MATH POUR LA PHYSIQUE – NOTES DU COURS

Table des matières

1. Rappels sur les suites numériques

1.1. Limite d'une suite de nombres réels.

Définition 1.1. Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels.
(i) On dit que $a_\bullet$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |a_k - l| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant n.}$$

(ii) Si $a_\bullet$ converge vers l, on dit aussi que l est *la limite* de $a_\bullet$, et on écrit :

$$\boxed{l = \lim_{n \to +\infty} a_n.}$$

(iii) On dit que $a_\bullet$ *diverge* si elle ne converge vers aucun nombre réel r.
(iv) On dit que $a_\bullet$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |a_p - a_q| < \varepsilon \quad \forall p, q \geqslant n.}$$

Remarque 1.2. (i) Noter que dans la définition de suite de Cauchy il n'y a aucune mention de limite ; pourtant le théorème 1.6 nous montrera que *les suites de Cauchy sont précisément les suites convergentes.*

(ii) La limite de la suite $a_\bullet$ est *unique* (si elle existe). En effet, si l' est une autre limite de $a_\bullet$, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $|a_k - l| < \varepsilon$ et $|a_{k'} - l'| < \varepsilon$ pour tout $k \geqslant n$ et tout $k' \geqslant n'$; avec $d := \max(n, n')$ on a alors $|a_d - l| < \varepsilon$ et $|a_d - l'| < \varepsilon$ et par suite :

$$|l - l'| = |(l - a_d) + (a_d - l')| \leqslant |l - a_d| + |a_d - l| < 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, on doit alors avoir $l = l'$.

(iii) Soient $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ deux suites qui *ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices,* c'est à dire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = b_k$ pour tout $k \geqslant n$. On déduit aussitôt que $a_\bullet$ est convergente si et seulement s'il en est de même pour $b_\bullet$, et le cas échéant, la limite de $a_\bullet$ coïncide avec la limite de $b_\bullet$. Cette observation est implicitement utilisée quand on a faire avec des suites $a_\bullet$ qui sont définies seulement à partir d'un indice initial n_0 (par exemple, la suite $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ telle que $a_n := 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$) : si l'on le souhaite, on pourra compléter la définition de $a_\bullet$ de façon arbitraire, pour les indices $k < n_0$ (par exemple, on pourrait prendre $a_k := 0$ pour tout $k < n_0$) ; le caractère de la suite ainsi obtenue ne dépendra pas des choix effectués.

(iv) La question de *l'existence* de la limite d'une suite donnée est plus délicate ; pour cette question, la proposition importante suivante fournit la première étape.

Proposition 1.3. *(i) Toute partie $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure, qui est le plus petit des majorants de $\mathscr{A}$, notée :*

$$\boxed{\sup(\mathscr{A}) \in \mathbb{R}.}$$

(ii) De même, toute partie $\mathscr{B} \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure, qui est le plus grand des minorants de $\mathscr{B}$, notée :

$$\boxed{\inf(\mathscr{B}) \in \mathbb{R}.}$$

Démonstration. Noter que si la partie $\mathscr{B}$ est minorée, alors $\mathscr{A} := \{-a \mid a \in \mathscr{B}\}$ est majorée, et si M est un majorant de $\mathscr{A}$, alors $-M$ est un minorant de $\mathscr{B}$; par suite, si $\mathscr{A}$ admet la borne supérieure $\sup(\mathscr{A})$, alors $\mathscr{B}$ admet la borne inférieure $-\sup(\mathscr{A})$. Cela ramène la preuve de l'assertion (ii) à celle de l'assertion (i), donc il suffit de vérifier que toute partie majorée $\mathscr{A}$ admet une borne supérieure.

Pour cela, notons d'abord par $[x]$ la partie entière de tout nombre réel x. (Par exemple : $[57,896] = 57$, $[-57,896] = -57$, $[\pi] = 3$, etc.) Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$ posons :

$$[x]_k := \frac{1}{10^k} \cdot [10^k \cdot x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, pour calculer $[57,896]_2$ il faut prendre d'abord la partie entière de $10^2 \cdot 57,896$; cela donne 5789 ; ensuite on divise par 10^2 : donc $[57,896]_2 = 57,89$. On voit qu'il s'agit de la *troncation* de $57,896$ qui ne garde que la partie entière et le deux première chiffres décimales. De même, on vérifie aisément que $[x]_k$ est *la troncation de x qui garde jusqu'aux k premières chiffres décimales.* Par exemple :

$$[\pi]_{17} = 3,14159265358979323.$$

Noter aussi que $[x]_0 = [x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On appelle $[x]_k$ la *k-troncation de x.*

Cela posée, revenons à notre partie majorée $\mathscr{A}$, et notons par $\mathscr{E}_0$ l'ensemble des parties entières des éléments de $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{E}_0 := \{[a]_0 \mid a \in \mathscr{A}\}.$$

Puisque $\mathscr{A}$ est majorée, évidemment aussi $\mathscr{E}_0$ est une partie majorée ; mais d'autre part $\mathscr{E}_0$ *ne contient que des nombres entiers*, donc il existe un *élément maximal* de $\mathscr{E}_0$; appelons M_0 l'élément maximal de $\mathscr{E}_0$. Prenons ensuite la partie $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ formée des éléments de $\mathscr{A}$ dont la partie entière est précisément M_0 :

$$\mathscr{A}_0 := \{a \in \mathscr{A} \mid [a_0] = M_0\}.$$

Noter que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_0$ *ont les mêmes majorants,* car les éléments de $\mathscr{A}$ qui ne sont pas dans $\mathscr{A}_0$ sont en tout cas plus petits des éléments de $\mathscr{A}_0$.

L'étape suivante consiste à prendre la partie $\mathscr{E}_1$ formée des 1-troncations des éléments de $\mathscr{A}_0$:

$$\mathscr{E}_1 := \{[a]_1 \mid a \in \mathscr{A}_0\}.$$

Evidemment $\mathscr{E}_1$ contient au plus 10 éléments, donc on dénote par M_1 l'élément maximal de $\mathscr{E}_1$, et on dénote en outre par $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_0$ la partie formée des éléments de $\mathscr{A}$ dont la 1-troncation est précisément M_1 :

$$\mathscr{A}_1 := \{a \in \mathscr{A} \mid [a]_1 = M_1\}.$$

On continue de la même façon, par récurrence : pour tout $k \geqslant 2$ on pose

$$\mathscr{E}_k := \{[a]_k \mid a \in \mathscr{A}_{k-1}\} \qquad M_k := \max(\mathscr{E}_k) \qquad \mathscr{A}_k := \{a \in \mathscr{A} \mid [a]_k = M_k\}.$$

A chaque étape, la partie $\mathscr{E}_k$ contient au plus 10 éléments ; en outre, M_k est un nombre réel avec (au plus) k chiffres décimales non nulles, et les premières $k-1$ chiffres décimales de M_k sont celles de M_{k-1} ; autrement dit :

$$[M_k]_{k-1} = M_{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, on peut construire un nombre réel M *en prenant l'unique expression dont les premières k chiffres décimales coïncident avec celles de M_k, pour chaque $k \in \mathbb{N}$.*

Un mot de précaution : souvent, le nombre M ainsi obtenu sera tel que sa k-troncation coïncide avec M_k pour tout k, mais parfois on obtient un nombre M qui n'a pas cette propriété ! En effet, supposons que l'on ait :

$$M_0 = 0 \qquad M_1 = 0,9 \qquad M_2 = 0,99 \qquad M_3 = 0,999 \qquad \cdots$$

de sorte que $M = 0,99999\cdots$; mais cette expression décimale donne le nombre entier 1 ; donc $M = 1$ et alors $[M]_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Toutefois, cela ne cause pas de difficultés pour notre raisonnement, car on a au moins :

$$(*) \qquad |[M]_k - M_k| \leqslant \frac{1}{10^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Montrons que M *est un majorant de* $\mathscr{A}$: en effet, soit par l'absurde $a \in \mathscr{A}$ avec $a > M$; alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $[a]_k - [M]_k > 1/10^k$, et avec $(*)$ il vient $[a]_k > M_k$. Mais cela est absurde, car par construction la k-troncation de tout élément de $\mathscr{A}$ est $\leqslant M_k$.

Pour conclure, il ne reste qu'à vérifier que M *est le plus petit majorant de* $\mathscr{A}$. Cela revient à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|M - a| < \varepsilon$. Mais prenons $k \in \mathbb{N}$ tel que $3/10^k < \varepsilon$, et soit $a \in \mathscr{A}$ avec $[a]_k = M_k$; alors $|a - M_k| < 1/10^k$, et avec $(*)$ il vient

$$\begin{aligned} |M - a| =& |(M - [M]_k) + ([M]_k - M_k) + (M_k - a)| \\ \leqslant& |M - [M]_k| + |[M]_k - M_k| + |M_k - a| \\ <& 1/10^k + 1/10^k + 1/10^k = 3/10^k \end{aligned}$$

d'où $|M - a| < \varepsilon$, comme souhaité. □

Exemple 1.4. (i) Comme application, on peut montrer que *toute suite* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *croissante et majorée est convergente.* Plus précisément, d'après la proposition, la partie $\mathscr{A} := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\mathscr{A}).$$

En effet, soit $L := \sup(\mathscr{A})$; puisque L est le plus petit des majorants de $\mathscr{A}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \in]L - \varepsilon, L]$. Mais puisque la suite $a_\bullet$ est croissante, on a alors $a_k \in]L - \varepsilon, L]$ pour tout $k \geqslant n$, et cela revient à dire que L est la limite de $a_\bullet$.

(ii) De même, on déduit aisément que *toute suite* $a_\bullet$ *décroissante et minorée converge vers la borne inférieure de* $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels ; alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

En effet, par définition, la limite de $a_\bullet$ est 0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| < \varepsilon$ pour tout $k \geqslant n$; mais la même condition équivaut à dire que 0 est la limite de la suite des valeurs absolues $(|a_n| \,|\, n \in \mathbb{N})$.

D'autre part, on a les observations élémentaires suivantes :

Lemme 1.5. *(i) Toute suite convergente* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *est bornée, et on a :*

$$(*) \qquad \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) En outre, toute sous-suite $(b_n := a_{k(n)} \,|\, n \in \mathbb{N})$ de $a_\bullet$ est également convergente, et on a :

$$(**) \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Démonstration. (i) : Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de $a_\bullet$; on doit exhiber $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$(***) \qquad m \leqslant a_k \leqslant M \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k - l| < 1$ pour tout $k \geqslant n$ (pour cela, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de suite convergente) ; ainsi :

$$l - 1 < a_k < l + 1 \qquad \forall k \geqslant n.$$

On vérifie alors aisément que les inégalités $(***)$ sont vérifiées avec

$$m := \min(l-1, a_0, \dots, a_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad M := \max(l+1, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Ensuite, afin de vérifier les identiés $(*)$, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ le nombre réel $l - \varepsilon$ *n'est pas* un majorant de $\mathscr{A} := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, et que $l + \varepsilon$ *n'est pas* un minorant de $\mathscr{A}$. Mais cela est clair, car on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ pour tout $k \geqslant n$.

(ii) : Rappelons qu'une sous-suite $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ de $a_\bullet$ est une suite telle qu'il existe une application $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante* avec : $b_n = a_{k(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc l'application k sélectionne certains termes de la suite $a_\bullet$: par exemple, la sous-suite $(a_{2n} \,|\, n \in \mathbb{N})$ sélectionne les termes à indice pair. Evidemment on a $k(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; la convergence de $b_\bullet$ découle alors aussitôt de celle de $a_\bullet$, ainsi que l'identité $(**)$, par inspection directe des définitions. □

Théorème 1.6. *Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Si $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k - l| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geqslant n$. Par suite :

$$|a_p - a_q| = |(a_p - l) + (l - a_q)| \leqslant |a_p - l| + |l - a_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n$$

et donc $a_\bullet$ est de Cauchy.

Réciproquement, si $a_\bullet$ est de Cauchy, alors pour tout $t \in \mathbb{N}$ il existe $n(t) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(*) \qquad |a_p - a_q| < \frac{1}{t+1} \qquad \forall p, q \geqslant n(t)$$

(il suffit de faire $\varepsilon = 1/(t+1)$ dans la définition de suite de Cauchy).

On peut aussi supposer que :

$$(**) \qquad n(0) < n(1) < n(2) < \cdots$$

(Pour cela, si la suite $(n(t) \,|\, t \in \mathbb{N})$ vérifie seulement $(*)$, définissons par récurrence : $n'(0) := n(0)$ et $n'(t+1) := \max(1+n'(t), n(t+1))$ pour tout $t \in \mathbb{N}$; alors la nouvelle suite $(n'(t) \,|\, t \in \mathbb{N})$ vérifie $(*)$ et $(**)$).

Or, posons : $\mathscr{S}_k := \{a_p \,|\, p \geqslant n(k)\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et aussi :

$$M_k := \sup(\mathscr{S}_k) \qquad m_k := \inf(\mathscr{S}_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Noter que :

$$|a_p| = |a_p - a_{n(k)} + a_{n(k)}| \leqslant |a_p - a_{n(k)}| + |a_{n(k)}| < \frac{1}{k+1} + |a_{n(k)}| \qquad \forall p \in \mathscr{S}_k$$

donc la partie $\mathscr{S}_k$ est *bornée,* et alors M_k *et* m_k *sont des nombres réels*, pour chaque $k \in \mathbb{N}$. En outre, ces parties sont emboitées : $\mathscr{S}_0 \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2 \supset \cdots$, donc on a :

(a) la suite $M_\bullet := (M_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ est *décroissante*
(b) la suite $m_\bullet := (m_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ est *croissante*
(c) $0 \leqslant M_k - m_k \leqslant 1/(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (cela découle de $(*)$).

On déduit aussitôt que *les suites* $M_\bullet$ *et* $m_\bullet$ *convergent* : plus précisément la limite de $M_\bullet$ est $L := \inf\{M_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, car $M_\bullet$ est décroissante et la limite de $m_\bullet$ est $l := \sup\{m_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, car $m_\bullet$ est croissante) ; et l'inégalité (c) entraîne aussi que :

$$L = l.$$

Il s'ensuit aisément que l (ou L) *est aussi la limite de la suite originaire* $a_\bullet$. En effet, noter que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \geqslant n(k)$ on a

$$m_k \leqslant a_p \leqslant M_k \qquad \text{et} \qquad m_k \leqslant l \leqslant M_k$$

donc $|a_p - l| \leqslant M_k - m_k \leqslant 1/(k+1)$, d'où l'assertion. □

1.2. **Opérations sur les suites numériques.**

Proposition 1.7. *Soient* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *et* $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *deux suites convergentes de nombres réels. Alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to+\infty} a_n) + (\lim_{n\to+\infty} b_n)$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to+\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to+\infty} b_n).$$

Démonstration. Soient l et l' les limites de $a_\bullet$ et respectivement $b_\bullet$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|a_k - l| < \varepsilon/2 \quad \forall k \geqslant n \qquad \text{et} \qquad |b_k - l'| < \varepsilon/2 \quad \forall k \geqslant n'.$$

Par suite :

$$|(a_k + b_k) - (l + l')| = |(a_k - l) + (b_k - l')| \leqslant |a_k - l| + |b_k - l'| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant \max(n, n')$$

d'où la première identité. Ensuite, par le lemme 1.5(i) il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|b_n| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posons $N := \max(1, M, |l|)$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|a_k - l| < \frac{\varepsilon}{2N} \quad \forall k \geqslant n \qquad \text{et} \qquad |b_k - l'| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall k \geqslant n'.$$

Par suite, pour tout $k \geqslant \max(n, n')$ il vient :

$$\begin{aligned} |a_k b_k - l l'| &= |(a_k - l) \cdot b_k + (b_k - l') \cdot l| \\ &\leqslant |a_k - l| \cdot |b_k| + |b_k - l'| \cdot |l| \\ &< \frac{\varepsilon}{2N} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2N} \cdot |l| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

d'où la deuxième identité. □

Proposition 1.8. *(i) Soit* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *une suite convergente telle que :*

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textit{et} \qquad l := \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0.$$

Alors la suite $(1/a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *converge vers* $1/l$.

(ii) Soit en outre $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une deuxième suite convergente vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{l'}{l}.$$

Démonstration. (i) : Quitte à eventuellement remplacer $a_\bullet$ par la suite

$$(b_n := -a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$$

on peut supposer que $l > 0$ (car la suite $(1/a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $1/l$ si et seulement la suite $(1/b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $-1/l$).

Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon l < 1$, et prenons $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{1}{l} - \varepsilon \leqslant \frac{1}{l(1+\delta)} < \frac{1}{l(1-\delta)} \leqslant \frac{1}{l} + \varepsilon.$$

En passant, noter que ces inégalités sont équivalentes à :

$$0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon l}{1+\varepsilon l}.$$

Puisque $l\delta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_k \in]l(1-\delta), l(1+\delta)[\qquad \forall k \geqslant n$$

et par suite :

$$\frac{1}{a_k} \in \Big]\frac{1}{l(1+\delta)}, \frac{1}{l(1-\delta)}\Big[\subset \Big]\frac{1}{l} - \varepsilon, \frac{1}{l} + \varepsilon\Big[\qquad \forall k \geqslant n$$

d'où l'assertion.

