}}$ la complétion de f .

(i) On dit que f est une *surjection stricte* si $f : A \rightarrow B$ est surjectif et ouvert, et si B^+ est la fermeture intégrale de $f(A^+)$ dans B .

(ii) On dit que f est *topologiquement de type l-fini* (resp. *topologiquement de type c-fini*) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ comme ci-dessus, et une surjection stricte d'anneaux affinoïdes (notation du §12.1.1)

$$g : (\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet})_{\text{loc}} \rightarrow \underline{B}_{\text{loc}} \quad (\text{resp. } g : \widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet} \rightarrow \widehat{\underline{B}} := (\widehat{B}, \widehat{B}^+))$$

dont la restriction $g|_{\underline{A}_{\text{loc}}} : \underline{A}_{\text{loc}} \rightarrow \underline{B}_{\text{loc}}$ (resp. $g|_{\widehat{\underline{A}}} : \widehat{\underline{A}} \rightarrow \widehat{\underline{B}}$) soit f_{loc} (resp. $\widehat{f}$).

(iii) Si de plus, $\text{Ker}(g)$ est un idéal de type fini de $\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet}$ (resp. l'adhérence d'un idéal de type fini de $\widehat{\underline{A}\langle X_\bullet \rangle}_{T_\bullet}$), on dit que f est *topologiquement de présentation l-finie* (resp. *topologiquement de présentation c-finie*), ou que $\underline{B}$ est une *$\underline{A}$ -algèbre affinoïde topologiquement de présentation l-finie* (resp. *c-finie*); dans ce cas, on dira aussi que g est une *$\underline{A}$ -présentation topologiquement l-finie* (resp. *c-finie*) de $\underline{B}$.

Exemple 12.67. (i) Soit $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes topologiquement de type l-fini; compte tenu du corollaire 9.58 et de l'exercice 9.88(i), on voit aisément que la complétion $\widehat{f} : \widehat{\underline{A}} \rightarrow \widehat{\underline{B}}$ de f est un morphisme topologiquement de type c-fini. De plus, l'exercice 9.49(ii), entraîne que si f est topologiquement de présentation l-finie, alors $\widehat{f}$ est topologiquement de présentation c-finie.

(ii) Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $U \subset X := \text{Spa } \underline{A}$ un sous-ensemble rationnel; disons que $U = R_A(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}) \cap X$, pour $f_0, \dots, f_n \in A$ engendrant un idéal ouvert, et soit $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U := (A_U, A_U^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes l-représentant U ; d'après la preuve du théorème 12.5, A_U est la localisation topologique de la A -algèbre topologique $B_U := (A[X]/(1 - f_0X), \mathcal{T}_U)$, où $A[X]$ est muni de la topologie $\mathcal{T}_T$ associée à $T := \{f_0, \dots, f_n\}$ par la proposition 9.85, et $\mathcal{T}_U$ est la topologie induite par $\mathcal{T}_T$ via la projection $A[X] \rightarrow B_U$. En outre, si $B_U^+ \subset B_U$ dénote la fermeture intégrale de l'image de $A^+[f_1X, \dots, f_nX]$ dans B_U , alors $A_U^+ = (B_U^+)_{\text{loc}}$, et cela coïncide avec la fermeture intégrale de l'image de $A^+[f_1X, \dots, f_nX]_{\text{loc}}$ dans $(B_U)_{\text{loc}}$ (proposition 6.13). Autrement dit, ρ_U est un morphisme topologiquement de présentation l-finie. Au vu de (i), il s'ensuit que $(\widehat{\mathcal{O}}_X(U), \widehat{\mathcal{O}}_X^+(U))$ est une $\underline{A}$ -algèbre affinoïde topologiquement de présentation c-finie. Le théorème 12.69 suivant, que j'ai appris de O. Gabber, généralisera cette observation à tout c-domaine affinoïde de X .

(iii) Si en outre, $\underline{A}$ est un anneau affinoïde universellement noethérien, alors il en est de même pour $\underline{A}_U$, d'après (ii) et le lemme 12.62(iii).

Proposition 12.68. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$, $\underline{B} := (B, B^+)$ deux anneaux affinoïdes, $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes topologiquement de présentation c-finie, $T_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$ une suite de parties finies de A telle que chaque T_i engendre un idéal ouvert de A . Soit en outre $g_1 : \underline{\hat{A}}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet} \rightarrow \underline{\hat{B}}$ une surjection stricte d'anneaux affinoïdes avec $g_1|_{\underline{\hat{A}}} = \hat{f} : \underline{\hat{A}} \rightarrow \underline{\hat{B}}$. Alors g_1 est une $\underline{A}$ -présentation topologiquement c-finie de $\underline{B}$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par sa complétion $\hat{f}$, on peut supposer que A et B soient complets et séparés. Soient $S_\bullet := (S_1, \dots, S_m)$ une deuxième suite de parties de A telle que S_j engendre un idéal ouvert de A pour $j = 1, \dots, m$, et $g_2 : \underline{A}\langle X_1, \dots, X_m \rangle_{S_\bullet} \rightarrow \underline{B}$ une deuxième surjection stricte d'anneaux affinoïdes avec $g_2|_{\underline{A}} = f$; il suffit de vérifier que g_1 est une $\underline{A}$ -présentation topologiquement c-finie de $\underline{B}$ si et seulement s'il en est de même pour g_2 . Posons $(T_\bullet, S_\bullet) := (T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m)$, et considérons l'unique morphisme d'anneaux affinoïdes $g : \underline{A}\langle X_1, \dots, X_{m+n} \rangle_{(T_\bullet, S_\bullet)} \rightarrow \underline{B}$ tel que $g(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$, $g(X_i) := g_1(X_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et $g(X_{j+n}) := g_2(X_j)$ pour $j = 1, \dots, m$. Avec la proposition 9.12(i) on voit aisément que g est une surjection stricte avec $g|_{\underline{\hat{A}}} = \hat{f}$, et il suffit de montrer pour $k = 1, 2$ que g_k est une $\underline{A}$ -présentation topologiquement c-finie si et seulement s'il en est de même pour g . On peut ainsi supposer que $m \geq n$, $S_j = T_j$ pour $j = 1, \dots, n$, et que g_1 est la restriction de g_2 au sous-anneau affinoïde $\underline{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{(S_1, \dots, S_n)}$. Dans ce cas, pour tout $j = n, \dots, m$ la restriction $h_j : \underline{A}\langle X_1, \dots, X_j \rangle_{(S_1, \dots, S_j)} \rightarrow \underline{B}$ de g_2 est encore une surjection stricte, et évidemment $h_n = g_1$, $h_m = g_2$; il suffit alors de vérifier pour $j = n, \dots, m-1$ que h_j est une $\underline{A}$ -présentation topologiquement c-finie si et seulement s'il en est de même pour h_{j+1} . Ainsi, on peut de plus supposer que $m = n+1$. En dernier lieu, noter que dans cette situation on a $\underline{A}\langle X_\bullet \rangle_{S_\bullet} = \underline{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet}\langle X_{n+1} \rangle_{S_{n+1}}$; quitte à remplacer $\underline{A}$ par $\underline{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet}$, on peut alors en outre supposer que $n = 0$ et $m = 1$. Finalement, on a donc une partie finie $S \subset A$ engendrant un idéal ouvert, et un morphisme $g : \underline{A}\langle X \rangle_S \rightarrow \underline{B}$ d'anneaux affinoïdes dont la restriction $f = g|_A : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ est une surjection stricte, et on doit montrer que $\text{Ker}(g)$ est l'adhérence d'un idéal de type fini de $\underline{A}\langle X \rangle_S$ si et seulement si $\text{Ker}(f)$ est l'adhérence d'un idéal de type fini de A . Or, si $\text{Ker}(f)$ est l'adhérence d'un idéal de type fini, il en est de même pour $\text{Ker}(g)$, d'après le problème 12.65(iii). On peut alors supposer que $\text{Ker}(g)$ soit l'adhérence d'un idéal de type fini, et il reste à vérifier qu'il en est de même pour $\text{Ker}(f)$.

Par hypothèse on trouve $a \in A$ avec $f(a) = g(X)$, et pour tout $s \in S$ on a $g(sX) \in B^+$, donc il existe un polynôme unitaire $P_s(X) \in A^+[X]$ tel que $g(P_s(sX)) = 0$. Soit $J \subset A$ l'adhérence de l'idéal engendré par $(P_s(sa) \mid s \in S)$, et munissons $\overline{A} := A/J$ de la topologie induite par la projection $p : A \rightarrow \overline{A}$; alors $\overline{A}$ est un anneau de Huber complet et séparé (lemme 9.5(iii), exercice 9.81(v) et remarque 9.59(ii)), et p est adique. Par suite, $p(A^+) \subset \overline{A}^\circ$ (lemme 9.77(iv)), et par construction sa est entier sur $p(A^+)$ pour tout $s \in S$, donc $\{sa \mid s \in S\} \subset \overline{A}^\circ$ (exercice 9.21(iii)). D'après le corollaire 9.93(iii), il existe alors un unique homomorphisme continu d'anneaux $h : \underline{A}\langle X \rangle_S \rightarrow \overline{A}$ avec $h|_A = p$ et $h(X) = p(a)$. D'autre part, il existe un unique homomorphisme continu d'anneaux $\overline{f} : \overline{A} \rightarrow \underline{B}$ tel que $f = \overline{f} \circ p$, et on voit aussitôt que $g = \overline{f} \circ h$. Soit $I \subset \underline{A}\langle X \rangle_S$ un idéal de type fini et dense dans $\text{Ker}(g)$, et choisissons un idéal de type fini $I_0 \subset A$ tel que $p(I_0) = h(I)$; on vérifie aisément que $\text{Ker}(f)$ est l'adhérence de $I_0 + J$, d'où l'assertion. $\square$

Théorème 12.69. Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde; tout l -domaine (resp. c -domaine) affinoïde de $\text{Spa } \underline{A}$ est représenté par une $\underline{A}$ -algèbre affinoïde topologiquement de présentation l -finie (resp. c -finie).

Démonstration. Considérons d'abord un c -domaine affinoïde $U \subset X := \text{Spa } \underline{A}$, c -représenté par le morphisme $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U := (A_U, A_U^+)$, et soit $\mathcal{T}_U$ la topologie de A_U . Dans ce

cas, d'après la proposition 12.10(iii), quitte à remplacer ρ_U par sa complétion $\hat{A} \rightarrow \underline{A}_U$, on peut supposer que $\underline{A}$ soit complet et séparé; montrons :

Affirmation 12.70. Il existe un sous-anneau de définition $B \subset A_U$ tel que A_U^+ soit la fermeture intégrale du sous-anneau $\rho_U(A^+) \cdot B$ dans A_U .

Preuve : Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-anneaux de définition de l'anneau de Huber A_U^+ , que l'on munit de l'ordre partiel $\leq$ induit par l'inclusion de sous-anneaux; comme $A_U^+ = (A_U^+)^{\circ}$, on sait que $(\mathcal{P}, \leq)$ est un ensemble filtrant (corollaire 9.72(iii)), et $\bigcup_{B \in \mathcal{P}} B = A_U^+$. Pour tout $B \in \mathcal{P}$, soit en outre B^+ la fermeture intégrale de $\rho_U(A^+) \cdot B$ dans A_U ; évidemment on a encore $\bigcup_{B \in \mathcal{P}} B^+ = A_U^+$, et (A_U, B^+) est un anneau affinoïde pour tout $B \in \mathcal{P}$. Noter que pour tout tel B , l'identité de A_U est un morphisme d'anneaux affinoïdes $f_B : (A_U, B^+) \rightarrow \underline{A}_U$, et pour $B_1, B_2 \in \mathcal{P}$ avec $B_1 \subset B_2$, l'identité de A_U fournit aussi un morphisme adique d'anneaux affinoïdes $f_{B_1 B_2} : (A_U, B_1^+) \rightarrow (A_U, B_2^+)$ (proposition 9.78(iv)); on a ainsi un système filtrant d'anneaux affinoïdes $((A_U, B^+) \mid B \in \mathcal{P})$ vérifiant les conditions du problème 10.27(ii), et par suite le cône induit d'espaces topologiques :

$$(\mathrm{Spa}(f_B) : \mathrm{Spa} \underline{A}_U \rightarrow \mathrm{Spa}(A_U, B^+) \mid B \in \mathcal{P})$$

est universel. Noter ensuite que ρ_U est la composition de f_B et d'un unique morphisme $g_B : \underline{A} \rightarrow (A_U, B^+)$, pour tout $B \in \mathcal{P}$, et posons $\phi_B := \mathrm{Spa}(g_B)$. Rappelons que l'image de $\mathrm{Spa}(\rho_U)$ est la partie ouverte U (problème 12.8(i)), et soit $Z := X \setminus U$; on déduit aisément que $\emptyset = (\mathrm{Spa} \underline{A}_U) \times_X Z$ est la limite du système d'espace spectraux $(\phi_B^{-1} Z \mid B \in \mathcal{P})$, dont les morphismes de transition $\phi_{B_1 B_2} : \phi_{B_2}^{-1} Z \rightarrow \phi_{B_1}^{-1} Z$ sont les restrictions de $\mathrm{Spa}(f_{B_1 B_2})$, pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{P}$ avec $B_1 \subset B_2$. Comme $\mathrm{Spa}(f_{B_1 B_2})$ est une application compacte (remarque 10.25(ii)), il en est de même pour $\phi_{B_1 B_2}$, pour tous tels B_1, B_2 ; d'après la remarque 4.59(iv), il existe alors $B \in \mathcal{P}$ avec $\phi_B^{-1} Z = \emptyset$, i.e. l'image de ϕ_B est contenue dans U . Par la propriété universelle de ρ_U , on a ainsi un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $h_B : \underline{A}_U \rightarrow (A_U, B^+)$ tel que $h_B \circ \rho_U = g_B$. Les identités : $f_B \circ h_B \circ \rho_U = f_B \circ g_B = \rho_U$ entraînent que $f_B \circ h_B = \mathrm{Id}_{A_U}$, toujours par la propriété universelle de ρ_U ; comme $f_B = \mathrm{Id}_{A_U}$, il vient finalement $h_B = \mathrm{Id}_{A_U}$, d'où $A_U^+ = B^+$. $\diamond$

Soient $B \subset A_U$ un sous-anneau de définition comme dans l'observation 12.70; choisissons un sous-anneau de définition $A_0 \subset A$ tel que $\rho_U(A_0) \subset B$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des couples (b, T) constitués d'un élément $b \in A_U$ et d'une partie finie $T \subset A$ engendrant un idéal ouvert, avec $\{\rho_U(t) \cdot b \mid t \in T\} \subset B$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(b_{\bullet}, T_{\bullet}) := ((b_i, T_i) \mid i = 1, \dots, n)$ d'éléments de $\mathcal{P}$, on a un unique morphisme d'anneaux affinoïdes

$$f_{(b_{\bullet}, T_{\bullet})} : \underline{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_{\bullet}} \rightarrow \underline{A}_U \quad \text{tel que} \quad X_i \mapsto b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et avec $f_{(b_{\bullet}, T_{\bullet})}(a) = \rho_U(a)$ pour tout $a \in A$. Munissons en outre $\mathcal{P}$ d'un ordre total $\leq$ arbitraire, et considérons aussi l'ensemble $\mathcal{Q}$ des données $\Sigma := (n, (b_{\bullet}, T_{\bullet}), J)$ avec $n \in \mathbb{N}$, où $(b_{\bullet}, T_{\bullet})$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ de longueur n , telle que

$$(*) \quad (b_i, T_i) < (b_{i+1}, T_{i+1}) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

et $J \subset \mathrm{Ker} f_{(b_{\bullet}, T_{\bullet})}$ est l'adhérence d'un idéal de type fini; à toute telle Σ on associe l'anneau affinoïde $\underline{C}_{\Sigma} := (C_{\Sigma}, C_{\Sigma}^+)$, où $C_{\Sigma} := A\langle X_{\bullet} \rangle_{T_{\bullet}} / J$ est muni de la topologie induite par la projection $\pi_{\Sigma} : A\langle X_{\bullet} \rangle_{T_{\bullet}} \rightarrow C_{\Sigma}$, et C_{Σ}^+ est la fermeture intégrale de l'image de $A\langle X_{\bullet} \rangle_{T_{\bullet}}^+$ dans C_{Σ} . Ainsi, C_{Σ} est un anneau de Huber complet et séparé (exercice 9.81(v) et remarque 9.59(ii)), et le morphisme naturel d'anneaux affinoïdes $\underline{A} \rightarrow \underline{C}_{\Sigma}$ est topologiquement de présentation c-finie. On munit $\mathcal{Q}$ de l'ordre partiel suivant : pour Σ comme ci-dessus, et pour un deuxième élément $\Sigma' := (m, (b'_{\bullet}, T'_{\bullet}), J')$ de $\mathcal{Q}$, on dit que $\Sigma \leq \Sigma'$ si l'on a $n \leq m$, et il existe une application $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ telle que

$(b_i, T_i) = (b'_{\sigma(i)}, T'_{\sigma(i)})$ pour $i = 1, \dots, n$, et $J \cdot A\langle X_1, \dots, X_m \rangle_{T'_\bullet} \subset J'$; on a alors une inclusion de A -algèbres :

$$A\langle X_1, \dots, X_n \rangle_{T_\bullet} \rightarrow A\langle X_1, \dots, X_m \rangle_{T'_\bullet} \quad X_i \mapsto X_{\sigma(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

induisant un morphisme adique d'anneaux affinoïdes

$$g_{\Sigma, \Sigma'} : \underline{C}_\Sigma \rightarrow \underline{C}_{\Sigma'}$$

et en outre $g_{\Sigma', \Sigma''} \circ g_{\Sigma, \Sigma'} = g_{\Sigma, \Sigma''}$ pour tout $\Sigma'' \in \mathcal{Q}$ avec $\Sigma' \leq \Sigma''$. Evidemment $(\mathcal{Q}, \leq)$ est un ensemble filtrant, et on obtient un système $\underline{C}_\bullet := (\underline{C}_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$ d'anneaux affinoïdes indexé par $\mathcal{Q}$, dont les morphismes de transition sont les $g_{\Sigma, \Sigma'}$. De plus, pour tout Σ comme ci-dessus, le morphisme $f_{(b_\bullet, T_\bullet)}$ se factorise à travers un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $f_\Sigma : \underline{C}_\Sigma \rightarrow \underline{A}_U$, et on a ainsi un co-cône bien défini $f_\bullet := (f_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$ de base $\underline{C}_\bullet$ et sommet $\underline{A}_U$. En dernier lieu, rappelons que $A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle$ est un anneau de définition de $A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet}$ (proposition 9.91(ii)), donc $C_{0, \Sigma} := \pi_\Sigma(A_0\langle T_\bullet X_\bullet \rangle)$ est un sous-anneau de définition de C_Σ avec $f_\Sigma(C_{0, \Sigma}) \subset B$, pour tout Σ comme ci-dessus, et si $\Sigma \leq \Sigma'$, on a $g_{\Sigma, \Sigma'}(C_{0, \Sigma}) \subset C_{0, \Sigma'}$, d'où un deuxième système d'anneaux $C_{0, \bullet} := (C_{0, \Sigma} \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$. Or, par inspection directe des constructions, on voit aisément que le co-cône $f_\bullet$ est universel dans la catégorie $\mathbb{Z}\text{-Alg}$, et de même pour le co-cône $(C_{0, \Sigma} \rightarrow B \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$ de base $C_{0, \bullet}$, formé des restrictions des homomorphismes f_Σ : les détails seront confiés aux soins du lecteur. On a en outre un système de sous-anneaux $C_\Sigma^+ := (C_\Sigma^+ \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$, et un co-cône $(C_\Sigma^+ \rightarrow \widehat{A}_U^+ \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$ de base $C_\bullet^+$, également formé des restrictions des f_Σ ; le problème 10.27(ii.a) fournit alors une unique topologie $\mathcal{T}'_U$ sur A_U telle que $(A_U, \mathcal{T}'_U)$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition B , et telle que f_Σ soit un homomorphisme adique pour tout $\Sigma \in \mathcal{Q}$; on déduit aussitôt que $\mathcal{T}_U = \mathcal{T}'_U$. Puis, d'après le problème 10.27(ii.b), la colimite C^+ de C_Σ^+ est un sous-anneau d'éléments entiers de A_U ; mais par construction on a $\rho_U(A^+) \cdot B \subset C^+ \subset A_U^+$, et A_U^+ est la fermeture intégrale de $\rho_U(A^+) \cdot B$ dans A_U (exercice 9.88(i)). Ainsi, $C^+ = A_U^+$, et le problème 10.27(ii.c) nous dit que le cône induit d'espaces topologiques :

$$(\mathrm{Spa} f_\Sigma : \mathrm{Spa} \underline{A}_U \rightarrow \mathrm{Spa} \underline{C}_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$$

est universel. Noter ensuite que ρ_U est la composition de f_Σ et d'un unique morphisme $h_\Sigma : \underline{A} \rightarrow \underline{C}_\Sigma$, pour tout $\Sigma \in \mathcal{Q}$, et posons $\phi_\Sigma := \mathrm{Spa}(h_\Sigma)$. En raisonnant comme dans la preuve de l'observation 12.70, on déduit alors qu'il existe $\Sigma := (n, (b_\bullet, T_\bullet), J) \in \mathcal{Q}$ tel que l'image de ϕ_Σ soit U . Par la propriété universelle de ρ_U , on déduit un unique morphisme $k_\Sigma : \underline{A}_U \rightarrow \underline{C}_\Sigma$ d'anneaux affinoïdes tel que $k_\Sigma \circ \rho_U = h_\Sigma$. L'identité $f_\Sigma \circ k_\Sigma \circ \rho_U = \rho_U$ entraîne alors que $f_\Sigma \circ k_\Sigma = \mathbf{1}_{\underline{A}_U}$, toujours par la propriété universelle de ρ_U . Par suite, $f_\Sigma : C_\Sigma \rightarrow A_U$ est une surjection ouverte, et de même pour sa restriction $C_\Sigma^+ \rightarrow A_U^+$; cela montre déjà que $\underline{A}_U$ est une A -algèbre affinoïde topologiquement de type c-fini. En dernier lieu, soient $\overline{X}_i := \pi_\Sigma(X_i)$ et $b_i := k_\Sigma \circ f_\Sigma(\overline{X}_i) - \overline{X}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, notons par $J' \subset C_\Sigma$ l'adhérence de l'idéal engendré par $b_1, \dots, b_n$, et munissons $D_\Sigma := C_\Sigma/J'$ de la topologie induite par la projection $p_\Sigma : C_\Sigma \rightarrow D_\Sigma$; noter que $f_\Sigma(b_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, donc $J' \subset \mathrm{Ker} f_\Sigma$, et ainsi f_Σ est la composition de p_Σ et d'un unique homomorphisme d'anneaux de Huber $\overline{f}_\Sigma : D_\Sigma \rightarrow A_U$. Posons en outre $\overline{k}_\Sigma := p_\Sigma \circ k_\Sigma : A_U \rightarrow D_\Sigma$; il vient $\overline{f}_\Sigma \circ \overline{k}_\Sigma = \mathrm{Id}_{A_U}$. Par construction, le noyau de $q_\Sigma := p_\Sigma \circ \pi_\Sigma : A\langle X_\bullet \rangle_{T_\bullet} \rightarrow D_\Sigma$ est l'adhérence d'un idéal de type fini, donc on est ramené à vérifier que $\overline{k}_\Sigma \circ \overline{f}_\Sigma = \mathrm{Id}_{D_\Sigma}$, et cela équivaut à $p_\Sigma \circ k_\Sigma \circ f_\Sigma \circ \pi_\Sigma = q_\Sigma$. Pour cela, d'après le corollaire 9.93(iii), il suffit de remarquer que

$$p_\Sigma \circ k_\Sigma \circ f_\Sigma(\overline{X}_i) = p_\Sigma(\overline{X}_i) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

• Considérons ensuite le cas d'un l -domaine affinoïde U , l -représenté par un morphisme $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$. Comme dans le cas précédent, l'observation 12.70 nous fournit un sous-anneau de définition $B \subset A_U$ tel que A_U^+ soit la fermeture intégrale de $\rho_U(A^+) \cdot B$ dans A_U . Définissons ensuite l'ensemble totalement ordonné $(\mathcal{P}, \leq)$ comme ci-dessus ; pour

tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(b_\bullet, T_\bullet) := ((b_i, T_i) \mid i = 1, \dots, n)$ d'éléments de $\mathcal{P}$, on a un unique morphisme d'anneaux affinoïdes

$$f_{(b_\bullet, T_\bullet)} : (\underline{A}[X_1, \dots, X_n]_{T_\bullet})_{\text{loc}} \rightarrow \underline{A}_U \quad \text{tel que} \quad X_i \mapsto b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et avec $f_{(b_\bullet, T_\bullet)}(a) = \rho_U(a)$ pour tout $a \in A$. Considérons l'ensemble $\mathcal{Q}$ des données $\Sigma := (n, (b_\bullet, T_\bullet), J)$ avec $n \in \mathbb{N}$, où $(b_\bullet, T_\bullet)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ de longueur n vérifiant la condition (*), et $J \subset \text{Ker } f_{(b_\bullet, T_\bullet)}$ est un idéal de type fini. A chaque Σ on associe l'anneau affinoïde $\underline{C}_\Sigma := (C_\Sigma, C_\Sigma^+)$, où $C_\Sigma := (\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet})_{\text{loc}}/J$ est muni de la topologie induite par la projection $\pi_\Sigma : (\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet})_{\text{loc}} \rightarrow C_\Sigma$, et C_Σ^+ est la fermeture intégrale de l'image de $(\underline{A}[X_\bullet]_{T_\bullet})_{\text{loc}}^+$ dans C_Σ . Ainsi, $\underline{C}_\Sigma$ est topologiquement local, et le morphisme naturel $\underline{A} \rightarrow \underline{C}_\Sigma$ d'anneaux affinoïdes est topologiquement de présentation l-finie ; de plus, le morphisme $f_{(b_\bullet, T_\bullet)}$ se factorise à travers un unique morphisme d'anneaux affinoïdes $f_\Sigma : \underline{C}_\Sigma \rightarrow \underline{A}_U$. On munit $\mathcal{Q}$ de l'ordre partiel $\leq$ défini comme dans le cas précédent, de sorte que l'on obtient un système filtrant $(\underline{C}_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{Q})$ avec morphismes adiques de transition. En raisonnant comme dans le cas précédent on trouve $\Sigma \in \mathcal{Q}$ avec un morphisme $k_\Sigma : \underline{A}_U \rightarrow \underline{C}_\Sigma$ d'anneaux affinoïdes tel que $f_\Sigma \circ k_\Sigma = \mathbf{1}_{\underline{A}_U}$. Par suite, $f_\Sigma : C_\Sigma \rightarrow A_U$ est une surjection ouverte, et de même pour sa restriction $C_\Sigma^+ \rightarrow A_U^+$; cela montre déjà que $\underline{A}_U$ est une $\underline{A}$ -algèbre affinoïde topologiquement de type l-finie. En dernier lieu, soient $\bar{X}_i := \pi_\Sigma(X_i)$ et $b_i := k_\Sigma \circ f_\Sigma(\bar{X}_i) - \bar{X}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, notons par $J' \subset C_\Sigma$ l'idéal engendré par $b_1, \dots, b_n$, et munissons $D_\Sigma := C_\Sigma/J'$ de la topologie induite par la projection $p_\Sigma : C_\Sigma \rightarrow D_\Sigma$; noter que $f_\Sigma(b_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, donc $J' \subset \text{Ker } f_\Sigma$, et ainsi f_Σ est la composition de p_Σ et d'un unique homomorphisme d'anneaux de Huber $\bar{f}_\Sigma : D_\Sigma \rightarrow A_U$. Comme dans le cas précédent, on conclut que $\bar{f}_\Sigma$ est un isomorphisme d'anneaux de Huber, et cela achève la preuve. $\square$

12.4. Le théorème d'acyclicité de Tate. Cette section démontre notre version du théorème d'acyclicité de Tate, dont l'une des conséquences importantes est de nous assurer que la donnée $(\text{Spa } \underline{A}, \widehat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{A}}, \widehat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{A}}^+)$ associé à tout anneau affinoïde $\underline{A}$ universellement analytiquement noethérien, est un espace adique affinoïde. Avant d'attaquer la question, il nous faudra quelques préliminaires sur l'algèbre homologique des modules munis d'une topologie.

Définition 12.71. (i) Soit A un anneau topologique. Un *complexe de A -modules topologiques* est une donnée $((M_n, \mathcal{T}_n), d_n \mid n \in \mathbb{Z})$ telle que $(M_n, \mathcal{T}_n)$ est un A -module topologique, $d_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ est une application A -linéaire continue pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et le système de A -modules et applications A -linéaires sous-jacent $(M_\bullet, d_\bullet)$ est un complexe de A -modules, i.e. $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Un *morphisme continu* $f_\bullet : (M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, \mathcal{T}'_\bullet, d'_\bullet)$ de complexes de A -modules est un morphisme $f_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, d'_\bullet)$ de complexes de A -modules, tel que $f_n : (M_n, \mathcal{T}_n) \rightarrow (M'_n, \mathcal{T}'_n)$ soit une application continue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Soient $f_\bullet, g_\bullet : (M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (M'_\bullet, \mathcal{T}'_\bullet, d'_\bullet)$ deux morphismes continus de complexes de A -modules topologiques. Une *homotopie continue* de $f_\bullet$ vers $g_\bullet$ est une homotopie $s_\bullet$ de $f_\bullet$ vers $g_\bullet$ telle que $s_n : M_n \rightarrow M'_{n+1}$ soit une application continue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{Z}$; on dit que le complexe $(M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet)$ de A -modules topologiques est *strict en degré n* si d_{n+1} est un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$ (voir la remarque 9.7(ii)) ; si en outre $(M_\bullet, d_\bullet)$ est exact en degré n , on dira que $(M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet)$ est *strictement acyclique en degré n* . On dit que $(M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet)$ est *strict* (resp. *strictement acyclique*), s'il est strict (resp. strictement acyclique) en tout degré.

Exercice 12.72. Soient A un anneau topologique, $(M_\bullet, \mathcal{T}_\bullet, d_\bullet)$ un complexe strictement acyclique de A -modules topologiques, tel que $\mathcal{T}_n$ soit une topologie linéaire définie par une famille dénombrable de sous-groupes, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Notons par $(\widehat{M}_n, \widehat{\mathcal{T}}_n)$ la

complétion de $(M_n, \mathcal{T}_n)$, et par $\widehat{d}_n : \widehat{M}_n \rightarrow \widehat{M}_{n-1}$ la complétion de d_n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que le complexe $(\widehat{M}_\bullet, \widehat{\mathcal{T}}_\bullet, \widehat{d}_\bullet)$ est strictement acyclique.

12.4.1. Soit A un anneau topologique; l'étude de l'homologie des complexes de A -modules topologiques est simplifiée considérablement par l'artifice suivant, que j'ai appris de O.Gabber. Pour tout A -module topologique M , notons par $\Sigma(M)$ le A -module des suites $x_\bullet := (x_n \mid n \in \mathbb{N})$ d'éléments de M convergeant vers 0_M (avec la structure évidente de A -module), et par $\Delta(M) \subset \Sigma(M)$ le sous-module des suites $x_\bullet$ de support fini, i.e. telles que la partie $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\}$ soit finie. Posons

$$\overline{\Sigma}(M) := \Sigma(M) / \Delta(M)$$

et pour tout $x_\bullet \in \Sigma(M)$, notons par $[x_\bullet] \in \overline{\Sigma}(M)$ la classe de $x_\bullet$. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules topologiques; d'après la remarque 9.30(vi), pour tout $x_\bullet \in \Sigma(M)$ on a $f(x_\bullet) := (f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}) \in \Sigma(N)$, et évidemment $f(x_\bullet) \in \Delta(N)$ si $x_\bullet \in \Delta(M)$. Ainsi, l'association $x_\bullet \mapsto f(x_\bullet)$ induit une application A -linéaire

$$\overline{\Sigma}(f) : \overline{\Sigma}(M) \rightarrow \overline{\Sigma}(N) \quad [x_\bullet] \mapsto [f(x_\bullet)].$$

Evidemment les associations : $M \mapsto \overline{\Sigma}(M)$ et $f \mapsto \overline{\Sigma}(f)$ définissent un foncteur

$$\overline{\Sigma} : A - \text{ModTop} \rightarrow A - \text{Mod}.$$

Proposition 12.73. (i) *Le foncteur $\overline{\Sigma}$ est exact à gauche.*

(ii) *Soit $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire continue de A -modules topologiques à voisinages dénombrables; alors f est une application ouverte si et seulement si $\overline{\Sigma}(f) : \overline{\Sigma}(M) \rightarrow \overline{\Sigma}(N)$ est surjective.*

Démonstration. (i) : D'après l'exercice 2.42, il suffit de vérifier que $\overline{\Sigma}$ commute avec les égaliseurs et les produits finis. Soient alors M, N deux A -modules topologiques, munissons $M \times N$ de la topologie du produit, et soit $(x_\bullet, y_\bullet) := ((x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $M \times N$; on voit aisément que $(x_\bullet, y_\bullet) \in \Sigma(M \times N) \Leftrightarrow x_\bullet \in \Sigma(M)$ et $y_\bullet \in \Sigma(N)$, et trivialement on a $(x_\bullet, y_\bullet) \in \Delta(M \times N) \Leftrightarrow x_\bullet \in \Delta(M)$ et $y_\bullet \in \Delta(N)$. Par suite $\overline{\Sigma}(M \times N) = \overline{\Sigma}(M) \times \overline{\Sigma}(N)$. Ensuite, afin de montrer que $\overline{\Sigma}$ commute avec les égaliseurs, il suffit de vérifier qu'il commute avec le noyau de toute application A -linéaire continue $f : M \rightarrow N$ de A -modules topologiques, et rappelons que la topologie de $\text{Ker}(f)$ est induite par l'inclusion dans M . Or, l'inclusion $\overline{\Sigma}(\text{Ker } f) \subset \text{Ker}(\overline{\Sigma}(f))$ est triviale. Pour la réciproque, soit $x_\bullet \in \Sigma(M)$ tel que $f(x_\bullet) \in \Delta(N)$; cela revient à dire qu'il existe une partie finie $S \subset \mathbb{N}$ avec $x_k \in \text{Ker}(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus S$. Soit alors $y_\bullet \in \Sigma(M)$ avec $y_k := 0$ pour tout $k \in S$, et $y_k := x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus S$; il vient $[x_\bullet] = [y_\bullet]$ dans $\overline{\Sigma}(M)$, et évidemment $[y_\bullet] \in \overline{\Sigma}(\text{Ker } f)$, d'où l'assertion.

(ii) : Si f est ouverte, soit $(U_k \mid k \in \mathbb{N})$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0_M dans M , avec $U_{k+1} \subset U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $y_\bullet \in \Sigma(N)$; on a une application $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $t(i+1) > t(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, telle que $y_k \in f(U_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq t(i)$. Posons $x_k := 0$ pour $k = 0, \dots, t(0) - 1$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k = t(i), \dots, t(i+1) - 1$, prenons $x_k \in U_i$ avec $f(x_k) = y_k$; évidemment il vient $x_\bullet := (x_k \mid k \in \mathbb{N}) \in \Sigma(M_n)$ et $[f(x_\bullet)] = [y_\bullet]$, donc $\overline{\Sigma}(f)$ est surjective.

Réciproquement, si $\overline{\Sigma}(f)$ est surjective, soit $U \subset M$ un voisinage ouvert de 0_M , et supposons par l'absurde que $V := f(U)$ ne soit pas ouvert. Si Z est l'adhérence de $N \setminus V$ dans N , il existe alors $z \in Z \cap V$; soit $x \in U$ avec $f(x) = z$, de sorte que la partie $U' := \{u - x \mid u \in U\}$ est un encore un voisinage ouvert de 0_M dans M . Puisque la topologie de N est à voisinages dénombrables, on a une suite $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $N \setminus V$ qui converge vers z . Ainsi, $(z'_n := z_n - z \mid n \in \mathbb{N}) \in \Sigma(N)$, et par hypothèse il existe $y_\bullet \in \overline{\Sigma}(M)$ telle que $[f(y_\bullet)] = [z'_\bullet]$. Cela revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(y_i) = z'_i$ pour tout $i \geq k$; d'autre part, il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $y_i \in U'$ pour tout $i \geq k'$, donc $z'_i \in f(U')$ pour tout $i \geq \max(k, k')$, d'où $z_i \in V$ pour tout tel i , contradiction. $\square$

12.4.2. Tout complexe de A -modules topologiques $(M_\bullet, d_\bullet)$ induit un complexe de A -modules $\bar{\Sigma}(M_\bullet) := (\bar{\Sigma}(M_n), \bar{\Sigma}(d_n) | n \in \mathbb{Z})$; pour tout $n \in \mathbb{Z}$, munissons $Z_{n-1} := \text{Ker}(d_{n-1})$ de la topologie induite par l'inclusion $i_{n-1} : Z_{n-1} \rightarrow M_{n-1}$ et soit $\delta_n : M_n \rightarrow Z_{n-1}$ l'unique application A -linéaire continue avec $i_{n-1} \circ \delta_n = d_n$.

Corollaire 12.74. *Avec la notation du §12.4.2, soient les topologies de M_n et M_{n-1} à voisinages dénombrables. Alors l'application δ_n est ouverte $\Leftrightarrow H_{n-1}(\bar{\Sigma}(M_\bullet)) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 12.73(i), on a $\bar{\Sigma}(Z_{n-1}) = \text{Ker} \bar{\Sigma}(d_{n-1})$, donc on est ramené à vérifier que $\bar{\Sigma}(\delta_n)$ est surjective si et seulement si δ_n est ouverte, et cela découle de la proposition 12.73(ii). $\square$

12.4.3. *Topologie du complexe de Čech.* Soient X un espace topologique, $U \subset X$ une partie ouverte, $\mathcal{U} := (V_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ un recouvrement de U , et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de $\mathbb{Z}$ -modules topologiques. On définit $\mathcal{U}^{(k)} := (V_{\lambda_1} \cap \dots \cap V_{\lambda_k} | \lambda_\bullet \in \Lambda^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; soit aussi $\mathcal{U}^{(\bullet)} := \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}^{(k)}$. Dans la suite, on munira $\check{C}_{\text{aug}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{V \in \mathcal{U}^{(k+1)}} \mathcal{F}(V)$ de la topologie du produit, pour tout $k \in \mathbb{N}$; de même, $\check{C}_{\text{aug}}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ hérite la topologie de $\mathcal{F}(U)$. On voit aisément que $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un complexe de $\mathbb{Z}$ -modules topologiques pour ces topologies. On dira que $\mathcal{U}$ est *strictement $\mathcal{F}$ -acyclique* si $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est strictement acyclique.

Exercice 12.75. (i) Soient A un anneau topologique, $k \in \mathbb{Z}$, et

$$(C_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (C'_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{g_\bullet} (C_\bullet, d_\bullet)$$

deux morphismes continus de complexes de A -modules topologiques; soit aussi $s_\bullet$ (resp. $t_\bullet$) une homotopie continue de $g_\bullet \circ f_\bullet$ vers $\text{Id}_{C_\bullet}$ (resp. de $f_\bullet \circ g_\bullet$ vers $\text{Id}_{C'_\bullet}$) (voir la définition 12.71(ii,iii)). On suppose que les topologies de C_n et C'_n soient à voisinages dénombrables, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(C_\bullet, d_\bullet)$ est strictement acyclique en degré k si et seulement s'il en est de même pour $(C'_\bullet, d'_\bullet)$.

(ii) Soient X un espace topologique, $U \subset X$ une partie ouverte, $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de U , et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes topologiques. On suppose que la topologie de $\mathcal{F}(W)$ soit à voisinages dénombrables pour tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$. Dédurre de (i) que $\mathcal{U}$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique $\Leftrightarrow$ le complexe de Čech augmenté alterné $\check{C}_{\text{au.alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est strictement acyclique (notation du §5.1.9).

Proposition 12.76. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $U \subset X$ une partie ouverte, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrements finis de U , et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes topologiques sur X , vérifiant les conditions suivantes :*

- (a) $\mathcal{F}(W)$ est à voisinages dénombrables, pour tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)} \wedge \mathcal{V}^{(\bullet)}$.
 - (b) Le recouvrement $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique, pour tout $\mathcal{V} \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$.
 - (c) Le recouvrement $\mathcal{V} \wedge W$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique, pour tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$.
- Alors $\mathcal{U}$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{V}$.*

Démonstration. Soit $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ le préfaisceau de groupes abéliens sur X tel que

$$\bar{\Sigma}(\mathcal{F})(W) := \bar{\Sigma}(\mathcal{F}(W)) \quad \forall W \in \mathcal{T}$$

(où $\bar{\Sigma}$ est le foncteur défini au §12.4.1, avec $A := \mathbb{Z}$, muni de la topologie discrète); pour toute inclusion $W' \subset W$ de parties ouvertes de X , évidemment la restriction $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})(W) \rightarrow \bar{\Sigma}(\mathcal{F})(W')$ est l'application $\bar{\Sigma}(\rho_{WW'})$, où $\rho_{WW'} : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W')$ dénote la restriction correspondante pour le préfaisceau $\mathcal{F}$. Remarquons :

Affirmation 12.77. (i) Pour tout $W \in \mathcal{T}$ et tout recouvrement fini $\mathcal{W}$ de W on a :

$$\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{W}, \bar{\Sigma}(\mathcal{F})) = \bar{\Sigma}(\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{F})).$$

(ii) $\mathcal{U}$ est $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ -acyclique $\Leftrightarrow \mathcal{V}$ est $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ -acyclique.

Preuve : (i) suit aussitôt de la proposition 12.73(i).

(ii) : Puisque $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des recouvrements finis, la condition (a) entraîne que chaque terme de $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F})$ et de $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V} \wedge W, \mathcal{F})$ est un groupe topologique à voisinages dénombrables, pour tout $V \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$ et tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$. D'après le corollaire 12.74, les conditions (b),(c) entraînent alors que $\bar{\Sigma}(\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U} \wedge V, \mathcal{F}))$ et $\bar{\Sigma}(\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V} \wedge W, \mathcal{F}))$ soient acycliques, pour tous tels V et W ; avec (i), on déduit que $\mathcal{U} \wedge V$ et $\mathcal{V} \wedge W$ sont $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ -acycliques pour tous tels V et W , donc l'assertion découle de la proposition 8.132. $\diamond$

En outre, (b) et (c) entraînent que $\mathcal{U}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{V}$. On peut alors supposer que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ soient $\mathcal{F}$ -acycliques, et noter que d'après la condition (a), chaque terme de $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et de $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ est à voisinages dénombrables, car $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des recouvrements finis; dans ce cas l'assertion découle alors du corollaire 12.74 et de l'observation 12.77(ii). $\square$

Corollaire 12.78. (i) Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace topologique, $U \subset X$ une partie ouverte, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrements finis de U , et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes topologiques sur X vérifiant les conditions (a) et (c) de la proposition 12.76. Alors $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{U}$.

(ii) Si en outre, $\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{V}$.

Démonstration. (i) : D'après le corollaire 8.133(i), $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ est $\mathcal{F}$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{U}$, donc on peut supposer que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ soient $\mathcal{F}$ -acycliques; dans ce cas, le corollaire 12.74 nous dit que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{U}$) est strictement $\mathcal{F}$ -acyclique $\Leftrightarrow$ le complexe $\bar{\Sigma}(\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{F}))$ (resp. $\bar{\Sigma}(\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$) est exact. L'observation 12.77(i) nous ramène alors à vérifier que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ est $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ -acyclique si et seulement s'il en est de même pour $\mathcal{U}$; mais par le même raisonnement, la condition (c) de la proposition 12.76 entraîne que $\mathcal{V} \wedge W$ soit $\bar{\Sigma}(\mathcal{F})$ -acyclique pour tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$, donc l'assertion découle encore du corollaire 8.133(i).

(ii) : Cela découle du même raisonnement, avec le corollaire 8.133(ii), le corollaire 12.74 et l'observation 12.77(i) : les détails sont laissés au lecteur. $\square$

12.4.4. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrements de $X := \text{Spa } \underline{A}$; évidemment $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ est un recouvrement de X qui raffine $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On utilisera les deux types suivants de recouvrements :

- Soit $f_\bullet := (f_1, \dots, f_n)$ une suite finie d'éléments de A , et pour $i = 1, \dots, n$ posons $\mathcal{U}_i := \{R_A(\frac{f_i}{1}) \cap X, R_A(\frac{1}{f_i}) \cap X\}$. On appelle $\mathcal{U}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{U}_n$ le *recouvrement de Laurent* de X associé à $f_\bullet$.

- Soit $f_\bullet$ comme ci-dessus, et supposons que $A = f_1 A + \dots + f_n A$. On appelle $\{R_A(\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i}) \cap X \mid i = 1, \dots, n\}$ le *recouvrement rationnel* de X associé à $f_\bullet$.

Lemme 12.79. Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde. Alors tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $X := \text{Spa } \underline{A}$ est raffiné par un recouvrement rationnel.

Démonstration. On suppose d'abord que $\underline{A}$ soit topologiquement local. Soient $v \in X$, et $w := v^{\text{cl}^v}$ (voir le problème 8.105); alors $w \in X$, d'après la remarque 10.3(v). Soit $U \in \mathcal{U}$ avec $w \in U$, et choisissons $g_0, \dots, g_n \in A$ engendrant un idéal ouvert de A , avec $w \in U' := R_A(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_n}{g_0}) \cap X \subset U$; par construction, $\Gamma_w = \text{cl}_w$, donc il existe $a \in A$ tel que $w(g_0 a) \leq 0$, et ainsi $w \in U'' := R_A(\frac{1}{g_0 a}, \frac{g_1 a}{g_0 a}, \dots, \frac{g_n a}{g_0 a}) \cap X \subset U'$. On a $v \in U''$, car v est une généralisation de w . Comme X est compact, on trouve alors un recouvrement fini $\{U_1, \dots, U_k\}$ de X raffinant $\mathcal{U}$, et pour $i = 1, \dots, k$ une suite finie $f_{i0}, \dots, f_{in_i} \in A$, avec $U_i = R_A(\frac{1}{f_{i0}}, \frac{f_{i1}}{f_{i0}}, \dots, \frac{f_{in_i}}{f_{i0}}) \cap X$. Pour $i = 1, \dots, k$ posons $T_i := \{1, f_{i0}, \dots, f_{in_i}\}$; soient aussi $T := T_1 \cdots T_k$ (notation du §9.1.1), et

$$S_i := T_1 \cdots T_{i-1} \cdot \{f_{i0}\} \cdot T_{i+1} \cdots T_k \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad S := \bigcup_{i=1}^k S_i.$$

pour tous $t \in T$ et $s \in S$, soient $R_t := \bigcap_{t' \in T} R_A(\frac{t'}{t})$ et $R'_s := \bigcap_{s' \in S} R_A(\frac{s'}{s})$. Alors :

- (a) pour tous $t_1 \in T_1, \dots, t_k \in T_k$ on a $R_{t_1 \dots t_k} = \bigcap_{i=1}^k R_A\left(\frac{1}{t_i}, \frac{f_{i0}}{t_i}, \dots, \frac{f_{in_i}}{t_i}\right)$.
- (b) Pour tout $i = 1, \dots, k$ on a $X = \bigcup_{t \in T_i} (X \cap R_A(\frac{1}{t}, \frac{f_{i0}}{t}, \dots, \frac{f_{in_i}}{t}))$.

De plus, (a) et (b) entraînent :

- (c) $U_i = \bigcup_{s \in S_i} (X \cap R_s)$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Affirmation 12.80. (i) On a $X \cap R'_s = X \cap R_s$ pour tout $s \in S$.

- (ii) $A = \sum_{s \in S} As$.

Preuve : (i) : Evidemment $R_s \subset R'_s$. Réciproquement, soient $v \in X \cap R'_s$ et $t \in T$; d'après (c) il existe $s' \in S$ avec $v(t) \geq v(s')$, d'où $v(t) \geq v(s) \neq +\infty$, i.e. $X \cap R'_s \subset R_A(\frac{t}{s})$, d'où l'assertion.

(ii) : D'après (c), pour tout $v \in X$ il existe $s \in S$ avec $v(s) \neq +\infty$; l'assertion découle alors de l'exercice 10.26(iii) et du corollaire 1.35(i). $\diamond$

Avec (c) et l'observation 12.80, on voit que $\{X \cap R'_s \mid s \in S\}$ est un recouvrement rationnel de X qui raffine $\mathcal{U}$.

En dernier lieu, considérons un anneau affinoïde $\underline{A}$ arbitraire, et rappelons que la localisation $i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{\text{loc}}$ induit un homéomorphisme $\text{Spa}(i) : \text{Spa } \underline{A}_{\text{loc}} \xrightarrow{\sim} \text{Spa } \underline{A}$ (exercice 12.1(i)), qui identifie $\mathcal{U}$ avec un recouvrement $\mathcal{U}'$ de $\text{Spa } \underline{A}_{\text{loc}}$. Par ce qui précède, $\mathcal{U}'$ est raffiné par le recouvrement rationnel $\mathcal{R}$ associé à une suite finie $f_1, \dots, f_n \in A_{\text{loc}}$ telle que $A_{\text{loc}} = \sum_{i=1}^n f_i A_{\text{loc}}$. Soient alors $A_0 \subset A^+$ un sous-anneau de définition de A , et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, de sorte que $A_{\text{loc}} = (1 + I_0)^{-1} A$; on a par suite $s \in 1 + I_0$ et $g_1, \dots, g_n \in A$ tels que $f_i = g_i/s$ pour $i = 1, \dots, n$, et évidemment le recouvrement rationnel de $\text{Spa } \underline{A}_{\text{loc}}$ associé à $g_\bullet$ coïncide avec $\mathcal{R}$. En outre, on a $tA \subset \sum_{i=1}^n g_i A$ pour quelque $t \in 1 + I_0$, d'où $tI_0^k \subset \sum_{i=1}^n g_i A_0$ pour quelque $k \in \mathbb{N}$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Soit $h_1, \dots, h_r$ un système fini de générateurs de I_0 ; puisque $A_0 \subset A^+$, il vient

$$\min(v(h_1)^k, \dots, v(h_r)^k) \geq \min(v(g_1), \dots, v(g_n)) \neq +\infty \quad \forall v \in X$$

(noter que $v(t) = 0$ pour tout $v \in \text{Cont}(A)$), d'où :

$$\min(v(h_1)^{k+1}, \dots, v(h_r)^{k+1}) > \min(v(g_1), \dots, v(g_n)) \quad \forall v \in X.$$

Affirmation 12.81. $\sum_{i=1}^r h_i^{k+1} A + \sum_{j=1}^n g_j A = A$.