(ii) : Cela découle de (i) et de la proposition 1.7, car $b_n/a_n = b_n \cdot (1/a_n)$. □

Proposition 1.9. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite convergente, telle que $a_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si la limite de $a_\bullet$ est un nombre réel $l \in I$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l).$$

Démonstration. Noter que pour cet énoncé on s'authorise toute sorte d'intervalle : I peut être de la forme $]a,b[$ pour des réels $a < b$, ou $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$.

La continuité de f au point $l \in I$ revient à dire que :

$$(*) \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |f(x) - f(l)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \cap]l-\delta, l+\delta[.$$

De l'autre côté, la convergence de $a_\bullet$ vers l veut dire que :

$$(**) \qquad \forall\delta > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad a_k \in I \cap]l-\delta, l+\delta[\quad \forall k \geqslant n.$$

Si l'on fait $x = a_k$, la condition de $(*)$ est alors satisfaite, pourvu que $k \geqslant n$, avec $n \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition de $(**)$; par suite :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |f(a_k) - f(l)| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant n$$

et cela revient à dire que la suite $(f(a_n) \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $f(l)$. □

Exemple 1.10. Montrons que si la suite $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(|a_n| \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $|l|$. En effet, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto |x|$$

est continue, donc l'assertion découle aussitôt de la proposition 1.9.

Exemple 1.11. La proposition 1.9 est utile pour étudier la limite des suites *définies par récurrence.* Soient par exemple $A \in [0,3]$, et $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ telle que :

$$a_0 := A \qquad a_{n+1} := \sqrt{3 - a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Noter que avec $f(x) := \sqrt{3-x}$ on a une fonction continue $f : [0,3] \to [0,3]$, donc $a_n \in [0,3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec le lemme 1.5(i), on déduit que *si* $a_\bullet$ *converge* vers un nombre réel l, on doit avoir $l \in [0,3]$; d'après la proposition 1.9, on a dans ce cas :

$$f(l) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = l$$

car $(a_{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N})$ est une sous-suite de $a_\bullet$ (lemme 1.5(ii)). Autrement dit, l vérifie l'équation :

$$l = \sqrt{3-l}.$$

Donc $l^2 = 3 - l \Leftrightarrow l^2 + l - 3 = 0$; les solutions de cette équation sont $(\sqrt{13}-1)/2$ et $(-\sqrt{13}-1)/2$. Mais la deuxième solution est négative, alors que $l \in [0,3]$; on conclut que si $a_\bullet$ converge, sa limite est

$$l := (\sqrt{13}-1)/2$$

(noter que la limite ne dépend pas de la valeur initiale A choisie). Il reste à déterminer si $a_\bullet$ est effectivement convergent. Pour cela, rappelons le *théorème des accroissements finis* :

$$(*) \qquad \forall x \in I \quad \exists b \in]x, l[\cup]l, x[\quad \text{tel que} \quad f(x) - l = f(x) - f(l) = (x-l) \cdot f'(b).$$

Mais on a :

$$f'(b) = -\frac{1}{2\sqrt{3-b}} \qquad \forall b \in]0,3[.$$

Donc, on a :

$$(**) \qquad |f'(b)| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3-b} > 1 \Leftrightarrow 0 < b < 2.$$

Mais noter que $f([0,3]) = [0, \sqrt{3}]$, donc $a_n \in [0,\sqrt{3}]$ pour tout $n \geqslant 1$, et un simple calcul montre que l'on a aussi $l \in [0,\sqrt{3}]$. Comme $\sqrt{3} < 2$, on déduit que l'inégalité $(**)$ est vérifiée en particulier pour tout $b \in]a_n, l[\cup]l, a_n[$ (pour chaque $n \geqslant 1$) ; si l'on fait $x = a_n$ dans $(*)$ (avec $n \geqslant 1$), on trouve alors :

$$|a_{n+1} - l| = |f(a_n) - l| = |a_n - l| \cdot |f'(b)| < \frac{1}{2}|a_n - l| \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Par une simple récurrence, on conclut que :

$$|a_{n+1} - l| < \frac{1}{2^n} \cdot |a_1 - l| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $(|a_n - l| \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, et cela revient à dire que $a_\bullet$ converge vers l.

Exemple 1.12. Voici une autre application importante de la proposition 1.9 : montrons la limite remarquable suivante :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \forall a \in \mathbb{R}.}$$

Pour cela, prenons d'abord $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 > |a|$, et noter que $b_n := 1 + a/n > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, en particulier $\ln(b_{k+n_0})$ est un nombre réel bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$. Noter en outre que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto e^x$$

est continue sur $\mathbb{R}$; d'après la proposition 1.9, il suffit alors de montrer que

$$\lim_{k\to+\infty}(k+n_0)\ln(b_{k+n_0}) = a$$

car alors on aura :

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{a}{n}\Big)^n = \lim_{k\to+\infty} b_{k+n_0}^{k+n_0} = \lim_{k\to+\infty} f((k+n_0)\ln(b_{k+n_0})) = f(a) = e^a.$$

Or, rappelons le développement limité du logarithme :

$$\ln(1+x) = x + r(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x} = 0.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} a/n = 0$, il vient alors, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\ln\Big(1+\frac{a}{n}\Big) = \frac{a}{n} + r\Big(\frac{a}{n}\Big) \qquad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} n\cdot r\Big(\frac{a}{n}\Big) = 0$$

d'où :

$$\lim_{k\to+\infty}(k+n_0)\ln(b_{k+n_0}) = \lim_{k\to+\infty}\Big[a + (k+n_0)r\Big(\frac{a}{k+n_0}\Big)\Big] = a$$

comme souhaité.

1.3. **Convergence vers $\pm\infty$.** Pour l'étude des suites *non bornées*, on peut parfois appliquer la notion de convergence introduite par la définition suivante. Toutefois, il faut prendre garde que les résultats des paragraphes précédents ne s'étendent que partiellement aux suites vérifiant cette condition de convergence généralisée.

Définition 1.13. Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels.
(i) On dit que $a_\bullet$ *converge vers* $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad a_k > M \quad \forall k \geqslant n.}$$

Dans ce cas, on dit aussi que $+\infty$ *est la limite de* $a_\bullet$, et on écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$$

(ii) On dit que $a_\bullet$ *converge vers* $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad a_k < -M \quad \forall k \geqslant n.}$$

Dans ce cas, on dit aussi que $-\infty$ *est la limite de* $a_\bullet$, et on écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.}$$

Exemple 1.14. (i) Avec l'exemple 1.4(ii) on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

car ces suites (définies pour $n \geqslant 1$) sont décroissantes, et car on a :

$$\inf\{1/n \,|\, n \geqslant 1\} = 0 \qquad \text{et} \qquad \inf\{(n+1)/n \,|\, n \geqslant 1\} = 1.$$

(ii) Soit $r \in \mathbb{R}$; alors :

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = 0 \quad \text{si } |r| < 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty \quad \text{si } r > 1.$$

En effet, pour la première identité il suffit de vérifier que $(|r^n| \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 (voir l'exemple 1.4(iii)), et comme $|r^n| = |r|^n$, on est alors ramené au cas où $1 > r \geqslant 0$. Mais dans ce cas, la suite $(r^n \,|\, n \in \mathbb{N})$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers $l := \inf\{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, d'après l'exemple 1.4(ii). On voit assez aisément que $l = 0$ par des raisonnements élémentaires ; sinon, on peut aussi utiliser la proposition 1.9 : en effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $f(x) := rx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $r^{n+1} = f(r^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme f est continue, on a :

$$l = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(r^n) = f(l) = rl.$$

Mais puisque $r \neq 1$, l'identité $l = rl$ entraîne que $l = 0$.

Pour le cas où $r > 1$, remarquons que dans ce cas la suite $(r^n \mid n \in \mathbb{N})$ est croissante et non majorée ; mais par inspection directe des définitions on voit que *toute suite croissante et non majorée converge vers* $+\infty$. De même, *toute suite décroissante et non minorée converge vers* $-\infty$.

(iii) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{n+7} = +\infty.$$

En effet, noter que :

$$\frac{n^2+3n+2}{n+7} \geqslant n-4$$

car $(n+7)\cdot(n-4) = n^2+3n-28$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour resoudre des exercices comme les précédents, on peut parfois s'aider de la proposition suivante :

Proposition 1.15. *(i) Soient $a_\bullet := (a_n \mid n \in \mathbb{N})$ et $b_\bullet := (b_n \mid n \in \mathbb{N})$ deux suites convergentes, et telles que $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

(ii) (Lemme des gendarmes) *Soient $a_\bullet := (a_n \mid n \in \mathbb{N})$, $b_\bullet := (b_n \mid n \in \mathbb{N})$ et $c_\bullet := (c_n \mid n \in \mathbb{N})$ trois suites de nombres réels telles que :*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et supposons que $\lim_{n\to+\infty} a_\bullet = \lim_{n\to+\infty} c_\bullet = l$. Alors aussi $b_\bullet$ converge vers l.

Démonstration. (i) : L'assertion est triviale si $a_\bullet$ converge vers $-\infty$, ou si $b_\bullet$ converge vers $+\infty$. En outre, on voit aisément que si $a_\bullet$ converge vers $+\infty$, alors aussi $b_\bullet$ converge vers $+\infty$. De même, si $b_\bullet$ converge vers $-\infty$, alors aussi $a_\bullet$ converge vers $-\infty$. Ainsi, il ne reste qu'à considérer le cas où les limites l et l' de $a_\bullet$ et respectivement $b_\bullet$ sont réels. Posons alors $c_n := b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'après la proposition 1.7, la suite $c_\bullet := (c_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers $l' - l$, et noter que $c_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la limite de $c_\bullet$ est $\geqslant 0$, par le lemme 1.5(i), d'où $l' \geqslant l$.

(ii) : Les cas où $l = +\infty$ ou $l = -\infty$ se déduisent aisément de la partie (i), déjà démontrée. Soit alors $l \in \mathbb{R}$, et posons $b'_n := b_n - a_n$ et $c'_n := c_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il vient :

$$0 \leqslant b'_n \leqslant c'_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et la suite $(c'_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, par la proposition 1.7. Il suffit de vérifier que la suite $(b'_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, car alors la suite $(b_n = b'_n + a_n \mid n \in \mathbb{N})$ convergera vers l, toujours d'après la proposition 1.7.

Or, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant c'_k < \varepsilon$ pour tout $k \geqslant n$, donc aussi $0 \leqslant b'_k < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant k$, d'où l'assertion. $\square$

1.4. **Suites de nombres complexes.** La notion de convergence d'une suite $z_\bullet := (z_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ de nombres complexes est la même que pour les suites de nombres réels, quitte à remplacer la valeur absolue $|\cdot|$ des réels par le module $\|\cdot\|$ des complexes. Donc, on dira que $z_\bullet$ *converge vers* $l \in \mathbb{C}$, si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \|l - z_k\| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant n}$$

et dans ce cas on écrira comme d'habitude :

$$l = \lim_{n \to +\infty} z_n.$$

Noter que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$|a| + |b| \geqslant \|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \max(|a|, |b|).$$

Donc, si l'on dénote par

$$\mathfrak{R}(z_\bullet) := (\mathfrak{R}(z_n) \,|\, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I}(z_\bullet) := (\mathfrak{I}(z_n) \,|\, |n \in \mathbb{N})$$

les suites des parties réelle et respectivement des parties imaginaires des termes z_n, on déduit aussitôt que :

$$(*) \qquad l = \lim_{n \to +\infty} z_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{R}(l) = \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{R}(z_n) \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(l) = \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{I}(z_n).$$

Cela permet en principe de ramener la question de la convergence d'une suite de nombres complexes $z_\bullet$ à celle des suites de nombres réels $\mathfrak{R}(z_\bullet)$ et $\mathfrak{I}(z_\bullet)$, et ainsi généraliser aisément plusieurs propriétés des suites réelles au cas des suites complexes. Par exemple, on dira qu'une suite $z_\bullet$ de nombres complexes est *de Cauchy* si elle vérifie la condition analogue à celle de la définition 1.1(ii), c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \|z_p - z_q\| < \varepsilon \quad \forall p, q \geqslant n.$$

On déduit aussitôt que $z_\bullet$ est de Cauchy si et seulement s'il en est de même pour les suites $\mathfrak{R}(z_\bullet)$ et $\mathfrak{I}(z_\bullet)$; compte tenu de $(*)$ et du théorème 1.6, on déduit qu'une suite $z_\bullet$ de nombres complexes est de Cauchy si et seulement si elle est convergente. En outre, la remarque 1.2 se généralise immédiatement aux suites de nombres complexes.

Remarque 1.16. (i) Voici comment généraliser la proposition 1.7. D'abord, puisque :

$$\mathfrak{R}(z + z') = \mathfrak{R}(z) + \mathfrak{R}(z') \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(z + z') = \mathfrak{I}(z) + \mathfrak{I}(z') \qquad \forall z, z' \in \mathbb{C}$$

on déduit que pour tout couple de suites de nombres complexes $z_\bullet$ et $z'_\bullet$ on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (z_n + z'_n) = (\lim_{n \to +\infty} z_n) + (\lim_{n \to +\infty} z'_n)}$$

par application de $(*)$ et de la proposition 1.7. Ensuite, puisque on a :

$$\mathfrak{R}(zz') = \mathfrak{R}(z) \cdot \mathfrak{R}(z') - \mathfrak{I}(z) \cdot \mathfrak{I}(z') \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(zz') = \mathfrak{R}(z) \cdot \mathfrak{I}(z') + \mathfrak{I}(z) \cdot \mathfrak{R}(z')$$

pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\Re(\lim_{n\to+\infty}(z_n z'_n)) &= \lim_{n\to+\infty} \Re(z_n z'_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\Re(z_n)\cdot\Re(z'_n) - \Im(z_n)\cdot\Im(\mathfrak{z}'_\mathfrak{n})) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Re(z_n)\cdot\lim_{n\to+\infty}\Re(z'_n) - \lim_{n\to+\infty}\Im(z_n)\cdot\lim_{n\to+\infty}\Im(z'_n) \\
&= \Re(\lim_{n\to+\infty} z_n)\cdot\Re(\lim_{n\to+\infty} z'_n) - \Im(\lim_{n\to+\infty} z_n)\cdot\Im(\lim_{n\to+\infty} z'_n) \\
&= \Re((\lim_{n\to+\infty} z_n)\cdot(\lim_{n\to+\infty} z'_n))
\end{aligned}$$

et un calcul similaire montre que :

$$\Im(\lim_{n\to+\infty}(z_n z'_n)) = \Im((\lim_{n\to+\infty} z_n)\cdot(\lim_{n\to+\infty} z'_n))$$

d'où finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n z'_n = (\lim_{n\to+\infty} z_n)\cdot(\lim_{n\to+\infty} z'_n).}$$

(ii) Par contre, les assertions qui dépendent de la *relation d'ordre* des nombres réels ne se généralisent pas de façon évidente : la condition $a < b$ n'est bien définie que si a et b sont des nombres réels, donc par exemple on ne dispose pas d'une bonne notion de “borne supérieure d'un ensemble de nombres complexes”.

(iii) Toutefois, pour toute suite convergente $z_\bullet$ de nombres complexes on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{z_n} = \lim_{n\to+\infty}\Re(z_n) - \Im(z_n) = \Re(\lim_{n\to+\infty} z_n) - \Im(\lim_{n\to+\infty} z_n) = \overline{\lim_{n\to+\infty} z_n}$$

où $\overline{z}$ dénote comme d'habitude le conjugué complexe du nombre complexe z.

Par suite, on peut aussi généraliser aisément l'exemple 1.10 :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\|z_n\| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{z_n\cdot\overline{z_n}} &= \sqrt{\lim_{n\to+\infty} z_n\overline{z_n}} \\
&= \sqrt{\lim_{n\to+\infty} z_n\cdot\lim_{n\to+\infty}\overline{z_n}} \\
&= \sqrt{\lim_{n\to+\infty} z_n\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty} z_n}} \\
&= \|\lim_{n\to+\infty} z_n\|
\end{aligned}$$

(pour la deuxième égalité, on applique la proposition 1.9 à la suite réelle $(z_n\overline{z_n}\,|\,n\in\mathbb{N})$ et à la fonction continue $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \geqslant 0$).

(iv) En dernier lieu, on a aussi l'homologue de la proposition 1.8 : si $(z_n\,|\,n\in\mathbb{N})$ et $(z'_n\,|\,n\in\mathbb{N})$ sont deux suites convergentes de nombres complexes, et si l'on a :

$$z_n \neq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} z_n \neq 0$$

alors on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{z'_n}{z_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} z'_n}{\lim_{n\to+\infty} z_n}.}$$

Pour la preuve, il suffit de remarquer que :

$$\frac{z'_n}{z_n} = \frac{\overline{z_n}}{\|z_n\|^2}\cdot z'_n$$

d'où, avec (i), (iii) et la proposition 1.8 :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z'_n}{z_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overline{z_n}}{\|z_n\|^2}\cdot\lim_{n\to+\infty}z'_n=\lim_{n\to+\infty}z'_n\cdot\frac{\overline{\lim_{n\to+\infty}z_n}}{\|\lim_{n\to+\infty}z_n\|^2}$$

et noter que :

$$\frac{\overline{\lim_{n\to+\infty}z_n}}{\|\lim_{n\to+\infty}z_n\|^2}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}z_n}.$$

1.4.1. *Le produit hermitien.* Soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque. Rappelons que sur $\mathbb{R}^n$ on a un produit scalaire naturel :

$$\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{R}^n}:=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\qquad\forall\overrightarrow{v}:=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\overrightarrow{w}:=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

relié à la norme standard de $\mathbb{R}^n$ par l'identité :

$$\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{R}^n}:=\sqrt{\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle_{\mathbb{R}^n}}\qquad\forall\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^n.$$

Sur $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire réel est remplacé par le *produit hermitien* :

$$\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{C}^n}:=a_1\bar{b}_1+\cdots+a_n\bar{b}_n\qquad\forall\overrightarrow{v}:=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\overrightarrow{w}:=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n.$$

Comme pour le produit scalaire réel, il s'agit d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$, mais il n'est pas $\mathbb{C}$-bilinéaire, car il n'est $\mathbb{C}$-linéaire que pour la variable à gauche :

$$\langle\lambda\overrightarrow{v}_1+\mu\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{C}^n}=\lambda\langle\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{C}^n}+\mu\langle\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{C}^n}\qquad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C},\forall\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{w}\in\mathbb{C}^n$$

(la vérification est immédiate). Alors que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ est *symétrique,* le produit hermitien vérifie :

$$\langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}\rangle_{\mathbb{C}^n}=\overline{\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle}_{\mathbb{C}^n}\qquad\forall\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in\mathbb{C}^n$$

d'où l'identité :

$$\langle\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{w}_1+\mu\overrightarrow{w}_2\rangle_{\mathbb{C}^n}=\overline{\lambda}\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}_1\rangle_{\mathbb{C}^n}+\overline{\mu}\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}_2\rangle_{\mathbb{C}^n}\qquad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C},\forall\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}_1,\overrightarrow{w}_2\in\mathbb{C}^n$$

qui exprime la *sesquilinéarité à droite* du produit hermitien. En particulier, on a :

$$\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle_{\mathbb{C}^n}=\|z_1\|^2+\cdots+\|z_n\|^2\qquad\forall\overrightarrow{v}:=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n.$$

Par suite, $\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle_{\mathbb{C}^n}$ est toujours un réel non négatif, et on déduit une *norme* sur $\mathbb{C}^n$ avec :

$$\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n}:=\sqrt{\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle_{\mathbb{C}^n}}\qquad\forall\overrightarrow{v}\in\mathbb{C}^n.$$

Lemme 1.17. *Pour tout $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in\mathbb{C}^n$ on a :*

(i) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\|\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle_{\mathbb{C}^n}\|\leqslant\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n}\cdot\|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n}$.

(ii) (Inégalité triangulaire) $\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n}\leqslant\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n}+\|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n}$.

Démonstration. (i) : On peut évidemment supposer que $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. Noter alors que :

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \langle \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n}}, \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n}} \rangle$$

et la norme de $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n}}$ et $\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n}}$ est égale à 1. Donc, on se ramène à montrer que :

$$\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n} = \|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n}\| \leqslant 1.$$

Pour cela, posons :

$$\overrightarrow{w}_1 := \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n} \cdot \overrightarrow{v} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{w}_2 := \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}_1.$$

Noter que :

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n} \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

d'où aussi : $\langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$. Par suite :

$$1 = \|\overrightarrow{w}\|^2_{\mathbb{C}^n} = \langle \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \|\overrightarrow{w}_1\|^2_{\mathbb{C}^n} + \|\overrightarrow{w}_2\|^2_{\mathbb{C}^n} = \|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^n}\|^2 + \|\overrightarrow{w}_2\|^2_{\mathbb{C}^n}$$

d'où l'inégalité souhaitée.

(ii) : Au vu de (i), on trouve :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2_{\mathbb{C}^n} &= \|\overrightarrow{v}\|^2_{\mathbb{C}^n} + \|\overrightarrow{w}\|^2_{C^n} + 2\mathfrak{R}(\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle) \\ &\leqslant \|\overrightarrow{v}\|^2_{\mathbb{C}^n} + \|\overrightarrow{w}\|^2_{C^n} + 2\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^n} = (\|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^n} + \|\overrightarrow{w}\|_{C^n})^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire. $\square$

2. Séries numériques

2.1. La série d'une suite numérique, et sa somme.

Définition 2.1. Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels ; le *série associée à $a_\bullet$* est la suite $s_\bullet := (s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ telle que :

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la série $s_\bullet$ converge, alors sa limite est appelée la somme de la suite $a_\bullet$, et elle est notée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} s_n.}$$

Remarque 2.2. Soit $s_\bullet := (s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite *arbitraire* de nombres réels, et posons :

$$a_0 := s_0 \qquad a_1 := s_1 - s_0 \qquad a_2 := s_2 - s_1 \quad \cdots \quad a_n := s_n - s_{n-1} \quad \cdots$$

On obtient ainsi une nouvelle suite $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, et on voit aisément que la série associée à $a_\bullet$ n'est rien d'autre que la suite originaire $s_\bullet$.

Autrement dit : *toute suite est une série, et toute série est une suite.*

En principe, il n'y a pas des différences essentielles entre ces deux notions. Néanmoins, certaines questions et certains résultats sont présentés plus naturellement en terme de suites, alors que pour des autres résultats il est plus naturel d'utiliser le langage des séries.

Exemple 2.3. (i) La *série arithmétique* de raison r et valeur initiale A : il s'agit de la série $s_\bullet$ associée à la suite $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ telle que

$$a_0 := A \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} := a_n + r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $a_n = A + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par suite :

$$s_n = (n+1)A + r\sum_{k=1}^{n} k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'astuce pour additionner les premiers n entiers positifs consiste à le regrouper :

$$1 + 2 + \cdots + n = (1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \cdots$$

Si n est pair, on a ainsi $n/2$ couples de termes entre parenthèse, et la somme de chaque couple est $n+1$, donc au total on obtient $(n+1)n/2$. Si n est impair, on a $(n-1)/2$ tels couples, plus un terme solitaire au milieu, de valeur $(n+1)/2$, mais alors la somme est encore $(n+1)n/2$. Donc finalement :

$$\boxed{s_n = (n+1)\big(A + \frac{nr}{2}\big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

On déduit aisément que la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$ est $+\infty$ si $r > 0$ et $-\infty$ si $r < 0$.

(ii) La *série géométrique* de raison r et valeur initiale A : c'est la série $s_\bullet$ associée à la suite $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ telle que

$$a_0 := A \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = ra_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $a_n = Ar^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par suite :

$$s_n = A \sum_{k=0}^{n} r^k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour calculer $S_n := \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, on remarque que

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}$$

donc $S_n - rS_n = 1 - r^{n+1}$, et alors $S_n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$, d'où :

$$\boxed{s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} A \qquad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Si $|r| < 1$, on a déjà vu que $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$; on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \cdot \lim_{n\to+\infty} (1 - r^{n+1}) = \frac{1}{1 - r} \cdot \big(1 - \lim_{n\to+\infty} r^{n+1}\big) = \frac{1}{1 - r}$$

et alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} Ar^r = \frac{A}{1 - r} \qquad \text{si } |r| < 1.}$$

Si $r > 1$, on voit aisément que $\sum_{k=0}^{+\infty} Ar^n$ vaut $+\infty$ si $A > 0$, et $-\infty$ si $A < 0$.
Si $r < -1$, la série géométrique diverge (sauf pour le cas trivial où $A = 0$), et ne converge ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

(iii) Calculons la somme de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Pour cela, noter que :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, la somme des premiers n termes donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

(une telle série, dont chaque terme s'efface avec le suivant, est dite téléscopique).

Finalement on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1.$$

(iv) Calculons la somme de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Il s'agit encore d'une série téléscopique, car :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

et finalement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1.$$

Proposition 2.4. *Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels. Alors :*

(i) La série $s_\bullet := (s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ associée à la suite $a_\bullet$ converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad |a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p| < \varepsilon \qquad \forall p > q \geqslant n.$$

(ii) En particulier si la série $s_\bullet$ converge, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Démonstration. (i) : Noter que $a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p = s_p - s_q$; mais alors, la condition de (i) revient à dire que $s_\bullet$ est une suite de Cauchy ; donc l'assertion découle du théorème 1.6.

(ii) : Si l'on fait $p = q+1$ dans la condition de (i), on trouve que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|a_p| < \varepsilon$ pour tout $p > n$; cela revient à dire que $a_\bullet$ converge vers 0. □

Remarque 2.5. (i) Les sommes finies $a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p$ apparaissant dans 2.4(i) s'appellent les *restes de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite *grossièrement divergente* si la suite $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ ne converge pas vers 0 : d'après la proposition 2.4(ii), une telle série ne converge pas. La réciproque de la proposition 2.4(ii) est fausse, en général : il existe des suites $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ convergentes vers 0, dont les séries associées ne convergent pas. Par exemple, montrons que :

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Pour cela, posons $s_k := \sum_{n=1}^{k} 1/k$ pour tout $k \geqslant 1$, et noter que :

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= s_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
s_4 &= s_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geqslant \frac{3}{2} + \frac{2}{4} = \frac{4}{2} \\
s_8 &= s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geqslant \frac{4}{2} + \frac{4}{8} = \frac{5}{2} \\
s_{16} &= s_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) \geqslant \frac{5}{2} + \frac{8}{16} = \frac{6}{2}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. En général, on voit que :

$$s_{2^k} \geqslant 1 + \frac{k}{2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

d'où $(*)$. La série $(*)$ est appelée *série harmonique*.

(iii) Voici un autre exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit p_n le n-ième nombre entier *premier* ; ainsi :

$$p_0 = 2 \qquad p_1 = 3 \qquad p_2 = 5 \qquad p_3 = 7 \qquad p_4 = 11 \qquad p_5 = 13 \qquad p_6 = 17$$

et cetera. On peut montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Pour la preuve – élémentaire, mais assez difficile – voir l'appendice 2.6.

(iv) D'autre part, la série des inverses des carrés entiers converge, c'est à dire :

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Plus tard dans notre cours on calculera même la somme de cette série, par la technique des séries de Fourier. Pour montrer $(**)$, posons $s_k := \sum_{n=1}^{k} 1/n^2$ pour tout $k \geqslant 1$; évidemment la suite $(s_k \,|\, k \geqslant 1)$ est strictement croissante, et noter aussi que

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

d'où :

$$s_k \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \forall k \geqslant 1.$$

Mais on a vu à l'exemple 2.3(iii) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, donc :

$$\sup\{s_k \,|\, k \geqslant 1\} \leqslant 2$$

et avec l'exemple 1.4(i) on déduit $(**)$; en fait on voit plus précisément que la somme de cette série est $\leqslant 2$ (lemme 1.5(i)). La morale est que : les carrés des entiers *sont plus épars* sur la droite réelle que les nombres premiers, c'est à dire, sur un intervalle borné de grosse taille on trouvera toujours beaucoup plus de nombres premiers que de nombres carrés.

(v) Soient $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, $r \in \mathbb{N}$, et considérons

$$a'_\bullet := (a'_n := a_{n+r} \,|\, n \in \mathbb{N})$$

la sous-suite de $a_\bullet$ obtenue après élimination des premiers r termes $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$. Soient aussi $s_\bullet := (s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $s'_\bullet := (s'_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ les séries associées à $a_\bullet$ et $a'_\bullet$. Trivialement on a :

$$s_k = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{r-1}) + s'_{k-r} \qquad \forall k \geqslant r.$$

En particulier, $s_\bullet$ *converge si et seulement s'il en est de même pour* $s'_\bullet$.

La morale est que : lors de l'étude de la convergence de la série associée à une suite $a_\bullet$ on pourra toujours s'authoriser à supprimer un nombre *fini* de termes de $a_\bullet$: cela modifiera la somme de la série, mais non pas son caractère de convergence.

2.2. **Séries à termes positifs.** Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite des nombres réels telle que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Evidemment la série $s_\bullet$ associée à $a_\bullet$ est monotone croissante, donc soit $s_\bullet$ converge vers un nombre réel positif, soit elle converge vers $+\infty$. Ainsi, la somme de la série est toujours bien définie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On souhaite étudier la convergence de telles suites à termes positifs; le premier simple critère est fourni par le lemme suivante :

Lemme 2.6. *(i) Soient $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ deux suites à termes positifs, et supposons que $a_n \geqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

(ii) En particulier, si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

(iii) De même, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$.

Démonstration. Soient $(s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $(t_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ les séries de $a_\bullet$ et respectivement $b_\bullet$; évidemment $s_n \geqslant t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les assertions découlent de la proposition 1.15(i). $\square$

Exemple 2.7. (i) Montrons que la série :

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

converge vers un nombre réel $e \geqslant 0$ (en fait, il est bien connu que la somme de cette série est la *constante de Néper* $e = 2.7182818284590452\cdots$). Pour cela, noter que :

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \geqslant 4$$

et on a déjà remarqué que la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/2^n$ converge vers 2 (voir l'exemple 2.3(ii)). Quitte à éliminer les premier 4 termes de la suite $(1/n! \,|\, n \in \mathbb{N})$, on peut alors appliquer le lemme précédent, pour déduire la convergence de $(*)$.

(ii) Par contre, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

car $1/\sqrt{n} \geqslant 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$, et car on a déjà montré que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge (remarque 2.5(ii)).

Proposition 2.8. (Equivalence de séries) *Soient deux suites de nombres réels*

$$a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N}).$$

Supposons que $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0, +\infty.$$

Alors les séries associées à $a_\bullet$ et $b_\bullet$ ont le même caractère (c'est à dire, l'une converge si et seulement si l'autre converge).

Démonstration. D'abord, montrons que l'on peut supposer $l > 0$. En effet, si $l < 0$, posons aussi $c_n := -a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; évidemment la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a le même caractère que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, donc il suffira de vérifier que les séries associées à $c_\bullet$ et à $b_\bullet$ ont le même caractère, et d'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = -l > 0.$$

Or, par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_k}{b_k} \in \left]\frac{1}{2}l, \frac{3}{2}l\right[\qquad \forall k \geqslant n$$

et cela revient à dire que :

$$\frac{l}{2}b_k < a_k < \frac{3l}{2}b_k \qquad \forall k \geqslant n.$$

Quitte à supprimer les premiers n termes des suites $a_\bullet$ et $b_\bullet$, ont peut supposer que ces inégalités soient satisfaites pour tout $k \in \mathbb{N}$ (rappelons que cette suppression n'altère pas les caractères des séries associées), et en particulier, que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors on a :

$$\sum_{k=0}^{m} b_k < \sum_{k=0}^{m} \frac{2}{l} a_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k < \sum_{k=0}^{m} \frac{3l}{2} b_k \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Evidemment, la série associée à $a_\bullet$ (resp. à $b_\bullet$) converge si et seulement si la série associé à $(2a_k/l \,|\, k \in \mathbb{N})$ (resp. à $(3lb_k/2 \,|\, k \in \mathbb{N})$) converge, donc l'assertion découle du lemme 2.6. $\square$

Proposition 2.9. (Règle de D'Alembert) *Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite à termes strictement positifs. Supposons que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Alors on a :

- *(i) Si $l < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$.*
- *(ii) Si $l > 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.*
- *(iii) Si $l = 1$, on ne peut rien dire !*

Démonstration. Si $l < 1$, prenons $L \in \mathbb{R}$ tel que $l < L < 1$; par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < L \qquad \forall k \geqslant n.$$

Quitte à supprimer les premiers n termes de $a_\bullet$, on peut supposer que cette inégalité soit satisfaite pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite, on a :

$$a_{k+1} < a_k L \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et avec une simple récurrence sur k, on déduit que :

$$a_k \leqslant a_0 L^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, comme $0 < L < 1$, on sait que la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 L^k$ converge (exemple 2.3(ii)), d'où la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, en vertu du lemme 2.6.