Preuve : Soit par l'absurde $\mathfrak{m} \in \text{Max } A$ avec $h_1^{k+1}, \dots, h_r^{k+1}, g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{m}$; alors $I_0 \subset \mathfrak{m}$ et $t \in \mathfrak{m}$, d'où $1 \in \mathfrak{m}$, contradiction. On conclut avec le corollaire 1.35. $\diamond$

Soit alors $\mathcal{R}'$ le recouvrement rationnel de $\text{Spa } \underline{A}$ associé à la suite $(h_\bullet^{k+1}, g_\bullet)$; tout élément de $\mathcal{R}'$ de la forme $R_A(\frac{h_\bullet^{k+1}}{g_i}, \frac{g_\bullet}{g_i}) \cap X$ coïncide avec $R_A(\frac{g_\bullet}{g_i}) \cap X$, et d'autre part $R_A(\frac{h_\bullet^{k+1}}{h_i^{k+1}}, \frac{g_\bullet}{h_i^{k+1}}) \cap X = \emptyset$ pour tout $i = 1, \dots, r$, donc $\mathcal{R}'$ raffine $\mathcal{U}$. $\square$

Proposition 12.82. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $f_\bullet := (f_1, \dots, f_n)$ une suite finie d'éléments de A^+ telle que $A^+ f_1 + \dots + A^+ f_n = A^+$. Alors le recouvrement rationnel $\mathcal{U}$ de $X := \text{Spa } \underline{X}$ associé à $f_\bullet$ est strictement $\mathcal{O}_X$ -acyclique.

Démonstration. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition; d'après le corollaire 9.72(iii), on peut supposer que $f_1, \dots, f_n \in A_0$ et $\sum_{i=1}^n A_0 f_i = A_0$. Noter que $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$, avec $U_i := X \cap R_A(\frac{1}{f_i})$ pour $i = 1, \dots, n$; posons $\Sigma := \{1, \dots, n\}$, et pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $i_\bullet := (i_1, \dots, i_r) \in \Sigma^r$, soient $f_{i_\bullet} := f_{i_1} \dots f_{i_r}$, $U_{i_\bullet} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}$, et notons par $\rho_{i_\bullet} : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{i_\bullet} := (A_{i_\bullet}, A_{i_\bullet}^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui c-représente $U_{i_\bullet}$ (on a $\Sigma^0 = \{\emptyset\}$, et on pose $f_\emptyset := 1$, de sorte que $U_\emptyset = X$ et $\underline{A}_\emptyset = \underline{A}$). Noter aussi que $U_{i_\bullet} = X \cap R_A(\frac{1}{f_{i_\bullet}})$ pour tout tel $i_\bullet$. Par inspection de la preuve du théorème 12.5, on voit alors que $A_{i_\bullet}$ est la complétion de $A[1/f_{i_\bullet}]$, muni de la topologie telle que $A[1/f_{i_\bullet}]$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de

définition $A_0[1/f_{i_\bullet}]$ et idéal de définition $I_0 A_0[1/f_{i_\bullet}]$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $i_\bullet \in \Sigma^r$. Posons alors $B_0 := \prod_{i=1}^n A_0[1/f_i]$; puisque $\sum_{i=1}^n A_0 f_i = A_0$, on a $\text{Spec } A_0 = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, donc l'homomorphisme naturel $\varepsilon : A_0 \rightarrow B_0$ induit une surjection $\text{Spec } B_0 \rightarrow \text{Spec } A_0$, et par suite B_0 est une A_0 -algèbre fidèlement plate (problème 3.83(i.c)). Soit $(\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet, d^\bullet)$ le complexe d'Amitsur associé à ε (voir le problème 5.12); donc $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r = 0$ pour tout $r < -1$, $\mathcal{A}m(\varepsilon)^{-1} = A_0$, et $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r = B_0 \otimes_{A_0} \mathcal{A}m(\varepsilon)^{r-1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, noter que $\mathcal{A}m(\varepsilon)^{r-1} = \prod_{i_\bullet \in \Sigma^r} A_0[1/f_{i_\bullet}]$ et $\mathcal{A}m(\varepsilon)^{r-1} \otimes_{A_0} A = \prod_{i_\bullet \in \Sigma^r} A[1/f_{i_\bullet}]$; munissons alors $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r$ (resp. $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r \otimes_{A_0} A$) du produit des topologies des facteurs $A_0[1/f_{i_\bullet}]$ (resp. $A[1/f_{i_\bullet}]$) intervenant dans cette décomposition, pour tout $r \geq -1$. Ainsi, $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r$ est un A_0 -sous-module ouvert de $\mathcal{A}m(\varepsilon)^r \otimes_{A_0} A$, et les différentielles de $\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ sont évidemment continues pour ces topologies, donc de même pour les différentielles de $C^\bullet := \mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet \otimes_{A_0} A$ (remarque 9.3(ii)).

Affirmation 12.83. Le complexe $C^\bullet$ est strictement acyclique.

Preuve : L'acyclicité de $C^\bullet$ découle du problème 5.12(iii); l'exercice 9.8 nous ramène alors aussitôt à vérifier que $\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ est un complexe strict. Or, comme $\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ est un complexe de A_0 -modules plats, on a $I_0^k \otimes_{A_0} \mathcal{A}m(\varepsilon)^r = I_0^k \mathcal{A}m(\varepsilon)^r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{Z}$; ainsi, $I_0^k \otimes_{A_0} \mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ est naturellement identifié avec le sous-complexe $I_0^k \mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ de $\mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, $I_0^k \otimes_{A_0} \mathcal{A}m(\varepsilon)^\bullet$ est acyclique pour tout tel k (problème 5.12(iii)); par suite :

$$\text{Ker}(d_r) \cap I_0^k \mathcal{A}m(\varepsilon)^r = d_{r-1}(I_0^k \mathcal{A}m(\varepsilon)^{r-1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{Z}$$

d'où l'assertion. $\diamond$

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, soient $\widehat{C}^r$ la complétion de C^r , et $\widehat{d}^r : \widehat{C}^r \rightarrow \widehat{C}^{r+1}$ la complétion de $d^r : C^r \rightarrow C^{r+1}$; d'après l'observation 12.83 et l'exercice 12.72, le complexe $(\widehat{C}^\bullet, \widehat{d}^\bullet)$ est strictement acyclique. D'autre part, une inspection directe des constructions nous fournit une identification naturelle de $(\widehat{C}^\bullet, \widehat{d}^\bullet)$ avec le complexe de Čech $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{O}}_X)$; les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

Lemme 12.84. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde universellement analytiquement noethérien, et $f \in A$. Alors le recouvrement de Laurent $\mathcal{U}$ de $X := \text{Spa } \underline{A}$ associé à f est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.

Démonstration. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{A}_0$) la complétion de A (resp. de A_0); posons $U_1 := X \cap R_A(\frac{f}{1})$, $U_2 := X \cap R_A(\frac{1}{f})$, $U_3 := U_1 \cap U_2$, de sorte que $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$, et remarquons :

Affirmation 12.85. Soient $g_\bullet := (g_0, \dots, g_r)$ une suite finie d'éléments de A avec $A = \sum_{i=1}^r A g_i$, et $U := R_A(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_r}{g_0}) \cap X$. Alors il existe un unique isomorphisme de $\widehat{A}$ -algèbres topologiques

$$\widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle := \widehat{A}\langle X_1, \dots, X_r \rangle / (g_1 - g_0 X_1, \dots, g_r - g_0 X_r) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_X(U).$$

Preuve : Par hypothèse, l'anneau de Huber $B := A[X_1, \dots, X_r]$ avec sous-anneau de définition $B_0 := A_0[X_1, \dots, X_r]$ et idéal de définition $I_0 B_0$ est analytiquement noethérien. Soit $J \subset B$ l'idéal engendré par $g_1 - g_0 X_1, \dots, g_r - g_0 X_r$, et munissons B/J de la topologie induite par B ; d'après la proposition 12.41(iii), $\widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle$ est alors la complétion de B/J , donc il est un anneau de Huber complet et séparé, pour la topologie induite via la projection $\widehat{A}(X_\bullet) \rightarrow \widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle$. En outre, puisque $A = \sum_{i=1}^n g_i A$, et $g_1, \dots, g_n \in g_0 \widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle$, on a $g_0 \in \widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle^\times$. D'autre part, par inspection de la preuve du théorème 12.5, et avec les corollaires 9.93(ii) et 9.58, on voit que $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ est la $\widehat{A}$ -algèbre topologique $\widehat{A}\langle X \rangle_T / I$, avec $T := \{g_0, \dots, g_n\}$, et où I dénote l'adhérence dans $\widehat{A}\langle X \rangle_T$ de l'idéal engendré par $1 - g_0 X$. Au vu du corollaire 9.93(iii), on déduit que la propriété universelle suivante caractérise $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ à isomorphisme unique près de $\widehat{A}$ -algèbres topologiques complètes et

séparées : $g_0 \in \widehat{\mathcal{O}}_X(U)^\times$, $g_i/g_0 \in \widehat{\mathcal{O}}_X(U)^\circ$ pour $i = 1, \dots, n$, et pour tout anneau de Huber B complet et séparé, et tout homomorphisme continu d'anneaux $u : \widehat{A} \rightarrow B$ avec $u(g_0) \in B^\times$ et $u(g_i)/u(g_0) \in B^\circ$ pour $i = 1, \dots, n$, il existe un unique homomorphisme continu de $\widehat{A}$ -algèbres $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow B$. Par ce qui précède, on vérifie aussitôt que $\widehat{A}\langle \frac{g_\bullet}{g_0} \rangle$ jouit de la même propriété universelle, d'où l'assertion. $\diamond$

D'après l'observation 12.85 on a $\widehat{A}\langle Y \rangle / (f - Y) = \widehat{\mathcal{O}}_X(U_1)$, $\widehat{A}\langle Z \rangle / (1 - fZ) = \widehat{\mathcal{O}}_X(U_2)$, et $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_3) = \widehat{A}\langle Y, Z \rangle / (f - Y, 1 - fZ) = \widehat{A}\langle Y, Z \rangle / (1 - YZ, f - Y)$, et au vu de l'exemple 9.95(ii), on déduit l'identification naturelle $\widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle / (f - Y) = \widehat{\mathcal{O}}_X(U_3)$. Considérons alors le diagramme commutatif de A -modules topologiques :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \widehat{A}\langle Y \rangle \times \widehat{A}\langle Z \rangle & \xrightarrow{\alpha} & \widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\ \mathcal{D} : & 0 & \longrightarrow & \widehat{A} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \widehat{A}\langle Y \rangle \times \widehat{A}\langle Z \rangle & \xrightarrow{\delta} & \widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle & \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \\ & 0 & \longrightarrow & \widehat{A} & \xrightarrow{\varepsilon} & \widehat{\mathcal{O}}_X(U_1) \times \widehat{\mathcal{O}}_X(U_2) & \xrightarrow{d_0} & \widehat{\mathcal{O}}_X(U_3) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

où ε et d_0 sont respectivement l'augmentation et la différentielle en degré 0 du complexe de Čech alterné de $\widehat{\mathcal{O}}_X$ relatif à $\mathcal{U}$, et π_1 et π_2 sont les projections canoniques induites par les identifications ci-dessus. L'application ε' est l'inclusion diagonale : $a \mapsto (a, a)$ pour tout $a \in \widehat{A}$, et α , β , δ et γ sont les applications $\widehat{A}$ -linéaire telles que pour tout $\phi(Y) \in \widehat{A}\langle Y \rangle$, tout $\psi(Z) \in \widehat{A}\langle Z \rangle$, et tout $\omega(Y) \in \widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle$ on a

$$\begin{aligned} \alpha(\phi(Y), \psi(Z)) &:= \phi(Y) - Y^{-1} \cdot \psi(Y^{-1}) \\ \beta(\phi(Y), \psi(Z)) &:= ((f - Y) \cdot \phi(Y), (1 - fZ) \cdot \psi(Z)) \\ \delta(\phi(Y), \psi(Z)) &:= \phi(Y) - \psi(Y^{-1}) \\ \gamma(\omega(Y)) &:= (f - Y) \cdot \omega(Y). \end{aligned}$$

On munit $\widehat{A}\langle Y \rangle \times \widehat{A}\langle Z \rangle$ et $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_1) \times \widehat{\mathcal{O}}_X(U_2)$ des produits des topologies des facteurs respectifs. On vérifie aisément que la ligne horizontale centrale de $\mathcal{D}$ est une suite exacte courte; en outre, ε' est un morphisme strict de $\widehat{A} - \mathbf{ModTop}$, et δ est une application ouverte : les détails sont laissés aux soins du lecteur. De même, on voit aisément que α est un isomorphisme de $\widehat{A}$ -modules topologiques, et on a :

Affirmation 12.86. β et γ sont des morphismes stricts et injectifs de $\widehat{A} - \mathbf{ModTop}$.

Preuve : On doit vérifier que $f - Y$ est régulier dans $\widehat{A}\langle Y \rangle$ et dans $\widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle$, et que $1 - fZ$ est régulier dans $\widehat{A}\langle Z \rangle$. Or, noter que $\widehat{A}\langle Y^{\pm 1} \rangle$ est la complétion de l'anneau de Huber $A[Y^{\pm 1}]$ avec sous-anneau de définition $A_0[Y^{\pm 1}]$, et idéal de définition $I_0[Y^{\pm 1}]$; d'autre part, $A_0[Y^{\pm 1}]$ est analytiquement noethérien pour sa topologie I_0 -adique (exercice 12.23(iii.b)), donc $A\langle Y^{\pm 1} \rangle$ est une $A[Y^{\pm 1}]$ -algèbre plate (exercice 12.36(v)); mais d'après l'exercice 1.52(i.b), $f - Y$ est régulier dans $A[Y]$, donc aussi dans sa localisation $A[Y^{\pm 1}]$, et finalement, aussi dans $A\langle Y^{\pm 1} \rangle$ (exercice 3.75(iii)). *A fortiori*, $f - Y$ est régulier dans le sous-anneau $A\langle Y \rangle$ de $A\langle Y^{\pm 1} \rangle$, et le même raisonnement montre que $1 - fZ$ est régulier dans $A\langle Z \rangle$. Cela achève de montrer que β et γ sont injectifs; pour vérifier qu'ils sont stricts, noter que β (resp. γ) est la complétion de l'endomorphisme A -linéaire $\beta' : A[Y] \times A[Z] \rightarrow A[Y] \times A[Z]$ (resp. $\gamma' : A[Y^{\pm 1}] \rightarrow A[Y^{\pm 1}]$) telle que $\beta'(\phi, \psi) := ((f - Y) \cdot \phi, (1 - fZ) \cdot \psi)$ pour tous $\phi \in A[Y]$ et $\psi \in A[Z]$ (resp. telle que $\gamma'(\omega) := (f - Y) \cdot \omega$ pour tout $\omega \in A[Y^{\pm 1}]$). Or, $A[Y] \times A[Z]$ est un $A[Y]$ -module libre de rang deux (pour l'identification naturelle de A -algèbres $A[Y] \xrightarrow{\sim} A[Z]$ telle que $Y \mapsto Z$) et β' est $A[Y]$ -linéaire; puisque $A[Y]$ est analytiquement noethérien, le lemme 12.38(iii,v) montre alors que β' est un morphisme strict de $A[Y] - \mathbf{ModTop}$. De même, on vérifie que

γ' est un morphisme strict de $A[Y^{\pm 1}] - \text{ModTop}$, et on conclut avec la remarque 9.59(i). $\diamond$

Soit maintenant $\bar{\Sigma}(\mathcal{D})$ le diagramme commutatif obtenu de $\mathcal{D}$ par application terme à terme du foncteur $\bar{\Sigma}$, et noter que, d'après l'observation 12.86, chaque colonne de $\mathcal{D}$ est une suite exacte courte strictement acyclique; compte tenu du corollaire 12.74, on déduit que chaque colonne de $\bar{\Sigma}(\mathcal{D})$ est une suite exacte courte. De même, comme la ligne horizontale centrale de $\mathcal{D}$ est une suite exacte courte strictement acyclique, la ligne horizontale centrale de $\bar{\Sigma}(\mathcal{D})$ est exacte courte; en outre, évidemment $\bar{\Sigma}(\alpha)$ est un isomorphisme de A -modules, car α est un isomorphisme de $A - \text{ModTop}$. Par le lemme du serpent (proposition 2.106), il s'ensuit que la ligne horizontale en bas de $\bar{\Sigma}(\mathcal{D})$ est une suite exacte courte, et alors la ligne horizontale en bas de $\mathcal{D}$ est une suite exacte courte strictement acyclique, toujours par le corollaire 12.74. Cela achève de montrer que le complexe de Čech alterné et augmenté de $\hat{\mathcal{O}}_X$, relatif au recouvrement $\mathcal{U}$ est strictement acyclique; mais alors il en est de même pour le complexe $\hat{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \hat{\mathcal{O}}_X)$, d'après l'exercice 12.75(ii), CQFD. $\square$

Proposition 12.87. *Si $\underline{A}$ est un anneau affinoïde universellement analytiquement noethérien, alors tout recouvrement de Laurent de $X := \text{Spa } \underline{A}$ est strictement $\hat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de Laurent de $X := \text{Spa } \underline{A}$ associé à la suite $f_\bullet := (f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de A (voir le §12.4.4); on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 1$ est réglé par le lemme 12.84.

Soit ensuite $n > 1$, et supposons que l'assertion soit connue pour tout anneau affinoïde $\underline{A}$ universellement analytiquement noethérien, et tous les recouvrements de Laurent associés aux suites de longueur $< n$. Soient $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ les recouvrements de Laurent associés à $(f_1, \dots, f_{n-1})$ et respectivement à f_n , de sorte que $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \wedge \mathcal{U}''$. Posons $U_1 := X \cap R_A(\frac{1}{f_n})$, $U_2 := X \cap R_A(\frac{f_n}{1})$, $U_3 := U_1 \cap U_2$, et pour $i = 1, 2, 3$ soit $\rho_i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{U_i}$ le morphisme d'anneaux affinoïdes l-représentant le sous-ensemble rationnel U_i ; noter que $\underline{A}_{U_i}$ est universellement analytiquement noethérien, d'après l'exemple 12.67(iii). En outre, pour $i = 1, 2, 3$ le site $\text{Rat}(\underline{A}_{U_i})$ est naturellement isomorphe à la sous-catégorie pleine $\text{Rat}(\underline{A})/U_i$ de $\text{Rat}(\underline{A})$ (proposition 12.10(ii)), et cet isomorphisme identifie la restriction sur la catégorie $\text{Rat}(\underline{A})/U_i$ du préfaisceau $\hat{\mathcal{O}}_X$ avec le préfaisceau $(\hat{A}_{U_i})_\bullet$ défini sur le site $\text{Rat}(\underline{A}_{U_i})$ (exemple 12.13(i,ii)). Ce même isomorphisme identifie le recouvrement $\mathcal{U}' \wedge U_i$ de U_i avec le recouvrement de Laurent $\mathcal{U}_i$ de $X_i := \text{Spa } \underline{A}_{U_i}$ associé à $(\rho_i(f_1), \dots, \rho_i(f_{n-1}))$, et par hypothèse de récurrence, $\mathcal{U}_i$ est strictement $\hat{\mathcal{O}}_{X_i}$ -acyclique, pour $i = 1, 2, 3$. Finalement, $\mathcal{U}' \wedge U_i$ est alors strictement $\hat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique pour $i = 1, 2, 3$, et de même pour $\mathcal{U}''$; pour conclure, il suffit alors d'invoquer le corollaire 12.78(i). $\square$

Proposition 12.88. *Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde universellement analytiquement noethérien, $\mathcal{U}$ un recouvrement de $X := \text{Spa } \underline{A}$ formé de sous-ensembles rationnels. Alors on a :*

- (i) $\mathcal{U}$ est strictement $\hat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.
- (ii) $\hat{\mathcal{O}}_X(U)$ est une A -algèbre plate, pour tout sous-ensemble rationnel U de X .
- (iii) $\hat{\mathcal{O}}_X$ est un faisceau de A -modules topologiques sur X .

Démonstration. (i) : Pour tout sous-ensemble rationnel U de X , soit $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U := (A_U, A_U^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes l-représentant U ; posons

$$X_U := \text{Spa } \underline{A}_U \quad \phi_U := \text{Spa}(\rho_U) : X_U \rightarrow X.$$

D'après l'exemple 12.67(iii), $\underline{A}_U$ est universellement analytiquement noethérien.

Affirmation 12.89. On peut supposer que $\mathcal{U}$ soit un recouvrement rationnel de X .

Preuve : D'après le lemme 12.79, $\mathcal{U}$ est raffiné par un recouvrement rationnel $\mathcal{V}$ de $X := \text{Spa } \underline{A}$. Pour tout $U \in \mathcal{V}(\bullet)$ (notation du §12.4.3), en raisonnant comme dans

la preuve de la proposition 12.87, on identifie naturellement le recouvrement $\mathcal{V} \wedge U$ de U avec le recouvrement rationnel $\mathcal{V}_U := \{\phi_U^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\}$ de X_U , et de même on identifie les complexes de Čech augmentés $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V} \wedge U, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ et $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U})$. D'après le corollaire 12.78(ii), si $\mathcal{V}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique, et si chaque $\mathcal{V}_U$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_U}$ -acyclique, alors $\mathcal{U}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique. $\diamond$

Soit alors $\mathcal{U}$ le recouvrement rationnel associé à une suite finie $f_\bullet := (f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de A avec $A = \sum_{i=1}^n Af_i$. On considère d'abord le cas suivant :

Affirmation 12.90. Si $f_1 \in A^\times$, le recouvrement $\mathcal{U}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.

Preuve : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'assertion est triviale si $n = 1$. Si $n = 2$, on voit aussitôt que $\mathcal{U}$ coïncide avec le recouvrement de Laurent associé à f_2/f_1 , et alors l'assertion découle du lemme 12.84 dans ce cas. Soit ensuite $n > 2$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour tout anneau affinoïde (B, B^+) universellement analytiquement noethérien, et toute suite $g_1, \dots, g_k \in B$ de longueur $k < n$ avec $g_1 \in B^\times$. Soit $\mathcal{V}$ le recouvrement de Laurent de X associé à $g := f_2/f_1$, de sorte que :

$$\mathcal{V}^{(\bullet)} = \{V_1, V_2, V_3\} \quad \text{avec } V_1 := X \cap R_A\left(\frac{g}{1}\right) \quad V_2 := X \cap R_A\left(\frac{1}{g}\right) \quad V_3 := V_1 \cap V_2.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, posons $(A_i, A_i^+) := (\underline{A}_{V_i}, \rho_i := \rho_{V_i} : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{V_i}, X_i := X_{V_i} \text{ et } \phi_i := \phi_{V_i} : X_i \rightarrow X)$. Pour $i = 1, 2, 3$ on identifie $\mathcal{U} \wedge V_i$ avec le recouvrement $\mathcal{U}_i := \{\phi_i^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ de X_i , et $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U} \wedge V_i, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}_i, \widehat{\mathcal{O}}_{X_i})$. Or, comme $g \in A_1^\times$, on voit aisément que $\mathcal{U}_1$ est raffiné par le recouvrement rationnel $\mathcal{W}_1$ de X_1 associé à la suite $\rho_1(f_1), \rho_1(f_3), \dots, \rho_1(f_n)$, et évidemment $\rho_1(f_1) \in A_1^\times$; de même, comme $1/\rho_2(g) \in A_2^+$ et $\rho_2(g) \in A_2^\times$, il vient $\rho_2(f_2) \in A_2^\times$, et on voit aisément que $\mathcal{U}_2$ est raffiné par le recouvrement rationnel $\mathcal{W}_2$ de X_2 associé à la suite $\rho_2(f_2), \dots, \rho_2(f_n)$. On déduit aussitôt que $\mathcal{U}_3$ est de même raffiné par le recouvrement rationnel $\mathcal{W}_3$ associé à $\rho_3(f_2), \dots, \rho_3(f_n)$, et on a encore $\rho_3(f_2) \in A_3^\times$. Puisque $\underline{A}_{V_i}$ est universellement analytiquement noethérien, $\mathcal{W}_i$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i}$ -acyclique par hypothèse de récurrence, et de même pour $\mathcal{W}_i \wedge U$, pour tout $U \in \mathcal{U}_i^{(\bullet)}$; en vertu du corollaire 12.78(ii), on déduit que chaque $\mathcal{U}_i$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i}$ -acyclique, donc chaque $\mathcal{U} \wedge V_i$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique, et de même pour $\mathcal{V}$ (lemme 12.84). En outre, $\mathcal{V} \wedge U$ s'identifie avec un recouvrement de Laurent de X_U , pour tout $U \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$, donc $\mathcal{V} \wedge U$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique pour tout tel U . D'après la proposition 12.76, il s'ensuit que $\mathcal{U}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique. $\diamond$

Soient ensuite $g_1, \dots, g_n \in A$ avec $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$, et notons par $\mathcal{V}$ le recouvrement de Laurent de X associé à la suite $(g_1 f_1, \dots, g_n f_n)$. Pour tout $W \in \mathcal{U}^{(\bullet)}$ (resp. $W \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$) on identifie le recouvrement $\mathcal{U} \wedge W$ (resp. $\mathcal{V} \wedge W$) avec le recouvrement rationnel $\mathcal{U}_W := (\rho_W^{-1}U \mid U \in \mathcal{U})$ (resp. avec le recouvrement de Laurent $\mathcal{W}_W := (\rho_W^{-1}V \mid V \in \mathcal{V})$) de X_W , comme dans la preuve de l'observation 12.89, et de même on identifie $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U} \wedge W, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}_W, \widehat{\mathcal{O}}_{X_W})$, et $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V} \wedge W, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{W}_W, \widehat{\mathcal{O}}_{X_W})$. D'après la proposition 12.87, chaque $\mathcal{W}_W$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_W}$ -acyclique; par suite, si chaque $\mathcal{U}_W$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_W}$ -acyclique, alors $\mathcal{U}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique (proposition 12.76). Noter maintenant que chaque $W \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (a) $h_1 := \rho_W(g_1 f_1), \dots, h_n := \rho_W(g_n f_n) \in A_W^+$
- (b) il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $1/\rho_W(g_i f_i) \in A_W^\times$.

Si W vérifie (b), on a aussi $1/\rho_W(f_i) \in A_W^\times$; par suite, le recouvrement $\mathcal{U}_W$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_W}$ -acyclique dans ce cas, d'après l'observation 12.90. Supposons donc que W vérifie la condition (a), et soit $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_n\}$ le recouvrement rationnel de X_W associé à la suite $h_1, \dots, h_n$, de sorte que $W_i = X_W \cap R_A\left(\frac{1}{h_i}\right)$ pour $i = 1, \dots, n$. Pour tout $U \in \mathcal{U}_W^{(\bullet)}$ soit $\lambda_U : \underline{A}_W \rightarrow \underline{B}_U$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui l-représente

U ; posons

$$Y_U := \mathrm{Spa} \underline{B}_U \quad \text{et} \quad \psi_U := \mathrm{Spa}(\lambda_U) : Y_U \rightarrow X_W.$$

Comme ci-dessus, on identifie le recouvrement $\mathcal{W} \wedge U$ avec le recouvrement rationnel $\mathcal{W}_U := \{\psi_U^{-1}(W_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ de Y_U , et $\check{C}_{\mathrm{aug}}^\bullet(\mathcal{W} \wedge U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_W})$ avec $\check{C}_{\mathrm{aug}}^\bullet(\mathcal{W}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{Y_U})$, pour tout $U \in \mathcal{W}_W^{(\bullet)}$; d'après la proposition 12.82, $\mathcal{W}$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_W}$ -acyclique, et $\mathcal{W}_U$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{Y_U}$ -acyclique pour tout $U \in \mathcal{W}_W^{(\bullet)}$. Par suite, la proposition 12.76 nous ramène à vérifier que $\mathcal{W}_W \wedge W'$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_W}$ -acyclique pour tout $W' \in \mathcal{W}^{(\bullet)}$. Soit alors $\lambda_{W'} : \underline{A}_W \rightarrow \underline{B}_{W'} := (B_{W'}, B_{W'}^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui l-représente W' , pour chaque $W' \in \mathcal{W}^{(\bullet)}$; posons $Y_{W'} := \mathrm{Spa} \underline{B}_{W'}$, et $\psi_{W'} := \mathrm{Spa}(\lambda_{W'}) : Y_{W'} \rightarrow X_W$. Encore une fois, on identifie $\mathcal{W}_W \wedge W'$ avec le recouvrement $\mathcal{W}_{W'} := \{\psi_{W'}^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{W}_W\}$ de $Y_{W'}$, et $\check{C}_{\mathrm{aug}}^\bullet(\mathcal{W}_W \wedge W', \widehat{\mathcal{O}}_{X_W})$ avec $\check{C}_{\mathrm{aug}}^\bullet(\mathcal{W}_{W'}, \widehat{\mathcal{O}}_{Y_{W'}})$; or, pour tout $W' \in \mathcal{W}^{(\bullet)}$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{W'}(h_i) \in B_{W'}^\times$, donc aussi $\lambda_{W'} \circ \rho_W(f_i) \in B_{W'}^\times$, et noter que $\mathcal{W}_{W'}$ est le recouvrement rationnel de $Y_{W'}$ associé à la suite $(\lambda_{W'} \circ \rho_W(f_1), \dots, \lambda_{W'} \circ \rho_W(f_n))$. D'après l'observation 12.90, chaque $\mathcal{W}_{W'}$ est alors strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{Y_{W'}}$ -acyclique, CQFD.

(ii) : Soit (A_U, A_U^+) l'anneau affinoïde qui l-représente U ; par l'exercice 12.36(v) et l'exemple 12.67(iii), la complétion $A_U \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ est un homomorphisme plat d'anneaux, donc il suffit de montrer que A_U est une A -algèbre plate (exercice 3.76(ii)). Cela découle d'une inspection directe de la preuve du théorème 12.5.

(iii) : Cela découle de (i) et de l'exercice 5.35(ii,iii). $\square$

Exercice 12.91. Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde, $\star \in \{l, c\}$, et $U \subset X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ un $\star$ -domaine affinoïde, $\star$ -représenté par le morphisme $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U := (A_U, A_U^+)$ d'anneaux affinoïdes. La propriété universelle de ρ_U associe à tout sous-ensemble rationnel $V \subset U$, un unique morphisme $\rho_{UV} : \underline{A}_U \rightarrow \underline{A}_V := (A_V, A_V^+)$ de $\star$ -Afd tel que $\rho_{UV} \circ \rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_V$ $\star$ -représente V (voir le §12.1.2); notons par $\widehat{\rho}_U : \widehat{\underline{A}} \rightarrow \widehat{\underline{A}}_U$ et $\widehat{\rho}_{UV} : \widehat{\underline{A}}_U \rightarrow \widehat{\underline{A}}_V$ les complétions de ρ_U et ρ_{UV} (si $\star = c$, évidemment $\widehat{\underline{A}}_U = \underline{A}_U$ et $\widehat{\underline{A}}_V = \underline{A}_V$). On a ainsi un cône bien défini $(\widehat{\rho}_{UV} \mid V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rat}(\underline{A})/U))$ (notation de la proposition 12.10(ii)); d'autre part, les applications de restriction pour $\widehat{\mathcal{O}}_X$ forment un cône universel

$$(\widehat{\rho}_V : \widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(V) = \widehat{A}_V \mid V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rat}(\underline{A})/U))$$

d'où un unique homomorphisme continu d'anneaux $\omega_U : \widehat{A}_U \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ tel que $\widehat{\rho}_V \circ \omega_U = \widehat{\rho}_{UV}$ pour tout $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rat}(\underline{A})/U)$.

(i) Montrer que ω_U est un isomorphisme de $\mathbb{Z} - \mathrm{AlgTop}$ dans les cas suivants :

- (a) si $\star = l$, et si $\underline{A}$ est universellement analytiquement noethérien
- (b) si $\star = c$, et si $\underline{A}$ est fortement analytiquement noethérien.

(ii) Montrer que sous la condition (i.a) ou (i.b), $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ est une $\widehat{A}$ -algèbre plate.

(iii) Si $\underline{A}$ est à définition noethérienne, montrer qu'il en est de même pour $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$.

Théorème 12.92. (Acyclicité de Tate) Soient $\underline{A}$ un anneau affinoïde universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, et $U \subset X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ un l -domaine (resp. c -domaine) affinoïde. Alors tout recouvrement $\mathcal{V}$ de U formé de l -domaines (resp. c -domaines) affinoïdes de X est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.

Démonstration. Si $\underline{A}$ est universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, posons $\star := l$ (resp. $\star := c$). Définissons $\mathcal{V}^{(\bullet)}$ comme au §12.4.3; soit aussi $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$ un morphisme d'anneaux affinoïdes $\star$ -représentant U , et posons

$$X_U := \mathrm{Spa} \underline{A}_U \quad \phi_U := \mathrm{Spa}(\rho_U) : X_U \rightarrow X \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_U := \{\phi_U^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

La propriété universelle de ρ_U fournit pour tout $V \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes $\rho_{UV} : \underline{A}_U \rightarrow \underline{A}_V$ tel que $\rho_V := \rho_{UV} \circ \rho_U$ $\star$ -représente V , et ρ_{UV} $\star$ -représente le $\star$ -domaine affinoïde $\phi_U^{-1}V$ de X_U ; en vertu du lemme 12.62(iii,iv) et du théorème 12.69,

$\underline{A}_U$ est universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, et avec l'exercice 12.91(i) on identifie naturellement $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U})$. Ainsi, quitte à remplacer $\underline{A}$ par $\underline{A}_U$, on peut supposer que $U = X$.

Ensuite, choisissons un recouvrement rationnel $\mathcal{W}$ de X raffinant $\mathcal{V}$ (lemme 12.79). Pour tout $V \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$, posons $X_V := \text{Spa } \underline{A}_V$, $\phi_V := \text{Spa}(\rho_V) : X_V \rightarrow X$, et $\mathcal{W}_V := \{\phi_V^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$; puisque $\underline{A}_V$ est universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, en raisonnant comme ci-dessus on identifie naturellement $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{W} \wedge V, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ avec $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{W}_V, \widehat{\mathcal{O}}_{X_V})$. Au vu de la proposition 12.88 et du théorème 12.32, on déduit que $\mathcal{W} \wedge V$ est un recouvrement strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique, pour tout $V \in \mathcal{V}^{(\bullet)}$, et de même pour $\mathcal{W}$; on conclut alors avec le corollaire 12.78(ii). $\square$

Soit $\underline{A}$ un anneau affinoïde universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, et posons $\star := \text{I}$ (resp. $\star := \text{c}$). Le théorème 12.92 et l'exercice 12.91(i) entraînent que $A_\star^\bullet$ est un faisceau d'anneaux topologiques sur le site $\star.\text{Dom}(\underline{A})$ (notation du §12.1.2), et $\widehat{\mathcal{O}}_X$ est le faisceau d'anneaux topologiques sur $X := \text{Spa } \underline{A}$ obtenu par prolongement canonique de $A_\star^\bullet$ (exercice 5.35(i)). Plus généralement, soit M un A -module analytiquement borné; pour tout $\star$ -domaine affinoïde $U \subset X$, le $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ -module $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \otimes_A M$ est analytiquement borné, et si $U' \subset U$ est un deuxième $\star$ -domaine affinoïde, la restriction $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U')$ est un morphisme adique d'anneaux de Huber (proposition 9.78(ii) et problème 12.8(iii)), donc l'homomorphisme induit de $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ -modules $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \otimes_A M \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U') \otimes_A M$ est continu pour les respectives topologies canoniques $\mathcal{T}_M^U$ et $\mathcal{T}_M^{U'}$ (remarque 12.42(i)). Ainsi l'association $U \mapsto (\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \otimes_A M, \mathcal{T}_M^U)$ définit un préfaisceau de A -modules topologiques sur le site $\star.\text{Dom}(\underline{A})$. D'après l'exercice 5.35(i), ce préfaisceau se prolonge canoniquement en un préfaisceau de A -modules topologiques sur X , que l'on notera

$$\widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M.$$

Le corollaire suivant généralise le théorème 12.92, et montre aussi que notre notation ici est compatible avec celle de l'exercice 5.56.

Corollaire 12.93. *Avec la notation ci-dessus, on a :*

- (i) $\widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M$ est un faisceau de A -modules topologiques complets et séparés.
- (ii) Pour tout domaine $\star$ -affinoïde $U \subset X$, tout recouvrement fini $\mathcal{U}$ de U composé de domaines $\star$ -affinoïdes est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M$ -acyclique.

Démonstration. (ii) : Munissons $B := A \oplus M$ de la structure de A -algèbre définie comme dans la preuve de la proposition 12.41(i), et posons $B^+ := A^+ \oplus M$; alors l'inclusion $j : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux analytiquement fini, donc $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau de Huber universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, et j est un morphisme adique (exercice 12.40(i,iv) et remarque 12.42(iii)). En outre, B^+ est un sous-anneau ouvert de B , et il est la fermeture intégrale de A^+ dans B (les détails sont laissés aux soins du lecteur), donc $B^+ \subset B^\circ$ (lemme 9.77(iv)). Ainsi, $j : \underline{A} \rightarrow \underline{B} := (B, B^+)$ est un morphisme adique d'anneaux affinoïdes; posons $Y := \text{Spa } \underline{B}$, et $\phi := \text{Spa}(j) : Y \rightarrow X$. Pour tout $\star$ -domaine affinoïde $W \subset X$, la partie $\phi^{-1}W$ est un $\star$ -domaine affinoïde de Y (voir le 12.1.3), et le morphisme structurel $A \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(W)$ est adique, donc $B_W := B \otimes_A \widehat{\mathcal{O}}_X(W)$ est une $\widehat{\mathcal{O}}_X(W)$ -algèbre analytiquement finie, complète et séparée pour sa topologie canonique (remarque 12.42(i) et proposition 12.41(i)); compte tenu de la remarque 12.42(ii), il s'ensuit aisément que l'homomorphisme naturel $B_W \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_Y(\phi^{-1}W)$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques. En particulier, $\mathcal{U}_Y := \{\phi^{-1}W \mid W \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement du $\star$ -domaine affinoïde $\phi^{-1}U$ de Y composé de $\star$ -domaines affinoïdes, et le complexe de Čech $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}_Y, \widehat{\mathcal{O}}_Y)$ s'identifie naturellement avec

$$B \otimes_A \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{O}}_X) = \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{O}}_X) \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M).$$

D'après le théorème 12.92, le complexe $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}_Y, \widehat{\mathcal{O}}_Y)$ est strictement acyclique, donc de même pour son facteur direct $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M)$, d'où l'assertion.

(i) : Avec (ii), on voit aussitôt que pour tout $U \in \text{Ob}(\star.\text{Dom}(\underline{A}))$ et tout recouvrement fini $\mathcal{U} \subset \text{Ob}(\star.\text{Dom}(\underline{A}))$ de U , le cône $(\widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M(Q) \mid Q \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U})$ induit par les restrictions est universel ; d'après l'exercice 5.35(iii), la restriction de $\widehat{\mathcal{O}}_X \widetilde{\otimes}_A M$ au site $\star.\text{Dom}(\underline{A})$ est alors un faisceau à valeurs dans la catégorie des A -modules topologiques complets et séparés, d'où (i). $\square$

12.4.5. Anneaux affinoïdes stablement uniformes. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de c.Afd ; on dira que $\mathcal{C}$ est *stable* si pour tout $(A, A^+) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et pour tout sous-ensemble rationnel $U \subset \text{Spa}(A, A^+)$, l'anneau affinoïde $(\widehat{A}_U, \widehat{A}_U^+)$ qui c -représente U est un objet de $\mathcal{C}$. Une inspection directe des paragraphes précédents permet d'y extraire le prototype suivant du théorème d'acyclicité qui dévoile son caractère essentiellement combinatoire :

Corollaire 12.94. *Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie stable de c.Afd telle que pour tout $\underline{A} := (A, A^+) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $f \in A$, le recouvrement de Laurent de $X := \text{Spa } \underline{A}$ associé à f soit strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique. Alors, pour tout tel $\underline{A}$, tout recouvrement de X formé de sous-ensembles rationnels est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.* $\square$

Avec cette terminologie, les résultats principaux de cette section montrent que les anneaux affinoïdes complets, séparés et universellement analytiquement noëtheriens forment une sous-catégorie stable de c.Afd vérifiant la condition du corollaire 12.94. Récemment, K.Buzzard et A.Verberkmoes ([10]) ont exhibés une autre sous-catégorie stable vérifiant la même condition ; cette nouvelle classe est notable, surtout car elle inclut les anneaux perfectoides de Scholze, et fournit ainsi un cadre adéquat pour démontrer certaines propriétés fondamentales de ces anneaux. Ce paragraphe présente une version des résultats de [10] qui englobe aussi les généralisations des anneaux perfectoides étudiés dans [31].

Définition 12.95. (i) Soient A un anneau de Huber, $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I \subset A_0$ un idéal de définition, et $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ la fonction de Samuel asymptotique de I (voir le problème 10.18(i)) ; on dit que A est *uniforme* si

$$(\{a \in A \mid w_I^*(a) \geq r\} \mid r \in \mathbb{R})$$

forme un système fondamental de sous-groupes ouverts dans A .

(ii) Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde ; on dit que $\underline{A}$ est *uniforme*, si A est uniforme. On dit que $\underline{A}$ est *stablement uniforme* si pour tout sous-ensemble rationnel $U \subset X := \text{Spa } \underline{A}$, l'anneau affinoïde qui c -représente U est uniforme.

Remarque 12.96. (i) La condition de la définition 12.95(i) ne dépend que de la topologie de A (et elle est indépendante des choix auxiliaires de A_0 et I). En effet, soient A_1 un deuxième sous-anneau de définition, avec idéal de définition $J \subset A_1$, et notons par $w_I, w_J : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ les fonctions d'ordre associés aux couples (A_0, I) et (A_1, J) , comme au problème 10.18(i). Supposons d'abord que $A_0 = A_1$, et soit $n \in \mathbb{N}$ avec $J^n \subset I$ et $I^n \subset J$; pour tous $a \in A$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $w_I(a) \geq k \Leftrightarrow a \in I^k \Rightarrow a^n \in J^k \Leftrightarrow w_J(a^n) \geq k$, et $w_I(a) \geq -k \Leftrightarrow aI^k \subset A_0 \Rightarrow aJ^{kn} \subset A_0 \Leftrightarrow w_J(a) \geq -kn$, et on obtient des inégalités correspondantes, si l'on échange les rôles de I et J . Ainsi, on a soit $nw_I^*(a) \geq w_J^*(a) \geq w_I^*(a)/n \geq 0$, soit $0 > w_I^*(a)/n \geq w_J^*(a) \geq nw_I^*(a)$; autrement dit, pour $q \in \{0, +\infty\}$ il vient $w_I^*(a) = q \Leftrightarrow w_J^*(a) = q$, et :

$$w_J^*(a) \notin \{0, +\infty\} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{w_I^*(a)}{w_J^*(a)} \leq n$$

donc $(\{a \in A \mid w_I^*(a) \geq r\} \mid r \in \mathbb{R})$ forme un système fondamental de sous-groupes ouverts de A si et seulement s'il en est de même pour $(\{a \in A \mid w_J^*(a) \geq r\} \mid r \in \mathbb{R})$. Dans le cas général, $A_2 := \langle A_0 A_1 \rangle$ est encore un sous-anneau de définition de A (corollaire 9.72(i)), et on trouve un idéal de définition $K \subset A_2$ avec $K \subset I \cap J$, de sorte que $K = \sum_{i=1}^k b_i A_2$ pour

une suite finie $b_1, \dots, b_k$ d'éléments de $A_0 \cap A_1$; soit en outre $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n \cup J^n \subset K$, de sorte que $K_0 := I^n + \sum_{i=1}^k b_i A_0$ (resp. $K_1 := J^n + \sum_{i=1}^k b_i A_1$) est un idéal de définition de A_0 (resp. de A_1) avec $K = K_0 A_2 = K_1 A_2$. Avec le problème 10.18(xii), on voit que la fonction de Samuel asymptotique associée à (A_2, K) coïncide alors avec celles associées à (A_0, K_0) et à (A_1, K_1) , et on conclut par le cas précédent.

(ii) La proposition 12.10(ii), entraîne aussitôt que les anneaux affinoïdes complets, séparés et stablement uniformes forment une sous-catégorie stable de $\mathbf{cAfd}$.

(iii) Avec la notation de (i), on vérifie aisément que si A est uniforme, alors l'idéal $\{a \in A \mid w_I^*(a) = +\infty\}$ est l'adhérence de A° dans A . En outre A° coïncide avec le sous-anneau $A^+ := \{a \in A \mid w_I^*(a) \geq 0\}$: en effet, on a toujours $A^\circ \subset A^+$, d'après le problème 10.18(iv), et l'inclusion réciproque est vérifiée si A est uniforme, car $\{a \in A \mid w_I^*(a) \geq r\}$ est un idéal de A^+ , pour tout réel $r \geq 0$.

(iv) Tout anneau de Huber A uniforme et séparé est réduit. En effet, reprenons la notation de la définition 12.95(i), et soit $a \in \mathcal{N}(A)$; alors il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $w_I^*(a^n) = w_I^*(0) = +\infty$, d'où $w_I^*(a) = +\infty$, donc $a = 0$, d'après (iii).

Exercice 12.97. Soient A un anneau de Huber, $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I \subset A_0$ un idéal de définition, $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ sa fonction de Samuel asymptotique.

(i) Munissons A de la topologie linéaire $\mathcal{T}_A^*$ admettant le système fondamental de sous-groupes ouverts $(U_r := \{a \in A \mid w_I^*(a) \geq r\} \mid r \in \mathbb{R})$. Montrer que $(A, \mathcal{T}_A^*)$ est un anneau topologique.

(ii) Si A est analytique (définition 9.18(vi)), montrer en outre que $(A, \mathcal{T}_A^*)$ est un anneau de Huber uniforme analytique, avec $(A, \mathcal{T}_A^*)^\circ = A^+ := \{a \in A \mid w_I^*(a) \geq 0\}$.

(iii) Soit $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z} - \mathbf{AlgTop}$ dont les objets sont les anneaux de Huber analytiques, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les anneaux de Huber analytiques et uniformes. Dédurre de (ii) que le foncteur d'inclusion $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche.

(iv) Si A est analytique, alors A est uniforme $\Leftrightarrow A^\circ$ est une partie bornée de A . En particulier, notre définition est compatible avec celles de [10] et [45].

Proposition 12.98. Soit A un anneau de Huber ; on a :

(i) A est uniforme $\Leftrightarrow A_{\text{loc}}$ est uniforme $\Leftrightarrow$ la complétion $\hat{A}$ est uniforme.

(ii) $\hat{A}$ est uniforme $\Leftrightarrow \hat{A}\langle X \rangle$ est uniforme $\Leftrightarrow \hat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$ est uniforme.

Démonstration. (i) : Fixons un sous-anneau de définition $A_0 \subset A$ et un idéal de définition $I \subset A_0$, et soit $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ (resp. $w_{\hat{I}}^* : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$) la fonction de Samuel asymptotique de I (resp. de $\hat{I} := I\hat{A}$). D'un côté, la topologie de A est induite par celle de $\hat{A}$, via la complétion $j : A \rightarrow \hat{A}$ (théorème 9.39(ii)), et de l'autre côté $w_I^* = w_{\hat{I}}^* \circ j$ (problème 10.18(xi)) ; il s'ensuit aussitôt que si $\hat{A}$ est uniforme, il en est de même pour A . Pour la réciproque, posons $U_n := \{a \in A \mid w_I(a) \geq n\}$ et $\hat{U}_n := \{a \in \hat{A} \mid w_{\hat{I}}(a) \geq n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $I^n \hat{A}_0 \subset \hat{U}_n$, et on voit aisément que $j(U_n)$ est une partie dense de $\hat{U}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\hat{U}_n$ est un sous-groupe ouvert de $\hat{A}$; si A est uniforme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $U_m \subset I^n$, par suite $j(U_m) \subset I^n \hat{A}_0$, d'où finalement $\hat{U}_m \subset I^n \hat{A}_0$, et cela achève de vérifier que $\hat{A}$ est uniforme. Puisque $\hat{A}$ est aussi la complétion de A_{loc} , on obtient de même la dernière équivalence.