Si $l > 1$, prenons $L \in \mathbb{R}$ avec $l > L > 1$; par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > L \qquad \forall k \geqslant n$$

et quitte à supprimer les premiers n termes de $a_\bullet$ on peut supposer que cette inégalité soit vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où :

$$a_{k+1} > a_k L \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et une simple récurrence sur k entraîne que :

$$a_k \geqslant a_0 L^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais comme $L > 1$, on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 L^k = +\infty$, donc aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$, toujours d'après le lemme 2.6. □

Exemple 2.10. Montrons la convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n \qquad \forall x \in [0, 1[.$$

On calcule :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} x = x < 1$$

d'où la convergence souhaitée, par la règle de d'Alembert. Noter que, en combinaison avec la proposition 2.4(ii), cela entraîne en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0 \qquad \forall x \in [0, 1[.$$

On a ainsi illustré une observation d'utilité plus générale : afin de prouver qu'une suite donnée $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, il est parfois plus rapide de vérifier la convergence de la série associée $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (lorsque cela est possible), car pour cette dernière on peut se servir de critères de convergence assez pratiques, tels que la règle de d'Alembert, ou la règle de Cauchy suivante.

Proposition 2.11. (Règle de Cauchy) *Soit $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une série à termes positifs. Supposons que :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Alors on a :

(i) Si $l < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $l > 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

(iii) Si $l = 1$, on ne peut rien dire !

Démonstration. Si $l < 1$, prenons $L \in \mathbb{R}$ avec $l < L < 1$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_k^{1/k} < L \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et comme d'habitude, on se ramène aisément au cas où cette inégalité est satisfaite pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais alors :

$$a_k < L^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et d'autre part la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} L^k$ converge, car $0 < L < 1$; par suite $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in \mathbb{R}$, toujours d'après le lemme 2.6.

Si $l > 1$, on choisit $L \in \mathbb{R}$ tel que $l > L > 1$, et en raisonnant comme dans la preuve de la règle de D'Alembert, on se ramène au cas où :

$$a_k > L^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} L^k = +\infty$, par suite $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$. □

Exemple 2.12. Etudions la convergence de la série :

$$(*) \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\ln(n)}\Big)^n.$$

Pour cela, appliquons la règle de Cauchy à la suite $(a_n := (1/\ln(n))^n \,|\, n \in \mathbb{N})$; on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

donc la somme de la série $(*)$ est un nombre réel.

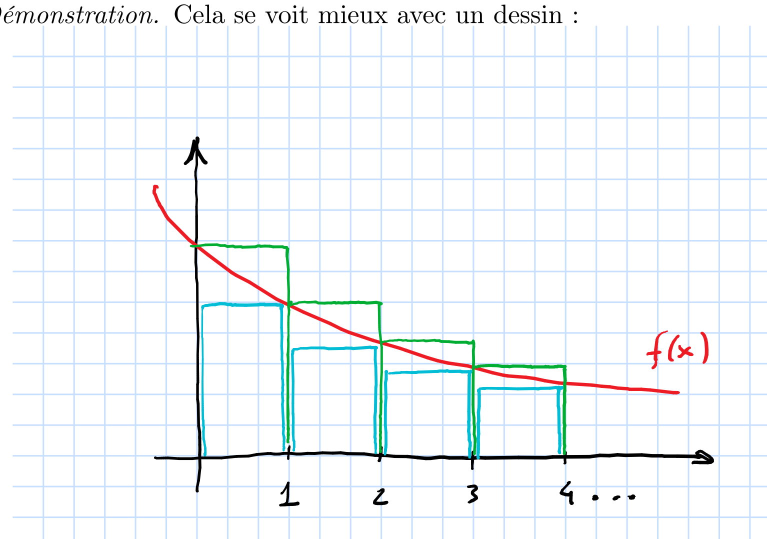
Proposition 2.13. *Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ une fonction monotone décroissante, et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Posons :*

$$a_n := f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors on a l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty.$$

Démonstration. Cela se voit mieux avec un dessin :



La ligne rouge représente le graphe de la fonction f, donc l'intégral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est l'aire de la région $\mathscr{R}$ comprise entre la ligne rouge et l'abscisse (et délimitée à gauche par l'ordonnée). D'autre part, noter que la base de chaque rectangle vert est de longueur 1 ; l'hauteur du premier rectangle vert à gauche est $f(0)$, donc son aire est $f(0)$. De même, l'aire du deuxième rectangle vert est $f(1)$, et ainsi de suite. Puisque la région $\mathscr{R}$ est contenue dans la réunion des rectangles verts, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

De même, la base de chaque rectangle bleu est de longueur 1 ; l'hauteur du premier rectangle bleu est $f(1)$, donc son aire est $f(1)$; l'hauteur du deuxième rectangle bleu est $f(2)$, donc son aire est $f(2)$, et ainsi de suite. Puisque la région $\mathscr{R}$ contient la réunion des rectangles bleus, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Mais les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ont le même caractère, d'où la proposition. □

Exemple 2.14. (Séries de Riemann) Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé ; on souhaite étudier la convergence de la série (dite *de Riemann*) suivante :

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Pour $p = 1$, on a déjà montré que cette série diverge (voir la remarque 2.5(ii)). Si $p \leqslant 1$, on a $1/n^p \geqslant 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc la série diverge plus généralement pour tout $p \leqslant 1$. On a aussi vu la convergence de la série pour $p = 2$, et comme $1/n^p < 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si $p \geqslant 2$, on déduit la convergence de la série plus généralement pour tout $p \geqslant 2$. Il ne reste alors qu'à étudier le cas où $1 < p < 2$.

Pour cela, on considère la fonction :

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \qquad \text{telle que} \qquad f(x) := \frac{1}{(x+1)^p} \qquad \forall x \geqslant 0.$$

Evidemment f est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, et son intégral indéfini est :

$$\int f(x)dx = \frac{(x+1)^{1-p}}{1-p} + c$$

(avec c la constante d'intégration). Puisque $p > 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}.$$

En vertu de la proposition 2.13, *la série de Riemann* $(*)$ *converge alors pour tout réel* $p > 1$ *et diverge pour* $p \leqslant 1$. Noter que la preuve de la proposition montre aussi les estimations :

$$\boxed{\frac{1}{p-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{p}{p-1} \qquad \forall p > 1.}$$

Proposition 2.15. (Règle de Raabe-Duhamel) *Soit* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *une suite à termes strictement positifs. Alors on a :*

(i) *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge, s'il existe* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *tel que :*

$$(*) \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k} \qquad \forall k \geqslant n.$$

(ii) *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge, s'il existe* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et un réel* $b > 1$ *tels que :*

$$(**) \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant 1 - \frac{b}{k} \qquad \forall k \geqslant n.$$

Démonstration. (i) : L'inégalité $(*)$ entraîne :

$$a_{k+1} \geqslant a_k\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) \qquad \forall k \geqslant n$$

donc, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a :

$$a_{n+k} \geqslant a_n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{n+2}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{n+k-1}\Big).$$

Mais d'autre part :

$$\prod_{i=0}^{k-1}\Big(1 - \frac{1}{n+i}\Big) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdots \frac{n+k-2}{n+k-1} = \frac{n+1}{n+k+1} \qquad \forall k > 0.$$

(On prend $n \neq 0, 1$ justement pour éviter un dénominateur ou un numérateur égal à 0 dans le produit de fractions ci-dessus.) Donc :

$$\sum_{i=n+2}^{n+k+2} a_i \geqslant a_{n+2} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{n+1}{n+i+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

et on sait que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} 1/i$ diverge, donc de même pour $\sum_{i=0}^{+\infty}(n+1)/(n+i+1)$, d'où de même pour $\sum_{i=n+2}^{+\infty} a_i$, et finalement, aussi pour $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$.

(ii) : Prenons $p \in \mathbb{R}$ tel que $b > p > 1$, et posons :

$$u_k := \frac{1}{k^p} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On a déjà vu que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k < +\infty$ (exemple 2.14). Noter que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)^{-p}}{k^{-p}} = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-p} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Or, le développement limité de $f(x) := (1+x)^{-p}$ au voisinage de $x = 0$ est :

$$f(x) = 1 - px + o(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(1+x)^{-p} > 1 - bx \qquad \forall x \in]0, \varepsilon[.$$

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $1/m \leqslant \varepsilon$; alors :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 - \frac{b}{k} \qquad \forall k \geqslant m.$$

Posons $N := \max(n, m)$; il vient :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad \forall k \geqslant N$$

d'où :

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+k+1}}{a_{N+k}} < \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdots \frac{u_{N+k+1}}{u_{N+k}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

autrement dit :

$$\frac{a_{N+k+1}}{a_N} < \frac{u_{N+k+1}}{u_N} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et ainsi :

$$a_{N+k+1} < \frac{a_N}{u_N} \cdot u_{N+k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais la série $\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k$ converge, donc de même pour $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k$, et finalement on déduit la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. □

Exercice 2.16. Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante de nombres réels positifs, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.$$

En effet, d'après la proposition 2.4(i), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant m \geqslant N.$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, notons par $[x]$ la partie réelle de x ; prenons $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$[k/2] \geqslant N \quad \text{c'est à dire :} \quad k \geqslant 2N.$$

Alors :

$$a_{[k/2]+1} + a_{[k/2]+1} + \cdots + a_k < \varepsilon$$

et noter que :

$$a_{[k/2]+1} + a_{[k/2]+1} + \cdots + a_k \geqslant (k - [k/2])a_k \geqslant \frac{k}{2}a_k$$

car cette somme contient $k - [k/2]$ termes, et chaque terme est $\geqslant a_k$, car la suite $a_\bullet$ est décroissante. Donc :

$$ka_k < 2\varepsilon \qquad \forall k \geqslant 2N$$

d'où l'assertion.

2.3. **Convergence absolue et séries à signes alternés.**

Définition 2.17. On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ de nombres réels est *absolument convergente*, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ est convergente.

Proposition 2.18. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. D"après la proposition 2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_{q+1}| + |a_{q+2}| + \cdots + |a_p| < \varepsilon \qquad \forall p > q \geqslant n$$

et d'autre part, on a :

$$|a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p| \leqslant |a_{q+1}| + |a_{q+2}| + \cdots + |a_p|.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p| < \varepsilon \qquad \forall p > q \geqslant n.$$

Encore avec la proposition 2.4, on déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. □

Exemple 2.19. Montrons la convergence de la série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}.$$

Il suffit de vérifier la convergence absolue. Mais on a :

$$\left|\frac{\sin(k)}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2} \qquad \forall k \geqslant 1$$

et on sait que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 < +\infty$, d'où de même $\sum_{k=1}^{+\infty} |\sin(k)/k^2| < +\infty$, CQFD.

En l'absence de convergence absolue, l'étude du caractère d'une série peut être assez difficile. On a au moins un critère utile :

Proposition 2.20. (Critère de Leibniz) *Soit* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *une suite de nombres réels vérifiant les conditions suivantes :*

(a) La suite $(|a_n| \,|\, n \in \mathbb{N})$ *est décroissante.*
(b) La suite $a_\bullet$ *converge vers* 0.
(c) La suite $a_\bullet$ *est à signes alternés, c'est à dire :*

$$a_n = (-1)^n \cdot |a_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge vers un nombre réel* l.

Démonstration. (i) : Posons $s_k := a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Noter que :

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et par hypothèse :

$$a_{2k+2} \geqslant 0 \qquad a_{2k+1} \leqslant 0 \qquad |a_{2k+1}| \geqslant |a_{2k+2}|.$$

On déduit aisément que :

$$s_{2k+2} - s_{2k} \leqslant 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Un raisonnement analogue montre que :

$$s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k} + a_{2k+1} \geqslant 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En outre :

$$s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} \leqslant 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En résumant, on obtient :

(a) la suite $(s_{2k} \,|\, k \in \mathbb{N})$ est décroissante
(b) la suite $(s_{2k+1} \,|\, k \in \mathbb{N})$ est croissante
(c) $s_{2k} \geqslant s_{2k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
(d) $\lim_{k\to+\infty} s_{2k} - s_{2k+1} = 0$.

Ainsi, $(s_{2k} \,|\, k \in \mathbb{N})$ est décroissante et minorée, donc elle converge (exemple 1.4(ii)), et de même, $(s_{2k+1} \,|\, k \in \mathbb{N})$ est croissante et majorée, donc elle converge aussi. Avec (d) on trouve que ces deux suites ont la même limite $L \in \mathbb{R}$; mais alors L est aussi la limite de $(s_k \,|\, k \in \mathbb{N})$, autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$. □

Exemple 2.21. Les conditions du critère de Leibniz sont remplies avec

$$a_n := (-1)^n/(n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc on a la série convergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Quelle est la somme S de cette série ? On verra que $S = \ln(2)$, mais pour établir cette identité il nous faudra une théorie plus complète : voir l'exemple 4.14(i).

Le critère de Leibniz est un cas particulier du critère plus général suivant :

Proposition 2.22. (Critère de Dirichlet) *Soient deux suites de nombres réels*

$$a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N}) \qquad \textit{et} \qquad b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N}).$$

Posons $u_n := a_n b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et supposons que :*

(a) *La suite* $a_\bullet$ *est décroissante à termes positifs, et* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) *Il existe un réel* $M > 0$ *tel que :*

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+m} b_k\Big| \leqslant M \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Alors on a :

(i) *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge vers un nombre réel* l.

(ii) *Pour les restes de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *on a les estimations suivantes :*

$$\Big|\sum_{k=n}^{m+n} u_n\Big| \leqslant M a_n \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. (Attention : la condition (b) n'entraîne pas la convergence de la suite $b_\bullet$ ou de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. En effet, cette condition est vérifiée avec $b_n := (-1)^n$; d'ailleurs, avec ce choix pour $b_\bullet$ on retrouve le critère de Leibniz.)

Noter d'abord que les estimations de (ii) entraînent la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: en effet, puisque $a_\bullet$ converge vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon/M \qquad \forall n \geqslant N$$

d'où, compte tenu de (ii) :

$$\Big|\sum_{k=q+1}^{p} u_n\Big| \leqslant \varepsilon \qquad \forall p > q \geqslant N$$

et la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ découle alors de la proposition 2.4.

Il ne reste donc qu'à vérifier les estimations de (ii). Celles-ci suivent de l'observation plus générale suivante :

Affirmation 2.23. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et toute suite décroissante de nombres réels :

$$x_0 \geqslant x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_m \geqslant 0$$

on a :

$$(*) \qquad |x_0 b_n + x_1 b_{n+1} + \cdots + x_m b_{n+m}| \leqslant M x_0.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur m. Pour $m = 0$, on doit montrer que :

$$(**) \qquad |x b_n| \leqslant M x \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0.$$

Mais si l'on fait $m = 0$ dans la condition (b), il vient $|b_n| \leqslant M$, d'où $(*)$.

Soit alors $m > 0$, et supposons que l'inégalité $(*)$ soit déjà connue pour toute suite décroissante de $m - 1$ nombres réels ; on pose

$$y_i := x_i - x_m \qquad \forall i = 0, \ldots, m-1$$

et noter que :

$$y_0 \geqslant y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_{m-1} \geqslant 0.$$

Par hypothèse, il vient alors :

$$|y_0 b_n + y_1 b_{n+1} \cdots + y_{m-1} b_{n+m-1}| \leqslant M y_0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=0}^{m} x_k b_{n+k}\Big| &= \Big|(y_0 b_n + y_1 b_{n+1} \cdots + y_{m-1} b_{n+m-1}) + x_m \sum_{k=n}^{n+m} b_k\Big| \\ &\leqslant |y_0 b_n + y_1 b_{n+1} \cdots + y_{m-1} b_{n+m-1}| + x_m \cdot \Big|\sum_{k=n}^{n+m} b_k\Big| \\ &\leqslant M y_0 + x_m M = x_0 M\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Corollaire 2.24. *Sous les hypothèse du critère de Leibniz (proposition 2.20) on a les estimations suivantes pour les restes de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *:*

$$\Big|\sum_{k=n}^{m+n} a_n\Big| \leqslant |a_n| \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On a $a_n = b_n \cdot |a_n|$, avec $b_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $|\sum_{k=n}^{n+m} b_k| \leqslant 1$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. L'assertion découle alors de la proposition 2.22(ii). □

Voici un dernier critère dans le même esprit :

Proposition 2.25. (Critère d'Abel) *Soient* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *et* $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *des suites de nombres réels. Posons* $u_n := a_n b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et supposons que :*

(a) La suite $a_\bullet$ *soit monotone et bornée.*
(b) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *soit convergente.*

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente, et pour ses restes on a les estimations :*

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+m} u_k\Big| \leqslant 3L \cdot M(n,m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

avec $L := \sup\{|a_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ *et* $M(n,m) := \max\big(\big|\sum_{k=n}^{n+j} b_k\big| \,|\, j = 0, \dots, m\big)$.