(ii) : Si $\hat{A}$ est uniforme, soit $|\cdot| : \hat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ la semi-norme de Gauss induite par w_I^* (voir le problème 10.19(i)) ; une simple inspection montre que

$$(\{f \in \hat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle \mid |f| \geq r\} \mid r \in \mathbb{R})$$

forme un système fondamental de sous-groupes ouverts de $\hat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$, mais $|\cdot|$ est la fonction de Samuel asymptotique $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}^*$ de $\hat{I}\langle X^{\pm 1} \rangle$ (problème 10.19(ii)), donc $\hat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$ est uniforme. Le même raisonnement montre que si $\hat{A}$ est uniforme, il en est de même

pour $\widehat{A}\langle X \rangle$. Réciproquement, il est clair que la topologie de $\widehat{A}$ est induite par celle de $\widehat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$ via l'inclusion naturelle $\widehat{A} \rightarrow \widehat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$, et d'autre part, on vient de remarquer que w_I^* est la restriction de $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}^*$, donc, si $\widehat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$ est uniforme, il en est de même pour $\widehat{A}$. En dernier lieu, le problème 10.19(ii) montre que la fonction de Samuel asymptotique de $\widehat{I}\langle X \rangle$ est la restriction de $w_{\langle X^{\pm 1} \rangle}^*$, et on voit aussitôt que la topologie de $\widehat{A}\langle X \rangle$ est induite par celle de $\widehat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$ via l'inclusion naturelle $\widehat{A}\langle X \rangle \rightarrow \widehat{A}\langle X^{\pm 1} \rangle$, d'où la dernière équivalence. $\square$

Avec l'exercice 12.97(ii,iii) on peut exhiber aisément des anneaux de Huber uniformes. Par contre, les anneaux stablement uniformes sont plus difficile à saisir ; en effet, mis à part les anneaux perfectoides déjà mentionnés, on ne connaît qu'une autre classe importante de tels anneaux : les K -algèbres de Tate réduites et topologiquement de type fini, sur un corps K muni d'une valuation de rang un ; mais pour ces dernières, le théorème 12.100 suivant est en tout cas déjà connu, et même sous une forme plus forte, car K est fortement noethérien (corollaire 12.53(i) et théorème 12.92). L'exemple suivant montre que, même pour les anneaux de Tate, la condition d'uniformité n'est pas toujours héritée par les sous-ensembles rationnels.

Exemple 12.99. (Emprunté à [10, §4.5].) Soit K comme ci-dessus, notons par $(K^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de K , et fixons $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Soit $A_0 \subset R := K[T, T^{-1}, Z]$ le K^+ -sous-module engendré par

$$f_{\bullet\bullet} := (f_{n,p} := (\pi T)^{n-p^2} (\pi Z)^p \mid n, p \in \mathbb{N}).$$

Noter que $f_{n,p} \cdot f_{n',p'} = f_{n+n'+2pp', p+p'}$ pour tous $(n, p), (n', p') \in \mathbb{N}^2$, donc A_0 est une K^+ -sous-algèbre de R , et en outre, A_0 est un K^+ -module libre avec base $f_{\bullet\bullet}$. Munissons $A := K \otimes_{K^+} A_0$ de la topologie linéaire telle que $(\pi^n A_0)$ soit un système fondamental de sous-groupes ouverts ; ainsi A est un anneau de Tate, avec sous-anneau de définition A_0 et idéal de définition πA_0 . Montrons que $A_0 = A^\circ$. Pour cela, noter que A est un anneau Γ -gradué, pour le groupe abélien $\Gamma := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de la loi de composition telle que $(n, p) + (n', p') := (n + n' + 2pp', p + p')$ pour tous $(n, p), (n', p') \in \Gamma$; d'après le problème 9.76, il suffit alors de vérifier que $Kf_{n,p} \cap A^\circ = K^+f_{n,p}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$. Soit donc $a \in K$ avec $af_{n,p} \in A^\circ$; il existe alors $b \in \mathfrak{m}$ tel que $b(af_{n,p})^d \in A_0$ pour tout $d \in \mathbb{N}$, et puisque $f_{n,p}^d$ est un élément de la base $f_{\bullet\bullet}$, il vient $ba^d \in K^+$ pour tout $d \in \mathbb{N}$, d'où $a \in K^+$, comme souhaité. Cela montre que A est un anneau de Tate uniforme. Soient ensuite $X := \mathrm{Spa}(A, A_0)$, et $U := R_A(\frac{T}{1}) \subset X$. Rappelons que U est c -représenté par $(\widehat{A}_U, \widehat{A}_U^+)$, où $\widehat{A}_U$ est la complétion de l'anneau de Tate $A_U := A[T] \subset R$, avec sous-anneau de définition $A_0[T]$ et idéal de définition $\pi A_0[T]$. Montrons que $\widehat{A}_U$ n'est pas uniforme ; pour cela il suffit de vérifier que A_U n'est pas uniforme (proposition 12.98(i)). Or, on voit aisément que $A_0[T]$ est un K^+ -module libre, avec base $(g_{n,p} := \pi^{p-p^2} T^{n-p^2} Z^p \mid n, p \in \mathbb{N})$, et en particulier $(\pi^{1-p} Z)^p = g_{p^2,p} \in A_0[T]$, d'où $\pi^{1-p} Z \in A_0[T]^\circ$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; mais la partie $\{\pi^{1-p} Z \mid p \in \mathbb{N}\}$ n'est pas bornée dans $A[T]$, car le cas échéant il existerait $a \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ avec $a\pi^{1-p} Z = a\pi^{1-p} g_{1,1} \in A_0[T]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

Théorème 12.100. Soit $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde stablement uniforme. Alors, tout recouvrement de $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ formé de sous-ensembles rationnels est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclique.

Démonstration. Au vu des propositions 12.10(iii) et 12.98(i), on peut supposer que A soit complet et séparé. Soit $f \in A$; en vertu du corollaire 12.94 et de la remarque 12.96(ii), il suffit de montrer le théorème pour le recouvrement de Laurent $\mathscr{U}$ de X associé à f . Pour cela, fixons un sous-anneau de définition $A_0 \subset A$, un idéal de définition $I \subset A_0$, et soient $u : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ la fonction de Samuel asymptotique de I , et $|\cdot|_u : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_\circ$

la semi-norme de Gauss induite par u (voir le problème 10.19(i)); soit en outre $g := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$. Remarquons :

Affirmation 12.101. (i) Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} Aa_n = A$, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|h|_u + C_1 \leq |gh|_u \leq |h|_u + C_2 \quad \forall h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle.$$

(ii) Sous l'hypothèse de (i), l'application $\gamma : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow A\langle X^{\pm 1} \rangle : h \mapsto gh$ est un morphisme strict et injectif de $A - \text{ModTop}$.

(iii) Si la condition de (i) est vérifiée, et si en outre $g \in A\langle X \rangle$, alors aussi la restriction $A\langle X \rangle \rightarrow A\langle X \rangle$ de γ est stricte et injective.

Preuve : (i) : Avec $C_1 := |g|_u$ on a $|gh|_u \geq |h|_u + C_1$ pour tout $h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$. Ensuite, soient $p \in \mathbb{N}$ et $b_{-p}, \dots, b_p \in A$ avec $\sum_{n=-p}^p a_n b_n = 1$, et posons $t := \sum_{n=-p}^p b_n X^{-n}$; noter que $tg = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n X^n$, avec $c_0 = 1$. Supposons qu'il existe $C'_2 \in \mathbb{R}$ tel que $|tgh|_u \leq |h|_u + C'_2$ pour tout $h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$; il vient $|gh|_u \leq |tgh|_u - |t|_u \leq |h|_u + C'_2 - |t|_u$, donc on pourra prendre $C_2 := C'_2 - |t|_u$. Ainsi, quitte à remplacer g par tg , on peut supposer que $a_0 = 1$. Or, soient $\mathcal{R}_I$ l'ensemble des valuations $v : A \rightarrow \mathbb{R}_0$ telles que $\inf(v(a) | a \in I) = 1$, et $\mathcal{R}'_I$ l'ensemble des valuations triviales $v : A \rightarrow \{0, +\infty\}$ telles que $I \subset \text{Supp}(v)$; pour tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$, notons par $|\cdot|_v : A\langle X^{\pm 1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0$ la semi-norme de Gauss induite par v . La solution du problème 10.19(ii) montre que chaque telle $|\cdot|_v$ est une valuation de $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, et en outre $|h|_u = \inf(|h|_v | v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I)$ pour tout $h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$. Evidemment $|g|_v \leq 0$, d'où $|gh|_v = |g|_v + |h|_v \leq |h|_v$ pour tout $v \in \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}'_I$ et tout $h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle$; par suite, $|gh|_u \leq |h|_u$ pour tout tel h , comme souhaité.

(ii) : Posons $U_r := \{h \in A\langle X^{\pm 1} \rangle | |h|_u \geq r\}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$; puisque A est uniforme, la famille $(U_r | r \in \mathbb{R})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, et d'autre part (i) entraîne que

$$U_{r-C_1} \subset \gamma^{-1}(U_r) \subset U_{r-C_2} \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

d'où l'assertion. Pour (iii), remarquons que $(U_r \cap A\langle X \rangle | r \in \mathbb{R})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts de $A\langle X \rangle$; on conclut alors comme pour (ii). $\diamond$

Revenons maintenant au diagramme $\mathcal{D}$ de la preuve du lemme 12.84 : celle-ci montre que, afin de démontrer la $\widehat{\mathcal{O}}_X$ -acyclicité stricte de $\mathcal{U}$, il suffit de vérifier que l'observation 12.86 est encore valable dans notre situation, *i.e.* que la multiplication scalaire par $f - X$ sur $A\langle X \rangle$ et sur $A\langle X^{\pm 1} \rangle$, et la multiplication scalaire par $1 - fX$ sur $A\langle X \rangle$ sont des morphismes injectifs et stricts de $A - \text{ModTop}$. Cela découle aussitôt de l'observation 12.101(ii,iii). $\square$

12.5. Applications au spectre valuatif et au spectre adique. On va maintenant appliquer le théorème de Gruson-Raynaud afin de prouver le théorème 12.103, qui est dû à R. Huber, et qui représente un homologue pour les spectres valuatifs du théorème de Chevalley 6.115. Rappelons que l'on a déjà rencontré un autre homologue de ce théorème, lors de notre discussion du spectre réel des anneaux : à savoir, le théorème 8.76, équivalent au principe de Tarski-Seidenberg, *i.e.* l'élimination des quantificateurs pour la théorie des corps formellement réels clos (voir la remarque 8.86). De même, la théorie $\mathcal{T}_{\text{val}}$ des corps algébriquement clos munis d'une valuation non triviale admet un procédé d'élimination des quantificateurs, en fait utilisé par Huber pour sa preuve du théorème 12.103, qui est donc de nature essentiellement combinatoire; par contre, notre démonstration ne s'appuie que sur les techniques développées dans notre cours, et donc fournit aussi un point de vue algèbro-géométrique sur l'élimination des quantificateurs pour la théorie $\mathcal{T}_{\text{val}}$.

- Pour tout anneau S , soit $\mathcal{T}_S^d$ la topologie discrète sur S , et posons

$$\text{Spv}^+ S := \text{Spa}((S, \mathcal{T}_S^d), S) = \{v \in \text{Spv } S | v(s) \geq 0 \ \forall s \in S\}.$$

D'après le §10.2.2, on a une application continue et compacte

$$\sigma_S^+ : \text{Spv}^+ S \rightarrow \text{Spec } S$$

qui associe à toute valuation $v \in \text{Spv}^+ S$ son centre dans $\text{Spec } S$.

Lemme 12.102. *Soit S une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini. Alors :*

- (i) $\text{Spv}^+ S$ est un sous-ensemble rationnel de $\text{Spv } S$.
- (ii) $\dim S < +\infty$.
- (iii) Si S est intègre et si $b \in S \setminus \{0\}$, alors $\dim S_b = \dim S$.
- (iv) Si S est intègre et si $\dim S = 0$, alors S est un corps fini.

Démonstration. (i) : Disons que $S = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r]$ pour une suite finie $x_1, \dots, x_r \in S$; on voit aisément que $\text{Spv}^+ S = R_S(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_r}{1})$.

(ii) : Si S est un quotient de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$ pour quelque $r \in \mathbb{N}$, l'exercice 4.66 donne l'estimation : $d \leq 2^{r+1} - 1$ par une simple récurrence sur r .

(iv) : Les hypothèses entraînent que S soit un corps, donc $\text{Spec } S$ contient un seul point, et il en est de même pour l'image T de l'application $\phi : \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ induite par l'homomorphisme structurel $f : \mathbb{Z} \rightarrow S$. Mais S est une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini, donc T est une partie constructible de $\mathbb{Z}$ (théorème 6.115), et ainsi $T = V(p)$ pour un entier premier p . Il s'ensuit aisément que S est une $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini, et l'assertion suit de la proposition 6.78(i).

(iii) : Le noyau $\mathfrak{p}$ de $f : \mathbb{Z} \rightarrow S$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$; si $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ pour un entier premier p , alors S est une $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini, et l'assertion suit du problème 6.82(i). Supposons alors que $\mathfrak{p} = 0$, soient $\mathfrak{m} \in \text{Max } S$ et $\mathfrak{q} := f^{-1}\mathfrak{m}$; d'après (iv), le corps $k(\mathfrak{m})$ est fini, et $k(\mathfrak{q}) \subset k(\mathfrak{m})$, donc $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$. La localisation $S_{\mathfrak{q}}$ est une $\mathbb{Z}_{\mathfrak{q}}$ -algèbre sans torsion et de type fini, et la restriction $\text{Spec } S_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_{\mathfrak{q}}$ de ϕ est surjective par construction; ainsi $S_{\mathfrak{q}}$ est une $\mathbb{Z}_{\mathfrak{q}}$ -algèbre fidèlement plate (problèmes 7.48(vi) et 3.83(i.c)). Soit d_S le degré de transcendance de $\text{Frac } S$ sur $\mathbb{Q}$; d'après le problème 7.42(ii), il vient $\dim S_{\mathfrak{q}} = d_S + 1$. Par suite, $\dim S = \sup(\dim S_{\mathfrak{q}} \mid \mathfrak{q} \in \phi(\text{Max } S)) = d_S + 1$. Or, $S_b \simeq S[X]/(bX - 1)$ est une $\mathbb{Z}$ -algèbre intègre de type fini, et évidemment $d_{S_b} = d_S$, d'où l'assertion. $\square$

Théorème 12.103. *Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de présentation finie, et $Z \subset \text{Spv}(B)$ une partie constructible. Alors $(\text{Spv } f)(Z)$ est une partie constructible de $\text{Spv}(A)$.*

Démonstration. D'après la remarque 8.103(i), on peut supposer que

$$Z = (Q_B(\frac{a_1}{b_1}) \cap \dots \cap Q_B(\frac{a_m}{b_m})) \setminus (Q_B(\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}) \cup \dots \cup Q_B(\frac{a_n}{b_n}))$$

pour certains $m, n \in \mathbb{N}$ et $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in B$.

Affirmation 12.104. Le théorème est vrai si f est surjectif.

Preuve : Dans ce cas $\text{Ker } f \subset A$ est un idéal de type fini (exercice 3.17(iii)), disons engendré par $x_1, \dots, x_r \in A$. Soient $a'_1, b'_1, \dots, a'_n, b'_n \in A$ avec $f(a'_i) = a_i$, $f(b'_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors $\text{Spv}(f)(Z) = Z' \cap Q$, où $Z' := \bigcap_{i=1}^r \{v \in \text{Spv}(A) \mid v(x_i) = +\infty\}$ et $Q := Q_A(\frac{a'_1}{b'_1}) \cap \dots \cap Q_A(\frac{a'_m}{b'_m}) \setminus (Q_A(\frac{a'_{m+1}}{b'_{m+1}}) \cup \dots \cup Q_A(\frac{a'_n}{b'_n}))$ sont constructibles dans $\text{Spv}(A)$. $\diamond$

Affirmation 12.105. On peut supposer que A, B soient des $\mathbb{Z}$ -algèbres de type fini.

Preuve : Ecrivons A comme la limite directe du système filtrant $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ de ses $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de type fini; alors il existe $\lambda \in \Lambda$, une A_λ -algèbre de type fini $f_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda$, et un isomorphisme de A -algèbres $A \otimes_{A_\lambda} B_\lambda \xrightarrow{\sim} B$ (problème 3.69(i)). Evidemment il existe $\mu \in \Lambda$ avec $\mu \geq \lambda$, tel que $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ appartiennent à l'image dans B de $B_\mu := A_\mu \otimes_{A_\lambda} B_\lambda$, et quitte à remplacer λ, B_λ par μ, B_μ , on peut alors supposer qu'il existe $a'_1, b'_1, \dots, a'_n, b'_n \in B_\lambda$ avec $a_i = 1 \otimes a'_i$ et $b_i = 1 \otimes b'_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Posons $Z_\lambda := (Q_{B_\lambda}(\frac{a'_1}{b'_1}) \cap \dots \cap Q_{B_\lambda}(\frac{a'_m}{b'_m})) \setminus (Q_{B_\lambda}(\frac{a'_{m+1}}{b'_{m+1}}) \cup \dots \cup Q_{B_\lambda}(\frac{a'_n}{b'_n}))$. On déduit

un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spv} B & \xrightarrow{\pi_B} & \mathrm{Spv} B_\lambda \\ \mathrm{Spv} f \downarrow & & \downarrow \mathrm{Spv} f_\lambda \\ \mathrm{Spv} A & \xrightarrow{\pi_A} & \mathrm{Spv} A_\lambda \end{array}$$

avec $\pi_A := \mathrm{Spv}(j_\lambda)$ et $\pi_B := \mathrm{Spv}(j_\lambda \otimes_{A_\lambda} B_\lambda)$, où $j_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$ est l'inclusion. Evidemment $Z = \pi_B^{-1}(Z_\lambda)$, et avec l'exercice 8.104(iii) on voit aisément que $\pi_A^{-1}(\mathrm{Spv}(f_\lambda)(Z_\lambda)) = \mathrm{Spv}(f)(Z)$. Comme π_A est compact (remarque 8.103(ii)), la remarque 4.59(ii) nous ramène ainsi à démontrer le théorème pour f_λ . $\diamond$

Soient donc A et B des $\mathbb{Z}$ -algèbres de type fini, $B[X_\bullet] := B[X_1, \dots, X_n]$, et

$$C := B[X_\bullet]/(a_1 - b_1 X_1, \dots, a_m - b_m X_m, b_{m+1} - a_{m+1} X_{m+1}, \dots, b_n - a_n X_n)$$

et notons par $g : B \rightarrow C$ l'homomorphisme d'anneaux naturel.

Affirmation 12.106. On a $Z = (\mathrm{Spv} g)(Z')$, avec :

$$Z' := R_C\left(\frac{a_{m+1}}{a_{m+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_n}, \frac{X_1}{1}, \dots, \frac{X_m}{1}\right) \setminus \left(R_C\left(\frac{1}{X_{m+1}}\right) \cup \dots \cup R_C\left(\frac{1}{X_n}\right)\right).$$

Preuve : Soit $w \in Z'$; alors $w(a_{m+1}), \dots, w(a_n) < +\infty$, $w(X_i) \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$ et $w(X_j) > 0$ pour $j = m+1, \dots, n$. Donc, $w(a_j) < w(a_j X_j) = w(b_j)$ pour $j = m+1, \dots, n$ et $w(a_i) = w(b_i X_i) \geq w(b_i)$ pour $i = 1, \dots, m$, i.e. $\mathrm{Spv}(g)(w) \in Z$. Réciproquement, soit $v \in Z$, notons $\pi : B \rightarrow k(v)$ la projection, et $\bar{v}$ la valuation résiduelle de v (voir la définition 8.10). Avec $\Sigma := \{1 \leq j \leq m \mid v(b_j) = +\infty\}$, on a un isomorphisme de $k(v)$ -algèbres

$$h : k(v) \otimes_B C \xrightarrow{\sim} k(v)[Y_j \mid j \in \Sigma]$$

tel que :

$$h(X_j) := \begin{cases} \pi(a_j)^{-1} \cdot \pi(b_j) & \text{pour } j = m+1, \dots, n \\ Y_j & \text{pour tout } j \in \Sigma \\ \pi(b_j)^{-1} \cdot \pi(a_j) & \text{pour tout } j \in \{1, \dots, m\} \setminus \Sigma. \end{cases}$$

Soit $(k(v)^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de $\bar{v}$; posons $E := k(v)^+[Y_j \mid j \in \Sigma]$ et $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}E$. Soit aussi $(V, \mathfrak{m}_V)$ un anneau de valuation de $\mathrm{Frac}(E)$ tel que $E_{\mathfrak{p}} \subset V$ et $\mathfrak{m}_V \cap E_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}E_{\mathfrak{p}}$ (théorème 8.21) ; ainsi $\mathfrak{m}_V \cap E = E \cap \mathfrak{p}E_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, donc

$$k(v)^+ \subset V \cap k(v) \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_V \cap k(v)^+ = \mathfrak{m}_V \cap E \cap k(v)^+ = \mathfrak{p} \cap k(v)^+ = \mathfrak{m}.$$

On déduit aisément que $k(v)^+ = V \cap k(v)$, et que V correspond à une valuation $\bar{w}$ de $\mathrm{Frac}(E)$, dont la restriction à $k(v)$ est équivalente à $\bar{v}$ (exercice 8.19). Par suite, $\bar{w} \circ h$ induit une valuation w de C avec $\mathrm{Spv}(g)(w) = v$, et $w(X_j) = v(a_j) - v(b_j) \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \Sigma$; de même $w(X_j) \geq 0$ pour tout $j \in \Sigma$, et $w(X_j) = v(b_j) - v(a_j) > 0$ pour $j = m+1, \dots, n$. Cela achève de montrer que $w \in Z'$. $\diamond$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et $b_\bullet := (b_0, \dots, b_n), b'_\bullet := (b'_1, \dots, b'_m)$ deux suites d'éléments de B ; posons

$$Z_B(b_\bullet; b'_\bullet) := R_B\left(\frac{b_0}{b_0}, \frac{b_1}{1}, \dots, \frac{b_n}{1}\right) \setminus \left(R_B\left(\frac{1}{b'_1}\right) \cup \dots \cup R_B\left(\frac{1}{b'_m}\right)\right).$$

D'après l'observation 12.106, il suffit de montrer le théorème avec $Z := Z_B(b_\bullet; b'_\bullet)$, pour toutes telles $b_\bullet, b'_\bullet$. Par le lemme 12.102(ii) on a $d := \dim B < +\infty$, et on raisonnera par récurrence sur d . D'après l'exercice 6.109(iii), $\mathrm{Spec} B$ a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux ; soit alors $\mathrm{Min} B = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$, et pour $i = 1, \dots, k$ posons $S_i := \sigma_B^{-1}(V(\mathfrak{p}_i))$ (notation de la remarque 8.103(iii)). Comme $\mathrm{Spec} B = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_k)$, il suffit de montrer que $(\mathrm{Spv} f)(Z(b_\bullet; b'_\bullet) \cap S_i)$ est constructible dans $\mathrm{Spv}(A)$ pour $i = 1, \dots, k$. Mais si $\pi_i : B \rightarrow B_i := B/\mathfrak{p}_i$ dénote la projection canonique, l'application $\mathrm{Spv}(\pi_i) : \mathrm{Spv}(B_i) \rightarrow \mathrm{Spv}(B)$ identifie $\mathrm{Spv}(B_i)$ avec S_i (exercice 8.104(ii)), et $\mathrm{Spv}(\pi_i \circ f)$ avec la restriction $S_i \rightarrow \mathrm{Spv}(A)$ de $\mathrm{Spv}(f)$, et sous ces identifications, la partie $Z_B(b_\bullet; b'_\bullet) \cap S_i$ correspond à

$Z_{B_i}(\pi_i(b_\bullet); \pi_i(b'_\bullet))$. Quitte à remplacer B par B_i pour chaque $i = 1, \dots, k$, on peut ainsi supposer que B soit un anneau intègre; ensuite, f se factorise à travers la surjection $p : A \rightarrow f(A)$ et l'inclusion $i : f(A) \rightarrow B$, d'où $\text{Spv}(f) = \text{Spv}(p) \circ \text{Spv}(i)$, et au vu de l'observation 12.104, il suffit de montrer le théorème pour l'homomorphisme i , donc on peut supposer que f soit injectif.

D'après le lemme 12.102(iv), si $d = 0$, l'homomorphisme $f : A \rightarrow B$ est une extension de corps finis; mais alors, toute valuation $B^\times \rightarrow \Gamma$ est triviale, car le groupe ordonné Γ n'a aucun élément de torsion non nul, et de même pour les valuations de A . Ainsi, le théorème est clair dans ce cas. Ensuite, soit $d > 0$, et supposons que le théorème soit déjà connu pour toute $\mathbb{Z}$ -algèbre C de type fini de dimension $< d$, et toute partie $Z_C(c_\bullet; c'_\bullet) \subset \text{Spv } C$. Choisissons des parties finies $\Lambda \subset A \setminus \{0\}, \Sigma \subset B \setminus \{0\}$ telles que $A = \mathbb{Z}[\Lambda]$, $B = A[\Sigma]$ et $\Lambda \cap \Sigma = \emptyset$, et pour tous $\Lambda' \subset \Lambda$ et $\Sigma' \subset \Sigma$ considérons les parties ouvertes constructibles :

$$S_A(\Lambda') := R_A\left(\frac{x}{1} \mid x \in \Lambda'\right) \cap R_A\left(\frac{1}{x} \mid x \in \Lambda \setminus \Lambda'\right) \subset \text{Spv } A$$

$$S_B(\Lambda', \Sigma') := R_B\left(\frac{x}{1} \mid x \in \Lambda' \cup \Sigma'\right) \cap R_B\left(\frac{1}{x} \mid x \in (\Lambda \cup \Sigma) \setminus (\Lambda' \cup \Sigma')\right) \subset \text{Spv } B.$$

Evidemment $\text{Spv } A = \bigcup_{\Lambda' \subset \Lambda} S_A(\Lambda')$ et de même pour $\text{Spv } B$; compte tenu du lemme 6.111, il suffit de montrer que $\text{Spv}(f)(Z_B(b_\bullet; b'_\bullet) \cap S_B(\Lambda', \Sigma'))$ est une partie constructible de $S_A(\Lambda')$, pour tous tels Λ' et Σ' . Or, pour Λ', Σ' fixés, soient :

- $A_1 := \mathbb{Z}[\Lambda' \cup \{x^{-1} \mid x \in \Lambda \setminus \Lambda'\}] \subset \text{Frac}(A)$
- $B_1 := A_1[\Sigma' \cup \{x^{-1} \mid x \in \Sigma \setminus \Sigma'\} \cup b_\bullet \cup b'_\bullet] \subset \text{Frac}(B)$
- $A_2 := A \cdot A_1 \subset \text{Frac}(A)$ et $B_2 := B \cdot B_1 \subset \text{Frac}(B)$.

Les inclusions $A \rightarrow A_2 \leftarrow A_1$ et $B \rightarrow B_2 \leftarrow B_1$ sont des localisations, donc $\dim B_1 = \dim B_2 = d$ (lemme 12.102(iv)), et f se prolonge en un homomorphisme injectif d'anneaux $f_2 : A_2 \rightarrow B_2$, qui à son tour se restreint en un homomorphisme $f_1 : A_1 \rightarrow B_1$. On a ainsi un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spv } B_1 & \xleftarrow{j_{B_1}} & \text{Spv } B_2 & \xrightarrow{j_B} & \text{Spv } B \\ \text{Spv } f_1 \downarrow & & \downarrow \text{Spv } f_2 & & \downarrow \text{Spv } f \\ \text{Spv } A_1 & \xleftarrow{j_{A_1}} & \text{Spv } A_2 & \xrightarrow{j_A} & \text{Spv } A \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des injections continues et ouvertes (exercice 8.104(i)). Soient $a := \prod_{x \in \Lambda \setminus \Lambda'} x^{-1} \in A_1$ et $c_0 := ab_0 \prod_{x \in \Sigma \setminus \Sigma'} x^{-1} \in B_1$; les parties $S_A(\Lambda')$ et $S_B(\Lambda', \Sigma')$ sont dans l'image de j_A et respectivement j_B , et on a :

$$j_{A_1}(j_A^{-1}(S_A(\Lambda'))) = R_{A_1}\left(\frac{a}{1}\right) \cap \text{Spv}^+ A_1$$

$$j_{B_1}(j_B^{-1}(Z_B(b_\bullet; b'_\bullet) \cap S_B(\Lambda', \Sigma'))) = Z_{B_1}(c_0; b'_\bullet) \cap \text{Spv}^+ B_1.$$

En invoquant encore le lemme 6.111, on peut alors remplacer A, B par A_1, B_1 , et supposer que Z soit de la forme

$$Z_B^+(b_0; b_\bullet) := Z_B(b_0; b_\bullet) \cap \text{Spv}^+ B \quad \text{pour } b_0 \in B, b_\bullet := (b_1, \dots, b_n) \in B^n.$$

Or, par le théorème 10.72 et la remarque 10.75, il existe $t_1, \dots, t_r \in A \setminus \{0\}$ tels que f induit des homomorphismes d'anneaux injectifs, plats et de présentation finie

$$f_i : A_i \rightarrow B_i \quad \text{avec} \quad A_i := A\left[\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_r}{t_i}\right] \quad \text{et} \quad B_i := B\left[\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_r}{t_i}\right] \subset B[t_i^{-1}]$$

pour $i = 1, \dots, r$. Considérons les parties constructibles :

$$S_0 := Q_B\left(\frac{t_1}{0}, \dots, \frac{t_r}{0}\right) \quad \text{et} \quad S_i := R_B\left(\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_r}{t_i}\right) \quad i = 1, \dots, r.$$

Comme $\text{Spv } B = S_0 \cup \dots \cup S_r$, il suffit de montrer que $(\text{Spv } f)(S_i \cap Z_B^+(b_0; b_\bullet))$ est constructible dans $\text{Spv } A$ pour tout $i = 0, \dots, r$, tout $b_0 \in B$ et tout $b_\bullet \in B^n$. Soit $J \subset B$ l'idéal engendré par $t_1, \dots, t_r$; rappelons que S_0 est naturellement identifiée avec l'image de l'application $\text{Spv } B/J \rightarrow \text{Spv } B$ induite par la projection $\pi_J : B \rightarrow B/J$ (exercice 8.104(ii)); sous ces identifications, $S_0 \cap Z_B^+(b_0; b_\bullet)$ correspond à la partie

$Z_{B/J}^+(\pi_J(b_0); \pi_J(b_\bullet))$ de $\mathrm{Spv} B/J$, et la restriction $S_0 \rightarrow \mathrm{Spv} A$ de $\mathrm{Spv}(f)$ correspond à $\mathrm{Spv}(\pi_J \circ f) : \mathrm{Spv} B/J \rightarrow \mathrm{Spv} A$. Mais $\dim B/J < \dim B$, donc l'assertion est vraie pour $i = 0$, par hypothèse de récurrence. Pour $i = 1, \dots, r$, considérons le diagramme induit d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spv} B[t_i^{-1}] & \xrightarrow{\phi'_i} & \mathrm{Spv} B_i & \xrightarrow{\phi_i} & \mathrm{Spv} B \\ \mathrm{Spv} f'_i \downarrow & & \downarrow \mathrm{Spv} f_i & & \downarrow \mathrm{Spv} f \\ \mathrm{Spv} A[t_i^{-1}] & \xrightarrow{\psi'_i} & \mathrm{Spv} A_i & \xrightarrow{\psi_i} & \mathrm{Spv} A \end{array}$$

avec $f'_i := A[t_i^{-1}] \otimes_A f : A[t_i^{-1}] \rightarrow B[t_i^{-1}]$; rappelons que $\phi'_i, \psi'_i, \phi_i \circ \phi'_i$ et $\psi_i \circ \psi'_i$ sont des applications continues, injectives et ouvertes (exercice 8.104(i)), et on a :

$$Z_i^+ := Z_{B_i}^+(t_i b_0; b_\bullet) \subset \phi'_i(\mathrm{Spv} B[t_i^{-1}]) \quad \text{et} \quad S_i \cap Z_B^+(b_0; b_\bullet) = \phi_i(Z_i^+).$$

Si $(\mathrm{Spv} f_i)(Z_i^+)$ est constructible dans $\mathrm{Spv} A_i$, alors $(\mathrm{Spv} f'_i)(\phi_i'^{-1} Z_i^+)$ est constructible dans $\mathrm{Spv} A[t_i^{-1}]$, par le lemme 6.111, et par suite $(\mathrm{Spv} f)(S_i \cap Z_B^+(b_0; b_\bullet))$ est constructible dans $\mathrm{Spv} A$, toujours d'après le lemme 6.111. En outre, on a $d = \dim B[t_i^{-1}] = \dim B_i$, par le lemme 12.102(iii). Ainsi, quitte à remplacer f et $Z_B^+(b_0; b_\bullet)$ par f_i et Z_i^+ , on peut supposer que f soit un homomorphisme plat.

Soit alors $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme plat, injectif de $\mathbb{Z}$ -algèbres intègres de type fini, et $Z_B^+(b_0; b_\bullet) \subset \mathrm{Spv}^+ B$; évidemment on peut supposer que $b_0 \neq 0$. D'après le théorème 6.102, il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $(B/b_0 B)[a^{-1}]$ soit une $A[a^{-1}]$ -algèbre plate. Or, $\mathrm{Spv} B/(a)$ et $\mathrm{Spv} B[a^{-1}]$ s'identifient naturellement aux parties $T := (\mathrm{Spv} B) \setminus R_B(\frac{a}{a})$ et $R_B(\frac{a}{a})$ de $\mathrm{Spv} B$, et $Z_B^+(b_0; b_\bullet) \cap T$ correspond à $Z_{B/(a)}^+(\bar{b}_0; \bar{b}_\bullet)$ sous ces identifications, où $\bar{b}_\bullet \in (B/(a))^n$ dénote la classe de $b_\bullet$, et de même pour $\bar{b}_0$. Comme $\dim B/(a) < d$, la partie $(\mathrm{Spv} f)(Z_B^+(b_0; b_\bullet) \cap T)$ est alors constructible dans $\mathrm{Spv} A$, par hypothèse de récurrence, et il reste à vérifier qu'il en est de même pour $(\mathrm{Spv} f)(Z_B^+(b_0; b_\bullet) \cap R_B(\frac{a}{a}))$. Pour cela, remarquons que $V(b_\bullet) := V(b_1) \cap \dots \cap V(b_n)$ est une partie fermée constructible de $\mathrm{Spec} B$, donc $W := (\mathrm{Spec} f)(V(b_\bullet))$ est constructible dans $\mathrm{Spec} A$ (théorème 6.115); par suite, $(\sigma_A^+)^{-1}(W)$ est constructible dans $\mathrm{Spv}^+ A$ (remarque 4.59(ii)), donc aussi dans $\mathrm{Spv} A$ (lemmata 12.102(i) et 6.111) et on montrera plus précisément :

Affirmation 12.107. $(\mathrm{Spv} f)(Z_B^+(b_0; b_\bullet) \cap R_B(\frac{a}{a})) = (\sigma_A^+)^{-1}(W) \cap R_A(\frac{a}{a})$.

Preuve : Par inspection des définitions, on voit que $(\mathrm{Spv} f)(Z_B^+(b_0; b_\bullet)) \subset (\sigma_A^+)^{-1}(W)$, donc il suffit de vérifier que $(\sigma_A^+)^{-1}(W) \cap R_A(\frac{a}{a}) \subset (\mathrm{Spv} f)(Z_B^+(b_0; b_\bullet))$. Ainsi, soit $v \in (\sigma_A^+)^{-1}(W)$ avec $v(a) \neq +\infty$, et soit $\pi : A \rightarrow k(v)$ la projection (notation de la définition 8.10); comme $v \in \mathrm{Spv}^+ A$, on a $\pi(A) \subset k(v)^+$, et on pose $B' := k(v)^+ \otimes_A B$. Notons aussi par $\mathfrak{m}$ et η respectivement le point fermé et le point générique de $\mathrm{Spec} k(v)^+$. L'image de $\mathfrak{m}$ (resp. de η) dans $\mathrm{Spec} A$ est le centre $\mathfrak{q}_v$ (resp. le support $\mathfrak{p}_v$) de v , donc $a \notin \mathfrak{p}_v$, et il existe $\mathfrak{q} \in V(b_\bullet)$ avec $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_v$. Comme $b_0 \neq 0$, et que B est intègre, on a une suite exacte courte de $A_{\mathfrak{p}_v}$ -modules :

$$\mathcal{E} : 0 \rightarrow B_{\mathfrak{p}_v} \rightarrow B_{\mathfrak{p}_v} \rightarrow (B/b_0 B)_{\mathfrak{p}_v} \rightarrow 0$$

et la suite $k(\mathfrak{p}_v) \otimes_A \mathcal{E} = k(v) \otimes_A \mathcal{E}$ est encore exacte, car $(B/b_0 B)_{\mathfrak{p}_v}$ est un $A_{\mathfrak{p}_v}$ -module plat (exemple 8.128(i)); i.e., $1 \otimes b_0$ est un élément régulier de $k(v) \otimes_A B$, donc il est régulier aussi dans son sous-anneau B' . D'après l'exercice 3.72, il existe $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec} B'$ dont les images dans $\mathrm{Spec} k(v)^+$ et $\mathrm{Spec} B$ sont respectivement $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$; soit $\mathfrak{p}'$ un idéal premier minimal de B' avec $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$. L'homomorphisme naturel $k(v)^+ \rightarrow B'$ est plat, car f est plat (remarque 3.74(vi)); avec le théorème 3.84(ii) on déduit aisément que l'image de $\mathfrak{p}'$ dans $\mathrm{Spec} k(v)^+$ est η . En outre, d'après la remarque 7.21(iii) on a :

$$(*) \quad 1 \otimes b_0 \notin \mathfrak{p}'.$$

Choisissons un anneau de valuation $(V', \mathfrak{m}_{V'})$ du corps résiduel $k(\mathfrak{p}')$ dominant le sous-anneau local $(B'/\mathfrak{p}')_{\mathfrak{q}'}$ (théorème 8.21); soient $v' \in \text{Spv } k(\mathfrak{p}')$ la valuation correspondante, et $v'' \in \text{Spv } B$ la composition de v' avec l'homomorphisme naturel $B \rightarrow B' \rightarrow k(\mathfrak{p}')$. Avec $(*)$ il vient $v''(b_0) \neq +\infty$. En outre, la composition $g : k(v)^+ \rightarrow B' \rightarrow k(\mathfrak{p}')$ est injective, et par construction, $g(k(v)^+) \subset V'$ et $g(\mathfrak{m}) = g(k(v)^+) \cap \mathfrak{m}_{V'}$; ainsi $(\text{Spv } f)(v'') = v$ (exercice 8.19). Il est également clair que $v'' \in \text{Spv}^+ B$, et comme $\mathfrak{q} \in V(b_\bullet)$, on a $v''(b_1), \dots, v''(b_n) > 0$, CQFD. $\square$

Exercice 12.108. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux plat et de présentation finie. Montrer que $\text{Spv } f : \text{Spv } B \rightarrow \text{Spv } A$ est une application ouverte.

12.5.1. *Spectre valuatif des K -algèbres de type fini.* Soient K un corps, $f : K \rightarrow A$ une K -algèbre de type fini, et $v \in \text{Spv } K$. Munissons

$$\text{Spv}(v, A) := (\text{Spv } f)^{-1}(v)$$

de la topologie induite par l'inclusion dans $\text{Spv } A$; ainsi, $\text{Spv}(v, A)$ est une partie pro-constructible de $\text{Spv } A$, donc est un espace spectral (exemple 4.58).

Problème 12.109. Montrer que si v est *non triviale*, $\text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A)$ est dense dans la topologie constructible de $\text{Spv}(v, A)$ (voir la remarque 8.103(iii)).

Soit maintenant K algébriquement clos, de sorte que σ_A induit une bijection $\text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A) \xrightarrow{\sim} \text{Max } A$ (proposition 6.78(ii)), et on identifie ainsi $\text{Max } A$ avec une partie de $\text{Spv}(v, A)$, qui sera dense dans la topologie constructible si v est non triviale, d'après le problème 12.109. On va s'intéresser de plus près au cas $A = K[T]$ la K -algèbre des polynômes à une indéterminée, où l'on a de plus l'identification naturelle $K \xrightarrow{\sim} \text{Max } K[T] : a \mapsto (T - a) \cdot K[T]$, et donc K est aussi naturellement une partie de $\text{Spv}(v, K[T])$; explicitement, on associe à tout $a \in K$ la valuation

$$w_a : K[T] \rightarrow \Gamma_{v \circ} \quad P \mapsto v(P(a)) \quad \forall P \in K[T].$$

pour tous $a, b \in K$ on pose

$$\begin{aligned} X(a, b) &:= R_{K[T]} \left(\frac{T-a}{b} \right) \cap \text{Spv}(v, K[T]) \\ Y(a, b) &:= \text{Spv}(v, K[T]) \setminus R_{K[T]} \left(\frac{b}{T-a} \right). \end{aligned}$$

Noter que $X(a, b) = \emptyset \Leftrightarrow b = 0$, et $K \cap X(a, b) = \{x \in K \mid v(x - a) \geq v(b)\}$ lorsque $b \neq 0$. De même, si $b \neq 0$ on a $Y(a, b) = \{w \in \text{Spv}(v, K[T]) \mid w(T - a) > v(b)\}$ et $K \cap Y(a, b) = \{x \in K \mid v(x - a) > v(b)\}$; si $b = 0$ on a $Y(a, 0) = K \cap Y(a, 0) = \{w_a\}$.

On dit que $X(a, b)$ est un *o-disque*, et $Y(a, b)$ est un *f-disque*; une partie de $\text{Spv}(v, K[T])$ est un *disque* si elle est un o-disque ou un f-disque.

Exercice 12.110. Soient D, D' deux disques de $\text{Spv}(v, K[T])$. Montrer que si $D \cap D' \neq \emptyset$, on a soit $D \subset D'$, soit $D' \subset D$.

Définition 12.111. (i) Notons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des disques de $\text{Spv}(v, K[T])$; on appelle *filtre* de $\mathcal{D}$ toute partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ vérifiant les conditions suivantes : (a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, (b) pour tous $D \in \mathcal{F}, D' \in \mathcal{D}$ avec $D \subset D'$, on a $D' \in \mathcal{F}$, et (c) pour tous $D, D' \in \mathcal{F}$ on a $D \cap D' \in \mathcal{F}$. Noter que, au vu de (a) et de l'exercice 12.110, la condition (c) équivaut à : (d) pour tous $D, D' \in \mathcal{F}$ on a soit $D \subset D'$, soit $D' \subset D$.

(ii) Un *disque perforé* de $\text{Spv}(v, K[T])$ est une partie de la forme

$$(*) \quad E = D \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ arbitraire}$$

où $D_1, \dots, D_n$ sont des disques, et D est soit un disque, soit $\text{Spv}(v, K[T])$.

(iii) On dit que E est un *o-disque perforé* (resp. un *f-disque perforé*) s'il admet une présentation $(*)$ où $D_1, \dots, D_n$ sont des f-disques (resp. des o-disques) et D est soit un o-disque (resp. un f-disque), soit $\text{Spv}(v, K[T])$.

Remarque 12.112. (i) Noter que l'ensemble vide est un filtre de $\mathcal{D}$.

(ii) En outre, tout $w \in \text{Spv}(v, K[T])$ détermine un filtre de $\mathcal{D}$, à savoir

$$\mathcal{F}_w := \{D \in \mathcal{D} \mid w \in D\}.$$

(iii) Avec l'exercice 12.110, on voit aisément que l'intersection de deux disques perforés est un disque perforé.

Problème 12.113. (i) Montrer que pour tout filtre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}$ il existe un unique $w \in \text{Spv}(v, K[T])$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$.

(ii) En déduire que toute partie constructible de $\text{Spv}(v, K[T])$ est une réunion finie de disques perforés.

(iii) Déterminer la valuation $w \in \text{Spv}(v, K[T])$ telle que $\mathcal{F}_w = \emptyset$.

Proposition 12.114. Soient $w \in \text{Spv}(v, K[T])$, $a \in K$ et $b \in K^\times$.

(i) Le point w admet une génératisation stricte dans $\text{Spv}(v, K[T])$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) Il existe un f-disque B tel que $\mathcal{F}_w = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subset D\}$.

(b) Il existe un o-disque $B \neq \emptyset$ tel que $\mathcal{F}_w = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subsetneq D\}$.

(ii) L'unique génératisation stricte de w_a dans $\text{Spv}(v, K[T])$ est le point u tel que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid \{w_a\} \subsetneq D\}$. En outre, on a $u \succeq_p w_a$.

(iii) Si (i.a) est vérifiée avec $B = Y(a, b)$, l'unique génératisation stricte de w dans $\text{Spv}(v, K[T])$ est le point u tel que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid X(a, b) \subset D\}$; en outre, $u \succeq_s w$.

(iv) Si (i.b) est vérifiée, l'unique génératisation stricte de w dans $\text{Spv}(v, K[T])$ est le point u tel que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subset D\}$; en outre, $u \succeq_s w$.

Démonstration. (ii) : Soit u une génératisation stricte de w_a ; puisque $w_a \in X(a, c)$, on a $u \in X(a, c)$ pour tout $c \in K^\times$; par suite, $\{X(a, c), Y(a, c) \mid c \in K^\times\} \subset \mathcal{F}_u$, et cela entraîne aisément que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid \{w_a\} \subsetneq D\}$. La solution du problème 12.113(i) montre que u est alors la valuation $|\cdot|_{(a, (0, 1))}^v$ à valeurs dans $\Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$, muni de l'ordre total $\leq$ tel que l'inclusion $\Gamma_v \rightarrow \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$ soit un morphisme de groupes ordonnés, et $(0, 1) > (\gamma, 0)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_v$. On a $c\Gamma_u = \Gamma_v \oplus \{0\}$, et $u^{c\Gamma_u} = w_a$.

• Ensuite, supposons que $K \cap \bigcap_{D \in \mathcal{F}_w} D = \emptyset$; la solution du problème 12.113(i) montre qu'alors $\Gamma_w = \Gamma_v$ et $\text{Supp}(w) = \{0\}$. On déduit aussitôt que w n'a aucune génératisation primaire stricte, ni aucune génératisation secondaire stricte. D'après la proposition 8.109, la valuation w n'a alors aucune génératisation stricte dans $\text{Spv}(K[T])$.

• S'il existe un o-disque $B \neq \emptyset$ tel que $\mathcal{F}_w = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subset D\}$, la solution du problème 12.113(i) montre que $w = |\cdot|_{(a', \rho)}^v$ pour certains $a' \in K$ et $\rho \in \Gamma_v$, d'où $\Gamma_w = \Gamma_v$ et $\text{Supp}(w) = \{0\}$, donc w n'a aucune génératisation stricte dans $\text{Spv}(K[T])$.

• Ainsi, on peut supposer qu'il existe $a' \in K \cap \bigcap_{D \in \mathcal{F}_w} D$, et que l'on ait $w \neq w_{a'}$ et $w \neq |\cdot|_{(a', \rho)}^v$ pour tout $\rho \in \Gamma_v$. Dans ce cas, la solution du problème 12.113(i) montre que $w = |\cdot|_{(a', (0, 1))}^v$, avec $\Gamma_w = \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$, et l'inclusion canonique $\Gamma_v \rightarrow \Gamma_w$ est un morphisme de groupes ordonnés; posons $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma_v \mid (\gamma, 0) \leq (0, 1)\}$. Comme $\text{Supp}(w) = \{0\}$, toute génératisation u de w dans $\text{Spv}(K[T])$ est secondaire (problème 8.108(i)); et si $u \in \text{Spv}(v, K[T])$ on a nécessairement $u = w_\Delta$ pour un sous-groupe convexe $\Delta \subset \Gamma_w$ tel que $\Delta \cap (\Gamma_v \oplus \{0\}) = \{(0, 0)\}$. Un tel sous-groupe Δ existe si et seulement s'il existe $(\gamma, k) \in \Gamma_w$ tel que $0 < (\gamma, k) < (\gamma', 0)$ pour tout $\gamma' \in \Gamma_v^+ \setminus \{0\}$; cela se vérifie si et seulement si l'une de deux conditions suivantes est satisfaite : (a) la partie Σ admet un élément maximal ρ , ou (b) la partie $\Gamma_v \setminus \Sigma$ admet un élément minimal ρ' . La condition (a) équivaut à la condition (i.a) pour le f-disque $B = Y(a', b')$ avec $v(b') = \rho$; et la condition (b) équivaut à (i.b) pour le o-disque $B = X(a', b')$, avec $v(b') = \rho'$. Cela achève la preuve de (i). En outre, on voit aisément que si (a) (resp. (b)) est vérifiée, l'unique génératisation stricte de w est la valuation de Gauss $|\cdot|_{(a', \rho)}^v$ (resp. $|\cdot|_{(a', \rho')}^v$), d'où (iii) et (iv). $\square$

Corollaire 12.115. (i) Un point $u \in \mathrm{Spv}(v, K[T])$ admet une spécialisation stricte dans $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) Il existe $a \in K$ tel que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid \{w_a\} \subsetneq D\}$.

(b) Il existe un o-disque $B \neq \emptyset$ tel que $\mathcal{F}_u = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subset D\}$.

(ii) Si (i.a) est vérifiée, l'unique spécialisation de u dans $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ est le point w_a ; en outre $u \succeq_p w_a$.

(iii) Si (i.b) est vérifiée avec $B = X(a, b)$ pour certains $a \in K$ et $b \in K^\times$, les spécialisations de u sont les points w vérifiant l'une des conditions suivantes :

(a) Il existe $a' \in K \cap B$ avec $\mathcal{F}_w = \{D \in \mathcal{D} \mid Y(a', b) \subset D\}$.

(b) $\mathcal{F}_w = \{D \in \mathcal{D} \mid B \subsetneq D\}$.

Dans les deux cas, on a $u \succeq_s w$.

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation de la proposition 12.114. $\square$

Exercice 12.116. Soit $D \neq \emptyset$ un o-disque (resp. un f-disque).

(i) Montrer qu'il existe un unique $u \in D$ et un unique $w \in \mathrm{Spv}(v, K[T]) \setminus D$ tels que u soit une génératisation (resp. une spécialisation) de w .

(ii) En déduire qu'un disque est une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ si et seulement s'il est un o-disque (resp. un f-disque).

(iii) Montrer qu'un disque perforé est une partie ouverte (resp. une partie fermée) de $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ si et seulement s'il est un o-disque (resp. un f-disque) perforé.

Exercice 12.117. Soient $L \subset \mathrm{Spv}(v, K[T])$ une partie constructible, $\mathcal{E}$ l'ensemble des disques perforés de $\mathrm{Spv}(v, K[T])$, et $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ une partie finie.

(i) Soient $E, E' \in \mathcal{E}$, et notons par $\overline{E}$ l'adhérence de E dans $\mathrm{Spv}(v, K[T])$. Montrer que si $\overline{E} \cap E' \neq \emptyset$, alors $E \cup E' \in \mathcal{E}$.

(ii) Soit $\mathcal{E}'$ une décomposition de L , i.e. avec $L = \bigcup_{E \in \mathcal{E}'} E$, et soit n la cardinalité de $\mathcal{E}'$; on dit que $\mathcal{E}'$ est *minimale* s'il n'existe aucune décomposition de L de cardinalité $< n$. Montrer qu'il existe une unique décomposition minimale de L .

(iii) Montrer que L est une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathrm{Spv}(v, K[T]) \Leftrightarrow$ tout élément de la décomposition minimale de L est un o-disque (resp. f-disque) perforé.

Remarque 12.118. L'article [42] contient une étude détaillée de la connexité des parties pro-constructibles des spectres valuatifs. En particulier, il exhibe une bijection naturelle entre les composantes connexes de $\mathrm{Spec} A$ et de $\mathrm{Spv} A$, pour tout anneau A . Avec ces résultats (dont la preuve a recours à des outils de géométrie algébrique assez sophistiqués), on peut démontrer qu'une partie constructible de $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ est connexe si et seulement si elle est un disque perforé ; par suite, toute partie constructible de $\mathrm{Spv}(v, K[T])$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

12.5.2. Une application au spectre adique. Ce paragraphe démontre un critère pour qu'un morphisme $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ d'anneaux affinoïdes induise une application ouverte des lieux analytiques $(\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$. Ce critère fait intervenir une condition de platitude et présentation finie pour la restriction $(\mathrm{Spec} B)_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spec} A)_{\mathrm{an}}$ de $\mathrm{Spec} f$, et est donc analogue au critère de l'exercice 12.108 ; comme pour ce dernier, la preuve est une application du théorème 10.72 de Gruson et Raynaud.

Lemme 12.119. Soient (A, A^+) un anneau affinoïde, et $A_1 \subset A^+$ un sous-anneau ouvert. Alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}'$ de A telle que :

(a) $A' := (A, \mathcal{T}')$ est un anneau de Huber avec sous-anneau de définition A_1

(b) $\mathrm{Id}_A : A \rightarrow A'$ est un homomorphisme adique d'anneaux de Huber.

En outre, $A'^{\circ\circ} = A^{\circ\circ}$, et $\mathrm{Id}_A : (A, A^+) \rightarrow (A', A^+)$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes induisant des homéomorphismes :

$$\mathrm{Spa}(A', A^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A, A^+) \quad \mathrm{Spa}(A', A^+)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A, A^+)_{\mathrm{an}}.$$

Démonstration. D'après le corollaire 9.72(ii), A_1 contient un sous-anneau de définition A_0 de A ; soit $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. Il existe une unique topologie $\mathcal{T}'$ de A telle que A_1 soit une partie ouverte de $A' := (A, \mathcal{T}')$, et qui induit la topologie $I_0 A_1$ -adique sur A_1 . Avec l'exercice 9.10(iii) on voit aisément que A' est un anneau topologique, et par suite il est évidemment un anneau de Huber avec sous-anneau de définition A_1 et idéal de définition $I_0 A_1$. Cela achève de vérifier les conditions (a) et (b) pour $\mathcal{T}'$. L'unicité de $\mathcal{T}'$ vérifiant ces conditions se déduit aisément du lemme 9.77(ii).

Ensuite, la continuité de $Id_A : A \rightarrow A'$ entraîne que $A^{\circ\circ} \subset A'^{\circ\circ}$; réciproquement, si $a \in A'^{\circ\circ}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a^n \in I_0 A_1 \subset A^{\circ\circ}$, d'où $a \in A^{\circ\circ}$. Comme $A_1 \subset A^+$, le sous-anneau A^+ est une partie ouverte de A' , donc (A', A^+) est un anneau affinoïde, et Id_A est alors un morphisme d'anneaux affinoïdes $(A, A^+) \rightarrow (A', A^+)$; en outre les topologies de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ et $\mathrm{Spa}(A', A^+)$ sont induites par les respectives inclusions dans $\mathrm{Spv} A$. Ainsi, $\phi := \mathrm{Spa}(Id_A)$ est une inclusion $\mathrm{Spa}(A', A^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(A, A^+)$ de parties de $\mathrm{Spv} A$, et on doit montrer que ϕ est surjective. Mais comme $A^{\circ\circ} = A'^{\circ\circ}$, on a $\mathrm{Spv}^* A = \mathrm{Spv}^* A'$, et l'assertion suit du théorème 10.12(i). En dernier lieu, rappelons que $v \in \mathrm{Spa}(A, A^+)_{\mathrm{na}}$ si et seulement si $A^{\circ\circ} \subset \mathrm{Supp}(v)$, et de même on caractérise les valuations non analytiques de $\mathrm{Spa}(A', A^+)$; comme $A^{\circ\circ} = A'^{\circ\circ}$, il s'ensuit que ϕ se restreint en une bijection $\mathrm{Spa}(A', A^+)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A, A^+)_{\mathrm{an}}$. $\square$

Théorème 12.120. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ et $\underline{B} := (B, B^+)$ deux anneaux affinoïdes, et $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme adique d'anneaux affinoïdes. On suppose que :

- (a) Il existe une partie finie $\Lambda \subset B^+$ telle que B^+ soit la fermeture intégrale de $A^+[\Lambda]$ dans B .
- (b) La restriction $(\mathrm{Spec} B)_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spec} A)_{\mathrm{an}}$ de $\mathrm{Spec} f$ fournie par la proposition 9.80(iv) est un morphisme de schémas plat et de présentation finie.

(Voir la définition 5.79(ii,v).) Alors la restriction de $\mathrm{Spa} f$

$$\phi : (\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}} \rightarrow (\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$$

est une application ouverte, et pour toute partie constructible T dans $(\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}}$, la partie $\phi(T)$ est constructible dans $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$.

Démonstration. D'après la remarque 10.29(iv), l'inclusion $i : A^+ \rightarrow A$ induit un homéomorphisme $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A^+, A^+)_{\mathrm{an}}$ et un isomorphisme $(\mathrm{Spec} A)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Spec} A^+)_{\mathrm{an}}$ de schémas, donc on peut remplacer f par $f \circ i$, et supposer que $A = A^+$. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition engendré par une suite finie $a_1, \dots, a_n \in A_0$; on remarque :

Affirmation 12.121. On peut supposer que l'inclusion $A[\Lambda] \rightarrow B$ induit un isomorphisme de schémas $(\mathrm{Spec} B)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Spec} A[\Lambda])_{\mathrm{an}}$.

Preuve : Par hypothèse, la localisation $A[a_i^{-1}] \rightarrow B[a_i^{-1}]$ de f est de type fini, pour tout $i = 1, \dots, n$, donc il existe des parties finies $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \subset B^+$ avec $A[\Lambda_i, a_i^{-1}] = B[a_i^{-1}]$ pour $i = 1, \dots, n$. Quitte à remplacer Λ par $\Lambda \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$, il vient $A[\Lambda, a_i^{-1}] = B[a_i^{-1}]$ pour $i = 1, \dots, n$, d'où l'assertion. $\diamond$

On supposera donc que l'inclusion $j : A[\Lambda] \rightarrow B$ vérifie la condition de l'observation 12.121; cela revient à dire que pour tout $b \in B$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^n b \subset A[\Lambda]$. D'après le lemme 12.119, il existe alors une unique topologie $\mathcal{T}'_B$ de B telle que $B' := (B, \mathcal{T}'_B)$ soit un anneau de Huber avec sous-anneau de définition $A[\Lambda]$, et $Id_B : B \rightarrow B'$ soit un homomorphisme adique; en outre, Id_B induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa}(B', B^+)_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}}$, et comme $B^{\circ\circ} = B'^{\circ\circ}$, on a aussi $(\mathrm{Spec} B)_{\mathrm{an}} = (\mathrm{Spec} B')_{\mathrm{an}}$. Quitte à remplacer B par B' , on peut alors supposer que $A[\Lambda]$ soit un sous-anneau de définition de B . En outre, la remarque 10.29(iv) nous dit que le morphisme d'anneaux affinoïdes $j : (A[\Lambda], A[\Lambda]) \rightarrow \underline{B}$ induit un homéomorphisme $(\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A[\Lambda], A[\Lambda])_{\mathrm{an}}$; quitte à remplacer $\underline{B}$ par $(A[\Lambda], A[\Lambda])$, on peut alors supposer que $B = B^+ = A[\Lambda]$, et que la

topologie de B soit I_0 -adique. De même, toujours d'après le lemme 12.119 on trouve une topologie unique $\mathcal{T}'_A$ de A telle que A soit un sous-anneau de définition de $A' := (A, \mathcal{T}'_A)$, et $\text{Id}_A : A \rightarrow A'$ soit un homomorphisme adique ; en outre, Id_A induit un homéomorphisme $(\text{Spa } \underline{A})_{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \text{Spa}(A', A')_{\text{an}}$ et on a $(\text{Spec } A)_{\text{an}} = (\text{Spec } A')_{\text{an}}$. Evidemment $\mathcal{T}'_A$ est la topologie I_0 -adique, et $f : (A', A') \rightarrow \underline{B}$ est un morphisme adique d'anneaux affinoïdes ; quitte à remplacer A par A' , on peut ainsi supposer que $A = A_0$.

Soient $Z_A := V(I_0) \subset \text{Spec } A$, et $Z_B := V(I_0 B) \subset \text{Spec } B$. D'après la proposition 10.31, les espaces $(\text{Spa } \underline{B})_{\text{an}}$ et $(\text{Spa } \underline{A})_{\text{an}}$ sont les limites des système cofiltrants

$$(E_{J, \text{na}} \mid J \in \Sigma) \quad \text{et} \quad (F_{I, \text{na}} \mid I \in \Sigma')$$

où Σ (resp. Σ') est l'ensemble des idéaux ouverts de type fini J de B (resp. I de A) avec $V(J) = Z_B$ (resp. $V(I) = Z_A$), et pour tous tels J et I , les morphismes

$$(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \rightarrow \text{Spec } B \quad \text{et} \quad (F_I, \mathcal{O}_{F_I}) \rightarrow \text{Spec } A$$

sont les éclatements de $J\mathcal{O}_{\text{Spec } B}$ et $I\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. Soit $(q_J : (\text{Spa } \underline{B})_{\text{an}} \rightarrow E_{J, \text{na}} \mid J \in \Sigma)$ le cône universel ; on déduit aisément qu'il existe $J_0 \in \Sigma$ et une partie constructible $T_0 \subset E_{J_0, \text{na}}$ tels que $T = q_{J_0}^{-1}(T_0)$. Si de plus, T est une partie ouverte, on peut supposer que T_0 soit une partie ouverte de $E_{J_0, \text{na}}$. La composition de morphismes $(E_{J_0}, \mathcal{O}_{E_{J_0}}) \rightarrow \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ n'est pas forcément de présentation finie, mais on a :

Affirmation 12.122. Il existe un morphisme de schémas $\gamma : (E', \mathcal{O}_{E'}) \rightarrow \text{Spec } A$ de présentation finie, et un isomorphisme de A -schémas

$$(*) \quad E_{J_0} \xrightarrow{\sim} \underline{V}(\mathcal{J}) \quad \text{avec } \mathcal{J} := \Gamma_{Z'}(\mathcal{O}_{E'}) \text{ et } Z' := \gamma^{-1}Z_A.$$

Preuve : Disons que $\Lambda = \{b_1, \dots, b_k\} \subset B$, de sorte que l'on a un homomorphisme surjectif de A -algèbres $g : A[X_1, \dots, X_k] \rightarrow B$ tel que $g(X_j) = b_j$ pour $j = 1, \dots, k$. La condition (b) revient à dire que $A[a_i^{-1}] \otimes_A f$ est un homomorphisme de présentation finie pour $i = 1, \dots, n$, donc $\text{Ker}(A[a_i^{-1}] \otimes_A g)$ est un idéal de type fini (exercice 3.17(iii)), que l'on peut écrire de la forme $A[a_i^{-1}] \otimes_A L_i$, pour un idéal de type fini $L_i \subset \text{Ker}(g)$. Soient $L := L_1 + \dots + L_n$, et $C := A[X_1, \dots, X_k]/L$. Ainsi, g se factorise à travers un homomorphisme surjectif de A -algèbres $\bar{g} : C \rightarrow B$ tel que $A[a_i^{-1}] \otimes_A \bar{g}$ est un isomorphisme, pour $i = 1, \dots, n$. Soit aussi $x_1, \dots, x_m$ un système fini de générateurs de J_0 , et posons $B_j := B[x_1/x_j, \dots, x_m/x_j] \subset B[x_j^{-1}]$ pour $j = 1, \dots, m$; rappelons que $E_{J_0} = U_1 \cup \dots \cup U_m$, où le sous-schéma ouvert U_j est un B -schéma affine isomorphe à $\text{Spec } B_j$, pour $j = 1, \dots, m$. Choisissons $c_1, \dots, c_m \in C$ avec $\bar{g}(c_j) = x_j$ pour $j = 1, \dots, m$, et posons

$$C_j := C[Y_1, \dots, Y_m]/(c_j Y_1 - c_1, \dots, c_j Y_m - c_m, Y_j - 1) \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

L'homomorphisme $\bar{g}$ se prolonge en un unique homomorphisme surjectif d'anneaux

$$\bar{g}_j : C_j \rightarrow B_j \quad Y_t \mapsto x_t/x_j \quad \forall t = 1, \dots, m.$$

Noter que $V(I_0 B) = V(J_0)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_1^N, \dots, a_n^N \in J_0$; d'autre part $J_0 B_j = x_j B_j$, donc $B_j[a_i^{-1}]$ est une localisation de $B_j[x_j^{-1}] = B[x_j^{-1}]$, pour $i = 1, \dots, n$. Par suite, l'isomorphisme $A[a_i^{-1}] \otimes_A \bar{g} : C[a_i^{-1}] \xrightarrow{\sim} B[a_i^{-1}]$ identifie $A[a_i^{-1}] \otimes_A \bar{g}_j$ avec une localisation de la surjection naturelle :

$$B[x_j^{-1}, Y_1, \dots, Y_m]/(x_j Y_1 - x_1, \dots, x_j Y_m - x_m) \rightarrow B[x_j^{-1}]$$

et cette dernière est évidemment un isomorphisme, pour $i = 1, \dots, n$. Cela montre que $A[a_i^{-1}] \otimes_A \bar{g}_j$ est un isomorphisme, pour tous $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. En outre, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J_0^N \subset I_0 B$, et comme $J_0 \mathcal{O}_{U_j}$ est un idéal inversible, il s'ensuit que $\text{Ann}_{B_j}(I_0 B_j) = 0$. Posons $Z_j := V(I_0 C_j)$; on conclut finalement que

$$(**) \quad \text{Ker}(\bar{g}_j) = \Gamma_{Z_j}(C_j) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{C_j}(I_0^n C_j) \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Ensuite, pour tous $i, j = 1, \dots, m$ soit $h_{ij} : C_i[Y_j^{-1}] \xrightarrow{\sim} C_j[Y_i^{-1}]$ l'unique isomorphisme de C -algèbres tel que $Y_l \mapsto Y_l Y_i^{-1}$ pour $l = 1, \dots, m$.

On vérifie aisément que $h_{jl}[Y_i^{-1}] \circ h_{ij}[Y_l^{-1}] = h_{il}[Y_j^{-1}]$ pour tous $i, j, l = 1, \dots, m$. Posons $U'_j := \text{Spec } C_j$ et $U'_{ij} := \text{Spec } C_i[Y_j^{-1}]$ pour tous $i, j = 1, \dots, m$; on obtient ainsi une donnée de recollement $(U'_j, \omega_{ji} \mid i, j = 1, \dots, m)$ avec les isomorphismes de schémas $\omega_{ji} := \text{Spec}(h_{ij})$, et on dénote par $(E', \mathcal{O}_{E'})$ le recollement du système de schémas $U'_\bullet$ suivant les isomorphismes $\omega_{\bullet\bullet}$. Evidemment, les homomorphismes naturels $U'_j \rightarrow \text{Spec } A$ se recollent en un morphisme de schémas $\gamma : (E', \mathcal{O}_{E'}) \rightarrow \text{Spec } A$; comme chaque C_j est une A -algèbre de présentation finie, γ est un morphisme de présentation finie. En outre, par inspection directe des constructions, on voit que le système de morphismes de schémas $(\text{Spec}(\bar{g}_j) : U_j \rightarrow U'_j \mid j = 1, \dots, m)$ se recolle en unique morphisme de A -schémas $\beta : (E_{J_0}, \mathcal{O}_{E_{J_0}}) \rightarrow (E', \mathcal{O}_{E'})$. En dernier lieu, au vu de $(**)$ on vérifie aisément que β se factorise à travers un isomorphisme $(*)$ comme souhaité et le monomorphisme naturel de schémas $\underline{V}(\mathcal{J}) \rightarrow (E', \mathcal{O}_{E'})$. $\diamond$

Soit donc $(E', \mathcal{O}_{E'}) \rightarrow \text{Spec } A$ le morphisme de schémas fourni par l'observation 12.122; le $\mathcal{O}_{E'}$ -module $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{E'}/\mathcal{J}$ est quasi-cohérent (exercice 5.94(i)), donc d'après le théorème 10.72 il existe un idéal $J'_0 \subset A$ de type fini avec $V(J'_0) = Z_A$, tel que la J'_0 -transformée stricte $\mathcal{E}'_{J'_0}$ de $\mathcal{E}$ soit un $\mathcal{O}_{F'_{J'_0}}$ -module quasi-cohérent, de présentation finie, et $\psi_{J'_0}$ -plat, pour $F'_{J'_0} := E' \times_{\text{Spec } A} F_{J'_0}$, et $\psi_{J'_0} : F'_{J'_0} \rightarrow F_{J'_0}$ la projection naturelle vers l'éclatement $F_{J'_0} \rightarrow \text{Spec } A$ de $J'_0 \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. Soit $Z' \subset F'_{J'_0}$ l'image réciproque de Z_A , et noter que $\mathcal{E}'_{J'_0} = \mathcal{O}_{F'_{J'_0}}/\Gamma_{Z'}(\mathcal{O}_{F'_{J'_0}})$; ainsi, $\mathcal{E}'_{J'_0}$ est naturellement un faisceau d'anneaux sur $F'_{J'_0}$ et pour tout $y \in F'_{J'_0}$ il existe des parties ouvertes affines $U \subset F'_{J'_0}$ et $V \subset F_{J'_0}$ avec $y \in U$ et $\psi_{J'_0}(U) \subset V$, telles que $\mathcal{O}_{F'_{J'_0}}(U)$ soit une $\mathcal{O}_{F_{J'_0}}(V)$ -algèbre de présentation finie, et $\mathcal{E}'_{J'_0}(U)$ soit un $\mathcal{O}_{F'_{J'_0}}(U)$ -module de présentation finie et un $\mathcal{O}_{F_{J'_0}}(V)$ -module plat. Il s'ensuit aisément que $\mathcal{E}'_{J'_0}(U)$ est une $\mathcal{O}_{F_{J'_0}}(V)$ -algèbre plate et de présentation finie pour tous tels U et V . Au vu de la proposition 5.83 et de l'exercice 5.102, cela revient à dire que l'unique morphisme de A -schémas $\psi_{J_0, J'_0} : E_{J_0 J'_0} \rightarrow F_{J'_0}$ est *plat et de présentation finie*.

Cela entraîne, grâce à l'exercice 5.102 et la remarque 10.70(iii), que pour tout $I \in \Sigma'$ on a un diagramme *cartésien* de schémas :

$$\begin{array}{ccc} E_{J''_0 J'_0 I} & \xrightarrow{\psi_{J''_0 J'_0 I}} & F_{J'_0 I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{J''_0} & \xrightarrow{\psi_{J_0, J'_0}} & F_{J'_0} \end{array} \quad \text{avec } J''_0 := J'_0 J_0.$$

Soit aussi $q_{J_0, J'_0} : E_{J''_0} \rightarrow E_{J_0}$ l'unique morphisme de B -schémas, et posons $T'_0 := q_{J_0, J'_0}^{-1}(T_0)$ et $S'_0 := \psi_{J_0, J'_0}(T'_0)$; soit en outre $T'_I \subset E_{J''_0 J'_0 I}$ l'image réciproque de T'_0 . On déduit aisément que $S'_I := \psi_{J''_0 J'_0 I}(T'_I)$ est l'image réciproque de S'_0 . Noter que S'_I est une partie constructible de $F_{J'_0 I}$, par le théorème de Chevalley, et même ouverte dans $F_{J'_0 I, \text{na}}$, si T_0 est ouverte dans $E_{J_0, \text{na}}$ (corollaire 6.116(ii)).

Soit X la limite du système cofiltrant d'espaces topologiques $(E_{J''_0 J'_0 I} \mid I \in \Sigma')$.

Affirmation 12.123. L'application naturelle $\pi : (\text{Spa } \underline{B})_{\text{an}} \rightarrow X$ est surjective.

Preuve : Il suffit de vérifier la surjectivité de $\pi^c : (\text{Spa } \underline{B})_{\text{an}}^c \rightarrow X^c$, et cette dernière est la limite du système d'applications $(q_{J''_0 J'_0 I}^c : (\text{Spa } \underline{B})_{\text{an}}^c \rightarrow E_{J''_0 J'_0 I}^c \mid I \in \Sigma')$ (problème 4.78(ii)); mais chaque $q_{J''_0 J'_0 I}^c$ est continue, compacte et surjective (observations 10.34 et 10.35), donc $q_{J''_0 J'_0 I}^c$ est une application continue d'espaces compacts et séparés (théorème 4.54 et remarque 4.59(ii)), et alors l'assertion découle du problème 2.32(ii). $\diamond$

Evidemment ϕ est la composition de π et d'une unique application continue $\psi : X \rightarrow (\mathrm{Spa} \, \underline{A})_{\mathrm{an}}$; en outre, ψ est la limite du système d'applications continues

$$(\psi_{J_0'', J_0' I} : E_{J_0'' J_0' I} \rightarrow F_{J_0' I} \mid I \in \Sigma').$$

Soit $p_0 : X \rightarrow E_{J_0}$ la projection naturelle, telle que $p_0 \circ \pi = q_{J_0}$; avec l'observation 12.123, on voit que $\phi(T) = \psi(p_0^{-1}T_0)$. D'autre part, $p_0^{-1}T_0$ est la limite du système cofiltrant $(T_I \mid I \in \Sigma')$. Or, tous ces espaces sont spectraux, et toutes ces applications sont continues et compactes; en raisonnant avec les topologies constructibles, on déduit avec le problème 2.32(ii) que $\phi(T)$ est la limite du système cofiltrant $(S'_I \mid I \in \Sigma')$, et cette dernière est l'image réciproque de S'_0 , d'où l'assertion. $\square$

12.5.3. Une application aux K -algèbres de Tate. Le but de ce paragraphe est d'exhiber un anneau de Huber analytiquement noethérien dont la complétion n'est pas analytiquement noethérienne : j'ai appris cet exemple de O.Gabber. On démarre avec des considérations qui sont parfois utiles pour des questions plus générales.

Définition 12.124. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$ un anneau affinoïde, et $U \subset X := \mathrm{Spa} \, \underline{A}$. On dit que U est un *domaine de Weierstrass* de X , s'il existe une suite finie $f_1, \dots, f_n \in A$ telle que $U = W_{\underline{A}}(f_{\bullet}) := R_A(\frac{f_1}{1}, \dots, \frac{f_n}{1}) \cap X$.

Remarque 12.125. (i) En particulier, tout domaine de Weierstrass de X est un c -domaine affinoïde (remarque 12.3 et théorème 12.5).

(ii) Soient $\underline{A}_{\mathrm{loc}}$ et $\hat{\underline{A}}$ la localisation topologique et la complétion de $\underline{A}$; on voit aisément que les isomorphismes de catégories de la proposition 12.10(iii,iv) induisent des bijections entre l'ensemble des domaines de Weierstrass de X et l'ensemble des domaines de Weierstrass de $\mathrm{Spa} \, \underline{A}_{\mathrm{loc}}$, respectivement de $\mathrm{Spa} \, \hat{\underline{A}}$.

(iii) En outre, soient $u : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme d'anneaux affinoïdes, $X := \mathrm{Spa} \, \underline{A}$, $Y := \mathrm{Spa} \, \underline{B}$, et $\phi := \mathrm{Spa}(u) : Y \rightarrow X$. Pour toute suite finie $f_{\bullet} := (f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de A , on a $\phi^{-1}(W_{\underline{A}}(f_{\bullet})) = W_{\underline{B}}(u(f_{\bullet}))$, avec $u(f_{\bullet}) := (u(f_1), \dots, u(f_n))$.

(iv) Trivialement, $W_{\underline{A}}(f_1, \dots, f_n) = W_{\underline{A}}(f_1, \dots, f_n, 1)$ pour tous $f_1, \dots, f_n \in A$.

Lemme 12.126. Soient U un domaine de Weierstrass de $X := \mathrm{Spa} \, \underline{A}$, c -représenté par le morphisme d'anneaux affinoïdes $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$, et V un domaine de Weierstrass de $X_U := \mathrm{Spa} \, \underline{A}_U$. Alors $(\mathrm{Spa} \, \rho_U)(V)$ est un domaine de Weierstrass de X .

Démonstration. Soient $\underline{A} := (A, A^+)$, et $f_{\bullet} := (f_1, \dots, f_n)$ une suite finie de A telle que $U = R_A(\frac{f_1}{1}, \dots, \frac{f_n}{1}) \cap X$; soient aussi $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. Rappelons que $\underline{A}_U = (A_U, A_U^+)$, où A_U dénote la complétion de $(A, \mathcal{T}_U)$, pour la topologie $\mathcal{T}_U$ telle que $A_0[f_{\bullet}] \subset A$ soit un sous-anneau de définition, et $I_0 A_0[f_{\bullet}]$ un idéal de définition; en outre A_U^+ est la complétion de la fermeture intégrale de $A^+[f_{\bullet}]$ dans A (voir la preuve du théorème 12.5). D'après l'observation 12.11, il existe $f_{n+1}, \dots, f_{n+m} \in A$ tels que $V = R_{A_U}(\frac{\rho_U(f_{n+1})}{1}, \dots, \frac{\rho_U(f_{n+m})}{1}) \cap X_U$, et il s'ensuit aisément que $(\mathrm{Spa} \, \rho_U)(V) = R_A(\frac{f_1}{1}, \dots, \frac{f_{n+m}}{1}) \cap X$. $\square$

Or, soient K un corps muni d'une valuation $v : K \rightarrow \Gamma_0$ de rang un, complet (et séparé) pour sa v -topologie; notons par $(K^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de v , et fixons $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Rappelons que $A := K[T]$ est un anneau de Tate pour la topologie $\mathcal{T}$ telle que $A^+ := K^+[X]$ soit un sous-anneau de définition, et πA^+ un idéal de définition (voir le lemme 12.44(i)); ainsi $\underline{A} := (A, A^+)$ est un anneau affinoïde bien défini, et noter que la complétion de $(A, \mathcal{T})$ est la K -algèbre de Tate notée $\mathbb{T}_1$ au §12.2.3. Pour tout $a \in K^+$ et tout $\rho \in \Gamma^+$, posons

$$D(a, \rho) := X(a, b) \cap \mathrm{Spa} \, \underline{A} \quad \text{avec } b \in K^+ \text{ tel que } v(b) = \rho$$

où $X(a, b) \subset \mathrm{Spv} \, K[T]$ est le o -disque défini comme au §12.5.1; donc $D(a, \rho) = W_{\underline{A}}(\frac{T-a}{b})$, avec la notation de la définition 12.124. Posons aussi $X := \mathrm{Spa} \, \underline{A}$.

Proposition 12.127. *Avec la notation ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $a_1, \dots, a_n \in K^+$ et $\rho_1, \dots, \rho_n \in \Gamma^+$, la partie $\bigcup_{i=1}^n D(a_i, \rho_i)$ est un domaine de Weierstrass de X .*

Démonstration. D'après l'exercice 12.110, on peut supposer que

$$(*) \quad D(a_i, \rho_i) \cap D(a_j, \rho_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Posons $U := \bigcup_{i=1}^n D(a_i, \rho_i)$. On raisonne par récurrence sur n : le cas $n = 1$ a déjà été remarqué. Soit alors $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour toute réunion disjointe d'au plus $n - 1$ o-disques de X . On remarque :

Affirmation 12.128. On peut supposer que $\rho_1 = \dots = \rho_n$.

Preuve : Soit $\rho := \min(\rho_1, \dots, \rho_n)$, et supposons que $U' := \bigcup_{i=1}^n D(a_i, \rho)$ soit un domaine de Weierstrass de X . D'après l'exercice 12.110, il existe une partie $\Sigma \subset \{1, \dots, n\}$ telle que $U' = \bigcup_{i \in \Sigma} D(a_i, \rho)$ et $D(a_i, \rho) \cap D(a_j, \rho) = \emptyset$ pour tous $i, j \in \Sigma$ avec $i \neq j$. De l'autre côté, $\mathbb{T}_1$ est fortement noethérien (corollaire 12.53(i)), donc $\widehat{\mathcal{O}}_X$ est un faisceau sur X (corollaire 12.93(i) et proposition 12.19(ii)) ; il vient alors $\widehat{\mathcal{O}}_X(U') = \prod_{i \in \Sigma} \widehat{\mathcal{O}}_X(D(a_i, \rho))$. Pour tout $i \in \Sigma$, soit $u_i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_i := (A_i, A_i^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui c-représente $D(a_i, \rho)$, et posons $B := \prod_{i \in \Sigma} A_i$, $B^+ := \prod_{i \in \Sigma} A_i^+$. Il s'ensuit que le morphisme induit $u : \underline{A} \rightarrow \underline{B} := (B, B^+)$ c-représente le c-domaine affinoïde U' de X (exercice 12.91(i)). Si $W_i := (\text{Spa } u_i)^{-1}(D(a_i, \rho) \cap U)$ est un domaine de Weierstrass de $\text{Spa } \underline{A}_i$ pour chaque $i \in \Sigma$, on déduit que $W := (\text{Spa } u)^{-1}(U)$ est un domaine de Weierstrass de $\text{Spa } \underline{B}$, car si $W_i = W_{\underline{A}_i}(f_{i1}, \dots, f_{ik_i})$ avec $f_{ij} \in A_i$ pour chaque $i \in \Sigma$ et $j = 1, \dots, k_i$, avec la remarque 12.125(iv) on peut supposer que tous les k_i soient égaux à un même entier k , et il vient

$$W = W_{\underline{B}}(f_\bullet) \quad \text{avec } f_j := (f_{ij} \mid i \in \Sigma) \in B \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Compte tenu du lemme 12.126 et de la remarque 12.125(iii), il suffit alors de vérifier que $D(a_i, \rho) \cap U$ est un domaine de Weierstrass de X , pour chaque $i \in \Sigma$; mais d'après l'exercice 12.110, il existe une partie $\Delta_i \subset \{1, \dots, n\}$ telle que $D(a_i, \rho) \cap U = \bigcup_{i \in \Delta_i} D(a_i, \rho_i)$, et on voit aisément que la cardinalité de Δ_i doit être $< n$, donc l'assertion est déjà connue par hypothèse de récurrence. $\diamond$

Soit donc $U = \bigcup_{i=1}^n D(a_i, \rho)$, et posons $\rho' := \max(v(a_i - a_j) \mid 1 \leq i < j \leq n)$.

Affirmation 12.129. On peut supposer que $v(a_i - a_j) = \rho'$ pour tous $1 \leq i < j \leq n$.

Preuve : Quitte à permuter les a_i , on peut supposer que $\rho' = v(a_1 - a_2)$. Posons alors $\Sigma := \{3 \leq i \leq n \mid v(a_i - a_1) < \rho'\}$, $U' := D(a_1, \rho') \cup \bigcup_{i \in \Sigma} D(a_i, \rho)$, et soit $u : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui c-représente U' . Noter que l'on a $\rho > \rho'$ d'après (*), donc $D(a_i, \rho) \subset D(a_1, \rho')$ si et seulement si $i \in \Sigma' := \{1, \dots, n\} \setminus \Sigma$, et on voit aisément que $v(a_i - a_j) = \rho'$ pour tous $i, j \in \Sigma'$ avec $i \neq j$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. En outre, $D(a_1, \rho') \cap D(a_i, \rho) = \emptyset$ pour tout $i \in \Sigma$. En particulier, $U \subset U'$, et noter que la cardinalité de Σ est $\leq n - 2$, donc U' est un domaine de Weierstrass de X , par hypothèse de récurrence. En raisonnant comme dans la preuve de l'observation 12.128, on est ramené à vérifier que $U \cap D(a_1, \rho')$ est un domaine de Weierstrass de X , d'où l'assertion. $\diamond$

Soient alors $b, c \in K^\times$ avec $\rho = v(c)$ et $v(a_i - a_j) = \rho' = v(b)$ pour tous $1 \leq i < j \leq n$, et soit $u : \underline{A} \rightarrow \underline{B} := (B, B^+)$ le morphisme d'anneaux affinoïdes qui c-représente $D(a_1, \rho')$. D'après le lemme 12.126, il suffit de vérifier que $(\text{Spa } u)^{-1}U$ est un domaine de Weierstrass de $Y := \text{Spa } \underline{B}$. Mais d'après la preuve du théorème 12.5, B est la complétion de $K[T]$, muni de la topologie telle que $B_0 := K^+[\frac{T-a_1}{b}]$ soit un sous-anneau de définition, avec idéal de définition πB_0 , et B^+ est la complétion de B_0 . On a par suite un unique isomorphisme $\omega : \mathbb{T}_1 \xrightarrow{\sim} B$ de K -algèbres topologiques, tel que $\omega(T) = (T - a_1)/b$, et ω est un isomorphisme $\widehat{\underline{A}} \xrightarrow{\sim} \underline{B}$ d'anneaux affinoïdes complets et séparés. Soit $\tau := \omega^{-1} \circ u : \underline{A} \rightarrow \widehat{\underline{A}}$; on est alors ramené à montrer que $(\text{Spa } \tau)^{-1}U =$

$\bigcup_{i=1}^n (\mathrm{Spa} \tau)^{-1}(D(a_i, \rho))$ est un domaine de Weierstrass de $\mathrm{Spa} \hat{A}$. Noter que $\tau(T) = bT + a_1$; avec la remarque 12.125(iii), il vient $(\mathrm{Spa} \tau)^{-1}(D(a_i, \rho)) = W_{\hat{A}}(\frac{T-a'_i}{b'})$, où $a'_i := (a_i - a_1)/b$ pour $i = 1, \dots, n$, et $b' := c/b$. Finalement, compte tenu de la remarque 12.125(ii), il suffit de vérifier que $U' := \bigcup_{i=1}^n D(a'_i, v(b'))$ est un domaine de Weierstrass de X , et noter que $v(a_i - a_j) = 0$ pour tous $i \neq j$; mais dans ce cas, on voit aisément que $U' = W_{\hat{A}}(f)$, avec $f := b'^{-1} \cdot \prod_{i=1}^n (T - a'_i)$. $\square$

Remarque 12.130. (i) Pour tout $w \in \mathrm{Spa} \hat{A}$ on a évidemment $w((K^+)^\times) = \{0\}$, car $w(K^+) \subset \Gamma_\circ^+$, et car $w(\pi)$ est cofinal dans Γ_w (lemme 10.4(i)); puisque la valuation v est de rang un, il s'ensuit aussitôt que la restriction de w au corps K est équivalente à v , donc $X \subset \mathrm{Spv}(v, A)$ (notation du §12.5.1).

(ii) Rappelons qu'au §12.5.1 on a en outre identifié naturellement K avec une partie de $\mathrm{Spv}(A)$: à tout $a \in K$ on associe la valuation $w_a : A \rightarrow \Gamma_\circ$ telle que $w_a(P) := v(P(a))$ pour tout $P \in A$. On vérifie aussitôt que $w_a(A^+) \subset \Gamma_\circ^+$ si et seulement si $a \in K^+$, et le cas échéant, la valuation w_a est continue, i.e. $w_a \in X$. Cela identifie naturellement K^+ avec une partie de X . Compte tenu de l'exercice 12.116(iii), on voit aisément que la topologie de $\mathrm{Spv}(v, A)$ induit la v -topologie sur la partie K , par suite la topologie de X induit la v -topologie sur la partie K^+ .

Lemme 12.131. Pour tout $a \in K^+$, soit k_a le corps résiduel de $\hat{\mathcal{O}}_{X, w_a}$. On a :

- (i) $\{D(a, \rho) \mid \rho \in \Gamma^+\}$ est un système fondamental de voisinages de w_a dans X .
- (ii) L'homomorphisme naturel de corps $K \rightarrow k_a$ est un isomorphisme.

Démonstration. (i) : Soit ω l'automorphisme de $\hat{A}$ tel que $\omega(T) := T - a$; il vient $\mathrm{Spa}(\omega)(w_a) = w_0$, et $\mathrm{Spa}(\omega)(D(a, \rho)) = D(0, \rho)$ pour tout $\rho \in \Gamma^+$, donc on peut supposer que $a = 0$. Or, soient $f, g \in A$ tels que $w_0 \in U := R_A(\frac{f}{g}) \cap X$; avec $f_0 := f(0)$ et $g_0 := g(0)$, cela revient à dire que $v(f_0) \geq v(g_0) \neq +\infty$. Posons $\delta := \min(|g - g_0|, |f - f_0|)$, où $|\cdot| : \mathbb{T}_1 \rightarrow \Gamma_\circ$ dénote la valuation continue fournie par le lemme 12.44(iii); si $\delta = +\infty$, faisons $\delta' := v(g_0)$, et sinon soit $\delta' := v(g_0) - \delta$. Par la remarque 12.130(i), pour tout $\rho \in \Gamma^+$ avec $\rho > \delta'$, et tout $w \in D(0, \rho)$ on a

$$w(f - f_0), w(g - g_0) \geq \rho + \delta > v(g_0)$$

d'où $w(f) = v(f_0)$ et $w(g) = v(g_0)$, et par suite $w \in U$.

(ii) : En raisonnant comme dans la preuve de (i), on se ramène au cas où $a = 0$, et en vertu de (i), $\hat{\mathcal{O}}_{X, w_0}$ représente la colimite du système direct d'anneaux $(\hat{A}_\rho := \hat{\mathcal{O}}_X(D(0, \rho)) \mid \rho \in \Gamma^+)$. Noter que pour $b \in K^+$ tel que $\rho = v(b)$, l'anneau topologique $\hat{A}_\rho$ est la complétion de l'anneau de Huber $A_\rho := K[T]$ avec sous-anneau de définition $A_\rho^+ := K^+[b^{-1}T]$ et idéal de définition πA_ρ^+ ; avec cette notation, $w_0 : A_\rho \rightarrow \Gamma_\circ$ se prolonge en une valuation continue $\hat{w}_{0, \rho} : \hat{A}_\rho \rightarrow \Gamma_\circ$, pour tout $\rho \in \Gamma$ (voir le §12.1.4). D'après la proposition 12.14(i), l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{X, w_0}$ est la colimite du système induit d'idéaux $(I_\rho := \mathrm{Supp}(\hat{w}_{0, \rho}) \mid \rho \in \Gamma^+)$. Il suffit alors de remarquer que l'homomorphisme induit d'anneaux $K \rightarrow \hat{A}_\rho/I_\rho$ est un isomorphisme pour tout $\rho \in \Gamma$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. $\square$

- Pour toute partie $Z \subset K^+$, considérons l'anneau

$$\mathcal{C}(Z, K)$$

des fonctions $Z \rightarrow K$ continues pour la v -topologie de K et la topologie de Z induite par la v -topologie de K^+ , et notons par $\mathcal{C}(Z, K^+) \subset \mathcal{C}(Z, K)$ le sous-anneau des fonctions à valeurs dans K^+ ; si Z est compact, on vérifie aisément que le système de sous-groupes $(\pi^n \mathcal{C}(Z, K^+) \mid n \in \mathbb{N})$ vérifie les conditions (a) et (b) de l'exercice 9.10(iii), et alors $\mathcal{C}(Z, K)$ est un anneau de Huber complet et séparé, avec sous-anneau de définition $\mathcal{C}(Z, K^+)$ et idéal de définition $\pi \mathcal{C}(Z, K^+)$.

• Soient $U \subset X$ une partie ouverte, et $U_K := U \cap K^+$; pour tout $f \in \widehat{\mathcal{O}}_X(U)$ et tout $a \in U_K$, l'image de f dans le corps résiduel k_a de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,w_a}$ s'identifie, d'après le lemme 12.131(ii), avec un élément $f(a) \in K$ bien défini. On associe ainsi à tout tel f une application $f_K : U_K \rightarrow K$. Montrons que f_K est *continue* pour la v -topologie de K et la topologie de U_K induite par la v -topologie de K^+ . Pour cela, en vertu du lemme 12.131(i) et de l'exercice 1.21(ii), on peut supposer que $U = D(a, \rho)$ pour quelque $a \in K^+$ et $\rho \in \Gamma^+$. Ensuite, soit $\underline{B}$ l'anneau affinoïde qui représente le c -domaine affinoïde U ; comme dans la preuve de la proposition 12.127, on trouve un isomorphisme $\omega : \widehat{\underline{A}} \xrightarrow{\sim} \underline{B}$, et l'isomorphisme $\mathrm{Spa}(\omega) : \mathrm{Spa} \underline{B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa} \widehat{\underline{A}}$ d'espaces adiques affinoïdes nous ramène alors au cas où $U = X$, d'où $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) = \mathbb{T}_1$.

Dans cette situation, il suffit de vérifier que l'on a

$$v(f(a+b) - f(a)) \geq |f| + v(b) \quad \forall a, b \in K^+$$

où $|\cdot| : \mathbb{T}_1 \rightarrow \Gamma_0$ dénote la valuation continue du lemme 12.44(iii). Or, on a $f = u \cdot g$ avec $u \in K$, $g \in \mathbb{T}_1$ tels que $v(u) = |f|$ et $|g| = 0$; quitte à remplacer f par g , on peut alors supposer que $|g| = 0$, i.e. $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n$ pour une suite $(a_n | n \in \mathbb{N})$ de K^+ convergente vers 0. Dans ce cas, il suffit de remarquer que b divise $(T+b)^n - T^n$ dans $K^+ \langle T \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur.

• On obtient ainsi un autre homomorphisme d'anneaux bien défini :

$$(-)_K : \widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \mathcal{C}(U_K, K) \quad f \mapsto f_K.$$

Si U est une partie compacte de X , le sous-anneau $\widehat{\mathcal{O}}_X^+(U)$ est ouvert dans $\widehat{\mathcal{O}}_X(U)$, et sa topologie est plus fine que la topologie π -adique; noter aussi que $f_K \in \mathcal{C}(U_K, K^+)$ pour tout $f \in \widehat{\mathcal{O}}_X^+(U)$; par suite, pour toute partie compacte $Z \subset U$, la composition $\widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow \mathcal{C}(Z, K) : f \mapsto (f_K)|_Z$ est dans ce cas continue.

• Or, soient $Z \subset K^+$ une partie compacte, et $\rho_0 := v(\pi)$; on trouve alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ une partie finie $\Delta_n \subset Z$ avec $Z \subset U_n := \bigcup_{a \in \Delta_n} D(a, n\rho_0)$. On vérifie aisément que U_n contient $D(z, n\rho_0)$, pour tout $z \in Z$, et donc U_n est indépendant du choix de Δ_n ; en outre, $U_{n+1} \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'on a :

$$Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

En effet, soit $w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$; donc il existe une suite $a_\bullet := (a_n | n \in \mathbb{N})$ avec $a_n \in \Delta_n$ et $w \in D(a_n, n\rho_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, la suite $a_\bullet$ admet une limite unique $a \in K^+$. Il vient $w(T-a) \geq \min(w(T-a_n), v(a_n-a)) \geq \min(n\rho_0, v(a_n-a))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on identifie avec v la restriction de w à K , suivant la remarque 12.130(i)); au vu du lemme 10.4(i), on déduit que $T-a \in \mathrm{Supp}(w)$, d'où $w = w_a$. Mais $a \in Z$, car Z est une partie fermée de K (exercice 1.26(ii.a)), d'où l'assertion.

• La discussion ci-dessus s'applique en particulier aux parties ouvertes compactes U_n de X ; on déduit ainsi un système d'homomorphismes continus d'anneaux $\phi_n : \widehat{\mathcal{O}}_X(U_n) \rightarrow \mathcal{C}(Z, K)$, indexé par $n \in \mathbb{N}$; d'où un homomorphisme d'anneaux :

$$\phi : \widehat{\mathcal{O}}_X(Z) := \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{O}}_X(U_n) \rightarrow \mathcal{C}(Z, K).$$

En outre, chaque restriction $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_n) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U_{n+1})$ est un homomorphisme de A -algèbres, donc on a un homomorphisme naturel d'anneaux $\psi : A \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(Z)$.

Proposition 12.132. *L'homomorphisme $\phi \circ \psi : A \rightarrow \mathcal{C}(Z, K)$ a image dense.*

Démonstration. D'après la proposition 12.127, chaque U_n est un domaine de Weierstrass de X , donc l'image de A est dense dans $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On est alors ramené aisément à vérifier que l'image de ϕ est dense dans $\mathcal{C}(Z, K)$. Soient donc $f : Z \rightarrow K$ une fonction continue, et $k \in \mathbb{N}$; pour tout $a \in Z$, soit $n(a) \in \mathbb{N}$ tel que $v(f(b) - f(a)) \geq \rho_0^k$ pour tout $b \in D(a, \rho_0^{n(a)})$. Puisque Z est compact, il existe une partie finie $\Sigma \subset Z$ telle

que $Z \subset \bigcup_{a \in \Sigma} D(a, \rho_0^{n(a)})$; posons $n := \max(n(a) \mid a \in \Sigma)$, et $\Sigma' := \{a \in \Sigma \mid n(a) < n\}$. Pour tout $a \in \Sigma'$, la partie $Z_a := Z \cap D(a, \rho_0^{n(a)})$ est fermée dans Z , donc elle est compacte (exercice 1.26(ii.b)); il existe alors une partie finie $\Sigma''(a) \subset Z$ telle que $Z_a \subset \bigcup_{b \in \Sigma''(a)} D(b, \rho_0^n)$. Posons $\Delta := (\Sigma \setminus \Sigma') \cup \bigcup_{a \in \Sigma'} \Sigma''(a)$, et noter que $U_n = \bigcup_{a \in \Delta} D(a, \rho_0^n)$. Quitte à remplacer Δ par une partie, on peut supposer que $D(a, \rho_0^n) \cap D(b, \rho_0^n) = \emptyset$ pour tous $a, b \in \Delta$ avec $a \neq b$. Par suite, $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_n) = \prod_{a \in \Delta} \widehat{\mathcal{O}}_X(D(a, \rho_0^n))$. Soit alors $g \in \widehat{\mathcal{O}}_X(U_n)$ l'unique section telle que $g|_{D(a, \rho_0^n)} = f(a)$ pour tout $a \in \Delta$; par construction, $v(f(b) - \phi_n(g)(b)) \geq \rho_0^k$ pour tout $b \in Z$. Comme k est arbitraire, l'assertion s'ensuit. $\square$

12.5.4. On fait maintenant les hypothèses supplémentaires suivantes sur K et Z :

- (a) On a un sous-corps dense $K_0 \subset K$ tel que tout $z \in Z$ soit transcendant sur K_0
- (b) Z est un *ensemble de Cantor*, i.e. non vide, compact, et sans points isolés.

(Rappelons qu'un point $a \in Z$ est *isolé* s'il existe $\rho \in \Gamma$ tel que $Z \cap D(a, \rho) = \{a\}$).

Exemple 12.133. (i) Prenons $K_0 := \mathbb{Q}$ et $K := \mathbb{Q}_p$ (voir l'exemple 9.55), et

$$Z := \{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^{n!} \mid a_n \in \{0, 1\} \text{ et } a_{2n} = 1 \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

En effet, on voit aisément que Z est une partie fermée de $\mathbb{Z}_p$ sans points isolés. Soit $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^{n!} \in Z$, et supposons par l'absurde que a soit algébrique sur $\mathbb{Q}$, i.e. on a $P(T) \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\}$ avec $P(a) = 0$. D'un côté, on trouve aisément $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec

$$|P(\sum_{n=0}^r a_n p^{n!})|_{\mathbb{R}} \leq C p^{r!d} \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

où $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ dénote la valeur absolue standard de $\mathbb{R}$ et $d := \deg(P)$. De l'autre côté, il est clair que $P(\sum_{n=0}^r a_n p^{n!}) \in \mathbb{Z}$ et $v_p(P(\sum_{n=0}^r a_n p^{n!})) \geq (r+1)!$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, donc on aurait $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(\sum_{n=0}^r a_n p^{n!}) = 0$ pour tout $r \geq r_0$, contradiction.