Démonstration. Posons :

$$A_{n,m} := \sum_{k=n}^{n+m} a_k \qquad B_{n,m} := \sum_{k=n}^{n+m} b_k \qquad U_{n,m} := \sum_{k=n}^{n+m} u_k \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}U_{n,m} &= a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \cdots + a_{n+m} b_{n+m} \\ &= a_n B_{n,0} + a_{n+1}(B_{n,1} - B_{n,0}) + \cdots + a_{n+m}(B_{n,m} - B_{n,m-1}) \\ &= a_{n+m} B_{n,m} + \sum_{k=0}^{m-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) B_{n,k}.\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 2.4(i), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|B_{n,k}| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite :

$$|U_{n,m}| \leqslant (|a_{n+m}| + \sum_{k=0}^{m-1} |a_{n+k} - a_{n+k+1}|)\varepsilon \qquad \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant 0.$$

Mais noter que, puisque $a_\bullet$ est monotone, les termes $a_{n+k} - a_{n+k+1}$ sont tous du même signe, et alors :

$$\sum_{k=0}^{m-1} |a_{n+k} - a_{n+k+1}| = |a_n - a_{n+m}|$$

donc finalement :

$$|U_{n,m}| \leqslant (|a_{n+m}| + |a_n - a_{n+m}|)\varepsilon \leqslant 3L\varepsilon \qquad \forall n \geqslant N, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Cela entraîne la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, encore d'après la proposition 2.4(i).

L'estimation des restes s'obtient par inspection directe des calculs. □

2.4. **Opérations sur les séries numériques.**

Proposition 2.26. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série absolument convergente de nombres réels, et considérons une permutation arbitraire*

$$\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

de l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est à dire une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Alors la série permutée $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et on a :

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. Posons :

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n \qquad \text{et} \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(**) \qquad |a_k| + |a_{k+1}| + \cdots + |a_{k+m}| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant n(\varepsilon), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Or, soit :

$$M(\varepsilon) := \max(\sigma^{-1}(0), \ldots, \sigma^{-1}(n(\varepsilon))).$$

Evidemment on a :

$$\{0, 1, \ldots, n(\varepsilon)\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(M(\varepsilon))\}.$$

Par suite, compte tenu de $(**)$, il vient :

$$|t_m - s_{n(\varepsilon)}| = \left|\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n(\varepsilon)} a_k\right| < \varepsilon \qquad \forall m \geqslant M(\varepsilon).$$

D'autre part, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$, on déduit aussi de $(**)$ que :

$$|s_{n(\varepsilon)} - l| < \varepsilon$$

d'où :

$$|t_m - l| \leqslant |t_m - s_{n(\varepsilon)}| + |s_{n(\varepsilon)} - l| < 2\varepsilon \qquad \forall m \geqslant M(\varepsilon)$$

et cela achève de vérifier l'identité $(*)$ de la proposition.

Pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, il suffit maintenant d'appliquer à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ le résultat qu'on vient de montrer : on déduit ainsi la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{\sigma(n)}|$, CQFD. □

Remarque 2.27. Je vous ai signalé la proposition précédente surtout pour vous mettre en garde que si une série converge *sans être absolument convergente*, alors une permutation des indices peut changer sa somme, *et même son caractère*.

Par exemple, revenons à la série :

$$(*) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

On a vu que cette série converge (exemple 2.21), mais elle n'est pas absolument convergente (remarque 2.5(ii)). Considérons alors la permutation suivante des termes de cette série :

$$(**) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

(deux termes positifs sont toujours suivis par un terme négatif). Groupons les termes 3-à-3 :

$$(***) \qquad \Big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\Big) + \cdots$$

Chaque groupe en parethèses contient :

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} = \frac{8n+5}{(4n+1)(4n+5)(2n+2)} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la somme de $(***)$ est :

$$S > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.$$

Mais la somme de la série $(*)$ est :

$$S' = \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\Big) \cdots < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

car chaque terme en parenthèse est positif.

(ii) Dans la discussion ci-dessus, on a utilisé l'opération qui consiste à regrouper des termes d'une série, *sans les permuter*. Il s'agit d'une opération inoffensive, qui ne modifie pas la somme d'une série convergente. Pour analyser cette opération, considérons une application strictement croissante

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Soit aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série convergente, et posons $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que la somme de cette série est la limite de $s_\bullet := (s_n \,|\, n \in \mathbb{N})$. On associe alors à la série le regroupement de termes sélectionné par ϕ, de la façon suivante :

$$(a_0 + \cdots + a_{\phi(0)}) + (a_{\phi(0)+1} + \cdots + a_{\phi(1)}) + (a_{\phi(1)+1} + \cdots + a_{\phi(2)}) + \cdots$$

Autrement dit, cela donne une nouvelle série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, avec

$$b_0 := a_0 + \cdots + a_{\phi(0)} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} := \sum_{k=\phi(n)+1}^{\phi(n+1)} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On appelle $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ le regroupement de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sélectionné par ϕ. Par définition, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est la limite de la suite $t_\bullet := (t_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ avec $t_n := \sum_{k=0}^{n} b_n$. Mais évidemment $t_n = s_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire, $t_\bullet$ est une sous-suite de $s_\bullet$, et donc sa limite coïncide avec celle de $s_\bullet$ (lemme 1.5(ii)).

(iii) D'autre part, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est une série divergente, alors elle peut bien sûr devenir convergente après regroupement de termes. Par exemple, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ est divergente, mais on a :

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0.$$

Donc, il n'est pas encore tout à fait clair si l'on peut déduire la convergence de la série permutée $(**)$ à partir de la convergence de $(***)$, dans la discussion de (i) ci-dessus. (Noter que les critères de Leibniz, Dirichlet ou Abel ne s'appliquent pas à la série $(**)$, car la suite des valeurs absolues de ses termes n'est pas monotone). Pour cela, on peut se servir de l'observation suivante :

Proposition 2.28. *Soient $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, et notons par $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ le regroupement de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sélectionné par ϕ. Supposons en outre que $a_\bullet$ converge vers 0, et que le regroupement sélectionné par ϕ soit de taille bornée, c'est à dire :*

$$\exists M \in \mathbb{N} \qquad \textit{tel que} \qquad \phi(n+1)-\phi(n) \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge.

Démonstration. (La condition sur ϕ revient à dire que chaque terme b_n est une somme de au plus M termes consecutifs de la suite $a_\bullet$.) On vient de voir que si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, il en est de même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Donc on peut supposer que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, et on doit vérifier qu'il en est de même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Or, par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N.$$

En outre, d'après la proposition 2.4(i) il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|b_q + b_{q+1} + \cdots + b_p| < \varepsilon \qquad \forall p > q \geqslant N'.$$

Posons $K := \max(N, \phi(N'))$, et soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m \geqslant K$. Soient $q \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $m \leqslant \phi(q)$, et $p \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $\phi(p) \leqslant n$. Noter que :

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = (a_m + \cdots + a_{\phi(q)}) + (b_q + \cdots + b_p) + (a_{\phi(p)+1} + \cdots + a_n).$$

Noter aussi que $a_m + \cdots + a_{\phi(q)}$ est une somme de au plus $M-1$ termes, et de même pour $a_{\phi(p)+1} + \cdots + a_n$. Il vient ainsi :

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < 2(M-1)\varepsilon + \varepsilon = (2M-1)\varepsilon \qquad \forall n > m \geqslant K$$

et cela entraîne la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, d'après la proposition 2.4(i). □

On peut maintenant completer la discussion de la remarque 2.27(i) : la série convergente $(***)$ est un regroupement de taille bornée de la série $(**)$, et évidemment les termes de $(**)$ forment une suite convergente vers 0 ; d'après la proposition 2.28, on déduit la convergence de $(**)$.

Proposition 2.29. *(i) Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries convergentes de nombres réels. Alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(ii) En outre, si les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, il en est de même pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n + \mu b_n$.

Démonstration. (i) : Posons $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} t_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lim_{n\to+\infty} (\lambda s_n + \mu t_n)$$

donc l'assertion découle aussitôt de la proposition 1.7.

(ii) : On a $|\lambda a_n + \mu b_n| \leq |\lambda| \cdot |a_n| + |\mu| \cdot |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n + \mu b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|\lambda| \cdot |a_n| + |\mu| \cdot |b_n|) = |\lambda| \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |\mu| \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$$

d'après (i). Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ est bien absolument convergente. □

Exercice 2.30. (i) Soient $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ deux suites de nombres réels, telles que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2$ soient convergentes. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est absolument convergente. En effet, noter d'abord que l'on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$$

donc :

$$a^2 + b^2 \geqslant \max(-2ab, 2ab) = 2|ab| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Par suite, avec la proposition 2.29(i), il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 < +\infty$$

d'où l'assertion.

(ii) En déduire que si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une série convergente à termes positifs, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

est une série convergente. En effet, posons $a_n := \sqrt{u_n}$ et $b_n := 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$; par hypothèse $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge, et de même pour $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ (remarque 2.5(iv)), donc l'assertion découle de (i).

La définition suivante introduit une dernière importante opération sur les séries :

Définition 2.31. Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux suites de nombres réels ; le *produit de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \qquad \text{avec :} \qquad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.32. (de Mertens) *(i) Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série absolument convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ une série convergente. Alors le produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est convergent, et on a l'égalité des sommes :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

(ii) En outre, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *sont absolument convergentes, il en est de même pour leur produit de Cauchy* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$*.*

Démonstration. (i) : Posons :

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad B := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Posons aussi $A_{-1} = B_{-1} := -1$. Soit en outre

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i+j\leqslant n} a_i b_j = \sum_{i+j\leqslant n} a_i (B_j - B_{j-1}) = \sum_{i+j=n} a_i B_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|B - B_j| < \varepsilon \qquad \forall j \geqslant N_1.$$

Evidemment on peut supposer que $N_1 > 0$, et alors il existe aussi $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_i| < \varepsilon / N_1 \qquad \forall i \geqslant N_2.$$

Posons :

$$M := \max\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, |B - B_0|, |B - B_1|, \ldots, |B - B_{N_1}|\Big).$$

Pour tout $n \geqslant N_1 + N_2$ il vient :

$$\begin{aligned}
|C_n - A_n B| = \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i (B_{n-i} - B)\Big| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-N_1} |a_i (B_{n-i} - B)| + \sum_{i=n-N_1+1}^{n} |a_i (B_{n-i} - B)| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-N_1} |a_i| \varepsilon + \sum_{i=n-N_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{N_1} |B_{n-i} - B| \\
&\leqslant M\varepsilon + \sum_{i=n-N_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{N_1} M = 2M\varepsilon
\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty} A_n B = AB$$

comme souhaité.

(ii) : Par hypothèse, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ convergent, donc de même pour leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n$, d'après (i). Il suffit alors d'observer que

$$|c_n| \leqslant \sum_{i+j=n} |a_i| \cdot |b_j| = d_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

pour déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|$ est également convergente, comme souhaité. □

Remarque 2.33. Si les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sont seulement convergentes, leur produit de Cauchy n'est pas toujours convergent : par exemple, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente, par le critère de Leibniz ; or, son produit de Cauchy avec elle même est la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \qquad \text{avec} \qquad c_n := (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

et on a $k(n-k) \leqslant (n-1)^2$ pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, donc $|c_n| \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$, et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ est alors grossièrement divergente. Voir toutefois l'exemple 4.14(iii).

2.5. **Séries de nombres complexes.** Les séries de nombres complexes et leurs sommes se définissent exactement comme les séries de nombres réels : soit $z_\bullet := (z_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres complexes ; la *série associée à* $z_\bullet$ est la suite

$$u_\bullet := (u_n \,|\, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{avec} \quad u_n := \sum_{k=0}^{n} z_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et la *somme de la série associée à* $z_\bullet$ est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n := \lim_{n \to +\infty} u_n$$

où, bien entendu, la limite de la suite $u_\bullet$ est définie comme à la section 1.4.

Compte tenu de la discussion des suites à termes complexes, on voit aisément que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ *converge si et seulement s'il en est de même pour les séries des ses parties réelles et imaginaires*, et en fait on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{R}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{I}(z_n).$$

Il s'ensuit qu'une bonne partie des résultats que l'on a démontré pour les séries à termes réels se généralisent aussitôt aux séries à termes complexes.

Exemple 2.34. Par exemple, la discussion de la série géométrique (exemple 2.3(ii)) reste valide *verbatim* pour le cas où la raison r est un nombre complexe : on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \text{si } \|r\| < 1.}$$

De même, la proposition 2.4 est encore vraie pour les séries à termes complexes (quitte à remplacer la valeur absolue $|\cdot|$ par le module $\|\cdot\|$). Les résultats de la section 2.2 sur les séries à termes positifs, par contre, *ne se généralisent pas directement* aux séries complexes, et de même pour le critère de Leibniz, car on n'a pas une relation d'ordre sur les complexes. Toutefois, on a les généralisations partielles suivantes des critères de Dirichlet et d'Abel, qui sont parfois utiles :

Proposition 2.35. *Soient* $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *une suite de nombres réels, et* $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ *une suite de nombres complexes. Posons* $u_n := a_n b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et supposons que :*

(a) La suite $a_\bullet$ *est décroissante à termes positifs, et* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

(b) Il existe un réel $M > 0$ *tel que :*

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+m} b_k \Big\| \leqslant M \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Alors on a :

(i) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge vers un nombre complexe l.

(ii) Pour les restes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ on a les estimations suivantes :

$$\Big\| \sum_{k=n}^{m+n} u_n \Big\| \leqslant M a_n \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On peut simplement reprendre la preuve de la proposition 2.22 mot par mot, quitte à remplacer partout la valeur absolue $|\cdot|$ par le module $\|\cdot\|$. □

Proposition 2.36. *Soient $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, et $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres complexes. Posons $u_n := a_n b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et supposons que :*

(a) La suite $a_\bullet$ soit monotone et bornée.

(b) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ soit convergente.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, et pour ses restes on a les estimations :

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+m} u_k \Big\| \leqslant 3L \cdot M(n,m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

avec $L := \sup\{|a_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ et $M(n,m) := \max\big(\big\|\sum_{k=n}^{n+j} b_k\big\| \,|\, j = 0, \dots, m\big)$.

Démonstration. Encore une fois, il suffit de reprendre la preuve du critère d'Abel (proposition 2.25), quitte à remplacer partourt la valeur absolue $|\cdot|$ par le module complexe $\|\cdot\|$. □

2.5.1. D'autre part, on a une notion utile de convergence absolue pour séries à termes complexes : évidemment on dira qu'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|z_n\|$ converge. Au vu des inégalités :

$$|\Re(z)| + |\Im(z)| \geqslant \|z\| \geqslant \max(|\Re(z)|, |\Im(z)|) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

il vient que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est absolument convergente si et seulement s'il en est de même pour les séries réelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \Re(z_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \Im(z_n)$. Par suite, la proposition 2.18 se prolonge au cas complexe : *toute série absolument convergente à termes complexes est convergente.* De même pour la proposition 2.26 : *toute permutation des termes d'une série complexe absolument convergente donne encore une série absolument convergente* ; et pour la remarque 2.27(ii) et la proposition 2.28 : *tout regroupement d'une série complexe convergente est convergente.*

Et pour terminer, aussi la proposition 2.29 et le théorème de Mertens 2.32 s'étendent *verbatim* aux séries complexes, avec le même preuves.

Exemple 2.37. (i) Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la *série exponentielle* :

$$\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

converge absolument. Puisque $\|z^n/n!\| = \|z\|^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela revient à vérifier la convergence de la série de nombres réels à termes positifs :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{avec } x := \|z\|.$$

Pour cela on applique la règle de D'Alembert à la suite $(a_n := \frac{x^n}{n!} \mid n \in \mathbb{N})$; on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

d'où la convergence souhaitée.

(ii) Avec le théorème de Mertens, on peut ensuite démontrer l'identité bien connue pour la fonction exponentielle :

$$\boxed{e^{z+w} = e^z e^w \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.}$$

En effet, considérons les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} w^n/n!$, uniformement convergentes d'après (i), et dont les sommes sont, par définition, respectivement e^z et e^w, et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ leur produit de Cauchy. Avec le binôme de Newton, on calcule :

$$c_n = \sum_{i+j=n} \frac{z^i}{i!} \cdot \frac{w^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{z^i w^j}{n!} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

(où $\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!}$ dénote le coefficient binomial). Autrement dit, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ est précisément la série exponentielle dont la somme est e^{z+w}, d'où l'identité souhaitée, par le théorème 2.32.

Exemple 2.38. (i) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de x_0, c'est à dire, U contient un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, pour quelque réel $\varepsilon > 0$. On peut alors attacher à f sa *série de Taylor au point* x_0 :

$$\boxed{S(f, x, x_0) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

où $f^{(k)}(x_0)$ dénote la dérivée k-ième de f en x_0, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (en particulier, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$). En générale, cette série n'est pas forcément convergente, sauf pour le cas trivial où $x = x_0$. On étudiera plus tard en détail la question de la convergence de la série $S(f, x, x_0)$, mais on peut déjà examiner ici les cas particuliers intéressants où $f(x) = \sin(x)$ ou $f(x) = \cos(x)$, avec $x_0 = 0$.

En effet, supposons que $U =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$; alors d'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange, pour tout $x \in U \setminus \{x_0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un nombre réel ξ dans l'intervalle ouvert d'extremités x et x_0, tel que :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.}$$

Si $x_0 = 0$, cette identité devient plus simplement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Prenons alors $f(x) = \sin(x)$ et rappelons que :

$$\sin(x)' = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(x)' = -\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, on voit alors que :

$$\sin(0)^{(2k)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(0)^{(2k+1)} = (-1)^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On trouve alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ un réel ξ dans l'intervalle ouvert d'extremités 0 et x, tel que :

$$\sin(x) = S_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}\sin(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \qquad \text{avec} \qquad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Comme $|\sin(\xi)| \leqslant 1$, il vient :

$$|\sin(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mais on vient de voir (exemple 2.37(i)) que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la suite $(x^{2n+2}/(2n+2)! \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 (proposition 2.4(ii) et lemme 1.5(ii)). Par définition, la somme de la série de Taylor $S(\sin(x), x, 0)$ est la limite de la suite $(S_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N})$, donc finalement on trouve :

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Un raisonnement analogue, que l'on laissera au lecteur, donne de même :

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

(ii) Pour compléter cette discussion, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n = 2k + a$ (avec $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0, 1\}$) on a :

$$\mathfrak{R}((ix)^n) = \begin{cases} (-1)^k x^{2k} & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a = 1 \end{cases} \qquad \mathfrak{I}((ix)^n) = \begin{cases} (-1)^k x^{2k+1} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Par comparaison avec l'exemple 2.37 et avec les expressions obtenues en (i), on déduit aussitôt la célèbre *formule d'Euler* :

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

(iii) Rappelons que pour tout nombre complexe $z \neq 0$, on dénote par :

$$\arg(z) \in [0, 2\pi[$$

l'argument de z, défini comme l'angle dans le plan de Gauss entre l'axe réel et la droite $\mathbb{R}z$; ainsi on a :

$$\arg(z) = \arccos\Big(\frac{\mathfrak{R}(z)}{\|z\|}\Big) = \arcsin\Big(\frac{\mathfrak{I}(z)}{\|z\|}\Big)$$

et en outre :

$$z = \|z\| \cdot (\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))).$$

Compte tenu de (ii), cette dernière identité s'écrit aussi :

$$\boxed{z = \|z\| \cdot e^{i\arg(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

2.6. **Appendice : la série des inverses des nombres premiers.** Comme dans la remarque 2.5(iii), notons par $(p_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ la suite des nombres entiers premiers ; on souhaite montrer la divergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Pour cela, on va d'abord associer à tout $n \in \mathbb{N}$ la partie :

$$\Omega_n := \{p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} \,|\, 0 \leqslant k_0, k_1, \dots, k_n \leqslant n\} \subset \mathbb{N}$$

et noter que la cardinalité de l'ensemble fini Ω_n est $t(n) := (n+1)^{n+1}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{1\} \\
\Omega_1 &= \{1,2,3,6\} \\
\Omega_2 &= \{1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,25,30,36,45,50,60,75,90,100,150,180, \\
&\qquad 225,300,450,900\}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Comme tout entier strictement positif se factorise en produit de puissances de nombres premiers, on a évidemment :

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n.$$

Or, soit $\phi : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une bijection que l'on construit de proche en proche, de la façon suivante : d'abord, on pose

$$\phi_0(0) := 1.$$

Ensuite on choisit une application bijective arbitraire

$$\phi_1 : \{0, \dots, t(1)-1\} \xrightarrow{\sim} \Omega_1 \qquad \text{telle que } \phi_1(0) = \phi_0(0).$$

Puis on chosit une bijection

$$\phi_2 : \{0, \dots, t(2)-1\} \xrightarrow{\sim} \Omega_2 \qquad \text{telle que } \phi_2(k) = \phi_1(k) \quad \forall k < t(1).$$

On répète : à l'étape $(n+1)$-ième, on construit

$$\phi_{n+1} : \{0, \dots, t(n+1)-1\} \xrightarrow{\sim} \Omega_{n+1} \qquad \text{telle que } \phi_{n+1}(k) = \phi_n(k) \quad \forall k < t(n).$$

On obtient ainsi un système de bijections $(\phi_n : \{0, \dots, t(n)-1\} \xrightarrow{\sim} \Omega_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, et la bijection $\phi : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sera l'unique application ϕ telle que

$$\phi(k) = \phi_n(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \Omega_n.$$

Or, rappelons que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \frac{1}{1-p_n^{-1}} = \frac{p_n}{p_n - 1} = 1 + \frac{1}{p_n - 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posons aussi :

$$T_r := \prod_{n=0}^{r} \Big(1 + \frac{1}{p_n - 1}\Big) \qquad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Evidemment on a :

$$T_r > \prod_{n=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{p_n^k} = \sum_{m \in \Omega_r} \frac{1}{m} = \sum_{i=0}^{t(r)-1} \frac{1}{\phi(i)} \qquad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Mais on sait que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} 1/i$ diverge, donc de même pour la série permutée $\sum_{i=0}^{+\infty} 1/\phi(i)$ (proposition 2.26). Mais alors aussi la suite $(T_r \mid r \in \mathbb{N})$ diverge, donc de même pour la suite :

$$(S_r := \ln(T_r) \mid r \in \mathbb{N})$$

d'après la proposition 1.9. On a :

$$S_r = \sum_{n=0}^{r} \ln\Big(1 + \frac{1}{p_n - 1}\Big) \qquad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Rappelons le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

Cela revient à dire qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que :

$$\Big|\ln\Big(1 + \frac{1}{p_n - 1}\Big) - \frac{1}{p_n - 1}\Big| \leqslant \frac{M}{(p_n - 1)^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais on sait que la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{(p_n - 1)^2}$$

converge ; par suite, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n - 1}$$

doit être divergente. Avec la proposition 2.8 on conclut alors que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/p_n$ est aussi divergente, CQFD.

2.7. **Appendice : nombres de Liouville.** On dit qu'un réel x est un *nombre de Liouville*, si pour tout entier $n > 0$ il existe un couple d'entiers (p, q) avec $q > 1$, tel que :

$$0 < \Big|x - \frac{p}{q}\Big| < \frac{1}{q^n}.$$

En 1844, le mathématicien français Joseph Liouville a démontré que tout réel vérifiant cette condition est *transcendant,* c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. D'un point de vue moderne, l'existence de nombres transcendants est immédiate, par des raisonnements de cardinalité, mais ces considérations de caractère ensembliste n'étaient nullement évidentes pour les mathématiciens avant les travaux fondateurs de Cantor (entre 1874 et 1884), et aucun nombre transcendant n'était connu avant le résultat de Liouville. Depuis, la théorie des nombres a considérablement avancé, et on sait maintenant qu'il existe des nombres transcendants qui ne sont pas de Liouville : par exemple, les nombres π et e sont dans cette classe (la transcendance de e fut démontré par le mathématicien français Charles Hermite en 1873, et celle de π par le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann en 1882, suivant des idées de Hermite).

Dans cette appendice, on va d'abord construire explicitement des nombres de Liouville, comme somme de certaines simples séries de nombres rationnels ; on fournira ensuite la preuve de la transcendance de ces nombres.

Or, soit $b > 1$ un entier fixé, et $(a_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ une suite d'entiers avec $0 \leqslant a_k < b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notre nombre de Liouville sera :

$$(*) \qquad x := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{b^{k!}}.$$

Noter que :

$$\frac{a_k}{b^{k!}} \leqslant \frac{b}{b^{k!}} \leqslant \frac{1}{b^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{b}{b-1}$$

donc la série $(*)$ converge effectivement dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons :

$$q_n := b^{n!} \qquad \text{et} \qquad p_n := q_n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} = \sum_{k=0}^{n} a_k b^{n!-k!}.$$

Evidemment :

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^{k!}} > 0$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^{k!}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^{k!}} < \sum_{k=(n+1)!}^{+\infty} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{b}{b^{(n+1)!}} < \frac{1}{q_n^n}$$

d'où l'assertion.

Avant de prouver la transcendance des nombres de Liouville, vérifions qu'ils sont *irrationnels*, c'est-à-dire, qu'ils ne sont pas des fractions de nombres entiers. En effet, supposons par l'absurde que le nombre x de Liouville soit de la forme :

$$x = c/d \qquad \text{avec} \qquad c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d > 0$$

et prenons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $2^{n-1} > d$. Par hypothèse, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 1$, tels que :

$$0 < \left| \frac{c}{d} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{cq - pd}{dq} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

En particulier, $cq - pd \neq 0$, et donc $|cq - pd| \geqslant 1$, car $c, q, p, d \in \mathbb{Z}$. Par suite :

$$\left| \frac{c}{d} - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{dq} \geqslant \frac{1}{2^{n-1} q} \geqslant \frac{1}{q^n}$$

contradiction ! Montrons ensuite :

Théorème 2.39. (de Liouville) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel qui est racine d'un polynôme $P(x)$ à coefficients entiers de degré $n > 0$. Alors il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n} \qquad \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Posons :

$$M := \max\{|P'(x)| \,|\, x \in [\alpha - 1, \alpha + 1]\}$$

et noter que $M > 0$, car sinon le polynôme $P(X)$ serait constant sur l'intervalle $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, et comme $P(\alpha) = 0$, on aurait $P(x) = 0$ pour tout $x \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, et cela est absurde, car un polynôme de degré $n > 0$ n'a que n racines au plus. Soient en outre $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les racines réelles de $P(X)$ distinctes de α, et posons :

$$A := \frac{1}{2}\min\{1, 1/M, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\}.$$

Noter que $A > 0$; on va montrer que A convient. Pour cela, on raisonne par l'absurde : soient alors $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$, tels que :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{A}{q^n}.$$

En particulier, $|\alpha - p/q| \leqslant A < 1$, et $|\alpha - p/q| < |\alpha - \alpha_i|$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Cela revient à dire que $p/q \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ et il n'y a aucune racine de $P(X)$ entre α et p/q (on a aussi $p/q \neq \alpha$, car par hypothèse α est irrationnel). Par le théorème des accroissements finis, il existe alors un réel ξ dans l'intervalle ouvert d'extremités α et p/q tel que :

$$0 \neq P(p/q) = P(p/q) - P(\alpha) = (p/q - \alpha) \cdot P'(\xi).$$

En particulier, $P'(\xi) \neq 0$, et il vient :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{P(p/q)}{P'(\xi)}\right|.$$

D'autre part, écrivons $P(X) = a_0X^n + a_1X + \dots + a_n$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$; on a :

$$|P(p/q)| = |q^{-n}(a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + q^n)| \geqslant \frac{1}{q^n}$$

d'où, finalement :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^n \cdot |P'(\xi)|} \geqslant \frac{1}{q^n M} > \frac{A}{q^n}$$

car $|P'(\xi)| \leqslant M$ et $A < 1/M$; contradiction ! □

On peut maintenant conclure la preuve de la transcendance des nombres de Liouville. Soit en effet x un tel nombre ; on sait déjà que x est irrationnel ; supposons par l'absurde que x soit racine d'un polynôme de degré $n > 0$ à coefficients entiers. D'après le théorème de Liouville, il existe alors $A > 0$ tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n} \qquad \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Soit alors $r > 0$ un entier tel que $1/2^r \leqslant A$, et posons $m := n + r$; puisque x est un nombre de Liouville, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 1$ tels que :

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m} \leqslant \frac{1}{2^r q^n} \leqslant \frac{A}{q^n}$$

et la contradiction achève la preuve.

3. Suites et séries de fonctions

3.1. **Limite d'une suite de fonctions.** On s'intéresse maintenant aux limites des suites qui dépendent d'un paramètre réel :

Définition 3.1. Soient $U \subset \mathbb{R}$ une partie, et $f_\bullet := (f_n : U \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions définies sur U, à valeurs réelles.

(i) Le *domaine de convergence de la suite* $f_\bullet$ est la partie $D \subset U$ formée des $a \in U$ tels que la suite numérique $(f_n(a) \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers un nombre réel $l(a)$.

(ii) La *limite* de la suite $f_\bullet$ est la fonction $l : D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$l(a) := \lim_{n \to +\infty} f_n(a) \qquad \forall a \in D$$

(où D dénote le domaine de convergence de $f_\bullet$). Cette fonction est notée aussi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n.}$$

(iii) La *série de fonctions associée à* $f_\bullet$ est la suite de fonctions

$$s_\bullet := (s_n : U \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{telle que} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(donc, $s_n(a) = \sum_{k=0}^{n} f_k(a)$ pour tout $a \in U$). Le *domaine de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est défini comme le domaine de convergence D' de la suite $s_\bullet$, et la *somme de la série de fonctions* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est la limite de la suite de fonctions $s_\bullet$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n := \lim_{n \to +\infty} s_n}$$

(autrement dit : $(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a)$ pour tout $a \in D'$).

Remarque 3.2. Dans la situation de la définition 3.1, rappelons que si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ a une somme réelle, alors la suite numérique $(f_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 (proposition 2.4(ii)), donc *le domaine de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est toujours contenu dans le domaine de convergence de la suite* $f_\bullet$.

Exemple 3.3. Posons $f_n(x) := x^n$ pour tout $n \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_\bullet := (f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ est une suite de fonctions définies sur $U = \mathbb{R}$, à valeurs réelles.

Le domaine de convergence D de la suite $f_\bullet$ est formé des $x \in \mathbb{R}$ tels que la suite $(x^n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers une valeur réelle, donc $D =]-1, 1]$ (exemple 1.14(ii)).

La limite de la suite $f_\bullet$ est la fonction $l :]-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $l(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x^n$ pour tout $x \in]-1, 1]$, donc :

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est la partie $D' \subset D$ formée des $x \in \mathbb{R}$ tels que la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ soit un nombre réel. Donc $D' =]-1, 1[$, et d'après l'exemple 2.3(ii), la somme de cette série de fonctions est la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n :]-1, 1[\to \mathbb{R} \qquad \text{telle que} \qquad x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Cela n'est rien de nouveau, mais on a changé de point de vue : jusqu'à maintenant on *fixait* une valeur $x \in D'$; maintenant *on fait varier* x, et on s'intéresse aux propriétés de la somme de la série, vue comme fonction de la variable x.

3.1.1. *Voici quelques exemples de questions intéressantes :*

— Si chaque fonction f_n d'une suite de fonctions $f_\bullet$ est continue, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est-elle une fonction continue (sur le domaine de convergence) ?

— Si chaque f_n est dérivable (ou intégrable, etc.), qu'en est-il de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$?

— Même questions pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

L'exemple précédent montre que, en général, la réponse à ces questions est *négative*. Toutefois, sous certaines hypothèses, on peut obtenir des résultats positifs.

Pour étudier cette question, revenons à la définition de la limite : soient D le domaine de convergence de la suite de fonctions $f_\bullet$, et $l : D \to \mathbb{R}$ la limite de $f_\bullet$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in D$ il existe un entier $N(\varepsilon, a) \geqslant 0$ tel que :

$$(*) \qquad |l(a) - f_n(a)| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N(\varepsilon, a).$$

Noter que pour $a, a' \in D$ distincts on aura en général $N(\varepsilon, a) \neq N(\varepsilon, a')$, et il ne sera pas toujours possible de choisir un entier $N(\varepsilon)$ *indépendant de* a, de sorte que l'inégalité $(*)$ soit valable *uniformement pour tout* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *et tout* $a \in D$ *:*

$$(**) \qquad |l(a) - f_n(a)| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall a \in D.$$

Par exemple, dans l'exemple 3.3, où $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le domaine de convergence de la suite $f_\bullet$ est $D =]-1, 1]$, et on a :

$$|l(a) - f_n(a)| = \begin{cases} |a|^n & \text{si } a \in]-1, 1[\\ 0 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

S'il existait un entier $N(\varepsilon)$ vérifiant $(**)$, on aurait donc :

$$|a|^n < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall a \in]-1, 1[.$$

Mais cela est absurde, car pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(***) \qquad \sup\{|a|^n \mid a \in]-1, 1[\} = 1.$$

En fait, il se trouve que c'est précisément ce défaut d'uniformité des $N(\varepsilon, a)$ qui est à l'origine de la discontinuité de la fonction limite l.

3.2. **Convergence uniforme.** Pour éclaircir la situation, on va alors étudier de plus près le cas où l'on a des choix uniformes pour les $N(\varepsilon, a)$: c'est le sujet de la définition suivante :

Définition 3.4. (i) Soient $U \subset \mathbb{R}$ une partie, $f_\bullet := (f_n : U \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions, $D \subset U$ son domaine de convergence, et $l : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f_\bullet$ *converge uniformement vers* l sur D si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |l(a) - f_n(a)| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall a \in D.}$$

(ii) Soit aussi $D' \subset D$ le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformement vers* $s : D' \to \mathbb{R}$, sur D' si la suite de fonctions $(s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \mid n \in \mathbb{N})$ converge uniformement vers s sur D'.