(ii) Prenons pour K_0 une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$; d'après la proposition 12.43(i), la valuation p -adique de $\mathbb{Q}_p$ admet une extension unique (à équivalence près) $\bar{v}_p : K_0 \rightarrow \mathbb{Q}_o$, et soit K la complétion de K_0 pour sa $\bar{v}_p$ -topologie. Prenons $\xi \in K \setminus K_0$; alors les hypothèses (a) et (b) sont remplies avec $Z := \{\xi + a \mid a \in \mathbb{Z}_p\}$.

(iii) Un élément ξ comme dans (ii) peut être exhibé explicitement comme suit. Choisissons inductivement une suite $(\pi_n \mid n \in \mathbb{N})$ de K_0 avec $\pi_0 := p$ et $\pi_{n+1}^{n+1} = \pi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et posons $p^{n+1/n!} := p^n \pi_n$ pour tout n . Montrons que $\xi := \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{n+1/n!}$ convient. Pour cela, posons aussi $\xi_k := \sum_{n=0}^k p^{n+1/n!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et soit par l'absurde $P(T) \in \mathbb{Q}_p[T]$ le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Q}_p$. On a $P(\xi_k) \in \mathbb{Q}_p(\pi_k)$, et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(\xi_k) \neq 0$ pour tout $k \geq k_0$, d'où :

$$(*) \quad \bar{v}_p(P(\xi_k)) \in \bar{v}_p(\mathbb{Q}_p(\pi_k)^\times) = \frac{1}{k!}\mathbb{Z} \quad \forall k \geq k_0.$$

De l'autre côté, soient $\xi, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in K_0$ les racines (distinctes) de P ; il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{v}_p(\alpha_i - \xi_k) = \bar{v}(\alpha_i - \xi)$ pour tout $i = 2, \dots, d$ et tout $k \geq k_1$; par suite, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{v}_p(\alpha_i - \xi_k) \in \frac{1}{k_2!}\mathbb{Z}$ pour tout $i = 2, \dots, d$ et tout $k \geq k_2$, et quitte à remplacer k_0 par $\max(k_0, k_1, k_2)$ on peut supposer que $k_0 = k_1 = k_2$. D'autre part, on a $\bar{v}_p(\xi - \xi_k) = k + 1 + \frac{1}{(k+1)!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$\bar{v}_p(P(\xi_k)) = \bar{v}_p((\xi - \xi_k) \cdot (\alpha_2 - \xi_k) \cdots (\alpha_d - \xi_k)) \in \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k_0!}\mathbb{Z} \quad \forall k \geq k_0$$

et cela contredit (*).

• On est maintenant prêt pour exhiber notre spécimen d'anneau analytiquement noethérien dont la complétion n'est pas analytiquement noethérienne. A savoir, dans la situation du §12.5.4 on peut prendre $\pi \in K_0$; posons $K_0^+ := K^+ \cap K_0$ et

$$B_0 := \{P \in K_0[T] \mid P(Z) \subset K^+\}.$$

Munissons la K_0^+ -algèbre B_0 de sa topologie π -adique; puisque Z est compact, on voit aisément que $B := B_0[\pi^{-1}] = K_0[T]$; par suite le sous-schéma analytique de $\text{Spec } B_0$ est

le schéma noethérien $\text{Spec } B$, et B est un anneau de Tate avec sous-anneau de définition B_0 . Afin de montrer que B_0 est analytiquement noethérien, il suffit alors de vérifier que la π -torsion de tout B_0 -module cyclique M est bornée (proposition 12.22). Soit alors $M = B_0/I$ pour un idéal $I \neq 0$, et prenons $P \in I$ tel que $I[\pi^{-1}] = PB$, de sorte que $I/PB_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ann}_{I/PB_0}(\pi^n)$. Si la π -torsion de B_0/PB_0 est bornée, il s'ensuit aisément qu'il en est de même pour la π -torsion de M ; on est alors ramené au cas où $I = PB_0$. Or, noter que $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in Z$, car tout élément de Z est transcendant sur K_0 ; par compacité de Z , il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $v(P(z)) \leq v(\pi^m)$ pour tout $z \in Z$. Soit ensuite $Q \in B$ tel que $Q \cdot P \in B_0$; cela revient à dire que $Q(z) \cdot P(z) \in K^+$ pour tout $z \in Z$, et alors $\pi^m Q \in B_0$. Il s'ensuit aisément que $\text{Ann}_M(\pi^{m+k}) = \text{Ann}_M(\pi^m)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion. Ensuite, puisque K_0 est dense dans K , évidemment B est dense dans $A := K[T]$; d'après la proposition 12.132, la restriction $\beta : B \rightarrow \mathcal{C}(Z, K)$ de $\phi \circ \psi$ a alors image dense (exercice 1.21(iv)), et puisque Z est un ensemble infini, il est clair que β est injectif. En outre, on vérifie aussitôt que la topologie de B est induite par celle de $\mathcal{C}(Z, K)$ via β . En dernier lieu, puisque $\mathcal{C}(Z, K)$ est complet et séparé, la complétion $\hat{\beta} : \hat{B} \rightarrow \mathcal{C}(Z, K)$ de β est un isomorphisme de K -algèbres topologiques (exercice 9.42(iii)). Le sous-schéma analytique de la complétion de B_0 est $\text{Spec } \hat{B}$; pour conclure, il suffit ainsi de montrer que $\text{Min}(\mathcal{C}(Z, K))$ est un ensemble infini (exercice 6.109(iii)). On a plus précisément :

Proposition 12.134. (i) On a un homéomorphisme naturel : $\text{Max } \mathcal{C}(Z, K) \xrightarrow{\sim} Z$.
(ii) Il existe une rétraction continue : $\text{Spec } \mathcal{C}(Z, K) \rightarrow \text{Max } \mathcal{C}(Z, K)$.

Démonstration. (i) : A tout $a \in Z$ on peut associer l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_a := \{f \in \mathcal{C}(Z, K) \mid f(a) = 0\}.$$

On doit ainsi vérifier que tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{C}(Z, K)$ est de la forme $\mathfrak{m}_a$ pour un unique $a \in Z$. Pour cela, considérons plus généralement un idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathcal{C}(Z, K)$, et posons $V(\mathfrak{p}) := \bigcap_{f \in \mathfrak{p}} f^{-1}(0)$. On va montrer que $V(\mathfrak{p})$ contient précisément un point $a \in Z$. Supposons d'abord par l'absurde que $V(\mathfrak{p}) = \emptyset$. Puisque Z est compact, on trouve alors $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{p}$ avec $f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_k^{-1}(0) = \emptyset$; ensuite, comme $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_0^n K^+$, on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(\pi_0^n K^+) = \emptyset$. Posons $U_i := Z \setminus f_i^{-1}(\pi_0^n K^+)$ pour $i = 1, \dots, k$, et soit $g_i : Z \rightarrow K$ l'application telle que $g_i(a) := 1$ si $a \in U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$, et $g_i(a) := 0$ sinon. Comme $\pi_0^n K^+$ est une partie ouverte et fermée de K , on voit aussitôt que g_i est continue pour tout $i = 1, \dots, k$, et on a $h := g_1 f_1 + \dots + g_k f_k \in \mathfrak{p}$; mais par construction $h(a) \neq 0$ pour tout $a \in Z$, donc $h \in \mathcal{C}(Z, K)^\times$, contradiction.

Supposons ensuite que $a_1, a_2 \in V(\mathfrak{p})$, avec $a_1 \neq a_2$. On trouve alors $\rho \in \Gamma$ tel que $D(a_1, \rho) \cap D(a_2, \rho) = \emptyset$; pour $i = 1, 2$, soit $f_i : Z \rightarrow K$ l'application telle que $f_i(b) := 1$ si $b \in D(a_i, \rho)$, et $f_i(b) := 0$ sinon; puisque $Z \cap D(a_i, \rho)$ est une partie ouverte et fermée de Z , on voit aussitôt que f_1 et f_2 sont continues. On a $f_1 \cdot f_2 = 0$, donc $f_1 \in \mathfrak{p}$ ou $f_2 \in \mathfrak{p}$; mais si $f_i \in \mathfrak{p}$, on a $a_i \notin V(\mathfrak{p})$, contradiction.

Cela achève de vérifier que $V(\mathfrak{p}) = \{a\}$ pour un unique $a \in Z$; mais alors $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_a$; si $\mathfrak{p}$ est maximal, il vient ainsi $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_a$, comme souhaité. Pour vérifier que la bijection $a \mapsto \mathfrak{m}_a$ est un homéomorphisme, il suffit d'observer que pour tout $a \in Z$ et tout $\rho \in \Gamma$, on a une application continue $f_{a,\rho} : Z \rightarrow K$ avec $f_{a,\rho}(b) := 1$ si $b \in D(a, \rho)$ et $f_{a,\rho}(b) := 0$ sinon, donc $D(f_{a,\rho}) \cap \text{Max } \mathcal{C}(Z, K) = Z \cap D(a, \rho)$.

(ii) La preuve de (i) montre que tout $\mathfrak{p} \in T := \text{Spec } \mathcal{C}(Z, K)$ admet une spécialisation unique dans $\text{Min } T$; l'assertion découle alors du corollaire 4.80. $\square$

12.6. Solutions aux exercices et problèmes.

Exercice 12.1 : partie (i) : D'après l'exercice 9.88(iv), $j_{\underline{A}_{\text{loc}}} : \underline{A}_{\text{loc}} \rightarrow \hat{\underline{A}}$ se factorise à travers la complétion $\underline{A}_{\text{loc}} \rightarrow \widehat{\underline{A}_{\text{loc}}}$ et un isomorphisme d'anneaux affinoïdes complets séparés $\widehat{\underline{A}_{\text{loc}}} \xrightarrow{\sim} \hat{\underline{A}}$; par suite, il suffit de montrer que la complétion $j_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \hat{\underline{A}}$ induit

un homéomorphisme $\mathrm{Spa} j_A : \mathrm{Spa} \hat{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa} \underline{A}$, pour tout anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A^+)$. Or, on sait déjà que la complétion $j_A : A \rightarrow \hat{A}$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Cont}(j_A) : \mathrm{Cont}(\hat{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cont}(A)$ (problème 10.16(iii)), et les topologies de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ et $\mathrm{Spa} \hat{A}$ sont induites par $\mathrm{Cont}(A)$ et respectivement $\mathrm{Cont}(\hat{A})$, donc il suffit de vérifier que $\mathrm{Spa} j_A$ est surjective. Ainsi, soit $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}$; il existe un unique $\hat{v} \in \mathrm{Cont}(\hat{A})$ avec $v = \hat{v} \circ j_A$. Soit $a \in \hat{A}^+$; il existe $a' \in A^+$ tel que $b := a - j_A(a')$ soit topologiquement nilpotent dans $\hat{A}$, et alors $\hat{v}(a) = \hat{v}(b + j_A(a')) \geq \min(\hat{v}(b), v(a')) \geq 0$ (lemme 10.4(i)). Cela montre que $\hat{v} \in \mathrm{Spa} \hat{A}$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : D'après l'exercice 10.13(i), si f est adique, $\mathrm{Spa} f$ envoie $(\mathrm{Spa} B)_{\mathrm{an}}$ dans $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée, et posons $X_A := \mathrm{Spec} A, X_B := \mathrm{Spec} B, \phi := \mathrm{Spec} f : X_B \rightarrow X_A$; au vu de la proposition 9.80(iv) il suffit de montrer que $\phi^{-1}(X_A^{\mathrm{na}}) = X_B^{\mathrm{na}}$. Ainsi, soit par l'absurde $\mathfrak{q} \in X_B^{\mathrm{an}}$ avec $\phi(\mathfrak{q}) \in X_A^{\mathrm{na}}$; posons $\mathfrak{q}^\circ := \mathfrak{q} \cap B^\circ$, et soit $\mathfrak{m} \subset B^\circ$ un idéal maximal avec $\mathfrak{q}^\circ \subset \mathfrak{m}$. Prenons un anneau de valuation V de $k(\mathfrak{q})$ dominant l'image du sous-anneau local $B_{\mathfrak{m}}^\circ$ de $k(\mathfrak{q}^\circ) \subset k(\mathfrak{q})$ (théorème 8.21), soit v la valuation correspondante de B , et posons $\Delta := c\Gamma_v^*$ (notation du §10.1.2); montrons que $w := v^\Delta \in \mathrm{Cont}(B)$. Pour cela, il suffit de vérifier que $w(b) > 0$ pour tout $b \in B^\circ$ (théorème 10.12(i)), mais cela est clair, car par construction $v(b) > 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}$, et $B^\circ \subset \mathfrak{m}$, car B est topologiquement local. De plus, on a $w \in \mathrm{Cont}(B)_{\mathrm{an}}$, d'après l'exercice 10.8(ii), et $w(b) \geq 0$ pour tout $b \in B^\circ$, d'où $w \in (\mathrm{Spa} \underline{B})_{\mathrm{an}}$. Mais par construction, le support de $(\mathrm{Spa} f)(w)$ contient $\phi(\mathfrak{q})$, contradiction.

Partie (iii) : Soit $(D, \mathcal{T}_D)$ le produit tensoriel topologique des A -algèbres topologiques B et C (définition 9.83); ainsi, $D := B \otimes_A C$, et $(D, \mathcal{T}_D)$ représente la somme amalgamée $B \sqcup_{(f,g)} C$ dans $\mathbb{Z} - \mathrm{AlgTop}_{\mathrm{lin}}$. Soit ensuite D^+ la fermeture intégrale dans D de l'image R de l'homomorphisme naturel $B^+ \otimes_{A^+} C^+ \rightarrow D$; par simple inspection des définitions on voit que R est un sous-anneau ouvert de D , donc de même pour D^+ . De plus, comme $B \otimes_A g : B \rightarrow D$ et $f \otimes_A C : C \rightarrow D$ sont adiques (proposition 9.82(ii)), on a $S := (B \otimes_A g)(B^+) \cup (f \otimes_A C)(C^+) \subset D^\circ$ (lemme 9.77(iv)), d'où $R \subset D^\circ$, et ainsi $D^+ \subset D^\circ$ (exercice 9.21(iii)). Ainsi, $\underline{D} := (D, D^+)$ est un anneau affinoïde, et évidemment $B \otimes_A g : \underline{B} \rightarrow \underline{D}$ et $f \otimes_A C : \underline{C} \rightarrow \underline{D}$ sont deux morphismes d'anneaux affinoïdes. Or, soient $\underline{E} := (E, E^+)$ un anneau affinoïde, et $f' : \underline{C} \rightarrow \underline{E}, g' : \underline{B} \rightarrow \underline{E}$ deux morphismes d'anneaux affinoïdes avec $f' \circ g = g' \circ f$; il vient un unique homomorphisme continu d'anneaux $h : D \rightarrow E$ tel que $h \circ (B \otimes_A g) = g'$ et $h \circ (f \otimes_A C) = f'$. Par construction, R est le sous-anneau de D engendré par la partie S , et $h(S) = g'(B^+) \cup f'(C^+) \subset E^+$, d'où $h(R) \subset E^+$, et finalement $h(D^+) \subset E^+$, car E^+ est intégralement clos dans E . Ainsi h est un morphisme d'anneaux affinoïdes $\underline{D} \rightarrow \underline{E}$ et cela achève de montrer que $\underline{D}$ représente $\underline{B} \sqcup_{(f,g)} \underline{C}$ dans Afd . Si $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ sont des objets de $\mathrm{l.Afd}$ (resp. de $\mathrm{c.Afd}$), il s'ensuit que $\underline{D}_{\mathrm{loc}}$ (resp. $\hat{\underline{D}}$) représente la même somme amalgamée dans $\mathrm{l.Afd}$ (resp. dans $\mathrm{c.Afd}$), d'après la proposition 2.49(ii).

Problème 12.8 : On détaille la preuve pour $\star = \mathrm{l}$; avec le même raisonnement on peut traiter *verbatim* le cas $\star = \mathrm{c}$.

Partie (i) : Soit $(R_i \mid i \in I)$ un recouvrement de U formé de sous-ensembles rationnels de $\mathrm{Spa} \underline{A}$; d'après le théorème 12.5, le sous-foncteur $\mathbf{h}_{R_i} \subset \mathbf{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$ est représenté par un morphisme $\phi_i : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_{R_i}$ d'anneaux affinoïdes, et $\mathrm{Spa} \phi_i$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i} \xrightarrow{\sim} R_i$ pour tout $i \in I$ (observation 12.7). L'inclusion $R_i \subset U$ induit une inclusion de sous-foncteurs $\mathbf{h}_{R_i} \subset \mathbf{h}_U$, qui à son tour correspond à un élément $\psi_i \in \mathbf{h}_U(\underline{A}_{R_i})$, par le lemme de Yoneda; donc $\psi_i : \underline{A}_U \rightarrow \underline{A}_{R_i}$ est un morphisme d'anneaux affinoïdes topologiquement locaux tel que $\psi_i \circ \phi_U = \phi_i$, pour tout $i \in I$. Soit $U_i \subset \mathrm{Spa} \underline{A}_U$ l'image de $\mathrm{Spa} \psi_i$; il s'ensuit aisément que $\mathrm{Spa} \psi_i$ induit une bijection continue $\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i} \xrightarrow{\sim} U_i$ (pour la topologie de U_i induite par $\mathrm{Spa} \underline{A}_U$). De plus, pour toute partie ouverte $V \subset \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i}$,

la partie

$$(\mathrm{Spa} \psi_i)(V) = U_i \cap (\mathrm{Spa} \phi_U)^{-1}((\mathrm{Spa} \phi_i)(V))$$

est ouverte dans U_i , car l'application $\mathrm{Spa} \phi_i$ est ouverte ; ainsi, $\mathrm{Spa} \psi_i$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i} \xrightarrow{\sim} U_i$, et par suite, $\mathrm{Spa} \phi_U$ induit un homéomorphisme $U_i \xrightarrow{\sim} R_i$, pour tout $i \in I$. Ensuite, pour tous $i, j \in I$, soit $\underline{A}_{R_{ij}}$ un anneau affinoïde topologiquement local représentant le sous-foncteur $\mathbf{h}_{R_{ij}} \subset \mathbf{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}}$ associé au sous-ensemble rationnel $R_{ij} := R_i \cap R_j$ de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ (théorème 10.12(iii)) ; comme ci-dessus, les inclusions de sous-foncteurs $\mathbf{h}_{R_{ij}} \subset \mathbf{h}_{R_i}$ et $\mathbf{h}_{R_{ij}} \subset \mathbf{h}_{R_j}$ sont représentées par des morphismes d'anneaux affinoïdes $\underline{A}_{R_i} \xrightarrow{\psi_{ij}} \underline{A}_{R_{ij}} \xleftarrow{\psi_{ji}} \underline{A}_{R_j}$. Il vient un diagramme commutatif d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i} & \xrightarrow{\sim} & U_i & \xrightarrow{\sim} & R_i \\
 & \nearrow \mathrm{Spa} \psi_{ij} & & \searrow \mathrm{Spa} \psi_i & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_{ij}} & & & & \mathrm{Spa} \underline{A}_U & \longrightarrow & U \longrightarrow \mathrm{Spa} \underline{A} \\
 & \searrow \mathrm{Spa} \psi_{ji} & & \nearrow \mathrm{Spa} \psi_j & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_j} & \xrightarrow{\sim} & U_j & \xrightarrow{\sim} & R_j
 \end{array}$$

et $\mathrm{Spa}(\phi_i \circ \psi_{ij}) = \mathrm{Spa}(\phi_j \circ \psi_{ji}) : \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_{ij}} \rightarrow \mathrm{Spa} \underline{A}$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_{ij}} \xrightarrow{\sim} R_{ij}$. Il s'ensuit aisément que $\mathrm{Spa}(\psi_i \circ \psi_{ij}) = \mathrm{Spa}(\psi_j \circ \psi_{ji})$ induit un homéomorphisme $\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_{ij}} \xrightarrow{\sim} U_i \cap U_j$ et $\mathrm{Spa} \phi_U$ se restreint en un homéomorphisme $U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} R_{ij}$, pour tous $i, j \in I$. Par suite, $\mathrm{Spa} \phi_U$ induit un homéomorphisme $U' := \bigcup_{i \in I} U_i \xrightarrow{\sim} U$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur), et pour conclure, il suffit de vérifier que $U' = \mathrm{Spa} \underline{A}_U$. Soit alors $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}_U$, et choisissons un sous-ensemble rationnel $R' \subset \mathrm{Spa} \underline{A}_U$ avec $v \in R'$; on peut supposer que $(\mathrm{Spa} \phi_U)(R') \subset R_i$ pour quelque $i \in I$. Choisissons un morphisme d'anneaux affinoïdes $\phi' : \underline{A}_U \rightarrow \underline{A}_{R'}$ représentant le sous-foncteur $\mathbf{h}_{R'} \subset \mathbf{h}_{\mathrm{Spa} \underline{A}_U}$. Alors l'image de $\mathrm{Spa}(\phi' \circ \phi_U) : \mathrm{Spa} \underline{A}_{R'} \rightarrow \mathrm{Spa} \underline{A}$ est contenue dans R_i , donc il existe un unique morphisme $\beta : \underline{A}_{R_i} \rightarrow \underline{A}_{R'}$ d'anneaux affinoïdes tel que $\phi' \circ \phi_U = \beta \circ \phi_i = \beta \circ \psi_i \circ \phi_U$. Comme ϕ_U est un épimorphisme (exercice 2.7(i)), il vient $\phi' = \beta \circ \psi_i$. En particulier, l'image R' de $\mathrm{Spa} \phi'$ est contenue dans U_i , d'où $v \in U_i$.

Partie (ii) : Cela suit aussitôt de (i), car $\mathrm{Spa} \underline{A}_U$ est un espace compact.

Partie (iii) : D'après l'exercice 12.1(ii), il suffit de montrer que $\mathrm{Spa} \phi_U$ envoie la partie $(\mathrm{Spa} \underline{A}_U)_{\mathrm{an}}$ dans $(\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{an}}$. Pour cela, gardons la notation de la preuve de (i), et soit $v \in \mathrm{Spa} \underline{A}_U$ tel que $w := (\mathrm{Spa} \phi_U)(v) \in (\mathrm{Spa} \underline{A})_{\mathrm{na}}$; soient aussi $i \in I$ tel que $v \in U_i$, et $u \in \mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i}$ avec $(\mathrm{Spa} \phi_i)(u) = w$. La preuve du théorème 12.5 (avec l'exercice 9.81(ii)) montre que ϕ_i est un morphisme adique, donc $u \in (\mathrm{Spa} \underline{A}_{R_i})_{\mathrm{na}}$ (exercice 12.1(ii)), et alors $t := (\mathrm{Spa} \psi_i)(u) \in (\mathrm{Spa} \underline{A}_U)_{\mathrm{na}}$ (remarque 10.3(vi)). On a $(\mathrm{Spa} \phi_U)(t) = w$, donc $t = v$, d'après (i), d'où $v \in (\mathrm{Spa} \underline{A}_U)_{\mathrm{na}}$.

Partie (iv) : Comme les sous-ensembles rationnels forment une base de $\mathrm{Spa} \underline{A}$, il reste à montrer que l'intersection de deux l-domaines affinoïdes de $\mathrm{Spa} \underline{A}$ est un l-domaine affinoïde ; cela vient de (iii), du lemme 2.47(iii) et de l'exercice 12.1(iii).

Exercice 12.16, partie (i) : Comme $A = (A_0)_{X_2}$, cela suit du corollaire 9.73(iii).

Partie (ii) : L'espace $X := \mathrm{Spa} \underline{A}$ est la réunion des parties ouvertes $U_1 := R_A(\frac{X_1}{1}) \cap X$ et $U_2 := R_A(\frac{1}{X_1}) \cap X$. Soit $a \in \widehat{\mathcal{O}}_X(X)$ l'image de X_3 ; montrons que a est dans le noyau des restrictions $\widehat{\mathcal{O}}_X(X) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X(U_i)$ pour $i = 1, 2$. En effet, $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_1)$ est la complétion de A pour la topologie telle que $A_1 := A_0[X_1] \subset A$ soit un sous-anneau ouvert, et $(X_2^n A_1 \mid n \in \mathbb{N})$ soit un système fondamental de sous-groupes ouverts ; mais $X_3 = X_1^n \cdot X_2^n \cdot (X_1^{-n} X_2^{-n} X_3) \in X_2^n A_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion pour $i = 1$. De même, $\widehat{\mathcal{O}}_X(U_2)$ est la complétion de $A[X_1^{-1}]$ pour la topologie telle que $A_2 := A_0[X_1^{-1}] \subset A[X_1^{-1}]$ soit un sous-anneau ouvert, et $(X_2^n A_2 \mid n \in \mathbb{N})$ soit un système fondamental de sous-groupes ouverts ; mais $X_3 = X_1^{-n} \cdot X_2^n \cdot (X_1^n X_2^{-n} X_3) \in X_2^n A_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'assertion

pour $i = 2$. Or, si $\widehat{\mathcal{O}}_X$ était un faisceau, X_3 serait alors dans le noyau de l'application de complétion $A \rightarrow \widehat{A} = \widehat{\mathcal{O}}_X(X)$; mais noter que X_3 est dans le sous-anneau ouvert A_0 , donc il serait aussi dans le noyau de la complétion $j : A_0 \rightarrow \widehat{A}_0$. Montrons que $X_3 \notin X_2 A_0$. En effet, tout $b \in A_0$ est combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire de termes de la forme

$$c_{k,r,s,t,u,n} := X_2^k (X_1 X_2)^r (X_1^{-1} X_2)^s (X_1^n X_2^{-n} X_3)^t (X_1^{-n} X_2^{-n} X_3)^u.$$

Supposons donc que $X_3 = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda c_\lambda$ pour une partie finie $\Lambda \subset \mathbb{N}^6$, et une famille d'entiers $(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Soit $\Lambda' := \{(k, r, s, t, u, n) \in \Lambda \mid t + u = 1\}$; évidemment $X_3 = \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda c_\lambda$. Noter que

$$c_{k,r,s,1,0,n} = X_1^{r-s+n} X_2^{k+r+s-n} X_3 \quad \text{et} \quad c_{k,r,s,0,1,n} = X_1^{r-s-n} X_2^{k+r+s-n} X_3.$$

Par suite :

$$c_{k,r,s,1,0,n} = X_3 \Leftrightarrow r - s + n = k + r + s - n = 0 \Leftrightarrow k = r = 0 \text{ et } s = n$$

et de même $c_{k,r,s,0,1,n} = X_3 \Leftrightarrow k = s = 0$ et $r = n$. Donc, soit

$$\Lambda'' := \{(0, 0, n, 1, 0, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, n, 0, 0, 1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Il vient $X_3 = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \Lambda''} a_\lambda c_\lambda$. Supposons par l'absurde que $X_3 \in X_2 A_0$; alors on peut supposer que pour tout $(k, r, s, t, u, n) \in \Lambda$ on a $k > 0$, d'où $\Lambda \cap \Lambda'' = \emptyset$, et ainsi $X_3 = 0$, contradiction. Cela achève de montrer que la classe de X_3 dans $A_0/X_2 A_0$ est $\neq 0$; mais j induit un isomorphisme $A_0/X_2 A_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_0/X_2 \widehat{A}_0$ (corollaire 9.61(ii)), par suite $j(X_3) \neq 0$, contradiction.

Exercice 12.23, partie (i) : Si $(A, \mathcal{T})$ vérifie la condition de Artin-Rees topologique, alors évidemment pour tout A -module M de type fini, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout sous-module $N \subset M$ tel que $I^n N = 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $I^m M \cap N = 0$. Pour la réciproque, soient M un A -module de type fini, $N \subset M$ un sous-module, et $n \in \mathbb{N}$; posons $M' := M/I^n N$ et $N' := N/I^n N$, de sorte que $N' \subset M'$ et $I^n N' = 0$, donc par hypothèse il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $I^m M' \cap N' = 0$. Cela revient à dire que $I^m M \cap N \subset I^n N$, donc $(A, \mathcal{T})$ vérifie la condition de Artin-Rees topologique.

Partie (ii) : Par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ et un sous-module $M' \subset M$ de type fini, tels que $I^n M \subset M'$. Posons $N' := M' \cap N$; par la condition de Artin-Rees topologique, pour tout $t \in \mathbb{N}$ il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I^s M' \cap N = I^s M' \cap N' \subset I^t N' \subset I^t N$. Par suite, $I^{s+n} M \cap N \subset I^t N$, d'où l'assertion.

Partie (iii.a) : Supposons d'abord que A soit analytiquement noéthérien, et rappelons que tout idéal de $C := S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}J$, pour un idéal J de A (lemme 3.30(i)); par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un idéal de type fini $J' \subset J$ avec $I^n J \subset J'$, d'où $I^n \cdot S^{-1}J \subset S^{-1}J'$, donc C est analytiquement noéthérien.

Pour le cas où A est universellement noéthérien, il suffit de remarquer que

$$S^{-1}(A[T_1, \dots, T_k]) = C[T_1, \dots, T_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et invoquer le cas précédent.

Partie (iii.b) : Soient A analytiquement noéthérien et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme fini d'anneaux; munissons B de sa topologie IB -adique, et posons $\underline{X}_B := \text{Spec } B$. Par hypothèse, A vérifie les conditions (b) et (c) de la proposition 12.22, et il suffit de vérifier qu'il en est de même pour B . Or, $\psi := \text{Spec}(f) : \underline{X}_B \rightarrow \underline{X}_A$ est un morphisme de schémas de type fini, donc de même pour sa restriction $\underline{X}_B^{\text{an}} \rightarrow \underline{X}_A^{\text{an}}$ aux sous-schémas analytiques respectifs, car $\psi^{-1}(X_B^{\text{an}}) = X_A^{\text{an}}$ (proposition 9.80(iv) et lemme 5.81(i)). Par suite, $\underline{X}_B^{\text{an}}$ est noéthérien (exercice 6.67(ii)). Ensuite, si M est un B -module de type fini, $M_{[f]}$ est un A -module de type fini, et évidemment $\text{Ann}_M(I^n B) = \text{Ann}_{M_{[f]}}(I^n)$, donc la I -torsion de M est bornée.

En dernier lieu, si A est universellement analytiquement noéthérien, toute A -algèbre B de type fini est un quotient de $A[T_1, \dots, T_k]$, pour quelque $k \in \mathbb{N}$; ainsi, pour tout

$n \in \mathbb{N}$ l'anneau $B[T_1, \dots, T_n]$ est un quotient de $A[T_1, \dots, T_{n+k}]$, qui est analytiquement noethérien, par hypothèse. Par le cas précédent, $B[T_1, \dots, T_n]$ est alors analytiquement noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme souhaité.

Exercice 12.36, partie (i) : Si A est analytiquement noethérien suivant la définition 12.20(ii), alors il l'est aussi pour la définition 12.34(i), car dans ce cas A est un sous-anneau de définition (proposition 9.71 et corollaire 9.72(iv)). Pour la réciproque, supposons que A admet un sous-anneau de définition A_0 qui vérifie les conditions (b) et (c) de la proposition 12.22, pour la topologie induite par A ; on doit vérifier les mêmes conditions pour A . Or, avec la proposition 9.80(iii), il est clair que A vérifie la condition (b). Soient ensuite M un A -module de type fini, $x_1, \dots, x_n \in M$ un système fini de générateurs, et $N := A_0x_1 + \dots + A_0x_n$; soit aussi $I \subset A$ un idéal de définition, et $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $J := I^t \subset A_0$, d'où $JM \subset N$. L'idéal J n'est pas forcément de type fini dans A_0 , mais en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 9.71 on trouve un idéal de définition I_0 de A_0 avec $J^2 \subset I_0 \subset J$; par hypothèse, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ann}_N(I_0^s) = \text{Ann}_N(I_0^{s+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\text{Ann}_N(J^{2s}) = \text{Ann}_N(J^{2(s+n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il vient $\text{Ann}_M(J^{2s+1}) = \text{Ann}_M(J^{2(s+n)+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc A vérifie la condition (c).

Partie (ii) : Si B est analytiquement noethérien, il en est de même pour A , car tout sous-anneau de définition de B est aussi un sous-anneau de définition de A . Réciproquement, soit $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition analytiquement noethérien, et $J_0 \subset A_0$ un idéal de définition; alors $B_0 := B \cap A_0$ est un sous-anneau de définition de B (proposition 9.71), et il suffit de vérifier que B_0 est analytiquement noethérien. Or, toujours avec la proposition 9.80(iii), on voit aussitôt que B_0 vérifie la condition (b) de la proposition 12.22; pour vérifier la condition (c), soit M un B_0 -module de type fini, et considérons la suite exacte courte de B_0 -modules :

$$(*) \quad 0 \rightarrow B_0 \rightarrow A_0 \rightarrow Q := A_0/B_0 \rightarrow 0.$$

Soit $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $J := J_0^t \subset B_0$, et prenons comme dans la preuve de (i), un idéal de définition $I_0 \subset B_0$ avec $J^2 \subset I_0 \subset J$, de sorte que $I_0Q = 0$. La suite exacte longue des foncteurs $\text{Tor}_i^{B_0}(M, -)$ associée à la suite $(*)$ fournit la suite exacte :

$$T := \text{Tor}_1^{B_0}(M, Q) \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0$$

où $\overline{M}$ désigne l'image de M dans $N := M \otimes_{B_0} A_0$. Par hypothèse, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ann}_N(J^s) = \text{Ann}_N(J^{s+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\text{Ann}_{\overline{M}}(I_0^s) = \text{Ann}_{\overline{M}}(I_0^{s+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $I_0T = 0$, d'où $\text{Ann}_M(I_0^{s+1}) = \text{Ann}_M(I_0^{s+1+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $B_0[X_1, \dots, X_k]$ est un sous-anneau ouvert de $A_0[X_\bullet] := A_0[X_1, \dots, X_k]$, pour la topologie J_0 -adique de $A_0[X_\bullet]$; mais alors A est universellement analytiquement noethérien si et seulement s'il en est de même pour B .

Parties (iii) : Cela découle aussitôt de (i) et (ii).

Partie (iv) : La première assertion découle aussitôt de (i) et (ii); ensuite, si A est un anneau de Tate fortement analytiquement noethérien, alors A est fortement noethérien, car le lieu non analytique de $\text{Spec } A$ est vide (exercice 6.67(iii)). Réciproquement, si A est fortement noethérien, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-anneau de définition B de $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est complet et séparé, et le lieu analytique de $\text{Spec } B$ s'identifie avec $\text{Spec } A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ (proposition 9.80(iii)), donc est noethérien, et par suite B est analytiquement noethérien (théorème 12.29); cela montre que $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est analytiquement noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi A est fortement analytiquement noethérien, par la première assertion.

Partie (v) : Si $A_0 \subset A$ est un sous-anneau de définition analytiquement noethérien, la complétion $\widehat{A}_0$ de A_0 est une A_0 -algèbre plate (proposition 12.27(ii)), et l'homomorphisme naturel $\widehat{A}_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow \widehat{A}$ est un isomorphisme de A -algèbres (proposition 9.86(iii)),

donc la première assertion découle de la remarque 3.74(vi). La deuxième assertion découle du même raisonnement, compte tenu de la proposition 12.27(iii) et du problème 3.83(ii.a).

Exercice 12.40, partie (i) : Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, $C_0 \subset B$ un A_0 -sous-module de type fini tel que le support de B/AC_0 soit contenu dans $(\text{Spec } A)^{\text{na}}$ (lemme 12.38(ii)); soit aussi $x_1, \dots, x_n$ un système fini de générateurs du A_0 -module C_0 . Il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^t x_i x_j \subset C_0$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$; par suite, $B_0 := f(A_0) + I_0^t C_0$ est une A_0 -sous-algèbre ouverte de B , et f induit par restriction un homomorphisme fini de A_0 -algèbres $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$. Evidemment, $\text{Supp}_A(B/AB_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$, donc $\mathcal{T}_B^A$ induit la topologie I_0 -adique sur B_0 (lemme 12.38(i)). Ensuite, soient $b, b' \in B$, et $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^s b, I_0^s b' \subset B_0$; il vient

$$(b + I_0^{n+s} B_0) \cdot (b' + I_0^{n+s} B_0) \subset bb' + I_0^n B_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'exercice 9.10(iii), il s'ensuit que $(B, \mathcal{T}_B^A)$ est un anneau topologique, et alors il est clair que B est un anneau de Huber avec sous-anneau de définition B_0 et idéal de définition $I_0 B_0$; en particulier, f est un morphisme adique.

Partie (ii) : Gardons la notation de la preuve de (i), et supposons que M soit un $(B, \mathcal{T}_M^A)$ -module analytiquement borné; par le lemme 12.38(ii), on a alors un B_0 -sous-module $M_0 \subset M$ de type fini tel que $\text{Supp}_B(M/BM_0) \subset (\text{Spec } B)^{\text{na}}$. Soit $h_1, \dots, h_k$ un système fini de générateurs de I_0 ; il vient

$$(*) \quad (M/BM_0)_{h_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

D'autre part, $(M_0)_{[f_0]}$ est un A_0 -module de type fini, car B_0 est une A_0 -algèbre finie; en outre, $\text{Supp}_A((BM_0)_{[f]}/A \cdot (M_0)_{[f_0]}) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$, car $\text{Supp}_A(B_{[f]}/A) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$. Ainsi, $(BM_0/AM_0)_{h_i} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$; au vu de $(*)$ et de la suite exacte courte de A -modules

$$0 \rightarrow (BM_0)_{[f]}/AM_{0[f_0]} \rightarrow M_{[f]}/AM_{0[f_0]} \rightarrow (M/BM_0)_{[f]} \rightarrow 0$$

il s'ensuit que $(M/AM_0)_{h_i} = 0$ pour $i = 1, \dots, k$. Cela revient à dire que la partie $\text{Supp}_A(M_{[f]}/AM_0)$ est dans $(\text{Spec } A)^{\text{na}}$, donc $M_{[f]}$ est analytiquement borné. En outre, $(I_0^k M_0 \mid k \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts à la fois pour $\mathcal{T}_M^B$ et pour $\mathcal{T}_{M_{[f]}}^A$, d'où $\mathcal{T}_M^B = \mathcal{T}_{M_{[f]}}^A$. En dernier lieu, si $M_{[f]}$ est analytiquement borné, il existe un A_0 -sous-module de type fini $N_0 \subset M_{[f]}$ tel que $\text{Supp}_A(M_{[f]}/AN_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$, et alors $M_0 := B_0 N_0$ est un B_0 -sous-module de M de type fini avec $\text{Supp}_B(M/BM_0) \subset (\text{Spec } B)^{\text{na}}$, i.e. M est analytiquement borné.

Partie (iii) : La preuve de (i) montre que (a) $\Rightarrow$ (b). Ensuite, soient h analytiquement fini, et $A_0 \subset A$, $C_0 \subset C$ des sous-anneaux de définition avec $h(A_0) \subset C_0$; soit aussi $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, et prenons un A_0 -sous-module de type fini $N_0 \subset C$ tel que $\text{Supp}_A(C/AN_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$. Il existe alors $t \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^t N_0 \subset C_0$, et comme $I_0^t N_0$ est un A_0 -sous-module ouvert de C_0 , il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^s C_0 \subset I_0^t N_0$; par suite $I_0^s (C_0/I_0^t N_0) = 0$, et comme $I_0^t N_0$ est un A_0 -module de type fini, C_0 est alors un A_0 -module analytiquement de type fini. Cela achève de vérifier que (a) $\Rightarrow$ (c). Pour conclure, soit réciproquement $C_0 \subset C$ un sous-anneau de définition avec $h(A_0) \subset C_0$ et tel que C_0 soit un A_0 -module analytiquement de type fini; on doit vérifier que h est analytiquement fini. Or, par définition il existe $n \in \mathbb{N}$ et un A_0 -sous-module $N_0 \subset C_0$ tel que $I_0^n (C_0/N_0) = 0$, et d'autre part on voit aisément que $\text{Supp}_A(C/AC_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$; il s'ensuit aussitôt que $\text{Supp}_A(C/AN_0) \subset (\text{Spec } A)^{\text{na}}$, d'où l'assertion.

Partie (iv) : Gardons la notation de la preuve de (i); on peut supposer que A_0 soit analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien, resp. noethérien) suivant la définition 12.20(ii), donc la A_0 -algèbre finie B_0 est analytiquement noethérien (resp. universellement analytiquement noethérien, resp. noethérien) pour sa topologie $I_0 B_0$ -adique (exercice 12.23(iii.b)), d'où l'assertion.

Partie (v) : D'après (iv), on sait déjà que si A est analytiquement noethérien, il en est de même pour B . Réciproquement, soit B analytiquement noethérien ; soient en outre $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. D'après (i) il existe un sous-anneau de définition $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et tel que B_0 soit une A_0 -algèbre finie, avec idéal de définition $I_0 B_0$. Or, soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $A_0 - \text{Mod}$ dont les objets sont les A_0 -modules M tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $I_0^n M = 0$; évidemment $\mathcal{C}$ vérifie la condition du problème 6.73, et d'autre part B_0 est analytiquement noethérien, d'après l'exercice 12.36(ii). Mais cela revient à dire que B_0 est $\mathcal{C}$ -noethérien, suivant la terminologie du problème 6.73. Ensuite, posons $J := A_0 \cap \text{Ker}(f) = \text{Ann}_{A_0}(B_0)$; par hypothèse, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^t \cap J = 0$, d'où $I_0^t J = 0$, i.e. $J \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et en particulier, J est $\mathcal{C}$ -noethérien. D'après le problème 6.73(iii.b), il s'ensuit qu'il en est de même pour A_0 , i.e. A_0 est analytiquement noethérien, donc de même pour A .

Exercice 12.45, partie (i) : Soit $0_\bullet := (0, \dots, 0) \in (K^+)^n$; par inspection directe de la définition de $|\cdot|$, on trouve :

$$|g| = \min(v(g(0_\bullet)), |g - g(0_\bullet)|) \quad \forall g \in \mathbb{T}_n.$$

Supposons d'abord que $v(f(0_\bullet)) > 0$; alors $|f - f(0_\bullet)| = 0$. Posons $g := 1 + f$; alors $|g| = \min(v(1 + f(0_\bullet)), |f - f(0_\bullet)|) = 0$, et $|g - g(0_\bullet)| = |f - f(0_\bullet)| = 0$. D'autre part, pour tout $h \in K^\times \cdot (1 + \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+)$ on a $|h| < |h - h(0_\bullet)|$, car si $h = u \cdot (1 + b)$ avec $u \in K^\times$ et $b \in \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+$, on a $|h| = v(u)$ et $|h - h(0_\bullet)| = |u \cdot (b - b(0_\bullet))| = v(u) + |b - b(0_\bullet)| > v(u)$. Cela montre que $1 + f \notin K^\times \cdot (1 + \mathfrak{m}\mathbb{T}_n^+)$, d'où $1 + f \notin \mathbb{T}_n^\times$, d'après le lemme 12.44(v). Ensuite, si $v(f(0_\bullet)) = 0$, posons $g := f - f(0_\bullet)$; alors $g(0_\bullet) = 0$, i.e. $g \in \text{Ker}(\varepsilon_{0_\bullet})$, et comme $\varepsilon_{0_\bullet}$ est un homomorphisme d'anneaux, il vient $g \notin \mathbb{T}_n^\times$.

Partie (ii) : Supposons par l'absurde, que $f \in \mathcal{J}(\mathbb{T}_n) \setminus \{0\}$, et soit $u \in K^\times$ avec $v(u) = |f|$; quitte à remplacer f par $u^{-1}f$, on peut supposer que $|f| = 0$. D'après (i), il existe alors $c \in K$ tel que $v(c) = 0$ et $f + c \notin \mathbb{T}_n^\times$; mais $f + c = c(c^{-1}f + 1)$, donc $1 + c^{-1}f \notin \mathbb{T}_n^\times$. Cela contredit le théorème 1.50(i).

Exercice 12.56 : On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial ; soit alors $n > 0$, et supposons que l'assertion soit connue pour $\mathbb{T}_{n-1}$. Soit $g \in \mathbb{T}_n \setminus \{0\}$; on doit montrer que g est produit d'éléments premiers de $\mathbb{T}_n$, et on peut supposer que $|g| = 0$. D'après l'observation 12.54, il existe un automorphisme ϕ de $\mathbb{T}_n$ tel que $\phi(g)$ soit X_n -distinguée ; quitte à remplacer g par $\phi(g)$, on peut alors supposer que g soit X_n -distinguée. De plus, d'après le théorème 12.52, on peut supposer que $g \in \mathbb{T}_{n-1}[X_n]$. Or, par l'hypothèse de récurrence et par le problème 1.39(iii), l'anneau $\mathbb{T}_{n-1}[X_n]$ est factoriel, donc $g = p_1 \cdots p_k$ pour des éléments premiers $p_1, \dots, p_k$ de $\mathbb{T}_{n-1}[X_n]$, et comme $|g| = 0$, on peut supposer que $|p_i| = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Dans cette situation, comme g est X_n -distingué, la remarque 12.48 entraîne aisément que chaque p_i est X_n -distingué. Par suite, le théorème 12.49(i,iii) nous dit que l'inclusion $\mathbb{T}_{n-1}[X_n] \rightarrow \mathbb{T}_n$ induit un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{T}_{n-1}[X_n]/(p_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_n/(p_i)$, pour tout $i = 1, \dots, k$. Cela montre que chaque p_i est premier dans $\mathbb{T}_n$, d'où l'assertion.

Exercice 12.60 : (a) $\Rightarrow$ (b) : Soient $T_\bullet$ et $g : \widehat{A}(X_\bullet)_{T_\bullet} \rightarrow \widehat{B}$ comme dans la définition 12.57(i) ; d'après le corollaire 12.59, on peut supposer qu'il existe $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que $g(X_i) = j_B(b_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Choisissons un sous-anneau de définition $A_0 \subset A$ et un idéal de définition $I_0 \subset A_0$; rappelons que $\widehat{A}(X_\bullet)_{T_\bullet}$ est la complétion de $A[X_\bullet] := A[X_1, \dots, X_n]$, muni de la topologie telle que $D := A_0[tX_i \mid i = 1, \dots, n, t \in T_i] \subset A[X_\bullet]$ soit un sous-anneau de définition, et $I_0 D$ un idéal de définition. Munissons $A_0[Y_{\bullet\bullet}] := A_0[Y_{it} \mid i = 1, \dots, n, t \in T_i]$ de la topologie I_0 -adique. L'homomorphisme de A_0 -algèbres

$$l : A_0[Y_{\bullet\bullet}] \rightarrow D \quad Y_{it} \mapsto tX_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall t \in T_i$$

est alors surjectif, continu et ouvert; par suite, il en est de même pour sa complétion $\hat{l}: \hat{A}_0(Y_{\bullet\bullet}) \rightarrow \hat{D}$ (corollaire 9.58). Or, $\hat{D}$ est un sous-anneau de définition de $\hat{A}\langle X_{\bullet}\rangle_{T_{\bullet}}$; comme g est continu, surjectif et ouvert, $g(\hat{D})$ est alors un sous-anneau de définition de $\hat{B}$ (voir la solution de l'exercice 9.81(v)). Il s'ensuit aisément que $B_0 := j_B^{-1}(g(\hat{D}))$ est un anneau de définition de B (proposition 9.71) et $g(\hat{D})$ est naturellement identifié avec la complétion $\hat{B}_0$ de B_0 (théorème 9.39(ii) et exercice 9.49(i)). Soit $g_0: \hat{D} \rightarrow \hat{B}_0$ la restriction de g ; évidemment l'homomorphisme de $\hat{A}_0$ -algèbres $g_0 \circ \hat{l}: \hat{A}_0(Y_{\bullet\bullet}) \rightarrow \hat{B}_0$ est surjectif, continu et ouvert. De plus, soit $\Sigma := \{b_1, \dots, b_n\}$; d'après la proposition 9.86(iii), on a $\hat{A}\langle X_{\bullet}\rangle_{T_{\bullet}} = \hat{D} \otimes_D A[X_{\bullet}]$, et par suite $\hat{B} = j_B(f(A)[\Sigma]) \cdot \hat{B}_0$, d'où l'assertion.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Pour $i = 0, 1$ soient $j_i: A_i \rightarrow \hat{A}_i$ les complétions; par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme d'anneaux $g_0: \hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \hat{B}_0$ continu, surjectif et ouvert. Soit $g_1: \hat{A}_1\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \hat{B}$ l'unique homomorphisme continu d'anneaux tel que $g_1 \circ j_1(a) = j_B \circ f(a)$ pour tout $a \in A_1$, et $g_1(X_i) = g_0(X_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ (corollaire 9.93(iii)); posons $C := g_1(\hat{A}_1\langle X_1, \dots, X_n \rangle)$ et $B_1 := j_B^{-1}(C)$. Alors $D := (\hat{A}_0 \cap \hat{A}_1)\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est un sous-anneau ouvert de $\hat{A}_i\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ pour $i = 0, 1$ (ici, on identifie $\hat{A}_0$ et $\hat{A}_1$ avec leurs images dans la complétion de A), et par construction, g_0 et g_1 coïncident sur D ; mais g_0 est ouvert, donc de même pour g_1 (remarque 9.3(iii)). Par suite C est naturellement identifié avec la complétion $\hat{B}_1$ de B_1 . En dernier lieu, avec $\Lambda := \{g_1(X_1), \dots, g_1(X_n)\}$, on a $\hat{B}_1 = g_1(D) + j_B \circ f(A_1)[\Lambda]$ car $j_B \circ f(A_1)[\Lambda]$ est dense dans $\hat{B}_1$, d'où :

$$f(A) \cdot \hat{B}_1 = f(A) \cdot (g_1(D) + f(A_1)[\Lambda]) = f(A) \cdot g_1(D) + f(A)[\Lambda] = f(A) \cdot g_1(D).$$

De même, $f(A) \cdot \hat{B}_0 = f(A) \cdot g_0(D)$, donc $f(A) \cdot \hat{B}_1 = f(A) \cdot \hat{B}_0$, d'où l'assertion.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Par hypothèse, il existe $m \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme continu et ouvert $g: \hat{A}\langle X_1, \dots, X_m \rangle \rightarrow \hat{B}$, et $\hat{B}$ est une $\hat{A}\langle X_1, \dots, X_m \rangle$ -algèbre de type fini, disons engendrée par le système fini d'éléments $b_1, \dots, b_s \in \hat{B}$. Soient A_0 un sous-anneau de définition de A , et $S \subset A_0$ une partie finie engendrant un idéal de définition; choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $S(k) \cdot b_1, \dots, S(k) \cdot b_s$ soient des parties de $\hat{B}$ à puissances bornées (notation de la définition 9.18(ii)). Posons $T_{\bullet} := (T_1, \dots, T_{m+s})$, avec $T_i := \{1\}$ pour $i = 1, \dots, m$, et $T_{m+i} := S(k)$ pour $i = 1, \dots, s$. Il existe alors un unique homomorphisme continu de A -algèbres $h: \hat{A}\langle X_1, \dots, X_{m+s} \rangle_{T_{\bullet}} \rightarrow \hat{B}$ avec $h(X_i) := g(X_i)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $h(X_{m+i}) := b_i$ pour $i = 1, \dots, s$ (corollaire 9.93(iii)). Comme g est ouvert, il en est de même pour h , et par construction h est surjectif.