Remarque 3.5. (i) Voici une reformulation équivalente de la définition 3.4, qui est souvent utile : pour toute partie $D \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $g : D \to \mathbb{R}$ posons

$$\|g\|_{D,\infty} := \sup\{|g(a)| \mid a \in D\} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}.$$

On appelle $\|g\|_{D,\infty}$ la *norme sup*, ou aussi la *norme infini*, ou la *norme de la convergence uniforme* de g sur D. Avec cette notation, on voit aussitôt que la suite de fonctions $f_\bullet$ converge uniformément sur D vers la fonction l si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|l - f_n\|_{D,\infty} = 0.}$$

De même, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers s sur D', si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Big\| s - \sum_{k=0}^{n} f_k \Big\|_{D',\infty} = 0.}$$

(ii) Par exemple, si l'on prend la suite de fonctions $(f_n(x) := x^n \mid n \in \mathbb{N})$ comme à l'exemple 3.3, et si $l :]-1,1] \to \mathbb{R}$ dénote la limite de la suite $f_\bullet$, alors :

$$\|l - f_n\|_{D,\infty} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

en vertu de $(***)$ (avec $D :=]-1,1]$), donc la suite $f_\bullet$ *converge vers* l, *mais ne converge pas uniformément vers* l. Autrement dit : la norme sup ci-dessus nous donne une mésure de la distance entre l et f_n, et on voit alors que, bien que la suite des f_n converge vers l, la distance (mésure par la norme sup) entre chaque f_n et l ne baisse pas, pour n qui tend vers $+\infty$: elle vaut toujours 1.

(iii) On a ainsi deux sortes de convergence pour une suite de fonctions $f_\bullet$ et pour une série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$: celle de la définition 3.1, et la convergence uniforme, plus contraignante, de la définition 3.4. Pour les distinguer, on appelle souvent la première *convergence simple* de la suite $f_\bullet$ (et de même pour la série associée). Il est clair que si $f_\bullet$ converge uniformément vers la fonction $l : D \to \mathbb{R}$ (sur le domaine de convergence simple D), alors $f_\bullet$ converge aussi simplement vers cette même fonction l, sur D ; de même, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers s (sur le domaine de convergence simple D' de la série), alors elle converge aussi simplement vers s sur D'.

(iv) Le lemme élémentaire suivant montre que la norme sup mérite bien son nom : elle jouit des propriétés usuelles des normes sur les espaces vectoriels, sauf qu'elle prend ses valeurs sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ plutôt que sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$:

Lemme 3.6. *Soient $D \subset \mathbb{R}$ une partie, et $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions. Alors on a :*

- *(i)* $\|f\|_{D,\infty} = 0$ *si et seulement si* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in D$.
- *(ii)* (Inégalité triangulaire) $\|f + g\|_{D,\infty} \leqslant \|f\|_{D,\infty} + \|g\|_{D,\infty}$.
- *(iii)* $\|\lambda f\|_{D,\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{D,\infty}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *(iv)* $\|f \cdot g\|_{D,\infty} \leqslant \|f\|_{D,\infty} \cdot \|g\|_{D,\infty}$.
- *(v)* $\|f^n\|_{D,\infty} = \|f\|^n_{D,\infty}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(Dans (ii) on pose $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$, *et dans (iii) on pose* $|\lambda| \cdot (+\infty) := +\infty$ *si* $\lambda \neq 0$, *et* $0 \cdot (+\infty) := 0$ *; de même, dans (v) on pose* $(+\infty)^n := +\infty$ *si* $n > 0$, *et* $(+\infty)^0 := 1$.*)*

Démonstration. (i) est trivial. Pour (ii) il suffit de montrer que $\|f\|_{D,\infty} + \|g\|_{D,\infty}$ est un majorant pour la partie $S := \{|f(x) + g(x)| \mid x \in D\}$, car par définition

$\|f+g\|_{D,\infty}$ est le plus petit des majorants de S. Mais on a :

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \|f\|_{D,\infty}+\|g\|_{D,\infty} \qquad \forall x \in D$$

d'où l'assertion. Un raisonnement analogue montre (iv).

Pour (iii), on peut supposer que $\lambda \neq 0$, et noter que :

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leqslant |\lambda| \cdot \|f\|_{D,\infty} \qquad \forall x \in D$$

d'où $\|\lambda f\|_{D,\infty} \leqslant |\lambda| \cdot \|f\|_{D,\infty}$. D'autre part, si $\|f\|_{D,\infty} < +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in D$ tel que $|f(x)| > \|f\|_{D,\infty} - \varepsilon/|\lambda|$, donc

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| > |\lambda| \cdot \|f\|_{D,\infty} - \varepsilon$$

d'où $\|\lambda f\|_{D,\infty} \geqslant |\lambda| \cdot \|f\|_{D,\infty}$. Si $\|f\|_{D,\infty} = +\infty$, alors pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $x \in D$ tel que $|f(x)| > M/|\lambda|$, d'où $|\lambda f(x)| > M$, d'où $\|\lambda f\|_{D,\infty} = +\infty$. Un raisonnement analogue montre (v). □

Proposition 3.7. *Soient $D \subset U \subset \mathbb{R}$ deux parties, $f_\bullet := (f_n : U \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions. Alors $f_\bullet$ converge uniformément sur D (vers une fonction $l : D \to \mathbb{R}$) si et seulement si elle satisfait la condition de Cauchy uniforme sur D :*

$$(*) \qquad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \|f_p - f_q\|_{D,\infty} < \varepsilon \quad \forall p, q \geqslant n.}$$

Démonstration. Si $f_\bullet$ converge uniformément vers l sur D, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|l - f_k\|_{D,\infty} < \varepsilon/2 \qquad \forall k \geqslant n$$

d'où, compte tenu du lemme 3.6(ii) :

$$\|f_p - f_q\|_{D,\infty} = \|(f_p - l)+(l-f_q)\|_{D,\varepsilon} \leqslant \|f_p - l\|_{D,\infty} + \|l - f_q\|_{D,\varepsilon} < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n.$$

Réciproquement, si $f_\bullet$ satisfait la condition de Cauchy uniforme sur D, alors évidemment la suite numérique $f_\bullet(x) := (f_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N})$ satisfait la condition de Cauchy pour suites de fonctions, pour tout $x \in D$. D'après le théorème 1.6, chaque telle suite $f_\bullet(x)$ converge alors vers une valeur $l(x) \in \mathbb{R}$, donc on obtient déjà que $f_\bullet$ converge *simplement* vers la fonction $l : D \to \mathbb{R}$ sur D. En outre, fixons $\varepsilon > 0$, et prenons $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $(*)$; pour tout $q \geqslant n$ il vient :

$$|l(x) - f_q(x)| = |\lim_{p \to +\infty} f_p(x) - f_q(x)| = \lim_{p \to +\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall x \in D$$

autrement dit :

$$\|l - f_q\|_{D,\infty} \leqslant \varepsilon \qquad \forall q \geqslant \mathbb{N}$$

d'où la convergence uniforme de $f_\bullet$ vers l sur D. □

Corollaire 3.8. (Condition de Cauchy uniforme pour les séries) *Soient $D \subset U \subset \mathbb{R}$ deux parties, $(f_n : U \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions. Alors :*

(i) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur D si et seulement si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \|f_{q+1} + f_{q+2} + \cdots + f_p\|_{D,\infty} < \varepsilon \quad \forall p > q \geqslant n.}$$

(ii) Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur D, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_{D,\infty} = 0.$$

Démonstration. (i) découle aussitôt de la proposition 3.7, et pour (ii) il suffit de faire $p = q+1$ dans l'inégalité de (i) : comparer avec la preuve de la proposition 2.4. □

Définition 3.9. Soit $U \subset \mathbb{R}$ une partie, et $(f_n : U \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions. Soit $D \subset U$ le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge normalement sur* D, si l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{D,\infty} < +\infty.$$

Remarque 3.10. Avec la notation de la définition 3.9, noter que :

$$\|f_{q+1} + \cdots + f_p\|_{D,\infty} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_{D,\infty} \qquad \forall p > q \geqslant 0.$$

Donc, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur D, alors elle converge aussi uniformement sur D, d'après le corollaire 3.8(i) (et d'après la proposition 2.4(i)). D'autre part, afin de vérifier la convergence normale de la série, évidemment il suffira de trouver une série numérique convergente à termes positifs :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \text{telle que} \qquad \|f_n\|_{D,\infty} \leqslant a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, cela fournit aussi un critère pour la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, appelé parfois *test de Weierstrass*.

Exemple 3.11. (i) Montrons que la série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

converge normalement (et donc, uniformement) sur $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\Big|\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1$$

d'où :

$$\Big\|\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big\|_{\mathbb{R},\infty} = \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Mais la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ converge, d'où l'assertion.

(ii) Vérifions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions :

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Pour cela, noter d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ *fixé*, la série numérique $(*)$ satisfait les conditions du critère de Leibniz, donc elle converge vers une valeur réelle $l(x)$. Cela montre déjà que la série de fonctions $(*)$ converge *simplement* vers $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour vérifier la convergence *uniforme,* il nous faut des estimations *indépendantes de* x, pour les restes de la série. Or, le corollaire 2.24 nous donne :

$$\Big|\sum_{k=q}^{p} \frac{(-1)^k}{k+x^2}\Big| \leqslant \frac{1}{q+x^2} \leqslant \frac{1}{q} \qquad \forall p \geqslant q > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons alors $g_k := (-1)^k/(k+x^2)$ pour tout $k > 0$, et soit $\varepsilon > 0$; on déduit que si l'entier $n \in \mathbb{N}$ est choisi suffisamment gros, de sorte que $1/n < \varepsilon$, alors :

$$\|g_q + \cdots + g_p\|_{\mathbb{R},\infty} < \varepsilon \qquad \forall p \geqslant q > n$$

et on déduit la converge uniforme souhaité, toujours d'après le corollaire 3.8(i).
Toutefois, la série $(*)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$, car évidemment on a :

$$\Big\|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\Big\|_{\mathbb{R},\infty} = \Big|\frac{(-1)^n}{n+0^2}\Big| = \frac{1}{n} \qquad \forall n \geqslant 1$$

et on sait que la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge.

(iii) La série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

converge simplement sur l'intervalle $D :=]-1, 1[$, mais ne converge pas *uniformément* sur D. En effet, noter que :

$$|x^{q+1} + \cdots + x^p| \geqslant \frac{p-q}{2} \qquad \forall p > q \geqslant 0, \forall x \in [(1/2)^{1/p}, 1]$$

d'où :

$$\|x^{q+1} + \cdots + x^p\|_{D,\infty} \geqslant \frac{p-q}{2} \qquad \forall p > q \geqslant 0.$$

(En fait, on peut vérifier assez aisément que $\|x^{q+1} + \cdots + x^p\|_{D,\infty} = p - q$).

D'autre part, la série géométrique converge uniformement sur tout intervalle $[a, b] \subset]-1, 1[$! Vérifions par exemple la convergence sur $D' := [-1/2, 1/2]$; pour cela, rappelons que pour tout $p > q \geqslant 0$ on a :

$$|x^{q+1} + \cdots + x^p| \leqslant \sum_{k=q+1}^{+\infty} |x|^k = \frac{|x|^{q+1}}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^q} \qquad \forall x \in D'$$

d'où :

$$\|x^{q+1} + \cdots + x^p\|_{D',\infty} \leqslant \frac{1}{2^q} \qquad \forall p > q \geqslant 0$$

et cela entraîne la convergence uniforme sur D', encore par le corollaire 3.8(i).

Exercice 3.12. (i) Montrer que la série :

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

convergent simplement sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

(ii) Donner une condition simple sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la première série converge uniformement sur $[a, b]$. Sous cette condition, la convergence est-elle normale ?

Solution : En effet, il est clair que :

$$\Big\|\frac{\sin(nx)}{n}\Big\|_{\mathbb{R},\infty} = \frac{1}{n}$$

et on sait que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge, donc la série $(*)$ ne converge pas normalement. Pour vérifier la convergence simple, on va utiliser le critère de Dirichlet (proposition 2.22) : pour $x \in \mathbb{R}$ *fixé,* posons :

$$a_n := \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad b_n := \sin(nx) \qquad \forall n \geqslant 1.$$

On doit estimer la somme :

$$S(n, m) := \Big|\sum_{k=n}^{n+m} \sin(kx)\Big| \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on va se servir de la formule d'Euler de l'exemple 2.38(ii). D'après l'exemple 2.34, *si* $\cos(x) \neq 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} S(n,m) &= \Big|\Im\Big(\sum_{k=n}^{n+m} e^{ikx}\Big)\Big| = \Big|\Im\Big(e^{inx}\sum_{k=0}^{m} e^{ikx}\Big)\Big| \\ &= \Big|\Im\Big(e^{inx}\frac{1-e^{i(m+1)}}{1-e^{ix}}\Big)\Big| \leqslant \frac{\|1-e^{i(m+1)x}\|}{\|1-e^{ix}\|} \leqslant M(x) := \sqrt{\frac{2}{1-\cos(x)}} \end{aligned}$$

car $\|1-e^{i(m+1)x}\| \leqslant \|1\| + \|e^{i(m+1)x}\| = 2$, et car d'autre part :

$$\|1-e^{ix}\|^2 = (1-\cos(x))^2 + \sin(x)^2 = 2 - 2\cos(x).$$

Puisque $M(x)$ ne dépend pas de n, m, le critère de Dirichlet nous assure que la série $(*)$ converge, pourvu que $\cos(x) \neq 1$. Mais si $\cos(x) = 1$, la série converge trivialement, car alors $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, et donc $\sin(nx) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série $(*)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, prenons un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$(**) \qquad\qquad [a,b] \cap 2\pi\mathbb{Z} = \varnothing$$

et rappelons que le critère de Dirichlet nous donne aussi une estimation pour les restes de la série $(*)$; à savoir on a :

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\sin(kx)}{k}\Big| \leqslant \frac{M(x)}{n} \qquad \forall x \in [a,b], \forall n \geqslant 1, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Or, la fonction $1-\cos(x)$ est continue et strictement positive sur $[a,b]$, donc de même pour la fonction $M(x)$; comme l'intervalle $[a,b]$ est *compact* (c'est à dire : fermé et borné), il existe en outre $x_0 \in [a,b]$ tel que :

$$M := M(x_0) = \max\{M(x) \,|\, x \in [a,b]\}$$

d'où, finalement :

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\sin(kx)}{k}\Big\|_{[a,b],\infty} \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \geqslant 1, \forall m \in \mathbb{N}$$

et cela montre que la série $(*)$ converge uniformement sur tout $[a,b]$ vérifiant $(**)$, en vertu du corollaire 3.8(i).

En dernier lieu, montrons que *la convergence n'est pas normale, sur aucun intervalle* $[a,b]$ avec $b > a$. En effet, si $b > a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b-a) \geqslant \pi/2$, donc

$$[ka, kb] \cap \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \neq \varnothing \qquad \forall k \geqslant n$$

et alors, pour tout $k \geqslant n$ il existe $x_k \in [a,b]$ tel que $|\sin(kx_k)| = 1$, d'où :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\Big\|\frac{\sin(kx)}{k}\Big\|_{[a,b],\infty} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

3.3. **Etude des suites et des séries uniformement convergentes.**

Proposition 3.13. *(i) Soient $D \subset \mathbb{R}$ une partie, $f_\bullet := (f_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ e une suite de fonctions uniformement convergente sur D, et $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction* bornée, *c'est à dire g prend ses valeurs dans un intervalle $[a,b]$ de taille finie. Alors la suite de fonctions $(f_n g \,|\, n \in \mathbb{N})$ est également uniformement convergente sur D, et on a :*

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n g = g \cdot \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

(ii) Pour $f_\bullet$ et g comme dans (i), si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est uniformement convergente sur D, alors il en est de même pour la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n g \qquad \textit{et on a :} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n g = g \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

(iii) Soient $(f_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $(g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ deux suites de fonctions uniformement convergentes sur D, dont les limites f et g sont des fonctions bornées sur D. Alors la suite de fonctions $(f_n g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge uniformement vers fg sur D.

Démonstration. (i) Posons $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$; par hypothèse, $||g||_{D,\infty} \in \mathbb{R}$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n g - fg\|_{D,\infty} \leqslant \|g\|_{D,\infty} \cdot \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{D,\infty} = 0$$

d'après le lemme 3.6(iv), d'où la convergence uniforme de $(f_n g \,|\, n \in \mathbb{N})$ vers fg.

L'assertion (ii) est une consequence immédiate de (i). Pour (iii), observons que :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_{D,\infty} &= \|(f_n - f)g + (g - g_n)f\|_{D,\infty} \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{D,\infty} \cdot \|g\|_{D,\infty} + \|g - g_n\|_{D,\infty} \cdot \|f\|_{D,\infty}\end{aligned}$$

et par hypothèse $\|f\|_{D,\infty}, \|g\|_{D,\infty} < +\infty$, d'où l'assertion. □

Exemple 3.14. On a vu que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/(n+x^2)$ est uniformement convergente sur $\mathbb{R}$ (exemple 3.11(ii)) ; avec la proposition 3.13, on déduit que la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^x}{n + x^2}$$

est uniformement convergente sur tout intervalle $[a,b]$ de taille bornée, car la fonction $e^x : [a,b] \to \mathbb{R}$ prend ses valeurs dans l'intervalle de taille bornée $[e^a, e^b]$.