(b) $\Rightarrow$ (d) : Par hypothèse, il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que la composition $A_0 \rightarrow \hat{B}_0$ de la restriction $f_0: A_0 \rightarrow B_0$ de f avec la complétion $j_{B_0}: B_0 \rightarrow \hat{B}_0$ se factorise à travers un homomorphisme continu, ouvert, surjectif d'anneaux $g: \hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \hat{B}_0$; de plus, on peut supposer que pour $i = 1, \dots, n$ il existe $b_i \in B_0$ avec $g(X_i) = j_{B_0}(b_i)$ (corollaire 12.59), et on a une partie finie $\Sigma_1 \subset B$ telle que $\hat{B} = (j_B \circ f(A)[\Sigma_1]) \cdot \hat{B}_0$. Par suite, $j_{B_0} \circ f_0$ est adique, donc de même pour $j_B \circ f$ (proposition 9.78(iii)). Soit $\Sigma_0 := \{b_1, \dots, b_n\}$; alors $f(A_0)[\Sigma_0]$ est dense dans B_0 , et $f(A)[\Sigma_0 \cup \Sigma_1]$ est dense dans B .

(d) $\Rightarrow$ (b) : Disons que $\Sigma_0 = \{b_1, \dots, b_n\}$, notons par $j: A_0 \rightarrow \hat{A}_0$ la complétion, et soit $g: \hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \hat{B}_0$ l'unique homomorphisme continu d'anneaux avec $g \circ j(a) = j_B \circ f(a)$ pour tout $a \in A_0$, et $g(X_i) = j_B(b_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition; par hypothèse, $\hat{B}_0 = g(\hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle) + I_0 \hat{B}_0$, d'où $\hat{B}_0 = g(\hat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle)$ (corollaire 9.61(iii)). Comme $j_B \circ f$ est adique, on déduit aussitôt que g est ouvert, i.e. B_0 est une A_0 -algèbre topologiquement fortement de type fini. Comme $f(A)[\Sigma]$ est dense dans B , il est clair que $C[\Sigma] = \hat{B}$, avec $C := f(A) \cdot \hat{B}_0$.

Exercice 12.61, (a) $\Rightarrow$ (b) : Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme continu, surjectif et ouvert d'anneaux $g : \widehat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \widehat{B}$. Soit $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition; alors $\widehat{A}_0\langle X_\bullet \rangle := \widehat{A}_0\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est un sous-anneau de définition de $\widehat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, et $C := g(\widehat{A}_0\langle X_\bullet \rangle)$ est un sous-anneau de définition de $\widehat{B}$ (voir la solution de l'exercice 9.81(v)). Par suite, $B_0 := j_B^{-1}(C)$ est un sous-anneau de définition de B , dont la complétion $\widehat{B}_0$ est naturellement identifiée avec C . De plus, $\widehat{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = A \cdot \widehat{A}_0\langle X_\bullet \rangle$. L'assertion s'ensuit aussitôt.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Il suffit de prendre $A_1 := A$, car alors $B = f(A) \cdot B_1 = B_1$.

(d) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) : Cela se démontre comme les implications correspondantes de l'exercice 12.60 : les détails sont confiés aux soins du lecteur.

Exercice 12.64 : Par définition, il existe $n, m \in \mathbb{N}$, des suites de parties finies $T'_\bullet := (T_1, \dots, T_n)$, $T''_\bullet := (T_{n+1}, \dots, T_{n+m})$, et des homomorphismes continus, ouverts et surjectifs de A -algèbres topologiques

$$g : \widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} := \widehat{A}\langle X'_1, \dots, X'_n \rangle_{T'_\bullet} \rightarrow B \quad h : \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet} := \widehat{A}\langle X''_1, \dots, X''_m \rangle_{T''_\bullet} \rightarrow C.$$

Soit $(B \otimes_A C, \mathcal{T})$ le produit tensoriel topologique des A -algèbres adiques B et C (définition 9.83), et de même pour $(\widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \otimes_A \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet}, \mathcal{T}')$. L'homomorphisme

$$g \otimes_A h : \widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \otimes_A \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet} \rightarrow B \otimes_A C$$

est continu, par les propriétés universelles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. De plus, soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, $A' \subset \widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet}$ et $A'' \subset \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet}$ des sous-anneaux de définition contenant $\widehat{A}_0$; alors $g(A')$ et $h(A'')$ sont des sous-anneaux ouverts et bornés de B et respectivement C (lemme 9.77(i)), donc sont des sous-anneaux de définition (proposition 9.71), et une inspection de la construction de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ (voir la preuve de la proposition 9.82) montre que l'image D_0 de $A' \otimes_{A_0} A''$ dans l'anneau $\widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \otimes_A \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet}$ (resp. l'image E_0 de $g(A') \otimes_{A_0} h(A'')$ dans $B \otimes_A C$) est un sous-anneau de définition. Les topologies de D_0 et E_0 sont I_0 -adiques, et la restriction $D_0 \rightarrow E_0$ de $g \otimes_A h$ est surjective, donc elle est ouverte, et ainsi $g \otimes_A h$ est ouverte; avec le corollaire 9.58, il s'ensuit que sa complétion

$$g \widehat{\otimes}_A h : \widehat{A}\langle X'_\bullet \rangle_{T'_\bullet} \widehat{\otimes}_A \widehat{A}\langle X''_\bullet \rangle_{T''_\bullet} \rightarrow B \widehat{\otimes}_A C$$

est encore ouverte et surjective. L'assertion suit alors de la remarque 9.94(ii).

Problème 12.65, partie (i) : Par construction, la partie $S_1 := \{tX \mid t \in T\}$ est à puissances bornées dans $A\langle X \rangle_T$, et de même pour la partie $S_2 := \{ta \mid t \in T\}$, par hypothèse; par suite, le sous-groupe additif $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ engendré par $S_1 \cup S_2$ est à puissances bornées (remarque 9.19(i) et exercice 9.21(i)), donc de même pour les parties $\{t(X + a) \mid t \in T\}$ et $\{t(X - a) \mid t \in T\}$. D'après le corollaire 9.93(iii), il existe alors deux uniques homomorphismes continus d'anneaux $\phi, \psi : A\langle X \rangle_T \rightarrow A\langle X \rangle_T$ tels que $\phi(X) = X + a$, $\psi(X) = X - a$, et $\phi(x) = \psi(x) = x$ pour tout $x \in A$. Evidemment $\phi = \psi^{-1}$, donc ϕ et ψ sont des homéomorphismes. Il suffit alors de montrer qu'il existe un unique couple $(\tilde{Q}, \tilde{b})$ avec $\tilde{Q} \in A\langle X \rangle_T$ et $\tilde{b} \in A$, tel que $\phi(P) = X \cdot \tilde{Q} + \tilde{b}$. Or, si $\phi(P) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$, on doit avoir $\tilde{Q} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} X^n$ et $\tilde{b} = a_0$; il reste ainsi à vérifier que $\tilde{Q} \in A\langle X \rangle_T$. Mais par hypothèse, pour tout voisinage ouvert U de 0 dans A il existe $k_U \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \in \langle U \cdot T^n \rangle$ pour tout $n \geq k_U$; d'autre part, comme T est une partie bornée, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans A avec $TV \subset U$. Ainsi, $a_{n+1} \in \langle V \cdot T^{n+1} \rangle \subset \langle U \cdot T^n \rangle$ pour tout $n \geq k_V - 1$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soient $\mathcal{T}_T$ et $\mathcal{T}_{\overline{T}}$ les topologies sur $A[X]$ et respectivement $B[X]$ associées aux parties T et $\overline{T}$ par la proposition 9.85(i); pour tout voisinage ouvert U de 0 dans A , soit $\overline{U} := f(U)$; soit aussi $f_{[X]} : A[X] \rightarrow B[X]$ la restriction de $f_{\langle X \rangle}$. Evidemment

$f_{[X]}$ est surjectif, et $f_{[X]}(U[TX]) = \overline{U}[\overline{TX}]$ pour tout tel U , donc $f_{[X]}$ est une application ouverte. L'assertion découle alors des corollaires 9.58 et 9.93(ii).

Partie (iii) : Rappelons que $A\langle X_1, \dots, X_i \rangle_{(T_1, \dots, T_i)}$ est un anneau de Huber complet et séparé pour tout $i = 1, \dots, n$ (proposition 9.91(ii,iv)); par récurrence sur i , on est alors ramené aisément au cas où $n = 1$. On a ainsi une partie bornée $T \subset A$ engendrant un idéal ouvert, un homomorphisme continu $g : A\langle X \rangle_T \rightarrow B$ tel que $f := g|_A$ soit surjectif et ouvert, et on pose $\overline{T} := g(T)$ et $b := g(X)$; d'après (ii) l'unique homomorphisme continu d'anneaux $f_{\langle X \rangle} : A\langle X \rangle_T \rightarrow B\langle X \rangle_{\overline{T}}$ prolongeant f et tel que $f_{\langle X \rangle}(X) = X$, est encore surjectif et ouvert. En outre, g est adique (proposition 9.78(iv)); par suite, la partie $\overline{T} \cdot b$ est à puissances bornées dans B (lemme 9.77(i)). D'après le corollaire 9.93(iii), il existe alors un unique homomorphisme continu d'anneaux $h : B\langle X \rangle_{\overline{T}} \rightarrow B$ prolongeant l'identité de B , avec $h(X) = b$. Avec (i), on voit aussitôt que $\text{Ker}(h)$ est l'idéal engendré par $X - b$. D'autre part, pour tout $Q := \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in A\langle X \rangle_T$ on a $f_{\langle X \rangle}(Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g(a_k) X^k$; par suite, $\text{Ker}(f_{\langle X \rangle})$ est l'adhérence dans $A\langle X \rangle_T$ de l'idéal engendré par $\text{Ker}(f)$. En dernier lieu, noter que $g = h \circ f_{\langle X \rangle}$. Or, pour tout $P \in \text{Ker}(g)$ on a $f_{\langle X \rangle}(P) = (X - b) \cdot Q$ pour quelque $Q \in B\langle X \rangle_{\overline{T}}$, et on trouve $\tilde{Q} \in A\langle X \rangle_T$ tel que $f_{\langle X \rangle}(\tilde{Q}) = Q$. Soit alors $a \in A$ tel que $g(a) = b$; il vient $P - (X - a) \cdot \tilde{Q} \in \text{Ker}(f_{\langle X \rangle})$. Cela achève de montrer que $\text{Ker}(g)$ est l'adhérence de $(X - a) \cdot A\langle X \rangle_T + \text{Ker}(f) \cdot A\langle X \rangle_T$.

Partie (iv) : Pour tout $i = 0, \dots, n$, soient $C_i := A\langle X_1, \dots, X_i \rangle_{(T_1, \dots, T_i)}$, et $g_i : C_i \rightarrow B$ la restriction de g ; avec la proposition 9.12(i) on vérifie aisément que chaque g_i est surjective et ouverte, et évidemment $C_{i+1} = C_i\langle X_{i+1} \rangle_{T_{i+1}}$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Une simple récurrence sur $i = 0, \dots, n$ nous ramène alors au cas où $n = 1$, donc $C = A\langle X \rangle_T$ pour $X := X_1$ et $T := T_1$. Soient $A_0 \subset A$ un sous-anneau de définition noethérien, $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition, de sorte que $B_0 := g(A_0)$ est un sous-anneau de définition noethérien de B , avec idéal de définition $I_0 B_0$. Posons $b := g(X)$; puisque g est adique, on a $tb \in B^\circ$ pour tout $t \in T$ (lemme 9.77(iv)), i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^k \cdot \{(tb)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_0$ pour tout $t \in T$. Comme B_0 est noethérien, il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_0^k (tb)^n \in L_t := \sum_{i=0}^m I_0^k \cdot (tb)^i$ pour tout $t \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite, $\phi_t := (tb) \cdot \text{Id}_{L_t}$ est un endomorphisme B_0 -linéaire de L_t , donc il existe un polynôme unitaire $P_t \in B_0[Y]$ tel que $P_t(\phi_t) = 0$ (proposition 3.47); comme $I_0^k \subset L_t$, il vient $P_t(tb) \cdot I_0^k = 0$ dans B_0 , pour tout $t \in T$. Prenons $a \in A$ avec $g(a) = b$, et pour tout $t \in T$ soit $Q_t \in A_0[Y]$ unitaire, et dont l'image dans $B_0[Y]$ coïncide avec P_t ; noter que $J := \sum_{t \in T} I_0^k \cdot Q_t(ta) \subset \text{Ker}(g|_A)$, donc $g|_A$ est la composition de la projection $p : A \rightarrow \overline{A} := A/J$ et d'un unique homomorphisme d'anneaux $f : \overline{A} \rightarrow B$, et ces deux applications sont continues pour la topologie $\mathcal{T}$ de $\overline{A}$ induite par A . Or, J est une partie fermée de A (proposition 12.41(iii)), par suite $(\overline{A}, \mathcal{T})$ est complet et séparé (remarque 9.59(ii)). Soit $\overline{a} \in \overline{A}$ l'image de a ; par construction, $I_0^k \cdot Q_t(t\overline{a}) = 0$ dans $\overline{A}$, et en particulier $t\overline{a} \in \overline{A}^\circ$ pour tout $t \in T$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Il existe alors un unique morphisme de A -algèbres topologiques $h : A\langle X \rangle_T \rightarrow \overline{A}$ avec $h(X) = \overline{a}$ (corollaire 9.93(iii)). Evidemment h est surjective, et $g = f \circ h$, d'où $h(\text{Ker } g) = \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g|_A)/J$. Donc, si $\text{Ker}(g)$ est de type fini, il en est de même pour $\text{Ker}(g|_A)$. Pour la réciproque, noter que, d'après (iii), si $\text{Ker}(g|_A)$ est de type fini, alors $\text{Ker}(g)$ est l'adhérence d'un idéal J' de type fini; mais $A\langle X \rangle_T$ est à définition noethérienne (lemme 12.62(v)), donc J' est une partie fermée de $A\langle X \rangle_T$ (proposition 12.41(iii)), d'où l'assertion.

Exercice 12.72 : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, munissons $K_n := \text{Ker}(d_n)$ de la topologie induite par $\mathcal{T}_n$ via l'inclusion $i_n : K_n \rightarrow M_n$; on obtient une suite exacte courte

$$\Sigma_n \quad : \quad 0 \rightarrow K_n \xrightarrow{i_n} M_n \xrightarrow{p_n} K_{n-1} \rightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

où p_n est l'unique application A -linéaire telle que $i_{n-1} \circ p_n = d_n$. Comme d_n est un morphisme strict de $A - \text{ModTop}$, la topologie de K_{n-1} est aussi induite par $\mathcal{T}_n$ via p_n ;

d'après le corollaire 9.58, la complétion de Σ_n est alors une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \widehat{K}_n \xrightarrow{\widehat{i}_n} \widehat{M}_n \xrightarrow{\widehat{p}_n} \widehat{K}_{n-1} \rightarrow 0$$

et $\widehat{p}_n$ est l'unique application A -linéaire telle que $\widehat{i}_{n-1} \circ \widehat{p}_n = \widehat{d}_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, on a $\widehat{K}_n = \text{Ker } \widehat{d}_n = \text{Im } \widehat{d}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; en outre, la topologie de $\widehat{K}_{n-1}$ est aussi induite par celle de $\widehat{M}_n$ via $\widehat{p}_n$, d'où l'assertion.

Exercice 12.75, partie (i) : D'après la remarque 5.5(iii), $H_n(f_\bullet)$ est bijective pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $H_n(g_\bullet)$ est son inverse; donc $C_\bullet$ est acyclique en degré k si et seulement s'il en est de même pour $C'_\bullet$. On peut donc supposer que $C_\bullet$ et $C'_\bullet$ soient acycliques en degré k ; dans ce cas, le corollaire 12.74 montre que $C_\bullet$ (resp. $C'_\bullet$) est strict en degré k si et seulement si $\overline{\Sigma}(C_\bullet)$ (resp. $\overline{\Sigma}(C'_\bullet)$) est acyclique en degré k . D'autre part, $\overline{\Sigma}(s_\bullet) := (\overline{\Sigma}(s_n) \mid n \in \mathbb{Z})$ (resp. $\overline{\Sigma}(t_\bullet) := (\overline{\Sigma}(t_n) \mid n \in \mathbb{Z})$) est une homotopie de $\overline{\Sigma}(g_\bullet \circ f_\bullet)$ vers $\text{Id}_{\overline{\Sigma}(C_\bullet)}$ (resp. de $\overline{\Sigma}(f_\bullet \circ g_\bullet)$ vers $\text{Id}_{\overline{\Sigma}(C'_\bullet)}$), donc $\overline{\Sigma}(C_\bullet)$ est acyclique en degré k si et seulement s'il en est de même pour $\overline{\Sigma}(C'_\bullet)$, d'où l'assertion.

Partie (ii) : Soit $i^\bullet : \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'inclusion naturelle; le théorème 5.29(i) fournit un morphisme de complexes $p^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que $p^\bullet \circ i^\bullet$ soit l'identité de $\check{C}_{\text{alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, et une homotopie $s^\bullet$ de $i^\bullet \circ p^\bullet$ vers l'identité de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Par inspection directe des constructions, on voit aisément que $p^\bullet$ est un morphisme continu, et $s^\bullet$ est une homotopie continue : les détails sont laissés aux soins du lecteur. D'après (i), cela entraîne déjà que si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $\check{C}_{\text{au.alt}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est strictement acyclique en degré k si et seulement s'il en est de même pour $\check{C}_{\text{aug}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. D'autre part, les termes en degrés -1 et 0 de ces deux complexes coïncident, et de même pour les respectives augmentations, donc l'assertion est vérifiée aussi pour $k = 0$.

Exercice 12.91, partie (i) : U est une partie ouverte compacte de X , donc on trouve un recouvrement fini $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_k\}$ de U par des sous-ensembles rationnels de X . Soient $X_U := \text{Spa } \underline{A}_U$, et $\phi := \text{Spa}(\rho_U) : X_U \rightarrow X$; alors $\mathcal{V}_U := \{\phi^{-1}V_1, \dots, \phi^{-1}V_k\}$ est un recouvrement rationnel de X_U , et $\rho_{UV_i} : \underline{A}_U \rightarrow \underline{A}_{V_i}$ $\star$ -représente le sous-ensemble rationnel $\phi^{-1}V_i$ de X_U , pour tout $i = 1, \dots, k$. On obtient ainsi une identification naturelle du complexe de Čech $(\check{C}^\bullet(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U}), d_{\mathcal{V}_U}^\bullet)$ avec $(\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{O}}_X), d_{\mathcal{V}}^\bullet)$, d'où un isomorphisme d'anneaux topologiques :

$$\alpha : (\check{H}^0(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U}), \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} (\check{H}^0(\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{O}}_X), \mathcal{T}')$$

pour les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ induites par les inclusions dans $\check{C}^0(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U})$ et respectivement $\check{C}^0(\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{O}}_X)$. D'autre part, d'après le lemme 12.62(iii,iv) et le théorème 12.69, sous la condition (i.a) (resp. (i.b)) l'anneau A_U est universellement (resp. fortement) analytiquement noethérien, donc $\mathcal{V}_U$ est strictement $\widehat{\mathcal{O}}_{X_U}$ -acyclique (proposition 12.88, et théorème 12.32, si (i.b) est vérifiée); en particulier, l'augmentation du complexe $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U})$ induit un isomorphisme $\varepsilon : \widehat{A}_U \xrightarrow{\sim} (\check{H}^0(\mathcal{V}_U, \widehat{\mathcal{O}}_{X_U}), \mathcal{T})$ de $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$. D'autre part, $\widehat{\mathcal{O}}_X$ est un faisceau à valeurs dans $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$ (proposition 12.88(iii)), donc l'application naturelle $\beta : \widehat{\mathcal{O}}_X(U) \rightarrow (\check{H}^0(\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{O}}_X), \mathcal{T}')$ est de même un isomorphisme de $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$, et on vérifie aisément que $\omega_U = \beta^{-1} \circ \alpha \circ \varepsilon$.

(ii) : Soit $\mathcal{V}$ comme ci-dessus; alors $\widehat{A}_{V_i} := \widehat{\mathcal{O}}_X(V_i)$ est à la fois une $\widehat{A}$ -algèbre plate et une $\widehat{A}_U$ -algèbre plate, pour tout $V_i \in \mathcal{V}$ (proposition 12.88(ii)); soit $f : \widehat{A}_U \rightarrow B := \prod_{i=1}^k \widehat{A}_{V_i}$ l'homomorphisme naturel d'anneaux. Avec l'exercice 10.26(iii) on voit aisément que l'image de $\text{Spec } f : \text{Spec } B = \text{Spec } \widehat{A}_{V_1} \sqcup \dots \sqcup \text{Spec } \widehat{A}_{V_k} \rightarrow \text{Spec } \widehat{A}_U$ contient $\text{Max } \widehat{A}_U$, donc f est fidèlement plat (problème 3.83(i.c) et théorème 3.84(ii)). En résumant, le foncteur $B \otimes_{\widehat{A}_U} - : \widehat{A}_U - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}$ est exact et fidèle, et le foncteur $B \otimes_{\widehat{A}} -$

est exact ; mais ce dernier est isomorphe à la composition de $B \otimes_{\widehat{A}_U} -$ avec le foncteur $\widehat{A}_U \otimes_{\widehat{A}} -$. On déduit aisément que le foncteur $\widehat{A}_U \otimes_{\widehat{A}} -$ est exact, CQFD.

Partie (iii) : Cela découle de (i), du théorème 12.69, et du lemme 12.62(v).

Exercice 12.97, partie (i) : Soient $r \in \mathbb{R}$, $a, b \in A$; alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $s \geq \max(r - w_I^*(a) \geq r, r - w_I^*(b), r/2)$ on a $(a + U_s) \cdot (b + U_s) \subset ab + U_r$. L'assertion découle par suite de l'exercice 9.10(iii).

Partie (ii) : Par hypothèse, on a $a_0, \dots, a_n \in A^{\circ\circ}$ et $b_0, \dots, b_n \in A$ avec $\sum_{i=0}^n a_i b_i = 1$, et quitte à remplacer chaque a_i par une puissance positive convenable, on peut supposer que $a_0, \dots, a_n \in I$. Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $w_I^*(b_i) \geq -p$ pour tout $i = 0, \dots, n$; on va montrer, par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$, que :

$$(*) \quad a \in I^{qp} A^+ \Rightarrow w_I^*(a) \geq qp \Rightarrow a \in I^q A^+ \quad \forall a \in A, \forall q \in \mathbb{N}.$$

La première implication est claire, et la deuxième découle aussitôt des définitions, pour $q = 0$; ensuite, supposons que la deuxième implication soit connue pour un entier $q \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A$, et soit $a \in A$ tel que $w_I^*(a) \geq (q+1)p$. On a $a = \sum_{i=0}^n a_i b_i a$, et $w_I^*(b_i a) \geq qp$ pour tout $i = 0, \dots, n$; par hypothèse de récurrence, il vient alors $b_i a \in I^q A^+$, d'où $a \in I^{q+1} A^+$, comme souhaité. Avec (*) on voit que $\mathcal{T}_A^*$ induit la topologie IA^+ -adique sur A^+ , donc $(A, \mathcal{T}_A^*)$ est un anneau de Huber, avec sous-anneau de définition A^+ et idéal de définition IA^+ ; puisque A est analytique, il en est de même pour $(A, \mathcal{T}_A^*)$. Soit ensuite $w_{IA^+}^* : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ la fonction de Samuel asymptotique de IA^+ ; au vu de la remarque 12.96(iii), afin de vérifier que $(A, \mathcal{T}_A^*)$ est uniforme, et que $(A, \mathcal{T}_A^*)^\circ = A^+$, il suffit de montrer :

$$(**) \quad w_{IA^+}^* = w_I^*.$$

Pour cela on raisonne comme dans la solution du problème 10.18(xii) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (iii) : Noter d'abord que tout morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{A}$ est un homomorphisme adique (proposition 9.80(iv)) ; ainsi, il existe des sous-anneaux de définition $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ avec $f(A_0) \subset B_0$, et un idéal de définition $I \subset A_0$ tel que $J := f(I)B_0$ soit un idéal de définition de B_0 . Soient alors $w_I : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ et $w_J : B \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ les fonctions d'ordre associées à (A_0, I) et respectivement (B_0, J) , et $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_\circ$ (resp. $w_J^* : B \rightarrow \mathbb{R}_\circ$) la fonction de Samuel asymptotiques de I (resp. de J) ; évidemment $w_J(f(a)) \geq w_I(a)$ pour tout $a \in A$, donc $w_J^*(f(a)) \geq w_I^*(a)$ pour tout tel a . Par suite, f est aussi un homomorphisme continu d'anneaux topologiques $(A, \mathcal{T}_A^*) \rightarrow (B, \mathcal{T}_B^*)$; on obtient ainsi un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ par les associations : $A \mapsto (A, \mathcal{T}_A^*)$ et $f \mapsto f$ pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et tout morphisme f de $\mathcal{A}$. En outre, (**) entraîne aussitôt que la restriction $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ de F coïncide avec $1_{\mathcal{B}}$, et noter que l'identité de A est un morphisme $\eta_A : A \rightarrow (A, \mathcal{T}_A^*)$ de $\mathcal{A}$, pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; il s'ensuit aisément que $\eta_\bullet$ est l'unité d'une unique adjonction pour le couple (F, G) : les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Partie (iv) : Si A est analytique et uniforme, on vient de voir que $FA = A$, donc $A^\circ = A^+$ est un sous-anneau de définition de A , en particulier il est une partie bornée de A . Réciproquement, si A° est une partie bornée de A , alors il est aussi un sous-anneau de définition (proposition 9.71), et IA° est évidemment un idéal de définition, i.e. la topologie de A est la topologie $\mathcal{T}_A^\circ$ du problème 10.18(xii), d'où $A^+ = A^\circ$; la preuve de (ii) montre alors que $FA = A$, donc A est uniforme.

Exercice 12.108 : La preuve est analogue à celle du corollaire 6.116(ii) : soit $U \subset \text{Spv } B$ une partie ouverte ; on doit montrer que $V := (\text{Spv } f)(U)$ est une partie ouverte de $\text{Spv } A$, et on est ramené aisément au cas où U est une partie constructible de $\text{Spv } B$. La partie V est alors constructible dans $\text{Spv } A$ (théorème 12.103), et d'après le corollaire 4.67(ii) il suffit de montrer que tout point de $\text{Spv } A$ générant un point de V est aussi dans V . Mais cela est clair, car $\text{Spv } f$ est générante (théorème 8.112(ii)), et car U contient toutes les

générisations de ses points.

Problème 12.109 : Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , et w une valuation de $\bar{K}$ prolongeant v (exercice 8.25(ii)); posons $f_{\bar{K}} := \bar{K} \otimes_K f : \bar{K} \rightarrow A_{\bar{K}} := \bar{K} \otimes_K A$, $\text{Spv}(w, A_{\bar{K}}) := (\text{Spv } f_{\bar{K}})^{-1}(w)$, et considérons le diagramme commutatif induit :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spv } A_{\bar{K}} & \xrightarrow{\psi} & \text{Spv } A \\ \text{Spv } f_{\bar{K}} \downarrow & & \downarrow \text{Spv } f \\ \text{Spv } \bar{K} & \longrightarrow & \text{Spv } K. \end{array}$$

Rappelons que la topologie constructible de $\text{Spv}(v, A)$ est induite par celle de $\text{Spv } A$ (exemple 4.58); soit alors $Q \subset \text{Spv } A$ une partie constructible avec $Q \cap \text{Spv}(v, A) \neq \emptyset$; noter que $\psi^{-1}(Q) \cap \text{Spv}(w, A_{\bar{K}}) \neq \emptyset$ (exercice 8.104(iii)), et $\psi^{-1}(Q)$ est une partie constructible de $\text{Spv } A_{\bar{K}}$ (remarque 4.59(ii)). Or, si $w' \in \psi^{-1}(Q) \cap \text{Spv}(w, A_{\bar{K}}) \cap \sigma_{A_{\bar{K}}}^{-1}(\text{Max } A_{\bar{K}})$, il vient $\psi(w') \in Q \cap \text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A)$ (corollaire 6.18(i)); ainsi, il suffit de montrer que $\text{Spv}(w, A_{\bar{K}}) \cap \sigma_{A_{\bar{K}}}^{-1}(\text{Max } A_{\bar{K}})$ est dense dans la topologie constructible de $\text{Spv}(w, A_{\bar{K}})$. On peut donc supposer que K soit un corps algébriquement clos. Pour quelque $n \in \mathbb{N}$ on a un homomorphisme surjectif de K -algèbres $g : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$, et $\text{Spec } g$ (resp. $\text{Spv } g$) identifie $\text{Spec } A$ (resp. $\text{Spv } A$) avec une partie fermée constructible de $\text{Spec } K[X_1, \dots, X_n]$, d'après la remarque 1.45(i) (resp. de $\text{Spv } K[X_1, \dots, X_n]$, d'après l'exercice 8.104(ii)). Au vu du lemme 6.111, cela nous ramène aisément au cas où $A = K[X_1, \dots, X_n]$, et on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'assertion est triviale pour $n = 0$. Soient ensuite $A = K[X]$ la K -algèbre des polynômes à une indéterminée, $Q \subset \text{Spv } A$ une partie constructible, $w \in Q \cap \text{Spv}(v, A)$, et montrons que $Q \cap \text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A) \neq \emptyset$. Cela est clair si $\sigma_A(w) \in \text{Max } A$; soit donc $\sigma_A(w) = \{0\} \subset A$. On peut supposer que $Q = R_A\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_m}{b_m}\right) \setminus \left(R_A\left(\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right) \cup \dots \cup R_A\left(\frac{a_p}{b_p}\right)\right)$ pour certains $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \in A$ (remarque 8.103(i)) et on peut aussi supposer que $a_i, b_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$ (les détails sont laissés aux soins du lecteur). Munissons $\Gamma_{w \circ \sigma} := \Gamma_w \cup \{-\infty, +\infty\}$ de l'ordre total qui prolonge l'ordre de Γ_w et tel que $-\infty < \gamma < +\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma_w$. Notons par $(K^+, \mathfrak{m})$ l'anneau de valuation de v , et par $\Sigma \subset K$ l'ensemble des racines des polynômes $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$.

• Si $\Sigma = \emptyset$, on a $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \in K$ et $v \in R_K\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_m}{b_m}\right) \setminus \left(R_K\left(\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right) \cup \dots \cup R_K\left(\frac{a_p}{b_p}\right)\right)$; alors, $\text{Spv}(v, A) \subset Q$, d'où l'assertion. Si $\Sigma \neq \emptyset$, posons

$$\rho := \max(w(X - \alpha) \mid \alpha \in \Sigma) \in \Gamma_w \quad \Sigma_0 := \{\alpha \in \Sigma \mid w(X - \alpha) = \rho\}$$

et $r := \min(v(\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \Sigma_0) \in \Gamma_{w \circ \sigma}$; soient $s, s' \in \Sigma_0$ avec $v(s - s') = r$, et

$$R := \begin{cases} \max(v(\alpha - \beta) \mid \alpha \in \Sigma_0, \beta \in \Sigma \setminus \Sigma_0) & \text{si } \Sigma \neq \Sigma_0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 12.135. (i) $v(\alpha - \beta) = w(X - \beta)$ pour tous $\alpha \in \Sigma_0$ et $\beta \in \Sigma \setminus \Sigma_0$.

(ii) $R < \rho \leq r$.

Démonstration. On a $\rho = w(X - s) \geq \min(w(X - s'), v(s - s')) = \min(\rho, r)$, et d'autre part $v(\alpha - \beta) = \min(w(X - \beta), w(\alpha - X)) = w(X - \beta)$ si $\beta \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ et si $\alpha \in \Sigma_0$ (remarque 8.8(i,ii)), d'où les assertions. $\square$

• Supposons d'abord que $r = \rho$; en particulier, $s \neq s'$. On considère la bijection $\phi : K \xrightarrow{\sim} K$ telle que $\phi(x) := (x - s)/(s' - s)$ pour tout $x \in K$; noter que $v(x - s) \geq r \Leftrightarrow v(\phi(x)) \geq 0$, donc $\phi(\Sigma_0) \subset K^+$. Soit $\pi_v : K^+ \rightarrow k(\mathfrak{m})$ la projection; d'après l'exercice 8.15(iv), le corps $k(\mathfrak{m})$ est algébriquement clos, donc il existe $t \in K$ tel que $\phi(t) \in K^+$ et $\pi_v \circ \phi(t) \notin \pi_v \circ \phi(\Sigma_0)$. Cela revient à dire que $v(t - \alpha) = r = w(X - \alpha)$ pour tout

$\alpha \in \Sigma_0$; de même, avec le lemme 12.135(i,ii) et la remarque 8.8(ii) il vient

$$v(t - \alpha) = \min(v(t - s), v(s - \alpha)) = v(s - \alpha) = w(X - \alpha) \quad \forall \alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_0.$$

Ainsi, $w(X - \alpha) = v(t - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, et cela entraîne aussitôt que $w(a_i) = v(a_i(t))$ et $w(b_i) = v(b_i(t))$ pour tout $i = 1, \dots, p$; par suite, la valuation $v_t : A \rightarrow \Gamma_{v_0}$ telle que $v_t(P(X)) := v(P(t))$ pour tout $P(X) \in A$ est dans $Q \cap \text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A)$.

• Supposons ensuite que $r > \rho$; si $\rho \in \Gamma_v$, choisissons $t \in K$ avec $v(t - s) = \rho$. Il vient $v(t - \alpha) = \min(v(t - s), v(s - \alpha)) = \rho = w(X - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_0$. De même, $w(X - \alpha) = v(s - \alpha) = \min(v(t - s), v(s - \alpha)) = v(t - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_0$, par le lemme 12.135(i,ii) et la remarque 8.8(ii). En raisonnant comme dans le cas précédent, on conclut encore que $v_t \in Q \cap \text{Spv}(v, A) \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A)$.

• En dernier lieu, supposons que $r > \rho$ et $\rho \notin \Gamma_v$. Pour tout $i = 1, \dots, p$, écrivons

$$a_i(X) = c_i \cdot \prod_{j=1}^{n_i} (X - x_{ij}) \quad b_i(X) = d_i \cdot \prod_{j=1}^{m_i} (X - y_{ij})$$

avec $c_i, d_i \in K$ et $x_{i1}, \dots, x_{in_i}, y_{i1}, \dots, y_{im_i} \in \Sigma$; notons par k_i la cardinalité de $\Sigma_i := \{1 \leq j \leq n_i \mid x_{ij} \in \Sigma_0\}$, par k'_i la cardinalité de $\Sigma'_i := \{1 \leq j \leq m_i \mid y_{ij} \in \Sigma_0\}$, et soit $\Delta_i := \{1, \dots, n_i\} \setminus \Sigma_i$ (resp. $\Delta'_i := \{1, \dots, m_i\} \setminus \Sigma'_i$). Cela posé, on a :

$$w(a_i) = k_i \rho + v(c_i) + \gamma_i \quad w(b_i) = k'_i \rho + v(d_i) + \gamma'_i \quad \forall i = 1, \dots, p$$

avec $\gamma_i := \sum_{j \in \Delta_i} v(x_j - s)$ et $\gamma'_i := \sum_{j \in \Delta'_i} v(y_j - s)$. La condition $w \in Q$ revient au système d'inégalités suivantes, pour tous $i = 1, \dots, m$ et $j = m+1, \dots, p$:

$$(*) \quad (k_i - k'_i) \rho \geq \lambda_i := v(d_i/c_i) + \gamma'_i - \gamma_i \quad \text{et} \quad (k_j - k'_j) \rho < \lambda_j := v(d_j/c_j) + \gamma'_j - \gamma_j.$$

Mais noter que si $k_i - k'_i \neq 0$, aussi la première inégalité de (*) est stricte, car $\rho \notin \Gamma_v$. Soit alors S l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, p\}$ tels que $k_i - k'_i \neq 0$, et pour tout $i \in S$ soit $\lambda'_i := (k_i - k'_i)^{-1} \lambda_i$; noter que Γ_v est divisible, car K est algébriquement clos, donc $\lambda'_i \in \Gamma_v$ pour tout $i \in S$. Soient en outre $S_+ := \{i \in S \mid \lambda'_i > \rho\}$ et $S_- := \{i \in S \mid \lambda'_i < \rho\}$, et posons $R' := \max(\lambda'_i \mid i \in S_-)$ et $r' := \min(\lambda'_i \mid i \in S_+)$ (où le maximum de l'ensemble vide est $-\infty$, et le minimum de l'ensemble vide est $+\infty$); on voit aisément que le système (*) équivaut à l'inégalité :

$$(**) \quad R' < \rho < r'.$$

Or, soit $t \in K$ avec $\max(R, R') < \rho_t := v(t - s) < \min(r, r')$, et définissons la valuation $v_t : A \rightarrow \Gamma_{v_0}$ comme ci-dessus. On a : $v(t - \alpha) = \min(\rho_t, v(s - \alpha)) = v(s - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ et $v(t - \alpha) = \rho_t$ pour tout $\alpha \in \Sigma_0$; ainsi :

$$v_t(a_i) = k_i \rho_t + v(c_i) + \gamma_i \quad v_t(b_i) = k'_i \rho_t + v(d_i) + \gamma'_i \quad \forall i = 1, \dots, p$$

et évidemment $v_t \in Q$ si et seulement si les inégalités (*) sont satisfaites avec ρ remplacé par ρ_t . Mais par construction, l'inégalité (**) est satisfaite avec ρ remplacé par ρ_t , donc $v_t \in Q$. Cela achève l'analyse du cas où $n = 1$.

• Ensuite, soit $n > 1$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour $A' := K[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Soient $K \xrightarrow{i_{n-1}} A' \xrightarrow{j} A := K[X_1, \dots, X_n]$ les inclusions, et posons $\text{Spv}(v, A') := (\text{Spv } i_{n-1})^{-1}(v) \subset \text{Spv } A'$; la partie $Q' := (\text{Spv } j)(Q)$ est constructible dans $\text{Spv } A'$ (théorème 12.103), et $Q' \cap \text{Spv}(v, A') \neq \emptyset$, car $Q \cap \text{Spv}(v, A) \neq \emptyset$. Par hypothèse de récurrence il existe alors $v' \in Q' \cap \text{Spv}(v, A') \cap \sigma_{A'}^{-1}(\text{Max } A')$. Il suffit alors de montrer que $Q \cap (\text{Spv } j)^{-1}(v') \cap \sigma_A^{-1}(\text{Max } A) \neq \emptyset$. Notons par $\mathfrak{m}' \subset A'$ le support de v' , et par $\bar{v}' : k(v') \rightarrow \Gamma_{v'_0}$ la valuation résiduelle de v' ; posons $C := k(v') \otimes_{A'} A$ et soit $i_C : k(v') \rightarrow C$ l'homomorphisme naturel. Alors $\text{Spec } C$ s'identifie naturellement avec $V(\mathfrak{m}'A) \subset \text{Spec } A$ (voir §3.4.2), et $\text{Spv } C$ s'identifie avec $\sigma_A^{-1}(V(\mathfrak{m}'A)) \subset \text{Spv } A$ (exercice 8.104(ii)); sous ces identifications, $Q \cap \sigma_A^{-1}(V(\mathfrak{m}'A))$ et $\text{Spv}(\bar{v}', C) := (\text{Spv } i_C)^{-1}(\bar{v}') \subset \text{Spv } C$ correspondent respectivement à une partie constructible R de $\text{Spv } C$ et à $(\text{Spv } j)^{-1}(v')$, de sorte que $R \cap \text{Spv}(\bar{v}', C) \neq \emptyset$. On est ainsi ramené à vérifier que $R \cap \text{Spv}(\bar{v}', C) \cap \sigma_C^{-1}(\text{Max } C) \neq \emptyset$. Mais d'après la proposition 6.78(ii) on a $k(v') = K$, d'où un isomorphisme de K -algèbres :

$C \xrightarrow{\sim} K[X_n]$, donc l'assertion est déjà connue depuis le cas $n = 1$.

Exercice 12.110 : On considère d'abord le cas où $D = X(a, b)$ et $D' = X(a', b')$ sont des o-disques avec $b, b' \neq 0$, et disons que $v(b) \geq v(b')$. Soit donc $w \in D \cap D'$; cela revient à dire que $w(T - a) \geq v(b)$ et $w(T - a') \geq v(b')$, d'où $v(a - a') = w(a - a') = w((a - T) + (T - a')) \geq v(b')$, et par suite $u(T - a') = u((T - a) + (a - a')) \geq v(b')$ pour tout $u \in D$, i.e. $D \subset D'$.

Ensuite, soient $D = X(a, b)$ et $D' = Y(a', b')$; si $b = 0$ ou $b' = 0$, l'assertion est triviale, donc supposons que $b, b' \neq 0$. Si $v(b) > v(b')$, en raisonnant comme dans le cas précédent on trouve $v(a - a') > v(b')$, et alors $D \subset D'$. Si $v(b) \leq v(b')$, on trouve $v(a - a') \geq v(b)$, d'où $u(T - a) = u((T - a') + (a' - a)) \geq v(b)$ pour tout $u \in D'$, i.e. $D' \subset D$. Les cas où D et D' sont des f-disques est analogue, et sera laissé aux soins du lecteur.

Problème 12.113, partie (i) : Pour tout $a \in K$, soit $w_a : K[T] \rightarrow \Gamma_v$ la valuation correspondante (notation du §12.5.1), et posons $\mathcal{F}_a := \mathcal{F}_{w_a}$; puisque $\{w_a\} = Y(a, 0)$, il est clair que w_a est l'unique $w \in \text{Spv}(v, K[T])$ avec $\mathcal{F}_w = \mathcal{F}_a$. On supposera ainsi que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_a$ pour tout $a \in K$. Montrons ensuite qu'il existe au plus un point $w \in \text{Spv}(v, K[T])$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$; noter d'abord que pour tout tel w on a $\text{Supp}(w) = \{0\}$, car sinon $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a$ pour quelque $a \in K$. Posons

$$\Delta_a := \{\gamma \in \Gamma_v \mid w(T - a) \geq \gamma\} \quad \Delta'_a := \{\gamma \in \Gamma_v \mid w(T - a) > \gamma\} \quad \forall a \in K.$$

On a $\Delta_a = \{v(b) \mid b \in K \text{ et } w \in X(a, b)\}$ et $\Delta'_a = \{v(b) \mid b \in K \text{ et } w \in Y(a, b)\}$, donc $\mathcal{F}$ détermine Δ_a et Δ'_a , pour tout $a \in K$. Evidemment $\Delta'_a \subset \Delta_a$; si $\Delta_a = \Delta'_a$ pour quelque $a \in K$, alors $\rho := w(T - a) \notin \Gamma_v$, et d'après l'exercice 8.25(iv) il vient $\Gamma_w = \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}\rho$, avec $\{\gamma \in \Gamma_v \mid \gamma < \rho\} = \Delta_a$, et $w = |\cdot|_{(a, \rho)}^v$. Si $\Delta_a \neq \Delta'_a$ pour tout $a \in K$, on a $w(T - a) \in \Gamma_v$, d'où $w(T - a) = \max(\Delta_a)$, pour tout $a \in K$; cela montre que $\mathcal{F}$ détermine $w(T - a)$ pour tout $a \in K$, d'où l'assertion.

• Or, soient $a \in K, b \in K^\times$; posons $\rho := v(b)$ et $\mathcal{F}_{(a, \rho)} := \{D \in \mathcal{D} \mid |\cdot|_{(a, \rho)}^v \in D\}$. Evidemment $X(a, b) \in \mathcal{F}_{(a, \rho)}$; si $X(a', b') \in \mathcal{F}_{(a, \rho)}$ pour quelque $a', b' \in K$, il vient $|T - a'|_{(a, \rho)}^v \geq v(b')$, i.e. $\min(\rho, v(a - a')) \geq v(b')$, d'où $K \cap X(a, b) \subset K \cap X(a', b')$. Au vu du problème 12.109, il s'ensuit que $X(a, b) \subset X(a', b')$. De même, on voit que si $Y(a', b') \in \mathcal{F}_{(a, \rho)}$, alors $X(a, b) \subset Y(a', b')$; finalement :

$$\mathcal{F}_{(a, \rho)} = \{D \in \mathcal{D} \mid X(a, b) \subset D\}.$$

• Supposons ensuite que $K \cap \bigcap_{D \in \mathcal{F}} D = \emptyset$ (noter que l'intersection d'une famille vide de parties de $\text{Spv}(v, K[T])$ est $\text{Spv}(v, K[T])$, donc cette condition entraîne que $\mathcal{F} \neq \emptyset$; en particulier, $\mathcal{F}(\Sigma) := \{D \in \mathcal{F} \mid D \cap \Sigma = \emptyset\} \neq \emptyset$ pour toute partie finie $\Sigma \subset K$, et on voit aisément que :

$$v(a - x) = v(a - x') \quad \forall a \in K, \forall D \in \mathcal{F}(\{a\}), \forall x, x' \in K \cap D$$

(les détails sont laissés au lecteur). Au vu de la condition (d) dans la définition 12.111, il vient plus précisément : $v(a - x) = v(a - x')$ pour tout $a \in K$ et tout $x, x' \in K \cap \bigcup_{D \in \mathcal{F}(\{a\})} D$. Soient alors $p(T) \in K[T] \setminus \{0\}$ et $\Sigma_p := \{a \in K \mid p(a) = 0\}$; il s'ensuit que $w(p) := v(p(x)) = v(p(x'))$ pour tous $x, x' \in K \cap \bigcup_{D \in \mathcal{F}(\Sigma_p)} D$. Posons aussi $w(0) := +\infty$, et montrons que l'association : $p(T) \mapsto w(p)$ pour tout $p(T) \in K[T]$ définit un point $w \in \text{Spv}(v, K[T])$. Pour cela soient $p(T), q(T) \in K[T]$; si $pq \neq 0$ et si $x \in K \cap \bigcup_{D \in \mathcal{F}(\Sigma_{pq})} D$, on a $w(p) = v(p(x)), w(q) = v(q(x)), w(pq) = v(p(x) \cdot q(x))$. De même, si $pq, p + q \neq 0$ et si $x \in K \cap \bigcup_{D \in \mathcal{F}(\Sigma_{pq} \cup \Sigma_{p+q})} D$, on a $w(p + q) = v(p(x) + q(x))$. Il s'ensuit aisément que $w(p \cdot q) = w(p) + w(q)$ et $w(p + q) \geq \min(w(p), w(q))$ pour tous $p, q \in K[T]$, d'où l'assertion. Montrons que $w \in D$ pour tout $D \in \mathcal{F}$. Pour cela, supposons d'abord que $D = X(a, b)$ pour certains $a, b \in K$, et prenons $D' \in \mathcal{F}(\{a\})$; noter que $a \in K \cap (D \setminus D')$, donc $D' \subset D$, d'après la condition (d) de la définition 12.111. Il vient $w(T - a) = v(x' - a)$ pour tout

$x' \in K \cap D'$ et $v(x - a) \geq v(b)$ pour tout $x \in K \cap D$, par suite $w(T - a) \geq v(b)$, d'où l'assertion. On raisonne de même si $D = Y(a, b)$. Ainsi, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_w$; mais si $D \in \mathcal{F}_w \setminus \mathcal{F}$, alors pour tout $D' \in \mathcal{F}$ on aurait $D' \not\subseteq D$, d'où $D \subset D'$ (exercice 12.110), et cela est absurde, car $K \cap \bigcap_{D' \in \mathcal{F}} D' = \emptyset$. Donc finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$.

• En dernier lieu, supposons que $\mathcal{F}$ ne soit ni de la forme $\mathcal{F}_a$, ni de la forme $\mathcal{F}_{(a, \rho)}$, pour aucun $a \in K$ et $\rho \in \Gamma_v$, et qu'il existe $x \in K \cap \bigcap_{D \in \mathcal{F}} D \neq \emptyset$. Dans ce cas, noter que pour tout $D \in \mathcal{F}$ il existe $b \in K$ tel que l'on a soit $D = X(x, b)$, soit $D = Y(x, b)$; en outre, si $D = X(x, b)$, on a aussi $Y(x, b) \in \mathcal{F}$, car sinon on aurait $Y(x, b') \notin \mathcal{F}$ pour tout $b' \in K$ avec $v(b') \geq v(b)$, et alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(x, v(b))}$, une contradiction. Posons $\Delta := \{v(b) \in \Gamma_v \mid Y(x, b) \in \mathcal{F}\}$. Evidemment, $\Delta = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{F} = \emptyset$, et si $\delta \in \Delta$, alors $\gamma \in \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma_v$ avec $\delta \geq \gamma$. On voit aisément qu'il existe un unique ordre total $\leq$ sur le groupe $\Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$ tel que $(\Gamma_v \oplus \mathbb{Z}, \leq)$ soit un groupe ordonné, l'inclusion canonique $\Gamma_v \rightarrow \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$ soit un morphisme de groupes ordonnés, et $\Delta = \{\gamma \in \Gamma_v \mid (\gamma, 0) < (0, 1)\}$: les détails sont laissés aux soins du lecteur. Soit w la valuation de Gauss $|\cdot|_{(x, (0, 1))}^v : K[T] \rightarrow (\Gamma_v \oplus \mathbb{Z})_{\circ}$. Soient $a, b \in K$; on a $w \in X(a, b) \Leftrightarrow w(T - a) = \min((0, 1), v(a - x)) \geq v(b) \Leftrightarrow v(b) \in \Delta$ et $v(a - x) \geq v(b)$, d'où $X(a, b) = X(x, b)$; de même, on vérifie aisément que $w \in Y(a, b) \Leftrightarrow Y(a, b) = Y(x, b)$ et $v(b) \in \Delta$. Ainsi, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$.

Partie (ii) : Soit $L \subset \text{Spv}(v, K[T])$ une partie constructible. pour tous $y \in L$ et $x \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus L$, on a $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$ d'après (i); si $\mathcal{F}_y \not\subseteq \mathcal{F}_x$, on trouve un disque D avec $y \in D$ et $x \notin D$. Si $\mathcal{F}_y \subset \mathcal{F}_x$, soit D un disque avec $x \in D$ et $y \notin D$; alors le disque perforé $\text{Spv}(v, K[T])^c \setminus D$ contient y et ne contient pas x . Rappelons que $\text{Spv}(v, K[T])^c$ est compact et séparé (théorème 4.54(ii)), et que L est une partie compacte de $\text{Spv}(v, K[T])^c$; il existe alors une réunion finie E de disques perforés avec $L \subset E$ et $x \notin E$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des réunions finies E de disques perforés avec $E \subset L$; il vient $L = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$, et $E \setminus L$ est une partie fermée de $\text{Spv}(v, K[T])^c$, pour tout $E \in \mathcal{E}$; au vu de l'exercice 1.26(i), il existe alors une partie finie $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ telle que $L = \bigcap_{E \in \mathcal{E}'} E$, d'où l'assertion (remarque 12.112(iii)).

Partie (iii) : La solution de (i) montre que $\Gamma_w = \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$, muni de l'unique ordre total $\leq$ tel que l'inclusion canonique $\Gamma_v \rightarrow \Gamma_v \oplus \mathbb{Z}$ soit un morphisme de groupes ordonnés, et avec $(\gamma, 0) > (0, 1)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_v$; en outre, on a $w(T) = (0, 1)$. Il vient alors $w(T - a) = (0, 1)$ pour tout $a \in K$, donc :

$$w(\sum_{i=0}^n a_i T^{n-i}) = (v(a_0), n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_0 \in K^\times, \forall a_1, \dots, a_n \in K.$$

Exercice 12.116, partie (i) : Soient D un o-disque, et $u, w \in \text{Spv}(v, K[T])$ vérifiant les conditions souhaitées; ainsi, le filtre associé $\mathcal{F}_u$ vérifie l'une des conditions (a), (b) du corollaire 12.115(i). Noter que $D \in \mathcal{F}_u$, car $u \in D$; par suite, si (i.a) est vérifiée, d'après le corollaire 12.115(ii) il existe $a \in K$ tel que $w = w_a$, et $w_a \in D$, contradiction. Donc, condition (i.b) doit être satisfaite, i.e. $\mathcal{F}_u = \{D' \in \mathcal{D} \mid X(a, b) \subset D'\}$ pour certains $a \in K, b \in K^\times$, et alors l'une des conditions (a), (b) du corollaire 12.115(iii) est vérifiée. Si (iii.a) est vérifiée, il existe $a' \in K \cap X(a, b)$ tel que $\mathcal{F}_w = \{D' \in \mathcal{D} \mid Y(a', b) \subset D'\}$; en particulier, $w \in Y(a', b)$; mais $Y(a', b) \subset X(a, b)$, contradiction. Donc, condition (iii.b) doit être satisfaite, i.e. $\mathcal{F}_w = \{D' \in \mathcal{D} \mid X(a, b) \subsetneq D'\}$, d'où l'assertion. En outre, puisque $u \in D$ et $w \notin D$, on a $X(a, b) \subset D$, mais on n'a pas $X(a, b) \subsetneq D$, i.e. $D = X(a, b)$, et $u = |\cdot|_{(a, v(b))}^v$, d'après la solution du problème 12.113(i).

Ensuite, soient $a, b \in K$ avec $D = Y(a, b)$, et $u \in D, w \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus D$ tels que u soit une spécialisation de w ; si $b = 0$, l'assertion découle de la proposition 12.114(ii). S'il existe $a' \in K, b' \in K^\times$ tels que $\mathcal{F}_u = \{D' \in \mathcal{D} \mid X(a', b') \subsetneq D'\}$, la proposition 12.114(iv) montre que $\mathcal{F}_w = \{D' \in \mathcal{D} \mid X(a', b') \subset D'\}$; mais $X(a', b') \subsetneq Y(a, b)$, car $u \in D$, et d'autre part $X(a', b') \not\subseteq Y(a, b)$, car $w \notin D$, contradiction. D'après la proposition 12.114(i), on peut ainsi supposer qu'il existe $a' \in K, b' \in K^\times$ tels que $\mathcal{F}_u = \{D' \in \mathcal{D} \mid Y(a', b') \subset D'\}$, et alors l'assertion découle de la proposition 12.114(iii), qui donne plus précisément $\mathcal{F}_w = \{D' \in \mathcal{D} \mid X(a', b') \subset D'\}$. En outre, il vient $Y(a', b') \subset D$, car

$u \in D$, et $X(a', b') \not\subseteq D$, car $w \notin D$; d'où $Y(a', b') = Y(a, b)$, i.e. $a' \in K \cap Y(a, b)$ et $v(b) = v(b')$, et en particulier $w = |\cdot|_{(a, v(b))}^v$, par la solution du problème 12.113(i).

Partie (ii) : Cela suit aussitôt de (i). Le corollaire 4.67 nous dit plus précisément que l'adhérence de $X(a, b)$ est $X(a, b) \cup \{w\}$ et l'intérieur de $Y(a, b)$ est $Y(a, b) \setminus \{u\}$.

Partie (iii) : Evidemment, tout o-disque perforé est ouvert dans $\text{Spv}(v, K[T])$. Réciproquement, soit $E \neq \emptyset$ un disque perforé; donc $E = D \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n)$, où $D_1, \dots, D_n \subsetneq D$ sont des disques avec $D_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour chaque $1 \leq i < j \leq n$ (exercice 12.110), et D est soit un disque non vide, soit $\text{Spv}(v, K[T])$. On suppose que E soit une partie ouverte de $\text{Spv}(v, K[T])$, et on doit vérifier que D n'est pas un f-disque et qu'aucun des D_i n'est un o-disque. Or, il est clair que si $D = Y(a, 0)$ pour quelque a , alors E est une partie ouverte contenue dans $Y(a, 0)$, i.e. $E = \emptyset$ (proposition 12.114(ii)), et on doit avoir $D = D_i$ pour quelque $i \in \{1, \dots, n\}$, contradiction. Supposons donc que $D = Y(a, b)$ avec $a \in K, b \in K^\times$; d'après (i) il existe un unique $w \in D$ avec une généralisation $u \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus D$. En outre, pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $D_i = X(a_i, b_i)$ ou $D_i = Y(a_i, b_i)$, avec $a_i \in K \cap Y(a, b)$ et $v(b_i) > v(b)$. Montrons que $w \notin D_1 \cup \dots \cup D_n$; il suffit de vérifier que $w \notin S := X(a_1, b_1) \cup \dots \cup X(a_n, b_n)$. Mais la solution de (i) montre que $u = |\cdot|_{(a, v(b))}^v$, donc $u \notin S$, et S est une partie ouverte de $\text{Spv}(v, K[T])$, d'où l'assertion. Finalement, on a alors $w \in E$ et $u \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus E$; cela est absurde, car par hypothèse E est une partie ouverte.

Ensuite, supposons que $D_i = X(a_i, b_i)$ pour quelque $i = 1, \dots, n$; la solution de (i) montre que $u := |\cdot|_{(a_i, v(b_i))}^v \in D_i$ admet une spécialisation $w \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus D_i$. Si $D = \text{Spv}(v, K[T])$, on a trivialement $w \in D$. Si $D = X(a, b)$, il vient $v(b) < v(b_i)$, et rappelons que Γ_v est divisible, car K est algébriquement clos; prenons alors $c \in K$ avec $v(b) < v(c) < v(b_i)$. Alors $D_i \subset Y(a_i, c) \subset D$, et comme $u \in D_i$, il vient $w \in Y(a_i, c)$. Ainsi, dans chaque cas on a $w \in D$. Montrons que $w \notin D_j$ si $j \neq i$. Or, si $D_j = X(a_j, b_j)$, noter que $u \notin D_j$, car $D_i \cap D_j = \emptyset$, donc $w \notin D_j$, car D_j est une partie ouverte. Soit donc $D_j = Y(a_j, b_j)$, et supposons par l'absurde que $u \notin D_j$ et $w \in D_j$; la solution de (i) montre alors que $u = |\cdot|_{(a_j, v(b_j))}^v$, d'où $v(a_i - a_j) \geq v(b_i) = v(b_j)$ (exercice 8.25(iii)). Mais cela est absurde, car $D_i \cap D_j = \emptyset$. Donc, on a encore $w \in E$ et $u \notin E$, et cela est absurde, car E est une partie ouverte.

En dernier lieu, si $E \neq \emptyset$ est une partie fermée de $\text{Spv}(v, K[T])$, montrons que D n'est pas un o-disque, et qu'aucun des D_i n'est un f-disque. Supposons par l'absurde que $D = X(a, b)$ avec $a \in K, b \in K^\times$; d'après (i) il existe $u \in D$ avec une spécialisation $w \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus D$, et la solution de (i) montre que $u = |\cdot|_{(a, v(b))}^v$ et $\mathcal{F}_u = \{D' \in \mathcal{D} \mid D \subset D'\}$. Par suite, $u \notin D_1 \cup \dots \cup D_n$, d'où $u \in E$ et $w \notin E$, contradiction. Ensuite, supposons que $D_i = Y(a_i, b_i)$ pour quelque $i = 1, \dots, n$; la solution de (i) montre que $u := |\cdot|_{(a_i, v(b_i))}^v \in \text{Spv}(v, K[T]) \setminus D_i$ admet une spécialisation $w \in D_i$. Si $D = \text{Spv}(v, K[T])$, évidemment $u \in D$; sinon, $D = Y(a, b)$ pour certains $a \in K, b \in K^\times$, et $v(b_i) > v(b)$. Choisissons $c \in K$ avec $v(b_i) > v(c) > v(b)$; alors $D_i \subset X(a_i, c) \subset D$, et comme $w \in D_i$, il vient $u \in X(a_i, c)$. Ainsi, dans chaque cas on a $u \in D$. Montrons que $u \notin D_j$ si $j \neq i$. Si $D_j = Y(a_j, b_j)$, noter que $w \notin D_j$, car $D_i \cap D_j = \emptyset$, donc $u \notin D_j$, car D_j est une partie fermée. Soit donc $D_j = X(a_j, b_j)$, et supposons par l'absurde que $u \in D_j$ et $w \notin D_j$; la solution de (i) montre alors que $u = |\cdot|_{(a_j, v(b_j))}^v$, d'où $v(a_i - a_j) \geq v(b_i) = v(b_j)$ (exercice 8.25(iii)). Mais cela est absurde, car $D_i \cap D_j = \emptyset$. Ainsi, il vient à nouveau $u \in E$ et $w \notin E$, encore une contradiction.

Exercice 12.117, partie (i) : Evidemment on a $E, E' \neq \emptyset$. Disons que

$$E = D \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_r) \quad E' = D' \setminus (D'_1 \cup \dots \cup D'_s)$$

pour des disques $D_1, \dots, D_r, D'_1, \dots, D'_s \neq \emptyset$ avec $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $1 \leq i < j \leq r$, et $D'_i \cap D'_j = \emptyset$ pour $1 \leq i < j \leq s$, et où D (resp. D') est soit un disque, soit $\text{Spv}(v, K[T])$, avec $D_1, \dots, D_r \subsetneq D$ et $D'_1, \dots, D'_s \subsetneq D'$. Soit en outre $k \leq n$ tel que $D \cap D'_k \neq \emptyset$ pour

$i = 1, \dots, k$, et $D \cap D'_i = \emptyset$ pour $i = k+1, \dots, s$, et posons

$$E'' := D' \setminus (\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^k (D_i \cap D'_j) \cup D'_{k+1} \cup \dots \cup D'_s).$$

Supposons d'abord que $E \cap E' \neq \emptyset$; par suite $D \cap D' \neq \emptyset$, et d'après l'exercice 12.110 on peut alors supposer que $D \subset D'$. Puisque $E \cap E' \neq \emptyset$, on ne peut pas avoir $D \subset D'_i$, pour aucun $i = 1, \dots, k$; donc $D'_1 \cup \dots \cup D'_k \subset D$ (exercice 12.110), et par suite $E \cup E' = E''$. Si $E \cap E' = \emptyset$, par hypothèse il existe $w \in (\overline{E} \setminus E) \cap E'$; ainsi, w est à la fois dans D' et dans l'adhérence de D dans $\text{Spv}(v, K[T])$, i.e. w est une spécialisation d'un point de D (corollaire 4.67(i)). Supposons d'abord que $w \notin D$; alors D est un o-disque (exercice 12.116(ii)), et $\mathcal{F}_w = \{B \in \mathcal{D} \mid D \subsetneq B\}$ (corollaire 12.115(iii)). En outre, l'unique générisation de w dans $\text{Spv}(v, K[T])$ est le point u avec $\mathcal{F}_u = \{B \in \mathcal{D} \mid D \subset B\}$. Ainsi, $D \subsetneq D'$ et $u \in E$ (corollaire 4.67(i)). Donc $u \notin E'$, et alors $u \in D'_i$ pour quelque $i \in \{1, \dots, k\}$, ainsi que $w \notin D'_i$; cela revient à dire que $D \subset D'_i$, et que D n'est pas strictement contenu dans D'_i , i.e. $D = D'_i$, et finalement

$$E \cup E' = D' \setminus (\bigcup_{j=1}^r D_j \cup \bigcup_{j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, s\}} D'_j).$$

En dernier lieu, si $w \in D$, alors $w \in D_i$ pour quelque $i \in \{1, \dots, r\}$, et l'unique générisation stricte u de w dans $\text{Spv}(v, K[T])$ n'est pas dans D_i , car $u \in E$ (corollaire 4.67(i)); ainsi $D_i = Y(a, b)$ pour quelque $a, b \in K$ (exercice 12.116(ii)). Si $b = 0$, on a $w = w_a$, et noter que $u \notin D'_1 \cup \dots \cup D'_s$, car $w \in E'$ (proposition 12.114(ii)); ainsi, $u \notin D'$, et d'après le corollaire 12.115(i), il s'ensuit que la partie $\{w\}$ n'est pas strictement contenue dans D' , et comme $w \in D'$, il vient $E' = D' = \{w\} = D_i$. Dans ce cas, on a alors $E \cup E' = D \setminus L$, avec $L := D_1 \cup \dots \cup D_{i-1} \cup D_{i+1} \cup \dots \cup D_r$. Si $b \neq 0$, on a $\mathcal{F}_u = \{B \in \mathcal{D} \mid X(a, b) \subset B\}$ et $\mathcal{F}_w = \{B \in \mathcal{D} \mid Y(a, b) \subset B\}$ (proposition 12.114(iii)); en particulier $Y(a, b) \subset D' \not\subset X(a, b)$, d'où $D' = Y(a, b) = D_i$, et finalement $E \cup E' = D \setminus (L \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_s)$.

Partie (ii) : L'existence d'une décomposition minimale $\mathcal{E}'$ de L est assurée par le problème 12.113(ii); soit $\mathcal{E}''$ une autre décomposition minimale de L , et soit n la cardinalité commune de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}''$, et prenons $E' \in \mathcal{E}''$ avec $E' \cap E \neq \emptyset$. Si $E \not\subset E'$, il existe $E'' \in \mathcal{E}'' \setminus \{E'\}$ avec $E'' \cap E \neq \emptyset$, et d'après (i) la partie $E''' := E \cup E' \cup E''$ est alors un disque perforé; mais alors $(\mathcal{E}'' \setminus \{E', E''\}) \cup \{E'''\}$ est une décomposition de L de cardinalité $< n$, contradiction. Si $E' \not\subset E$, noter que $E' \notin \mathcal{E}'$, car sinon $(\mathcal{E}' \setminus \{E, E'\}) \cup \{E \cup E'\}$ serait une décomposition de L avec cardinalité $< n$. Quitte à échanger les rôles de E et $\mathcal{E}'$ avec ceux de E' et $\mathcal{E}''$, on peut alors raisonner comme dans le cas précédent, pour obtenir encore une contradiction. Cela montre que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''$, mais alors $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$, car ces ensembles ont la même cardinalité finie.

Partie (iii) : Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ la décomposition minimale de L , et pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $\overline{E}_i$ l'adhérence de E_i dans $\text{Spv}(v, K[T])$. Avec (i) on voit aussitôt que $\overline{E}_i \cap E_j = \emptyset$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$ avec $i \neq j$. Or, si L est une partie fermée, noter que $L = \overline{E}_i \cup \bigcup_{j \neq i} E_j$, d'où $\overline{E}_i = E_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$; d'après l'exercice 12.116(iii), chaque E_i est alors un f-disque perforé. Ensuite, soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in E_i$ et $y \in \text{Spv}(v, K[T])$ une générisation de x ; si L est une partie ouverte, $y \in L$, donc $y \in E_j$ pour quelque $j \in \{1, \dots, n\}$, d'où $x \in E_i \cap \overline{E}_j$, et alors $i = j$, donc $y \in E_i$. Au vu du corollaire 4.67(ii), cela montre que E_i est une partie ouverte, donc E_i est un o-disque perforé, encore par l'exercice 12.116(iii).

RÉFÉRENCES

- [1] C.ANDRADAS, L.BRÖCKER, J.M.RUIZ, *Constructible sets in real geometry*, Springer Ergebnisse der Math. (1996).
- [2] M.ATYIAH ET I.G.MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).
- [3] V.BERKOVICH, *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*. AMS Math. Surveys and Monographs} 33 (1990).
- [4] I.BERTUCCIONI, *Fonctions réelles et dimension de Krull*, prépublication disponible à l'adresse http://sma.epfl.ch/~ojangure/Inta_Bertuccioni.html
- [5] B.BHATT ET P.SCHOLZE, *The pro-étale topology of schemes*, Astérisque 369 (2015) pp.99--201.
- [6] J.BOCHNAK, M.COSTE, M-F.ROY, *Géométrie algébrique réelle*, Springer Ergebnisse der Math. (1987).
- [7] F.BORCEUX, *Handbook of Categorical Algebra 2 -- Categories and Structures*, Cambridge U. Press (1994).
- [8] S.BOSCH, U.GÜNTZER, R.REMMERT, *Non-Archimedean Analysis*, Springer Grundle. der Math. Wiss. 261 (1984).
- [9] N.BOURBAKI, *Algèbre Commutative – Chapitre 7*, Hermann (1965).
- [10] K.BUZZARD, A.VERBERKMOES, *Stably uniform affinoids are sheafy*, J. Reine Angew. Math. 740 (2018) pp.25--40.
- [11] H.CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann (1967).
- [12] H.CARTAN ET S.EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press (1956).
- [13] E.D.CASHWELL ET C.J.EVERETT, *The ring of number-theoretic functions*, Pacific J. of Math. 9 (1959) pp.975--985.
- [14] D.A.COX, J.LITTLE ET D.O'SHEA, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Undergrad. Texts in Math. (2015).
- [15] E.DAVIS, *Ideals of the principal class, R-sequences and a certain monoidal transformation*, Pacific J. Math. 20 (1967) pp.197--205.
- [16] J.DIEUDONNÉ ET A.GROTHENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Publ.Math. de l'IHES 4,8,11,17,20,24,28,32 (1960--1967).
- [17] J.DUGUNDJI, *Topology*, Allyn and Bacon (1966).
- [18] J.A.EAGON ET D.G.NORTHCOTT, *Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them*, Proc. Roy. Soc. London 299 (1967) pp.188--204.
- [19] EAKIN P., *The converse to a well known theorem on Noetherian rings*, Math. Ann. 177 (1968) pp.278--282.
- [20] D.EISENBUD, *Subrings of Artinian and Noetherian Rings*, Math. Ann. 185 (1970) pp.247--249.
- [21] D.EISENBUD, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer GTM 150 (1995).
- [22] D.FERRAND, *Descente de la platitude par un homomorphisme fini*, C. R. Acad. Sciences Paris 269 (1969), pp.946--949.
- [23] D.FERRAND, *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. Math. France 131 (2003), pp.553--585.
- [24] E.FORMANEK, *Faithful noetherian modules*, Proc. of the AMS 41 (1973) pp.381--383.
- [25] E.FORMANEK ET V.JATEGAONKAR, *Subrings of noetherian rings*, Proc. of the AMS 46 (1974) pp.181--186.
- [26] P.J.FREYD, *Abelian Categories, an Introduction to the Theory of Functors*, Harper & Row (1964).
- [27] K.FUJIWARA, *Rigid geometry and étale cohomology of schemes*, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku 1073 (1998), pp.168--191.
- [28] K.FUJIWARA ET F.KATO, *Rigid Geometry and applications*, Adv. Studies in Pure Math., 45 (2006), pp.325--384.
- [29] K.FUJIWARA, F.KATO ET O.GABBER, *On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry*, J. of Algebra, 332 (2011) pp.293--321.
- [30] O.GABBER, L.RAMERO, *Almost Ring Theory*, Springer LNM 1800 (2003).
- [31] O.GABBER, L.RAMERO, *Almost rings and perfectoid spaces*, prépublication disponible à l'adresse <http://math.univ-lille1.fr/~ramero/hodge.pdf>
- [32] L.GILLMAN ET M.JERISON, *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand (1960).

- [33] V.E.GOVOROV, *On flat modules*, Sibirsk. Math. Zh. 6 (1965) pp.300--304.
- [34] A.GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku J. Math. 9 (1957), no.2, pp.119--221.
- [35] L.GRUSON ET M.RAYNAUD, *Critères de platitude et projectivité*, Invent. Math. 13 (1971) pp.1--89.
- [36] R.HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer GTM 52 (1977).
- [37] W.S.HATCHER, *The Logical Foundations of Mathematics*, Pergamon Press (1982).
- [38] M.HOCHSTER, *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), pp.43--60.
- [39] R.HUBER, *Bewertungsspektrum und rigide Geometrie*, Regensburger Math. Schrift. 23 (1993).
- [40] R.HUBER, *Continuous valuations*, Math. Zeitschr. 212 (1993) pp.455--477.
- [41] R.HUBER, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Zeitschr. 217 (1994), pp.513--551.
- [42] R.HUBER ET M.KNEBUSCH, *On Valuation Spectra*, AMS Contemp. Math. 155 (1994) pp.167--206.
- [43] P.JOTHILINGAM, *Cohen's theorem and Eakin-Nagata theorem revisited*, Comm. in Alg. 28 (2000) pp.4861--4866.
- [44] M.KASHIWARA ET P.SCHAPIRA, *Categories and Sheaves*, Springer Grundle. der Math. Wiss. 332 (2006).
- [45] K.S.KEDLAYA, *Sheaves, stacks and shtukas*, Arizona Winter School on Perfectoid Spaces (2017).
- [46] D.K.KIM ET J.W.LIM, *The Cohen type theorem and the Eakin-Nagata type theorem for S-noetherian rings revisited*, Rocky Mount. J. of Math. 50 (2020) pp.619--630.
- [47] T.Y.LAM, *Lectures on Modules and Rings*, Springer Grad. Texts in Math. 189 (1999).
- [48] T.Y.LAM, *Serre's Problem on Projective Modules*, Springer Monographs in Math. (2006).
- [49] S.LANG, *Algebraic Number Theory*, Springer GTM 110 (1986).
- [50] D.LAZARD, *Autour de la platitude*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969) pp.81--128.
- [51] Q.LIU, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Univ. Press (2002).
- [52] S.MAC LANE, *Homology*, Springer Grundle.Math.Wiss. 114 (1963).
- [53] S.MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician -- Second Edition*, Springer GTM 5 (1997).
- [54] E.MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. of Math. 8 (1958) pp.511--528.
- [55] H.MATSUMURA, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Univ. Press (1986).
- [56] J.MILNOR, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton Univ. Press (1971).
- [57] M.NAGATA, *A remark on the unique factorization theorem*, J.Math. Soc. of Japan 9 (1957) pp.143--145.
- [58] M.NAGATA, *Finitely generated rings over a valuation ring*, J.Math. Kyoto Univ. (1966), pp.163--169.
- [59] M.NAGATA, *A type of subrings of a Noetherian ring*, J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968) pp.465--467.
- [60] A.R.NAGHIPOUR, *A simple proof of Cohen's theorem*, Amer. Math. Monthly 112 (2005) pp.825--826.
- [61] C.PESKINE, *Une généralisation du "main theorem" de Zariski*, Bull. Sci. Math. 90 (1966) pp.119--127.
- [62] HUNG LE PHAM, *Uncountable families of prime z-ideals in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$* , Bull. London Math. Soc. 41 (2009), no.2, pp.354--366.
- [63] R.S.PIERCE, *Associative algebras*, Springer GTM 88 (1982).
- [64] P.SCHOLZE, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. IHES 116 (2012) pp.245--313.
- [65] J.-P.SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61 (1955) pp.197--278.
- [66] S.SHELAH, *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*, Israel J. Math. 18 (1974), pp.243--256.
- [67] R.G.SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), pp.264--277.
- [68] R.G.SWAN, *Topological examples of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), pp.201--234.
- [69] R.G.SWAN, *Tarski's principle and the elimination of quantifiers*, prépublication disponible à l'adresse <http://www.math.uchicago.edu/~swan/expo/index.html>
- [70] W.VASCONCELOS, *On finitely generated flat modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969), pp.505--512.
- [71] O.ZARISKI, *Foundations of a general theory of birational correspondences*, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), pp.490--542.

INDEX

Algèbre, homomorphisme d'algèbres	1.1.1	page 2
Algèbre associative, alternée	3.89	page 197, 3.91 page 197
Algèbre de Rees $\mathcal{R}(A, I)$ de l'idéal $I \subset A$	9.5	page 615
Algèbre de Tate $\mathbb{T}_n := K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ sur un corps valué K	12.2.3	page 787
Algèbre de Tate : série X_n -distinguée de degré s d'une $-$	12.47	page 790
Algèbres de Tate : homomorphismes de substitution $\varepsilon_{x_\bullet} : \mathbb{T}_n \rightarrow \mathbb{T}_m$	12.2.4	page 789
Algèbre de type fini, de présentation finie	1.1.1	page 2
Algèbre entière, homomorphisme entier d'anneaux	6.23	page 395
Algèbre extérieure $\Lambda_A^\bullet(M)$ d'un A -module M	3.91	page 197
Algèbre fidèlement plate, homomorphisme fidèlement plat d'anneaux	3.73	page 191
Algèbre finie, homomorphisme fini d'anneaux	6.6	page 391
Algèbre géométriquement intègre sur un corps	6.119	page 426
Algèbre plate, homomorphisme plat d'anneaux	3.73	page 191
Algèbre symétrique $\text{Sym}_A^\bullet(M)$, tensorielle $\text{Tens}_A^\bullet(M)$ d'un module M	3.89	page 197
Algèbres : égaliseur d'une suite de morphismes de $-$	6.77	page 409
Algèbres : limite directe filtrante de $-$	2.31	page 88
Algèbres : produit de $-$, limite inverse de $-$	2.20	page 80, 2.22 page 81
Algèbres : produit fibré de $-$	2.23	page 82
Algèbres : produit tensoriel $B \otimes_A C$ de $-$	3.4	page 184
Anneau affinoïde $\underline{A} := (A, A^+)$	10.24	page 648
Anneau affinoïde à définition noethérienne	12.34	page 783
Anneau affinoïde analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau affinoïde fortement analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau affinoïde fortement noethérien	12.34	page 783
Anneau affinoïde uniforme, stablement uniforme	12.95	page 812
Anneau affinoïde topologiquement local, complét, séparé	10.24	page 648
Anneau affinoïde universellement analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau affinoïde : $\underline{A}$ -algèbre top. de présentation l-finie, c-finie	12.66	page 797
Anneau affinoïde : $\underline{A}$ -présentation top. l-finie, c-finie d'un $-$	12.66	page 797
Anneau affinoïde : l-domaine, c-domaine affinoïde de $\text{Spa } \underline{A}$	12.2	page 768
Anneau affinoïde : faisceau des fonctions algébriques $\mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}$	10.2.1	page 649
Anneau affinoïde : sous-faisceau des fonctions entières $\mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}^+$	10.2.1	page 649
Anneau affinoïde : valuation $ \cdot _v : \mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}} \rightarrow \Gamma_{\text{vo}}$ associée à $v \in \text{Spa } \underline{A}$	10.2.1	page 649
Anneau affinoïde : application du support $\sigma_{\underline{A}} : \text{Spa } \underline{A} \rightarrow \text{Spec } A$	10.2.1	page 649
Anneau affinoïde : centre $\sigma_{\underline{A}}^+(v) \subset A^+$ d'une valuation $v \in \text{Spa } \underline{A}$	10.2.2	page 651
Anneau affinoïde : domaine de Weierstrass de $\text{Spa } \underline{A}$	12.124	page 826
Anneau affinoïde : morphisme $\sigma_{\underline{A}}^+ : (\text{Spa } \underline{A}, \mathcal{O}_{\text{Spa } \underline{A}}^+) \rightarrow (\text{Spec } A)_{\text{na}}$	10.2.2	page 651
Anneau affinoïde : spectre adique $\text{Spa } \underline{A}$ d'un $-$	10.24	page 648
Anneau affinoïde : lieu analytique $\text{Spa}(\underline{A})_{\text{an}}$, non-analytique $\text{Spa}(\underline{A})_{\text{na}}$	10.24	page 648
Anneau affinoïde : localisation topologique $\underline{A}_{\text{loc}}$, complétion $\hat{\underline{A}}$ d'un $-$	12.1.1	page 767
Anneau affinoïde : préfaisceau $\hat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{A}}$ des fonctions adiques	12.1.4	page 773
Anneau affinoïde : préfaisceau $\hat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{A}}^+$ des fonctions adiques entières	12.1.4	page 773
Anneau affinoïde : morphisme $\text{Spa}(f)^b : \hat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{A}} \rightarrow \text{Spa}(f)_* \hat{\mathcal{O}}_{\text{Spa } \underline{B}}$	12.1.6	page 775
Anneau affinoïde : préfaisceaux $A_{\bullet}^{*+} \subset A^*$ sur le site $\star.\text{Dom}(\underline{A})$	12.1.2	page 770
Anneau affinoïde : préfaisceaux $A_{\bullet}^{r+} \subset A_r^*$ sur le site $\text{Rat}(\underline{A})$	12.1.4	page 773
Anneau affinoïde : morphisme $\phi^{*b} : A_{\bullet}^* \rightarrow \phi_* B_{\bullet}^*$ sur $\star.\text{Dom}(\underline{A})$	12.1.3	page 770
Anneau affinoïde : recouvrement de Laurent de $\text{Spa } \underline{A}$ associé à $f_{\bullet}$	12.4.4	page 804
Anneau affinoïde : recouvrement rationnel de $\text{Spa } \underline{A}$ associé à $f_{\bullet}$	12.4.4	page 804
Anneau affinoïde : sous-ensemble rationnel de $\text{Spa } \underline{A}$	10.24	page 648
Anneaux affinoïdes : morphisme $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ de $-$	10.24	page 648
Anneaux affinoïdes : application $\text{Spa}(f)$ associée à $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$	10.24	page 648
Anneaux affinoïdes : morphisme $(\text{Spa}(f), \text{Spa}(f)^{\sharp})$	10.29	page 650
Anneaux affinoïdes : morphisme adique de $-$	10.25	page 649
Anneaux affinoïdes : morphisme $\hat{\rho}_U : \underline{A} \rightarrow \hat{\underline{A}}_U$ c-représentant U	12.2, 12.3	page 768
Anneaux affinoïdes : morphisme $\rho_U : \underline{A} \rightarrow \underline{A}_U$ l-représentant U	12.2, 12.3	page 768

Anneaux affinoïdes : morphisme topologiquement de type l-fini, c-fini	12.66	page 797
Anneaux affinoïdes : morphisme top. de présentation l-finie, c-finie	12.66	page 797
Anneaux affinoïdes : surjection stricte de —	12.66	page 797
Anneau artinien	7.27	page 459
Anneau associatif unitaire : centre $Z(A)$ d'un —	1.14	page 7
Anneau associatif unitaire : quotient commutatif maximal $C(A)$ d'un —	1.1.4	page 5
Anneau caténaire	4.75	page 252
Anneau de Cohen-Macaulay	11.77	page 718, 11.83 page 720
Anneau de Dedekind	7.44	page 463
Anneau de Dirichlet des fonctions arithmétiques	11.138	page 743
Anneau de valuation discrète, valuation d'un —	7.38, 7.39	page 462
Anneau euclidien, anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$	1.37	page 15
Anneau factoriel	1.9	page 4
Anneau filtré $(A, A_\bullet)$, morphisme d'anneaux filtrés	9.64	page 600
Anneau filtré $(A, A_\bullet)$: topologie induite par $A_\bullet$ sur A	9.67	page 601
Anneau filtré : complétion $(\hat{A}, \hat{A}_\bullet)$ d'un —	9.67	page 601
Anneau gradué $\text{gr}_\bullet(A)$ associé à un anneau filtré $(A, A_\bullet)$	9.3.1	page 600
Anneaux gradués : morphisme $\text{gr}_\bullet(f)$ de — induit par f	9.65	page 600
Anneau Γ -gradué, $\mathbb{N}$ -gradué, composantes homogènes d'un —	1.1.6	page 8
Anneaux Γ -gradués : morphisme de —	1.1.6	page 8
Anneau intègre, principal, anneau des entiers $\mathbb{Z}$	1.1	page 1
Anneau intègre intégralement clos, anneau normal	6.6	page 391
Anneau intègre : normalisation d'un —	6.6	page 391
Anneau local $(A, \mathfrak{m})$, anneau semi-local	1.48	page 19
Anneau local régulier, anneau régulier	11.49	page 710, 11.106 page 729
Anneau noethérien	6.60	page 405
Anneau noethérien de dimension infinie (exemple de Nagata)	11.28	page 704
Anneau partiellement, totalement ordonné, partie convexe d'un —	8.33	page 510
Anneau partiellement ordonné : ordre induit sur A/I , pour I convexe	8.36	page 511
Anneau réduit	1.48	page 19
Anneau semi-normé, anneau semi-normé uniforme	8.12	page 503
Anneau topologique	9.1	page 579
Anneau topologique analytique	9.18	page 584
Anneau topologique analytiquement noethérien	12.20	page 777
Anneau topologique universellement analytiquement noethérien	12.20	page 777
Anneau topologique fortement analytiquement noethérien	12.31	page 782
Anneau topologique vérifiant la condition topologique de Artin-Rees	12.20	page 777
Anneau topologique de Huber, de Tate	9.70	page 602
Anneau de Huber à définition noethérienne	12.34	page 783
Anneau de Huber analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau de Huber fortement analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau de Huber fortement noethérien	12.34	page 783
Anneau de Huber universellement analytiquement noethérien	12.34	page 783
Anneau de Huber : algèbre analytiquement finie sur un —	12.39	page 785
Anneau de Huber : algèbre topologiquement de type l-fini, c-fini	12.57	page 792
Anneau de Huber : algèbre top. fortement de type l-fini, c-fini	12.57	page 792
Anneau de Huber : sous-anneau et idéal de définition d'un —	9.70	page 602
Anneau de Huber : lieu analytique X_A^{an} , non-analytique X_A^{na} d'un —	9.79	page 605
Anneau de Huber : localisation topologique A_{loc} d'un —	9.81	page 606
Anneau de Huber : sous-anneau d'éléments entiers d'un —	10.24	page 648
Anneau de Huber : sous-schéma ouvert $\underline{X}_A^{\text{an}}$ analytique d'un —	9.79	page 605
Anneau de Huber : topologies des anneaux de polynômes sur un —	9.4.1	page 608
Anneau de Huber : anneaux de séries de puissances sur un —	9.4.3	page 611
Anneau de Huber : rétraction canonique $r : \text{Spv } A \rightarrow \text{Spv}^* A$	10.8	page 643
Anneau de Huber : sous-espace $\text{Spv}^* A \subset \text{Spv } A$	10.7	page 642
Anneau de Huber : sous-ensemble rationnel de $\text{Spv}^* A$, de $\text{Cont}(A)$	10.7	page 642
Anneaux de Huber : morphisme adique de —	9.70	page 602

Anneaux de Huber : morphisme analytiquement fini de $-$	12.39	page 785
Anneaux de Huber : morphisme topologiquement de type l-fini, c-fini	12.57	page 792
Anneaux de Huber : morphisme top. fortement de type l-fini, c-fini	12.57	page 792
Anneaux de Huber : produit tensoriel topologique de $-$	9.83	page 607
Anneaux de Huber : produit tensoriel complété $B\widehat{\otimes}_A C$ de $-$	9.83	page 607
Anneau topologique complet	9.29	page 587
Anneau topologique topologiquement local	9.21	page 585
Anneau topologique : complétion d'un $-$	9.2.1	page 593
Anneau topologique : élément topologiquement nilpotent d'un $-$	9.18	page 584
Anneau topologique : partie bornée, à puissances bornées d'un $-$	9.18	page 584
Anneau topologique : partie A° des éléments à puissances bornées	9.18	page 584
Anneau topologique : partie $A^{\circ\circ}$ des éléments topol. nilpotents	9.18	page 584
Anneau topologique : spectre des valuations continues $\text{Cont}(A)$ d'un $-$	10.2	page 640
Anneau topologique : topologie adique, I -adique d'un $-$	9.13	page 583
Anneau topologique : valuations analytiques $\text{Cont}(A)_{\text{an}}$ d'un $-$	10.3	page 640
Anneau topologique : valuations non-analytiques $\text{Cont}(A)_{\text{na}}$ d'un $-$	10.3	page 640
Anneau topologique : valuation continue sur un $-$	10.2	page 640
Anneaux topologiques : application $\text{Cont}(f)$ associée à $f : A \rightarrow B$	10.3	page 640
Anneaux topologiques : applications $\text{Cont}(f)_{\text{an}}, \text{Cont}(f)_{\text{na}}$	10.3	page 640
Anneau : anneau total des fractions d'un $-$	7.22	page 457
Anneau : dimension de Krull $\dim A$	4.65	page 249
Anneau : élément entier sur un sous-anneau	6.1	page 390
Anneau : élément idempotent d'un $-$	3.100	page 213
Anneau : élément transcendant sur un sous-anneau	6.52	page 402
Anneau : élément M -régulier (pour un A -module M)	1.1.4	page 6
Anneau : élément nilpotent, diviseur de zéro, régulier d'un $-$	1.1	page 1
Anneau : élément premier, réductible, irréductible d'un $-$	1.9	page 4
Anneau : fermeture intégrale d'un sous-anneau	6.5	page 391
Anneau : groupe de Picard $\text{Pic } A$	4.112	page 269
Anneau : G -invariants A^G pour un groupe G avec action sur A	6.25	page 395
Anneau : localisation $S^{-1}A$, application de localisation $A \rightarrow S^{-1}A$	3.25	page 174
Anneau : localisation en un élément A_f , en un idéal premier $A_{\mathfrak{p}}$	3.26	page 176
Anneau : anneau opposé A^{op} d'un $-$, homomorphisme opposé f^{op}	1.1.4	page 5
Anneau : sous-anneau intégralement fermé, sous-anneau entier d'un $-$	6.6	page 391
Anneau : suite régulière d'un $-$	11.52	page 711
Anneaux : conducteur $\mathfrak{f}_{B/A}$ d'un homomorphisme injective de $-$	6.48	page 401
Anneaux : homomorphisme de type fini, de présentation finie de $-$	1.1.1	page 2
Anneaux : homomorphisme quasi fini, quasi-fini au point $\mathfrak{p}$ de $-$	6.34	page 398
Anneaux locaux : homomorphisme local de $-$	3.83	page 194
Anneaux locaux : relation de domination entre $-$	8.20	page 506
Anneaux de valuation d'un corps	8.1.1	page 504
Anneaux partiellement ordonnés : morphisme de $-$	8.33	page 510
Astuce de Scott	2.9	page 74
Axiomatique de Bernays-Gödel	1.5.1	page 39
Axiome du choix, axiome du choix global	1.3	page 14, 1.5.1 page 39
Bimodule sur un couple (A, B) d'anneaux	1.1.5	page 8
Bimodules : application (A, B, C) -bilinéaire	3.1.1	page 162
Bimodules : produit tensoriel $M \otimes_B N$	3.3	page 162
Caractères d'un groupe à valeurs dans un corps	1.4.2	page 29
Catégorie, objets, morphismes	1.5.2	page 39
Catégorie : biproduct $A_1 \oplus A_2$ de deux objets	2.73	page 107
Catégorie : changement de base $Z' \times_Z f$ d'un morphisme f	2.24	page 83
Catégorie : cône $c_X \rightarrow F$ de base F et sommet X	2.18	page 80
Catégorie : co-cône $F \rightarrow c_X$ de base F et sommet X	2.2.1	page 84
Catégorie : épimorphisme, monomorphisme	1.118	page 42
Catégorie : épimorphisme ou monomorphisme scindé	1.119	page 42
Catégorie : égaliseur, coégaliseur de morphismes	2.37	page 90

Catégorie : famille, petite famille d'objets d'une —	2.20	page 80
Catégorie : injections canoniques d'une somme amalgamée	2.26	page 84
Catégorie : intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, réunion $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ de sous-objets	2.3.1	page 94
Catégorie : isomorphisme	1.5.4	page 42
Catégorie : morphismes $\mathcal{C}(X, Y)$, source, but, loi de composition	1.5.2	page 39
Catégorie : morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}$, codiagonal $\nabla_{Y/X}$	2.66	page 104
Catégorie : morphisme identique 1_X	1.5.2	page 39
Catégorie : morphisme strict	2.68	page 105
Catégorie : noyau $\text{Ker } f$, conoyau $\text{Coker } f$, image $\text{Im } f$, coimage $\text{Coim } f$	2.4	page 104
Catégorie : objet initial, objet final, produit vide, coproduit vide	2.27	page 85
Catégorie : objet zéro, morphisme zéro	2.4	page 104
Catégorie : produit d'une famille d'objets $\prod_{i \in I} F_i$	2.20	page 80
Catégorie : produit fibré $Y \times_{(f,g)} Z$, $Y \times_X Z$, carré cartésien	2.23	page 82
Catégorie : projections canoniques d'un produit fibré	2.23	page 82
Catégorie : somme amalgamée $Y \sqcup_{(f,g)} Z$, $Y \sqcup_X Z$, carré cocartésien	2.26	page 84
Catégorie : somme directe (coproduit) d'une famille d'objets $\coprod_{i \in I} F_i$	2.26	page 84
Catégorie : sous-catégorie, sous-catégorie pleine	1.116	page 41
Catégorie : sous-objets $\text{Sub}(X)$, quotients $\text{Quot}(X)$ d'un objet X	2.8	page 73
Catégorie : sous-objets propres $S_1 \subsetneq S_2$	2.9	page 74
Catégorie : système filtrant, cofiltrant d'une —	2.33	page 89
Catégories : équivalence de —	1.123	page 45
Catégories : produit de —	2.20	page 80
Catégorie additive, abélienne	2.80	page 110
Catégorie abélienne avec assez d'objets projectifs	7.5.1	page 474
Catégorie abélienne avec assez d'objets injectifs	7.61	page 476
Catégorie abélienne : enveloppe injective d'un objet d'une —	4.14	page 230
Catégorie abélienne : extension essentielle d'un objet d'une —	4.14	page 230
Catégorie abélienne : foncteurs de représentation linéaire Φ_X d'une —	4.1.2	page 227
Catégorie abélienne : foncteurs Ψ_X adjoints à gauche de Φ_X	4.8	page 227
Catégorie abélienne : générateur, cogénérateur d'une —	4.1	page 225
Catégorie abélienne : objet projectif, objet injectif d'une —	4.1	page 225
Catégorie abélienne : quotient $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ par une sous-catégorie épaisse	2.108	page 125
Catégorie abélienne : sous-catégorie exacte d'une —	4.1	page 225
Catégorie abélienne : sous-catégorie de Serre (ou épaisse) d'une —	2.108	page 125
Catégorie AlgMod des couples (anneau, module)	3.2.6	page 172
Catégorie $\text{C}(\text{AlgMod})$	10.41	page 659
Catégorie $\mathcal{C}_S$ associée à un ensemble S	1.114	page 40
Catégorie $\mathcal{C}_E$ associée à un ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$	1.114	page 40
Catégorie de Grothendieck	4.14	page 230
Catégorie de Grothendieck : sous-catégorie épique $\mathcal{E}$ d'une —	4.38	page 238
Catégorie de Grothendieck : objet de $\mathcal{E}$ -torsion d'une —	4.38	page 238
Catégorie de Grothendieck : sous-objet pur dans une —	4.38	page 238
Catégorie de Grothendieck : objet absolument pur d'une —	4.38	page 238
Catégories de Grothendieck : complétude des — avec générateur	4.28	page 235
Catégorie des A -algèbres alternées $A - \text{AlgAlt}$	3.91	page 197
Catégorie des A -algèbres associatives $A - \text{AlgAss}$	3.89	page 197
Catégorie des A -modules $A - \text{Mod}$, des A -algèbres $A - \text{Alg}$	1.114	page 40
Catégorie des (A, B) -bimodules $(A, B) - \text{Mod}$	1.114	page 40
Catégorie des A -modules projectifs de type fini $A - \text{Modptf}$	4.106	page 267
Catégorie des anneaux affinoïdes Afd	10.24	page 648
Catégorie des anneaux affinoïdes complets et séparés c.Afd	12.1.1	page 767
Catégorie des anneaux affinoïdes topologiquement locaux l.Afd	12.1.1	page 767
Catégorie des anneaux partiellement ordonnés poAnn	8.33	page 510
Catégorie des anneaux semi-normés AnNorm	8.12	page 503
Catégorie des anneaux semi-normés uniformes AnUni	8.12	page 503
Catégorie des anneaux topologiques $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}$	9.1	page 579
Catégorie $\mathbb{Z} - \text{AlgTop}_{B-\text{lin}}$ des anneaux avec topologie B -linéaire	9.2	page 580

Catégorie des petites catégories $\mathbf{Cat}$, des foncteurs $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$	1.127	page 46
Catégorie $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$	2.97	page 118
Catégorie des données de descente $\mathbf{Desc}(B, \mathbf{Mod}), \mathbf{Desc}(B, \mathbf{Alg})$	5.19	page 317
Catégorie des ensembles $\mathbf{Ens}$, des espaces topologiques $\mathbf{Top}$	1.114	page 40
Catégorie des ensembles partiellement ordonnés $\mathbf{PoEns}$	1.114	page 40
Catégorie des espaces adiques $\mathbf{EspAd}$	12.17	page 774
Catégorie des espaces annelés $\mathbf{EspAnn}$	5.39	page 332
Catégorie des espaces localement annelés $\mathbf{EsLocAn}$	5.2.3	page 336
Catégorie des espaces topologiques compacts et séparés $\mathbf{csTop}$	1.121	page 44
Catégorie des espaces topologiques totalement disconnexes $\mathbf{TDisc}$	4.77	page 252
Catégorie des espaces compacts totalement disconnexes $\mathbf{cTDisc}$	4.77	page 252
Catégorie des espaces topologiques spectraux $\mathbf{TopSp}$	4.77	page 252
Catégorie des faisceaux $\hat{T}$, des préfaisceaux $\hat{T}$ sur un espace topologique	4.83	page 255
Catégorie des faisceaux d'anneaux $\mathbb{Z}_{\hat{T}} - \mathbf{Alg}$, de A -modules $A_{\hat{T}} - \mathbf{Mod}$	4.83	page 255
Catégorie des préfaisceaux d'anneaux $\mathbb{Z}_{\hat{T}} - \mathbf{Alg}$	4.83	page 255
Catégorie des préfaisceaux de A -modules $A_{\hat{T}} - \mathbf{Mod}$	4.83	page 255
Catégorie des faisceaux $\widetilde{\mathcal{S}}$, des préfaisceaux $\widehat{\mathcal{S}}$ sur un site $\mathcal{S}$	5.34	page 330
Catégorie des fibrés vectoriels $T - \mathbf{FibVec}$ sur un espace T	4.125	page 274
Catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ des foncteurs additifs $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	2.71	page 107
Catégorie $\mathcal{A}^\dagger$ des foncteurs additifs $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$	4.1	page 225
Catégorie $\mathcal{A}^\dagger$: objet épique de $-$	4.35	page 237
Catégorie $\mathcal{A}^\dagger$: sous-catégorie $\mathbf{E}(\mathcal{A})$ des objets épiques de $-$	4.35	page 237
Catégorie $\mathcal{A}^\ddagger$ des foncteurs exacts à gauche $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$	4.1.5	page 242
Catégorie des groupes $\mathbf{Grp}$	1.114	page 40
Catégorie des A -modules topologiques $A - \mathbf{ModTop}$	9.1	page 579
Catégorie $A - \mathbf{ModTop}_{B-\mathrm{lin}}$ des A -modules avec topologie B -linéaire	9.2	page 580
Catégorie $\mathcal{O}_X - \mathbf{Mod}$ des $\mathcal{O}_X$ -modules sur un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$	5.52	page 339
Catégorie $\mathcal{O}_X - \mathbf{Qcoh}$ des $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents	5.57	page 341
Catégorie des morphismes $\mathbf{Morph}(\mathcal{C})$ d'une catégorie $\mathcal{C}$	2.69	page 105
Catégorie des parties ouvertes d'un espace topologique $\mathbf{Ouv}(T)$	4.3	page 254
Catégorie $\mathbf{Rep}(A)$ des parties ouvertes représentables de $\mathbf{Spec} A$	5.2.1	page 329
Catégorie $A - \mathbf{RésPr}$ des résolutions projectives des A -modules	7.5	page 474
Catégorie $A - \mathbf{RésInj}$ des résolutions injectives des A -modules	7.61	page 476
Catégorie $\mathbf{Cart}(\phi)$ des sections cartésiennes de π sur $\phi : \mathcal{S} \rightarrow A - \mathbf{Alg}$	5.14	page 316
Catégorie $\mathcal{V}$ des triples $(T, \widehat{\mathcal{O}}_T, (v_t \mid t \in T))$	12.1.5	page 774
Catégorie filtrante, cofiltrante	2.30	page 88
Catégorie finie, petite	1.113	page 40
Catégorie complète, finiment complète, I -complète	2.38	page 92
Catégorie cocomplète, finiment cocomplète, I -cocomplète	2.38	page 92
Catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, morphisme opposé f^{op}	1.5.3	page 41
Catégorie pré-additive	2.71	page 107
Complexe augmenté d'une résolution, augmentation d'une résolution	5.6	page 313
Complexe borné inférieurement, supérieurement, suite exacte courte	2.97	page 118
Complexe $M[j]_\bullet$ ou $M[j]^\bullet$ concentré en degré j	2.97	page 118, 5.10
Complexe d'Amitsur $\mathcal{A}m(f)_\bullet$	5.12	page 315
Complexe de Čech $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, augmenté $\check{C}^\bullet_{\mathrm{aug}}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$	5.1.8	page 324
Complexe de Čech des cochaînes alternées $\check{C}^\bullet_{\mathrm{alt}}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$	5.26	page 324
Complexe de Čech double $\check{C}^{\bullet\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathcal{F})$	8.5.2	page 554
Complexe de Koszul $K^\bullet_A(x_\bullet)$ d'une suite $x_\bullet$	11.4	page 721
Complexe de Koszul : homologie $H_i(x_\bullet, M)$ du $-$	11.4	page 721
Complexe de modules topologiques	12.71	page 801
Complexe de modules topologiques strict (en degré n)	12.71	page 801
Complexe de modules topologiques strictement acyclique (en degré n)	12.71	page 801
Complexes de modules topologiques : morphisme continu de $-$	12.71	page 801
Complexes de modules topologiques : homotopie continue de $-$	12.71	page 801
Complexe, différentielles d'un $-$, morphisme de complexes	2.96	page 117
Complexe double $(M_{\bullet\bullet}, d_{\bullet\bullet})$, triple $M_{\bullet\bullet\bullet}$ de $\mathcal{A}$	8.117, 8.5.1	page 546

Complexe double : complexe total $\text{Tot}(M_{\bullet\bullet})_{\bullet}$ d'un —	8.5.1 page 546
Complexe double : complexe total $\text{Tot}^{\Pi}(M_{\bullet\bullet})_{\bullet}$ d'un —	8.131 page 553
Complexe double : différentielles horizontales $d_{\bullet\bullet}^h$, verticales $d_{\bullet\bullet}^v$ d'un —	8.5 page 545
Complexe double : flip $\text{fl}(P)_{\bullet\bullet}$ d'un —	8.5.1 page 546
Complexe double : indexation cohomologique $(P^{\bullet\bullet}, d^{\bullet\bullet})$ d'un —	8.131 page 553
Complexes doubles : morphisme $f_{\bullet\bullet} : M_{\bullet\bullet} \rightarrow N_{\bullet\bullet}$ de —	8.5 page 545
Complexe exacte (acyclique) en degré i , complexe exact (acyclique)	2.96 page 117
Complexe scindé, scindage d'un —	5.1 page 311
Complexe : cycles $Z_i(M_{\bullet})$, bords $B_i(M_{\bullet})$, homologie $H_i(M_{\bullet})$ d'un —	2.5.1 page 120
Complexe : j -décalage $M_{\bullet}[j]$ ou $M[j]^{\bullet}$ d'un —	2.97 page 118, 5.10 page 314
Complexes de l'algèbre extérieure	11.91 page 724
Complexes : indexation cohomologique	5.10 page 314
Complexes : morphisme homotopiquement trivial de —	5.4 page 312
Complexes : morphismes homotopiquement équivalents de —	5.4 page 312
Complexes : produit tensoriel $M_{\bullet} \boxtimes_A N_{\bullet}$ et $M_{\bullet} \otimes_A N_{\bullet}$ de —	8.120 page 547
Complexes : suite exacte courte de —, suite exacte longue d'homologie	2.5.2 page 127
Conditions (R_i) et (S_i) de Serre	11.118 page 734
Cône, cône premier d'un anneau, support d'un —	8.66 page 525
Cône positif d'un anneau totalement ordonné	8.66 page 525
Conjecture de Whitehead et théorème de Shelah	7.75 page 485
Constructibilité de $\dim_{\bullet}(B/A) : \text{Spec } B \rightarrow \mathbb{N}$	11.86 page 721
Corps algébriquement clos	1.67 page 23
Corps algébriquement fermé dans une extension	1.62 page 22
Corps de caractéristique p : endomorphisme de Frobenius	1.4.1 page 25
Corps de caractéristique p : sous-corps K^{p^n} , extensions $K^{p^{-n}}$, $K^{p^{-\infty}}$	1.4.1 page 25
Corps de décomposition d'un polynôme	1.67 page 23
Corps des fractions d'un anneau entier $\text{Frac}(A)$	1.1.2 page 3
Corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, réels $\mathbb{R}$, complexes $\mathbb{C}$	1.1 page 1
Corps fini $\mathbb{F}_{p^n}$ de cardinalité p^n , clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_p$	1.94 page 33
Corps formellement réel, formellement réel clos	8.47 page 516
Corps parfait	1.72 page 25
Corps $\mathbb{Q}_p$, complétion p -adique de $\mathbb{Q}$, son sous-anneau $\mathbb{Z}_p$	9.55 page 596
Corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ d'un idéal premier, ou d'un anneau local	3.2.7 page 173
Corps résiduel formellement réel clos $\overline{k}(\mathfrak{p}, \leq)$ de $(\mathfrak{p}, \leq) \in \text{Spr } A$	8.70 page 526
Corps résiduels formellement réels clos de l'anneau $\mathcal{C}(T)$	8.61 page 522
Corps résiduel : partie λ -convexe de $(k(\mathfrak{p}), \leq_{\lambda})$	8.3.1 page 535
Corps résiduels : extension $f_{(\mathfrak{p})} : k(\mathfrak{p}') \rightarrow k(\mathfrak{p})$ de —	3.2.7 page 173
Corps résiduels : extension $\overline{f}_{(\mathfrak{p})} : \overline{k}(\mathfrak{p}', \leq) \rightarrow \overline{k}(\mathfrak{p}, \leq)$ de —	8.70 page 526
Corps totalement ordonné : clôture formellement réelle d'un —	8.57 page 520
Corps totalement ordonné : cône positif $C(K, \leq)$ d'un —	8.48 page 517
Corps : base de transcendance d'une extension de —	1.4.3 page 33
Corps : base de transcendance séparante d'une extension de —	1.4.3 page 33
Corps : cône, cône propre dans un —	8.47 page 516
Corps : cône ΣK^2 des sommes des carrés dans un —	8.48 page 517
Corps : clôture algébrique d'un —	1.67 page 23
Corps : clôture séparable K^s , perfection K^{perf} d'un —	1.82 page 28
Corps : correspondance de Galois pour une extension galoisienne de —	1.92 page 31
Corps : élément algébrique sur un —	1.62 page 22
Corps : élément séparable, inséparable, purement inséparable sur un —	1.77 page 26
Corps : degré $[E : K]$ d'une extension de —	1.62 page 22
Corps : degré de séparabilité $[E : K]_s$ d'une extension algébrique de —	1.77 page 26
Corps : degré de transcendance $\text{tr.deg}(E/K)$ d'une extension de —	1.100 page 35
Corps : extensions d'un —	1.4 page 22
Corps : extension algébrique, transcendante d'un —	1.62 page 22
Corps : extension algébrique séparable, inséparable d'un —	1.77 page 26
Corps : extension galoisienne d'un —	1.4.2 page 30
Corps : extension monogène, finiment engendré d'un —	1.64 page 22

Corps : extension normale d'un —	1.84	page 28
Corps : extension purement inséparable d'un —	1.77	page 26
Corps : extension séparable	1.110	page 38
Corps : extension séparablement engendré d'un —	1.4.3	page 33
Corps : extension transcendante pure d'un —	1.4.3	page 33
Corps : extensions K -linéairement disjointes d'un —	1.103	page 35
Corps : famille algébriquement libre dans une extension d'un —	1.4.3	page 33
Corps : familles K -linéairement disjointes dans une extension d'un —	1.103	page 35
Corps : fermeture algébrique d'un — dans une extension	1.65	page 23
Corps : fermeture galoisienne d'une extension séparable d'un —	1.90	page 30
Corps : fermeture normale d'une extension algébrique d'un —	1.87	page 29
Corps : fermeture séparable d'un — dans une extension algébrique	1.81	page 27
Corps : groupe de Galois $\text{Gal}(K/H)$ d'une extension de —	1.4.2	page 30
Corps : polynôme minimal d'un élément algébrique sur un —	1.64	page 22
Corps : sous-corps K^Γ invariant sous l'action d'un groupe Γ	1.4.2	page 30
Critère de Baer pour objets injectifs	4.20	page 231
Critère de Bass pour anneaux noethériens	6.70	page 407
Critère de MacLane pour extensions séparables de corps	1.108	page 37
Critère de normalité de Serre	11.121	page 734
Critère local de platitude	10.48	page 663
Dérivation d'une algèbre, formule de Leibniz	11.91	page 724
Descente fidèlement plate	5.23	page 321
Descente galoisienne, condition de cocycle	5.1.7	page 321
Descente : données de — relative à $f : A \rightarrow B$, morphisme de —	5.19	page 317
Déterminant $\Lambda_A^n P$ d'un A -module projectif P de rang fini n	7.48	page 464
Déterminant d'un complexe $\det_{\underline{X}} : K(\underline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\underline{X})$	11.5.3	page 738
Déviissage d'un module de type fini	7.11	page 453
Dimension des algèbres intègres de type fini sur un corps	6.82	page 410
Dimension de la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{C}(X)$	8.40	page 513, 8.41
Dimension locale $\dim_{\mathfrak{q}}(B/A)$ des fibres de $f : A \rightarrow B$	6.120	page 426, 11.86
Disque, o-disque $X(a, b)$, f-disque $Y(a, b)$ de $\text{Spv}(v, K[T])$	12.5.1	page 820
Disque perforé, o-disque perforé, f-disque perforé de $\text{Spv}(v, K[T])$	12.111	page 820
Disques de $\text{Spv}(v, K[T])$: filtre de —	12.111	page 820
Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$	1.1	page 1
Ensemble partiellement ordonné, totalement ordonné	1.30	page 13
Ensemble (partiellement) bien ordonné	1.33	page 14
Ensemble partiellement ordonné filtrant, cofiltrant	2.2.2	page 88, 2.32
Ensemble partiellement ordonné : élément maximal	1.30	page 13
Ensemble partiellement ordonné : ordre opposé, élément minimal	1.31	page 13
Ensemble partiellement ordonné : partie finale, cofinale	2.35	page 89
Ensembles partiellement ordonnés : morphisme de —	1.30	page 13
Ensembles : hiérarchie de Von Neumann des —, rang $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$	2.9	page 74
Enveloppe λ -convexe B^* d'un sous-anneau $B \subset k(\mathfrak{p}, \leq_\lambda)$	8.93	page 535
Espace adique associé à $\underline{A}$, espace adique affinoïde, espace adique	12.17	page 774
Espace annelé $(T, \mathcal{O}_T)$, faisceau structural $\mathcal{O}_T$ d'un —	5.38	page 332
Espace annelé : groupe de Picard $\text{Pic}(\underline{X})$ d'un —	11.123	page 735
Espace annelé : idéal de $\mathcal{O}_X$, idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$	5.67	page 344
Espace annelé : K -groupe $K(\underline{X})$ d'un —	11.5.2	page 736
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent sur un —, $\mathcal{O}_X \tilde{\otimes}_A M$	5.57	page 341
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module inversible sur un —	5.67	page 344
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module localement libre sur un —	5.57	page 341
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module localement projectif de type fini sur un —	5.57	page 341
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent de présentation finie	5.57	page 341
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent de type fini	5.57	page 341
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -sous-module $\mathcal{O}_X \cdot \mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{F}$	5.68	page 345
Espace annelé : $\mathcal{O}_X$ -sous-module $\Gamma_Z \mathcal{M}$ à support dans Z	5.63	page 343
Espace annelé : produit tensoriel $-\otimes_{\mathcal{O}_X} -$ de $\mathcal{O}_X$ -modules	5.56	page 341

Espace annelé : sous-espace annelé ouvert d'un $-$	5.40	page 333
Espace annelé : support $\text{Supp}(s)$ d'une section s d'un $\mathcal{O}_X$ -module	5.63	page 343
Espaces annelés : donnée et morphismes de recollement	5.4.1	page 347
Espaces annelés : limites inverses de $-$	5.51	page 338
Espaces annelés : morphisme $(f, f^\flat), (f, f^\sharp)$ de $-$	5.38, 5.39	page 332
Espaces annelés : recollement d'une famille de $-$	5.74	page 348
Espaces annelés : sous-espace annelé $Z \times_T (T, \mathcal{O}_T)$ associé à $Z \subset T$	5.40	page 333
Espace localement annelé, morphisme de $-$	5.46	page 336
Espaces localement annelés : limites cofiltrantes de $-$	5.51	page 338
Espace spectral, espace localement spectral	4.49	page 243
Espace spectral caténaire	4.75	page 252
Espace spectral : dimension de Krull $\dim T$	4.64	page 249
Espace spectral : hauteur d'un point $\text{ht}(t)$	4.65	page 249
Espace spectral : involution de Hochster T^*	4.71	page 251
Espace spectral : partie constructible, topologie constructible T^c	4.50	page 244
Espace spectral : partie pro-constructible, ind-constructible	4.50	page 244
Espace spectral : points minimaux $\text{Min } T$, points maximaux $\text{Max } T$	4.62	page 248
Espace topologique	1.19	page 9
Espace topologique connexe, disconnexe	1.19	page 9
Espace topologique complètement régulier	1.119	page 42
Espace topologique contractile	4.135	page 281
Espace topologique de type T_0	1.25	page 11
Espace topologique noethérien	6.105	page 422
Espace topologique séparé, compact, normal	1.25	page 11
Espace topologique totalement disconnexe, compactification canonique	4.77	page 252
Espace topologique : $\mathcal{A}$ -module, pré- $\mathcal{A}$ -module sur un $-$	5.52	page 339
Espace topologique : morphisme de $\mathcal{A}$ -modules, de pré- $\mathcal{A}$ -modules	5.52	page 339
Espace topologique : compactification de Stone-Čech d'un $-$	8.45	page 515
Espace topologique : composantes irréductibles d'un $-$	6.109	page 422
Espace topologique : fonctions continues à valeurs réelles $\mathcal{C}(T)$	1.2.1	page 11
Espace topologique : fonctions continues à valeurs discrètes $\mathcal{C}(T, \mathbb{F}_2)$	4.2.1	page 244
Espace topologique : germes de fonctions à valeurs réelles $\mathcal{C}_{T,t}$	4.95	page 264
Espace topologique : sous-espace d'un $-$	1.20	page 10
Espaces topologiques : produit de $-$, ouverts fondamentaux	2.20	page 80
Exemple de Rost	12.16	page 774
Extensions de Yoneda $\text{YExt}_A^1(M, N)$ de M par N	7.72	page 484
Faisceau, préfaisceau, préfaisceau séparé sur un espace topologique	4.83	page 255
Faisceau, préfaisceau à valeurs dans une catégorie	4.83	page 255
Faisceau $\mathcal{F}^a$ associé à un préfaisceau	4.88	page 259
Faisceau $\mathcal{C}_T$ des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace T	4.84	page 256
Faisceaux, préfaisceaux : foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$	4.3.1	page 257
Faisceaux, préfaisceaux : image directe $f_*\mathcal{F}$ et inverse $\hat{f}^{-1}\mathcal{F}, \tilde{f}^{-1}\mathcal{F}$	4.3.2	page 260
Faisceaux, préfaisceaux : morphisme de $-$	4.83	page 255
Faisceau, préfaisceau : fibre $\mathcal{F}_t$, foncteur fibre $(-)_t : \hat{T} \rightarrow \text{Ens}$	4.3.3	page 263
Fibré vectoriel sur un espace topologique, sous-fibré vectoriel	4.124	page 273
Fibré vectoriel trivial $\mathbb{R}^r \times T$ de rang r	4.5.1	page 275
Fibré vectoriel : image inverse f^*E d'un $-$, suivant $f : T' \rightarrow T$	4.134	page 281
Fibré vectoriel : trivialisation locale d'un $-$	4.124	page 273
Fibré vectoriel : rang $\text{rk}_E : T \rightarrow \mathbb{N}$	4.125	page 274
Fibré vectoriel : section d'un $-$	4.5.1	page 275
Fibrés vectoriels : morphisme de $-$	4.124	page 273
Fibrés vectoriels : rang $\text{rk}_g : T \rightarrow \mathbb{N}$ d'un morphisme $g : E \rightarrow E'$ de $-$	4.125	page 274
Filtre, filtre premier, ultrafiltre, ultrafiltre principal	1.134, 1.136	page 56
Filtre engendré par une partie, image directe d'un filtre $f_*\mathcal{F}$	1.136	page 56
Foncteur, foncteur fidèle, plein	1.5.5	page 43
Foncteur additif	2.71	page 107
Foncteur adjoint à droite, à gauche, adjonction de foncteurs	2.10	page 74

Foncteur adjoint : unité, coïunité, identités triangulaires	1.131 page 49, 2.13 page 77
Foncteur commutant avec une limite, avec une colimite	2.3 page 90
Foncteur commutant avec les limites cofiltrantes	2.38 page 92
Foncteur commutant avec les colimites filtrantes	2.38 page 92
Foncteur commutant avec les limites (resp. les colimites) petites	2.38 page 92
Foncteur commutant avec les produit (resp. les sommes directes) finies	2.42 page 93
Foncteur constant c_X de valeur X	2.2 page 79
Foncteur contravariant	1.121 page 44
Foncteur $c_I : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C})$, ses adjoints Lim_I et Colim_I	2.3.3 page 97, 2.58 page 100
Foncteur du spectre continu $\text{Cont} : (\mathbb{Z} - \text{AlgTop})^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$	10.3 page 640
Foncteur $\text{Ouv}(f) : \text{Ouv}(S) \rightarrow \text{Ouv}(T)$	4.3.2 page 260
Foncteur d'évaluation $\text{ev}_i : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$	2.56 page 100
Foncteur d'évaluation $\text{ev}^n : \text{C}(\text{AlgMod}) \rightarrow \text{AlgMod}$	10.42 page 660
Foncteur des noyaux $\text{Ker} : \text{Morph}(\text{AlgMod}) \rightarrow \text{AlgMod}$	10.42 page 660
Foncteur des résolutions $\mathcal{L}_\bullet : \text{AlgMod} \rightarrow \text{C}(\text{AlgMod})$	10.41 page 659
Foncteur des sections globales $\Gamma : \widehat{T} \rightarrow \text{Ens}$	4.83 page 255
Foncteur du spectre adique $\text{Spa} : \text{Afd}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$	10.24 page 648
Foncteur de Yoneda $h^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ens})$	2.2 page 70
Foncteur de Yoneda additif $h^{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathbb{Z} - \text{Mod})$	2.81 page 110
Foncteur exact à gauche, exact à droite, exact	2.38 page 92
Foncteur final, cofinal	2.53 page 97
Foncteur identique $1_{\mathcal{C}}$, composition de foncteurs $G \circ F$	1.121 page 43
Foncteur noyau et conoyau $\text{Ker}, \text{Coker} : \text{Morph}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$	2.69 page 105
Foncteur opposé F^{op}	1.122 page 45
Foncteur quasi-inverse	1.131 page 49
Foncteur représentable, couple universel, élément universel	2.3 page 70
Foncteur : catégorie des flèches à droite $F\mathcal{A}/\mathcal{B}$, à gauche $\mathcal{B}/F\mathcal{A}$ d'un $-$	2.12 page 76
Foncteur : extension de Kan à droite $\int_{\phi} F$, à gauche $\int^{\phi} F$ d'un $-$	2.62 page 101
Foncteur : sous-foncteurs d'un $-$	2.7 page 73
Foncteur : tranche d'un $-$ au-dessus $F\mathcal{A}/B$, au-dessous $B/F\mathcal{A}$ de B	2.12 page 76
Foncteurs dérivés à gauche $L^i F$ d'un foncteur additif F	7.61 page 476
Foncteurs dérivés à droite $R^i F$ d'un foncteur additif F	7.61 page 476
Foncteurs dérivés : suites exactes longues des $-$	7.68 page 481, 7.71 page 483
Foncteurs $\text{Ext}_A^i(M, -)$ dérivés à droite de $\text{Hom}_A(M, -)$	7.63 page 477
Foncteurs $\text{Tor}_i^A(M, -)$ dérivés à gauche de $M \otimes_A -$	7.62 page 477
Foncteurs $\text{Tor}_i : \text{AlgMod} \times_{\mathbb{Z} - \text{Alg}} \text{AlgMod} \rightarrow \text{AlgMod}$	10.3 page 655
Foncteurs $h_U : \text{IAfd} \rightarrow \text{Ens}$, $\widehat{h}_U : \text{c.Afd} \rightarrow \text{Ens}$ pour $U \subset \text{Spa } \underline{A}$	12.1.1 page 767
Foncteurs $\text{Rat}(f), \star, \text{Dom}(f)$ d'un morphisme adique $f : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$	12.1.3, 12.10 page 771
Foncteurs : colimite d'un foncteur $\text{colim}_I F$, co-cône universel	2.2.1 page 84
Foncteurs : isomorphisme de $-$	1.127 page 46
Foncteurs : limite d'un foncteur $\text{lim}_I F$, cône universel	2.18 page 80
Foncteurs : limites finies, colimites finies	2.38 page 92
Foncteurs : limite directe d'un système partiellement ordonné $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$	2.26 page 84
Foncteurs : limite inverse d'un système partiellement ordonné $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$	2.23 page 82
Foncteurs : monoïde $E(\mathcal{C})$ des endomorphismes du foncteur $1_{\mathcal{C}}$	1.128 page 47
Fonction d'ordre $w_I : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ associé au couple (A_0, I)	10.18 page 645
Fonction de Samuel asymptotique $w_I^* : A \rightarrow \mathbb{R}_o$ de l'idéal I	10.18 page 645
Formule de Molien	11.92 page 725
Groupe abélien ordonné $(\Gamma, \leq)$	8.1 page 501
Groupe abélien ordonné : partie positive $\Gamma^+ := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geq 0\}$	8.1 page 501
Groupe abélien ordonné : rang convexe d'un $-$	8.4 page 502
Groupe abélien ordonné : sous-groupe cofinal d'un $-$	10.1.1 page 641
Groupe abélien ordonné : sous-groupe convexe d'un $-$	8.1 page 501
Groupe abélien ordonné : spectre $\text{Spec } \Gamma$ d'un $-$	8.1 page 501
Groupe abélien ordonné : $\circ$ -topologie d'un $-$	10.1 page 640
Groupe abélien ordonné prolongé : $\Gamma_o := \Gamma \sqcup \{+\infty\}, \Gamma_o^+ := \Gamma^+ \sqcup \{+\infty\}$	8.1 page 501

Groupe abéliens ordonnés : morphisme $f : (\Gamma, \leq) \rightarrow (\Gamma', \leq)$ de $-$	8.1	page 501
Groupe abéliens ordonnés : morphisme prolongé $f_\circ : \Gamma_\circ \rightarrow \Gamma'_\circ$ de $-$	8.1	page 501
Groupe abéliens ordonnés : spectre $\text{Spec } f$ d'un morphisme f de $-$	8.1	page 501
Groupe abélien filtré $(G, G_\bullet)$, filtration $G_\bullet$ d'un $-$	9.3.1	page 600
Groupe abélien filtré : filtration exhaustive, séparée d'un $-$	9.3.1	page 600
Groupe abélien filtré $(G, G_\bullet)$: groupe gradué $\text{gr}_\bullet(G)$ associé à un $-$	9.3.1	page 600
Groupe abélien topologique	9.1	page 580
Idéal à gauche, à droite d'un anneau non commutatif	1.1	page 1
Idéal fractionnaire d'un anneau intègre	4.4.3	page 271
Idéal inversible, groupe $F(A)$ d'un anneau intègre	4.4.3	page 271
Idéal nilpotent	3.50	page 182
Idéal principal, de type fini	1.1	page 1
Idéal premier, idéal maximal	1.1.3	page 3
Idéal premier minimal, partie $\text{Min } A$ de $\text{Spec } A$	1.61	page 22
Idéal radical, radical $\text{rad}(I)$ d'un idéal I	1.3.3	page 20
Idéal radical de Jacobson $\mathcal{J}(A)$, radical nilpotent (nilradical) $\mathcal{N}(A)$	1.48	page 19
Idéal d'une localisation $S^{-1}I$	3.3.1	page 177
Identité de Auslander-Buchsbaum	11.99	page 727
Lemme de Artin-Rees	9.100	page 615
Lemme chinois	1.60	page 21
Lemme des cinq	2.104	page 123
Lemme de Gauss, polynômes primitifs	1.39	page 15
Lemme de Hensel	9.57	page 596
Lemme de Nakayama	3.49	page 182
Lemme de normalisation de Noether	6.12	page 392
Lemme du serpent, application de bord ∂	2.106	page 123
Lemme de Stone	1.28	page 12
Lemme de Urysohn	1.27	page 12
Lemme de Yoneda	2.1	page 70
Lemme de Yoneda additif	2.82	page 111
Lemme de Zorn	1.32	page 14
Module à gauche, à droite sur un anneau non commutatif	1.1.4	page 5
Module analytiquement de type fini	12.20	page 777, 12.2.2 page 784
Module analytiquement de type fini : topologie canonique $\mathcal{T}_M^A$ d'un $-$	12.2.2	page 784
Module avec I -torsion bornée	12.20	page 777
Module artinien, noethérien	6.60	page 405, 7.27 page 459
Module de Cohen-Macaulay	11.77	page 718, 11.83 page 720
Module de dimension projective finie	11.94	page 725
Module de longueur finie, longueur $l_A(M)$ d'un $-$	11.1	page 695
Module de Rees $\mathcal{R}(M_\bullet)$ de la I -filtration $M_\bullet$	9.5	page 615
Module de type fini, cyclique, libre de rang fini, de présentation finie	1.13	page 7
Module de type fini : polynôme de Samuel $\chi_M(X)$ d'un $-$	11.1.2	page 701
Module de type fini : degré $d(M)$ de $\chi_M(X)$	11.1.2	page 701
Module de type fini : invariant $\delta(M)$ d'un $-$	11.2	page 702
Module de type $\mathcal{C}$ -fini, module $\mathcal{C}$ -noethérien	6.73	page 408
Module des endomorphismes $\text{End}_A(M)$	1.14	page 7
Module des homomorphismes $\text{Hom}_A(M, N)$	1.14	page 7
Module divisible	4.21	page 231
Module dual $M^\vee$, homomorphisme transposé $f^\vee$, base duale	1.125	page 45
Module dual : application de bidualité $M \rightarrow M^{\vee\vee}$	1.132	page 49
Module fidèle, module sans torsion	1.1.4	page 6
Module filtré $(M, M_\bullet)$ sur un anneau filtré, morphisme de $-$	9.64	page 600
Module filtré $(M, M_\bullet)$: topologie induite par $M_\bullet$ sur M	9.67	page 601
Module filtré : complétion $(\widehat{M}, \widehat{M}_\bullet)$ d'un $-$	9.67	page 601
Module gradué $\text{gr}_\bullet(M)$ associé à un module filtré $(M, M_\bullet)$	9.3.1	page 600
Modules gradués : morphisme $\text{gr}_\bullet(u)$ de $-$ induit par u	9.65	page 600
Module Γ -gradué, morphisme de modules Γ -gradués	1.1.6	page 8

Module $\mathbb{N}$ -gradué borné : série $P(M, t)$ de Hilbert-Poincaré d'un —	11.12	page 697
Module $\mathbb{N}$ -gradué borné : ordre du pôle $d(M)$ de $P(M, t)$ en $t = 1$	11.1.1	page 698
Module $\mathbb{N}$ -gradué borné : polynôme de Hilbert $H_M(X)$ d'un —	11.16	page 699
Module inversible	4.112	page 269
Module libre $A^{(\Lambda)}$, base canonique	1.12	page 6
Module plat, fidèlement plat	3.73	page 191
Module projectif : trace $\mathrm{tr}_{P/A} : \mathrm{End}_A(P) \rightarrow A$ d'un —	4.111	page 269
Module réflexif	7.52	page 465
Module simple	11.1	page 695
Module topologique	9.1	page 579
Module topologique complet	9.29	page 587
Module topologique : complétion d'un —	9.39	page 589
Module topologique : filet $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, filet de Cauchy dans un —	9.29	page 587
Module topologique : suites, suites de Cauchy dans un —	9.29	page 587
Module topologique : équivalence de filets dans un —	9.29	page 587
Module topologique : filet convergent, limite d'un filet	9.29	page 587
Module topologique : quotient maximal séparé M^{sep}	9.9	page 582
Module topologique : topologie $\mathbb{Z}$ -linéaire ou A -linéaire d'un —	9.2	page 580
Module topologique : système fondamental de sous-groupes ouverts	9.2	page 580
Module topologique : système fondamental de sous-modules ouverts	9.2	page 580
Module topologique : topologie canonique $\mathcal{T}_M^A$ d'un —	9.25	page 586
Module topologique : topologie définie par une famille de sous-groupes	9.10	page 582
Module topologique : topologie I -adique d'un —	9.13	page 583
Modules injectifs : classification de Matlis	7.12	page 454
Modules topologiques : morphisme strict de —	9.7	page 581
Module : annulateur $\mathrm{Ann}_A(M)$ d'un —, d'un élément $\mathrm{Ann}_A(x)$	1.1.4	page 6
Module : assassin $\mathrm{Ass}_A(M)$ d'un —	7.1	page 451
Module : décomposition primaire d'un —, support et longueur d'une —	7.17	page 455
Module : décomposition primaire non redondante d'un —	7.17	page 455
Module : dimension $\dim M$ d'un —	4.65	page 249
Module : dimension projective $\mathrm{proj.dim}_A M$ d'un —	11.94	page 725
Module : fibre $M(\mathfrak{p})$ d'un — au-dessus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$	3.2.7	page 173
Module : idéal premier associé à un —	7.1	page 451
Module : idéaux premiers associés isolés (resp. immergés) d'un —	7.21	page 456
Module : I -filtration, I -filtration stable d'un —	9.96	page 614
Module : le ruban de Möbius	4.105	page 267
Module : localisation $S^{-1}M$	3.3.2	page 179
Module : module opposé M^{op} d'un —, homomorphisme opposé g^{op}	1.1.4	page 5
Module : I -profondeur, Z -profondeur d'un —	11.66	page 715, 11.75 page 718
Module : rang $\mathrm{rk}_M : \mathrm{Spec} A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ d'un —	3.2.7	page 173
Module : résolution injective, injective minimale à droite d'un —	5.11	page 314
Module : résolution libre, plate à gauche d'un —	5.6	page 313
Module : résolution minimale d'un —	11.96	page 726
Module : série de composition d'un —	11.1	page 695
Module : sous-module $\mathfrak{p}$ -primaire, réductible, irréductible d'un —	7.13	page 454
Module : support $\mathrm{Supp}_A M$ d'un —	3.57	page 183
Module : système de paramètres d'un —	11.26	page 703
Modules : application bilinéaire, multilinéaire $\mathcal{L}_A(M_1 \times \cdots \times M_k, P)$	3.1	page 161
Modules : application alternée, k -forme alternée $\mathcal{A}_A^k(M, N)$	3.93	page 199
Modules : coextension de scalaires $M^{[f]}, \phi^{[f]}$ suivant $f : A \rightarrow B$	3.2.1	page 168
Modules : dualité de Pontryagin	4.1.4	page 232
Modules : extension des scalaires $B \otimes_A M$ suivant $f : A \rightarrow B$	3.2.2	page 169
Modules : homomorphisme de —, noyau $\mathrm{Ker}(f)$, image $\mathrm{Im}(f)$	1.1.4	page 5
Modules : homomorphisme de —, conoyau $\mathrm{Coker}(f)$	1.1.4	page 5
Modules : limite directe de —, limite directe filtrante de —	2.26	page 84, 2.31 page 88
Modules : limite inverse de —	2.22	page 81
Modules : produit direct $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$	1.12	page 6

Modules : produit fibré de $-$	2.23	page 82
Modules : produit tensoriel de $-$, $M \otimes_A N$	3.1.2	page 166
Modules : restriction des scalaires $M_{[f]}$, $\phi_{[f]}$ suivant $f : A \rightarrow B$	3.2.1	page 168
Modules : suite exacte, suite exacte courte de $-$	2.97	page 118
Modules : suite exacte courte scindée de $-$	2.99	page 119
Modules : suite universellement exacte de $-$	4.24	page 233
Modules : système projectif de $-$	2.109	page 126
Noéthérianité des algèbres de series formelles $A[[T_1, \dots, T_n]]$	9.115	page 620
Normalisation, sous-variété normale	6.4	page 411
Ordinal, successeur d'un $-$, ordinal limite	2.9	page 74
Ordre lexicographique sur un produit de groupes abéliens ordonnés	8.4	page 502
Pincement de points géométriques	6.4.1	page 414
Plus grand commun diviseur $\text{pgcd}(a, b)$	1.10	page 4
Plus petit commun multiple $\text{ppcm}(a, b)$	1.10	page 4
Polynôme séparable, inséparable	1.72	page 25
Polynôme : dérivée d'un $-$	1.73	page 25
Polynôme : multiplicité d'une racine d'un $-$	1.67	page 23
Récurrance noéthérienne	6.108	page 422
Relation de dépendance $\mathcal{D}$, partie $\mathcal{D}$ -libre, $\mathcal{D}$ -liée, $\mathcal{D}$ -génératrice, $\mathcal{D}$ -base	1.95	page 33
Relation d'ordre, relation d'ordre total	1.30	page 13
Résolution à gauche $(P_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\epsilon} M$, résolution projective à gauche	5.6	page 313
Résolution : augmentation, complexe augmenté d'une $-$	5.6	page 313
Résolution à droite $M \xrightarrow{\epsilon} (I_\bullet, \epsilon)$, résolution injective à droite	5.10	page 314
Résolution F -acyclique	8.130	page 553
Résolution simpliciale $\mathcal{R}(\Lambda)_\bullet$ associée à un ensemble Λ	5.25	page 323
Schéma, schéma affine	5.42	page 334
Schéma noéthérien, localement noéthérien	6.67	page 406
Schéma normal	6.90	page 413
Schéma réduit, intègre	5.72	page 346
Schéma intègre : normalisation $\underline{X}^\nu \rightarrow \underline{X}$ d'un $-$	6.92	page 413
Schéma intègre : point générique d'un $-$	5.73	page 346
Schéma : dimension d'un $-$	5.79	page 353
Schéma : éclatement d'un idéal quasi-cohérent d'un $-$	5.97	page 362
Schéma : éclatement de l'idéal engendré par une suite régulière	11.108	page 729
Schéma : localisation $j_x : \underline{X}(x) \rightarrow \underline{X}$ d'un $-$ au point x	5.50	page 338
Schéma : point géométrique d'un $-$	6.93	page 415
Schéma : radical nilpotent (ou nilradical) $\mathcal{N}_{\underline{X}}$ d'un $-$	5.71	page 346
Schéma : sous-schéma fermé $V(\mathcal{I})$ d'un $-$, pour un idéal $\mathcal{I}$	5.4.2	page 355
Schéma : sous-schéma fermé réduit $\underline{Z}_{\text{red}}$ d'espace sous-jacent Z	5.86	page 357
Schéma : sous-schéma ouvert d'un $-$, partie ouverte affine d'un $-$	5.43	page 334
A -Schéma, S -schéma, morphismes de A -schémas, de S -schémas	5.49	page 337
A -Schéma : sections schématiques d'un $-$	5.49	page 337
Schémas : droite affine avec origine dédoublée	5.96	page 361
Schémas : espace affine $\mathbb{A}_A^n$ sur l'anneau A	5.44	page 335
Schémas : espace projectif $\mathbb{P}_A^n$ sur l'anneau A	5.4.1	page 350
Schémas : graphe d'un morphisme de $-$	5.93	page 360
Schémas : immersion ouverte (resp. fermée) de $-$	5.87	page 357
Schémas : morphisme de $-$	5.2.3	page 335
Schémas : morphisme compact de $-$	5.79	page 353
Schémas : morphisme (localement) de type fini de $-$	5.79	page 353
Schémas : morphisme (localement) de présentation finie de $-$	5.79	page 353
Schémas : morphisme fermé, universellement fermé de $-$	6.59	page 405
Schémas : morphisme plat de $-$	5.79	page 353
Schémas : morphisme séparé, quasi-séparé d'un $-$	5.87	page 357
Schémas : $\mathcal{O}_X$ -module ϕ -flat, pour un morphisme $\phi : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ de $-$	5.79	page 353
Schémas : produit fibré de $-$	5.76	page 351
Schémas affines : morphisme $\text{Spec } f$ de $-$ associé à $f : A \rightarrow B$	5.43	page 334

Section d'un préfaisceau : restriction d'une $-$, sections globales $\Gamma \mathcal{F}$	4.83	page 255
Section d'un préfaisceau : germe d'une $-$	4.3.3	page 263
Section cartésienne de $\pi : A - \text{AlgMod} \rightarrow A - \text{Alg}$	5.14	page 316
Semi-continuité de $\dim_{\bullet}(B/A) : \text{Spec } B \rightarrow \mathbb{N}$	6.120	page 426
Semi-norme réelle, semi-norme réelle p -multiplicative sur un anneau	8.12	page 503
Semi-norme réelle : uniformisation d'une $-$	8.12	page 503
Semi-norme de Gauss $ \cdot _w : A\langle X, X^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}_o$ induite par $w : A \rightarrow \mathbb{R}_o$	10.19	page 646
Site sur un espace topologique	5.34	page 330
Site rationnel $\text{Rat}(\underline{A})$, $\text{Rat}(\underline{A})/U$ d'un anneau affinoïde $\underline{A}$	12.9, 12.1.2	page 770
Sites $\text{l.Dom}(\underline{A})$, $\text{c.Dom}(\underline{A})$ d'un anneau affinoïde $\underline{A}$	12.9	page 770
Site : préfaisceau, faisceau (à valeurs dans une catégorie) sur un $-$	5.34	page 330
Spectre premier $\text{Spec } A$, spectre maximal $\text{Max } A$	1.6	page 3
Spectre premier : faisceau des fonctions algébriques $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ sur le $-$	5.2.1	page 332
Spectre réel $\text{Spr } A$ d'un anneau	8.65	page 525
Spectre réel de $\mathcal{C}(T)$ et de $\mathbb{R}[X]$	8.71	page 527
Spectre réel : application de support $\sigma_A : \text{Spr } A \rightarrow \text{Spec } A$	8.70	page 526
Spectre réel : filtration constructible adaptée à une partie $S \subset A$	8.74	page 528
Spectre réel : parties ouvertes $D_+(a), D_{\pm}(a)$ du $-$	8.65	page 525
Spectre réel : parties constructibles $D_+(a_{\bullet}), W(b_{\bullet}), R_A^+(b_{\bullet}, a_{\bullet})$ du $-$	8.69	page 526
Spectres réels : application $\text{Spr } f$ de $-$ associée à $f : A \rightarrow B$	8.70	page 526
Spectres réels : immersion constructible de $-$	8.74	page 528
Spectre valuatif $\text{Spv } A$ d'un anneau	8.99	page 538
Spectre valuatif : application de support $\sigma_A : \text{Spv } A \rightarrow \text{Spec } A$	8.103	page 539
Spectre valuatif : application $\tau_A : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spv } A$, section de σ_A	8.103	page 539
Spectre valuatif : généralisation secondaire v_{Δ} associée à $\Delta \subset \Gamma_v$	8.105	page 540
Spectre valuatif : ordre partiel primaire $\succeq_p$, secondaire $\succeq_s$	8.106	page 541
Spectre valuatif : sous-ensemble rationnel $R_A(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n})$ du $-$	8.4	page 537
Spectre valuatif : spécialisation primaire v^{Δ} associée à $\Delta \subset \Gamma_v$	8.105	page 540
Spectres valuatifs : application $\text{Spv } f$ associée à $f : A \rightarrow B$	8.103	page 539
Sous-catégorie stable de c.Afd	12.4.5	page 812
Suite M -régulière, M -quasi-régulière, proprement M -régulière	11.52	page 711
Suite M -régulière I -maximale	11.66	page 715
Théorème de Akizuki	7.29	page 459
Théorème d'Artin (XVIIème problème d'Hilbert)	8.88	page 534
Théorème d'homomorphisme d'Artin-Lang	8.87	page 534
Théorème d'Artin-Schreier	8.51	page 517
Théorème de Auslander-Buchsbaum	11.136	page 742
Théorème de Baire	9.32	page 588
Théorème de Banach de l'application ouverte	9.33	page 588
Théorème de Cashwell-Everett (l'anneau de Dirichlet est factoriel)	11.138	page 743
Théorème de Cayley-Hamilton	3.46	page 181
Théorème de Chevalley (sur les images des parties constructibles)	6.115	page 425
Théorème de Chevalley (sur les topologies séparées des modules)	9.107	page 618
Théorème de Cohen (caractérisation des anneaux noethériens)	6.62	page 405
Théorème « du going down » de Cohen-Seidenberg	6.28	page 396
Théorème « du going down » pour le spectre valuatif	8.116	page 544
Théorème « du going up » de Cohen-Seidenberg	6.19	page 393
Théorème « du going up » pour le spectre réel	8.95	page 537
Théorème « du going up » pour le spectre valuatif	8.113	page 543
Théorème du Reelnullstellensatz de Dubois-Risler	8.87	page 534
Théorème de Eagon-Northcott (sur les idéaux de déterminants)	11.42	page 708
Théorème de Eakin-Nagata	6.71	page 407
Théorème de l'élément primitif	1.83	page 28
Théorème de Fermat (sur les sommes de deux carrés d'entiers)	1.37	page 15
Théorème de Freyd-Mitchell	4.48	page 243
Théorème de Gabriel-Popescu	4.29	page 235
Théorème de Gelfand-Kolmogoroff	1.29	page 13

Théorème de Govorov-Lazard (caractérisation des modules plats)	3.86	page 196
Théorème de Grothendieck (sur l'existence d'enveloppes injectives)	4.31	page 236
Théorème de platitude générique de Grothendieck	6.102	page 421
Théorème de Gruson-Raynaud	6.32	page 397
Théorème 90 de Hilbert	5.1.7	page 321
Théorème de la base de Hilbert	6.65	page 406
Théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz)	6.78	page 409
Théorème de Hilbert-Serre	11.14	page 697
Théorème de Hochster (compacité de la topologie constructible)	4.54	page 245
Théorème du Hauptidealsatz de Krull	11.34	page 705
Théorème de Krull-Chevalley-Samuel	11.25	page 702
Théorème d'intersection de Krull	9.106	page 618
Théorème de Serre (caractérisation des anneaux locaux réguliers)	11.103	page 728
Théorème de Steinitz (existence des bases de transcendance)	1.100	page 35
Théorème de Sturm	8.56	page 520
Théorème de Swan (fibrés vectoriels et modules projectifs)	4.128	page 277
Théorème (ou principe) de Tarski-Seidenberg	8.86	page 534
Théorème d'acyclicité de Tate	12.92	page 810
Théorème de Tychonoff	2.25	page 84
Théorème de Division de Weierstrass	12.49	page 790
Théorème de Préparation de Weierstrass	12.52	page 791
Théorème de Zariski : « Main Theorem »	6.55	page 403
Topologie sur un ensemble	1.19	page 9
Topologie à voisinages dénombrables	9.2	page 580
Topologie chaotique, discrète sur un ensemble	1.20	page 10
Topologie de Zariski sur $\text{Max } A$ et $\text{Spec } A$	1.3.1, 1.3.2	page 17
Topologie de Zariski : application continue $\text{Spec } f$	1.3.2	page 17
Topologie de Zariski : partie ouverte $D(f)$, partie fermée $V(I)$	1.3.1, 1.3.2	page 17
Topologie de Zariski : partie irréductible de $\text{Spec } A$	1.56	page 20
Topologie de Zariski : partie représentable de $\text{Spec } A$	3.34	page 178, 11.75
Topologie engendrée par une prébase, par une base	1.20	page 10
Topologie $\mathcal{T}^E$ (resp. $\mathcal{T}_E$) induite via $g : E \rightarrow T$ (resp. $h : T \rightarrow E$)	1.20	page 10
Topologie : application continue, ouverte, fermée, homéomorphisme	1.19	page 9
Topologie : application continue en un point	1.21	page 10
Topologie : application compacte	1.25	page 11
Topologie : application spécialisante, générissante	4.61	page 248
Topologie : chaîne saturée de générations	4.75	page 252
Topologie : crible couvrant une partie ouverte, $\text{Crib}(U)$	4.3.1	page 257
Topologie : intérieur d'une partie, adhérence d'une partie, partie dense	1.19	page 9
Topologie : moins fine, plus fine	1.19	page 9
Topologie : partie ouverte, fermée, point, voisinage	1.19	page 9
Topologie : partie réductible, irréductible	1.19	page 9
Topologie : point générique d'une partie irréductible	4.49	page 243
Topologie : point isolé d'un espace topologique	6.34	page 398
Topologie : propriété de l'intersection finie	1.26	page 11
Topologie : recouvrement d'une partie ouverte	1.19	page 9
Topologie : recouvrement $\mathcal{F}$ -acyclique	5.26	page 324
Topologie : recouvrement strictement $\mathcal{F}$ -acyclique	12.4.3	page 803
Topologie : spécialisation de points, génération de points	4.61	page 248
Topologie : spécialisation stricte, génération stricte	4.61	page 248
Topologie : spécialisation immédiate, génération immédiate	4.61	page 248
Topologie : système fondamental de voisinages ouverts de $t \in T$	9.2	page 580
Trace d'une K -algèbre finie $\text{Tr}_{R/K}$	6.85	page 411
Transformation naturelle	1.5.6	page 46
Transformation naturelle identique $\mathbf{1}_F$, transformation opposée ω^{op}	1.127	page 46
Transformation naturelle : cône $c_X \rightarrow F$ de sommet X et base F	2.18	page 80
Transformation naturelle : co-cône $F \rightarrow c_X$ de sommet X et base F	2.2.1	page 84

Transformation naturelle : limite $\lim_{\phi} \omega$, colimite $\operatorname{colim}_{\phi} \omega$ d'une —	2.29	page 87
Transformations naturelles $\mathbf{Nat}(F, G)$, composition de —	1.127	page 46
Transformations naturelles : produit de Godement $\omega * \omega'$	1.129	page 48
Transformations naturelles : relation d'échange	1.129	page 48
Transformée stricte $\mathcal{N}_J$ d'un $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{N}$	10.5.2	page 674
Valuation $v : A \rightarrow \Gamma_{\circ}$ d'un anneau A , dans un groupe ordonné $(\Gamma, \leq)$	8.1	page 501
Valuation triviale sur un anneau	8.6	page 502
Valuation $v : A \rightarrow \Gamma_{\circ}$ d'un anneau de Huber : sous-groupe $c\Gamma_v^* \subset \Gamma_v$	10.1.2	page 642
Valuation : anneau de valuation K^+ d'une — sur un corps K	8.1.1	page 504
Valuation : groupe des valeurs Γ_v et rang d'une —	8.6	page 502
Valuation : idéal v -convexe	8.108	page 541
Valuation : sous-groupe caractéristique $c\Gamma_v$ de Γ_v	8.105	page 540
Valuation : support $\operatorname{Supp}(v)$, corps résiduel $k(v)$ d'une —	8.10	page 503
Valuation : valuation résiduelle $\bar{v} : k(v) \rightarrow \Gamma_v$ d'une —	8.10	page 503
Valuation : v -topologie d'une valuation v sur un corps	9.53	page 595
Valuation de Gauss $ \cdot _{(a,\rho)}^v$ induite par v , de centre a et rayon ρ	8.11	page 503
Valuation p -adique de $\mathbb{Q}$	7.41	page 462
Valuations : composition de —	8.18	page 506
Valuations : degré $f(v' v)$ et indice de ramification $e(v' v)$	8.15	page 505
Valuations : équivalence de —	8.1	page 501

Quem si quis abstulerit, morte moriatur
in sartagine coquatur ; caducus morbus
instet eum, et febris ; et roretur,
et suspendatur.
Amen.