Proposition 3.15. *Soient $f_\bullet := (f_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ et $g_\bullet := (g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ deux suites de fonctions uniformement convergentes sur une partie $D \subset \mathbb{R}$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ est également uniformement convergente sur D, et on a :

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda f_n + \mu g_n = \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} f_n + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} g_n.$$

Démonstration. L'identité $(*)$ découle aussitôt de la proposition 1.7. Ensuite, soient F et G les limites de $f_\bullet$ et respectivement $g_\bullet$, et soit $\varepsilon > 0$; alors :

$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad \|F - f_k\|_{D,\infty} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|G - g_k\|_{D,\infty} < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant n$$

d'où, avec le lemme 3.6 :

$$\begin{aligned}\|(\lambda F+\mu G)-(\lambda f_k+\mu g_k)\|_{D,\infty} &\leqslant \|\lambda(F-f_k)\|_{D,\infty}+\|\mu(G-g_k)\|_{D,\infty}\\ &\leqslant |\lambda|\cdot\|F-f_k\|_{D,\infty}+|\mu|\cdot\|G-g_k\|_{D,\infty}\\ &\leqslant (|\lambda|+|\mu|)\varepsilon\end{aligned}$$

et cela démontre la convergence uniforme de la suite $(\lambda f_n+\mu g_n\,|\,n\in\mathbb{N})$ vers $\lambda F+\mu G$. □

On est maintenant prêt pour repondre aux questions évoquées au §3.1.1 :

Théorème 3.16. *Soient $D\subset\mathbb{R}$ une partie, $x_0\in D$, et $f_\bullet := (f_n : D\to\mathbb{R}\,|\,n\in\mathbb{N})$ une suite de fonctions sur D, continues en x_0. On a :*

(i) Si $f_\bullet$ converge uniformement sur D, la limite l de $f_\bullet$ est continue en x_0.

(ii) Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformement sur D, alors sa somme L est une fonction continue en x_0.

(iii) En particulier, si chaque f_n est continue sur D, et si $f_\bullet$ (resp. si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) converge uniformement sur D, alors l (resp. L) est continue sur D.

Démonstration. (i) : Soit $\varepsilon>0$; par hypothèse il existe $n\in\mathbb{N}$ avec :

$$\|l-f_n\|_{D,\infty}<\varepsilon.$$

D'autre part, puisque f_n est continue en x_0, il existe $\delta>0$ tel que :

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon \qquad \forall x\in D\cap]x_0-\delta,x_0+\delta[.$$

Par suite, pour tout $x\in D\cap]x_0-\delta,x_0+\delta[$ on a :

$$\begin{aligned}|l(x)-l(x_0)| &= |(l(x)-f_n(x))+(f_n(x)-f_n(x_0))+(f_n(x_0)-l(x_0))|\\ &\leqslant |l(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-l(x_0)|\\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

et cela achève de vérifier la continuité de l en x_0.

Les assertions (ii) et (iii) découlent aussitôt de (i). □

Théorème 3.17. *Soit $f_\bullet := (f_n\,|\,n\in\mathbb{N})$ une suite de fonctions uniformement convergente sur un intervalle $[a,b]$ borné, et soit $l:[a,b]\to\mathbb{R}$ la limite de $f_\bullet$. Supposons que chaque f_n soit intégrable sur $[a,b]$, et posons*

$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt \qquad \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[a,b].$$

Alors on a :

(i) La suite de fonctions $(F_n\,|\,n\in\mathbb{N})$ est uniformement convergente sur $[a,b]$.

(ii) En outre, la fonction l est intégrable sur $[a,b]$, et on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \int_a^x l(t)dt \qquad \forall x\in[a,b].}$$

Démonstration. (i) : Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\|f_p-f_q\|_{[a,b],\infty}<\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall p,q\geqslant n$$

(proposition 3.7). Par suite, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $p, q \geqslant n$ on a :

$$|F_p(x) - F_q(x)| = \Big|\int_a^x (f_p - f_q)(t)dt\Big| \leqslant \int_a^x |f_p(t) - f_q(t)|dt < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre que

$$\|F_p - F_q\|_{[a,b],\infty} < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n$$

d'où l'assertion, toujours d'après la proposition 3.7.

(ii) : Notons par $L : [a,b] \to \mathbb{R}$ la limite de la suite de fonctions $(F_n \,|\, n \in \mathbb{N})$. Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|L - F_n\|_{[a,b],\infty} < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|l - f_n\|_{[a,b],\infty} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit aussi $x \in [a,b]$, et prenons une subdivision de l'intervalle $[a,x]$:

$$(*) \qquad x_0 := a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{t+1} := x$$

et des réels :

$$(**) \qquad y_0 \in [x_0, x_1] \quad y_1 \in [x_1, x_2] \quad \cdots \quad y_t \in [x_t, x_{t+1}]$$

tels que :

$$|F_n(x) - S_n(x_\bullet, y_\bullet)| < \varepsilon \qquad \text{avec :} \qquad S_n(x_\bullet, y_\bullet) := \sum_{k=0}^{t} f_n(y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

(l'existence d'une subdivision $(*)$ et d'une suite de réels $(**)$ vérifiant cette inégalité découle de l'intégrabilité de f_n sur $[a,b]$). Posons aussi :

$$S(x_\bullet, y_\bullet) := \sum_{k=0}^{t} l(y_t) \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

(Les termes $S_n(x_\bullet, y_\bullet)$ et $S(x_\bullet, y_\bullet)$ sont les *sommes de Riemann* associées aux fonctions f_n et l, pour les subdivisions $x_\bullet$ et les suites finies $y_\bullet$). Il vient :

$$\begin{aligned}
|L(x) - S(x_\bullet, y_\bullet)| &= |L(x) - F_n(x) + F_n(x) - S_n(x_\bullet, y_\bullet) + S_n(x_\bullet, y_\bullet) - S(x_\bullet, y_\bullet)| \\
&\leqslant |L(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - S_n(x_\bullet, y_\bullet)| + |S_n(x_\bullet, y_\bullet) - S(x_\bullet, y_\bullet)| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \Big|\sum_{k=0}^{t} (f_n - l)(y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)\Big| \\
&\leqslant 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{t} |(f_n - l)(y_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k) \\
&\leqslant 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{t} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\
&\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}$$

et cela achève de vérifier que l est intégrable, et que $\int_a^x l(t)dt = L(x)$. □

Corollaire 3.18. *Soit $f_\bullet := (f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$ borné, et telles que :*

(a) La suite numérique $f_n(a)$ converge vers un nombre réel l_a.
(b) Chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
(c) La suite des fonctions dérivées $(f'_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge uniformement sur $[a,b]$.

Alors la suite $f_\bullet$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et on a :

$$\boxed{l'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x) \qquad \forall x \in [a,b].}$$

Démonstration. Notons par $L : [a,b] \to \mathbb{R}$ la limite de la suite $(f'_n \,|\, n \in \mathbb{N})$. On sait que L est une fonction continue, en vertu des conditions (b),(c) (théorème 3.16).

Or, toute fonction g continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$, et son intégrale indéfinie G est une primitive de g, *i.e.* G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $G' = g$. En particulier, L et f'_n sont intégrables sur $[a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f_n est une intégrale indéfinie de f'_n ; posons alors aussi :

$$h_n(x) := f_n(a) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) := f_n(x) - f_n(a) \qquad \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème 3.17, il vient, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x L(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f'_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x).$$

Donc, l'intégrale indéfinie $G(x) := \int_a^x L(t)dt$ est la limite de la suite de fonctions $g_\bullet := (g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, et $G' = L$; en outre $g_\bullet$ converge uniformément vers G, toujours d'après le théorème 3.17.

Puisque la suite numérique $(f_n(a) \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers l_a, la suite de fonctions constantes $(h_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ est trivialement uniformément convergente sur $[a,b]$ vers la fonction constante $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ de valeur l_a ; mais alors la suite de fonctions $(f_n = g_n + h_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément vers $l := G + h$ (proposition 3.15). Finalement, l est alors bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $l' = G' = L$. $\square$

Exercice 3.19. (i) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2\sqrt{n}} \qquad \text{sur } \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(ii) Etudier la continuité et dérivabilité de la somme de cette série.

Solution : Puisque $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, il est clair que :

$$(*) \qquad e^x \geqslant \frac{x^3}{6} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

En particulier : $e^{x^2\sqrt{n}} \geqslant x^6 n^{3/2}/6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par suite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x^2\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{x^6 n^{3/2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Mais on sait que la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{3/2}$ converge (exemple 2.14), donc la série $S(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, noter que

$$\|e^{-x^2\sqrt{n}}\|_{\mathbb{R}^*,\infty} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{car } \lim_{x\to 0} e^{-x^2\sqrt{n}} = e^0 = 1$$

donc la série $S(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$ (corollaire 3.8(ii)), et donc elle ne converge normalement sur $\mathbb{R}^*$ non plus.

Pour étudier la continuité, observons que, en revanche, $S(x)$ *converge normalement sur toute partie* :

$$U(a) := \mathbb{R} \setminus]-a, a[\quad \text{avec } a > 0.$$

En effet, toujours d'après $(*)$ on déduit que :

$$\|e^{-x^2\sqrt{n}}\|_{U(a),\infty} \leqslant \frac{6}{a^6 n^{3/2}} \qquad \forall a > 0$$

d'où l'assertion, car on a déjà remarqué la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{3/2}$. Or, puisque chaque terme $e^{-x^2\sqrt{n}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, avec le théorème 3.16(ii) il s'ensuit que la somme de la série $S(x)$ est aussi continue sur $U(a)$, pour tout $a > 0$. Mais la continuité est une propriété *locale* des fonctions, de sorte que $S(x)$ *est alors continue aussi sur la réunion* :

$$\bigcup_{a>0} U(a) = \mathbb{R}^*.$$

En dernier lieu, on souhaite appliquer le corollaire 3.18 pour étudier la dérivabilité de $S(x)$: soit $f_n(x) := e^{-x^2\sqrt{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors :

$$f_n'(x) = -2x\sqrt{n}e^{-x^2\sqrt{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'estimation $(*)$ ne suffit pas pour borner efficacement la norme sup des dérivées $f_n'(x)$, mais, toujours avec la définition de e^z, on obtient :

$$e^x \geqslant \frac{x^4}{24} \qquad \forall x \geqslant 0$$

d'où :

$$|f_n'(x)| \leqslant \left|\frac{24 \cdot 2x\sqrt{n}}{x^8 n^2}\right| = \left|\frac{48}{x^7 n^{3/2}}\right| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \geqslant 1$$

et par suite :

$$||f_n'||_{U(a),\infty} \leqslant \frac{48}{a^7 n^{3/2}} \qquad \forall n \geqslant 1, \forall a > 0$$

d'où, la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$, d'abord sur chaque partie $U(a)$, et ensuite sur la réunion $\mathbb{R}^*$ de ces parties, car *la dérivabilité est une propriété locale des fonctions*. Maintenant, avec le corollaire 3.18 on conclut que la somme de la série $S(x)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est donnée par la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

3.4. **Suites et séries de fonctions à valeurs complexes.** Notre discussion des suites et séries de fonctions se prolonge sans peine aux suites et séries de fonctions *à valeurs complexes,* définies sur une partie $U \subset \mathbb{R}$. Essentiellement, il suffit de reprendre les définitions et preuves précédentes, quitte à faire des modifications mineures : plutôt qu'avec la valeur absolue réelle $|\cdot|$, il faudra raisonner avec le module complexe $\|\cdot\|$, comme déjà vu pour les suites et séries numériques.

Donc, on a des notions de convergence simple et uniforme pour toute telle suite de fonctions $(f_n : U \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$, et on définit de la façon évidente le domaine de convergence de toute telle suite, ainsi que de la série associée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Aussi, la norme sup d'une fonction $g : U \to \mathbb{C}$ sera évidemment donnée par :

$$(*) \qquad \|g\|_{U,\infty} := \sup\{\|g(a)\| \,|\, a \in U\} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$$

et le lemme 3.6 est encore valide pour ces fonctions (dans la partie (iii) du lemme, on prendra $\lambda \in \mathbb{C}$). On a de même la caractérisation des suites convergentes en termes d'une condition de Cauchy uniforme comme à la proposition 3.7, ainsi que son corollaire 3.8 pour les séries de fonctions ; pour ces dernières, on a en outre une notion de convergence normale, correspondante à celle de la définition 3.9.

Et en outre, toutes les propositions et théorèmes de la section 3.3 se prolongent *verbatim* aux suites et séries de fonctions définies sur une partie $U \subset \mathbb{R}$ et à valeurs complexes.

Toutefois, lors qu'on s'intéresse aux fonctions *à valeurs complexes,* il est naturel de considérer au même temps des fonctions *de la variable complexe,* c'est à dire des fonctions $g : U \to \mathbb{C}$, où maintenant U sera une partie du corps $\mathbb{C}$, plutôt qu'une partie de $\mathbb{R}$: ce sera le cas, notamment, pour l'étude des *séries entières,* que l'on entreprendra dans la section suivante. Plusieurs définitions et résultats des sections précédentes se généralisent encore à ce cadre, mais certaines d'autres n'ont pas des homologues évidents, ou demandent des justifications supplémentaires.

D'abord, la définition $(*)$ peut être reprise *verbatim* pour le cas où $U \subset \mathbb{C}$, et on aura toujours les bonnes propriétés du lemme 3.6 ; par suite, on a de même des bonnes notions de convergence simple et uniforme, et de convergence normale pour les suites. Ensuite, la proposition 3.13 reste valable pour les suites et séries de fonctions d'une variable complexe ; de même pour le théorème 3.16, *à condition de clarifier la notion de continuité pour des fonctions de la variable complexe.* Or, du point de vue de l'analyse, le corps complexe $\mathbb{C}$ s'interprète comme le plan de Gauss, avec ses axes coordonnés orthogonaux données par la droite réelle et la droite imaginaire ; les fonctions de la variable complexe sont alors essentiellement des fonctions définies sur le plan (ou sur une partie du plan) $\mathbb{R}^2$ (et à valeurs complexes), et la définition de continuité adaptée à ce contexte est celle *des fonctions de plusieurs variables réelles.* Rappelons qu'une fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie sur une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ est *continue au point* $x_0 \in U$, si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta) \cap U$$

où $\mathbb{B}(x_0, \delta)$ dénote ici la boule ouverte de rayon δ et centrée en x_0, c'est à dire :

$$\mathbb{B}(x_0, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta\}$$

où, à son tour, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ dénote une norme fixée de $\mathbb{R}^n$: on peut par exemple choisir la norme euclidienne :

$$\|(y_1, \dots, y_n)\|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \qquad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Or, le nombre complexe $z = a + ib$ correspond au point (a, b) du plan de Gauss $\mathbb{R}^2$, et *la norme euclidienne de* (a, b) *n'est rien d'autre que le module complexe de* z :

$$\|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Donc, dans le corps complexe $\mathbb{C}$, le disque ouvert centré au point $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $\delta > 0$ est la partie :

$$\mathbb{D}(z_0, \delta) := \{w \in \mathbb{C} \mid \|w - z_0\| < \delta\}.$$

En résumant, on dira qu'une fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie sur une partie $U \subset \mathbb{C}$ est continue au point $z_0 \in U$ si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|g(z) - g(z_0)\| < \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, \delta) \cap U.$$

Avec ces précisions, on peut maintenant reprendre la preuve du théorème 3.16, et ainsi prolonger ce théorème au cas des suites de fonctions de la variable complexe.

Exercice 3.20. On peut affiner la version complexe du théorème 3.16 de la façon suivante. Soit $(f_n : U \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions définies sur une partie $U \subset \mathbb{C}$, qui converge uniformement sur U vers une fonction $l : U \to \mathbb{C}$. Soit une partie $V \subset \overline{U} \setminus U$, où l'on désigne par $\overline{U}$ l'adhérence de U dans $\mathbb{C}$, et supposons que chaque fonction f_n s'étend en une fonction $g_n : U \cup V \to \mathbb{C}$, *continue en tout point de* V. Alors la suite de fonctions $(g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge uniformement sur $U \cup V$ vers une fonction $h : U \cup V \to \mathbb{C}$ qui étend l, et qui est continue en tout point de V.

En effet, soient $a \in V$ et $\varepsilon > 0$; par hypothèse, a est la limite d'une suite $(x_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ de points de U, et comme g_n est continue en a, on déduit :

$$g_n(a) = \lim_{k \to +\infty} f_n(x_k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, par la condition de Cauchy uniforme, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_p - f_q\|_{U,\infty} < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n.$$

Avec le lemme 1.5(i) (et la remarque 1.16(iii)), il vient alors :

$$\|g_p(a) - g_q(a)\| = \lim_{k \to +\infty} \|f_p(x_k) - f_q(x_k)\| \leqslant \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n$$

et comme $a \in V$ est arbitraire, cela revient à l'inégalité :

$$\|g_p - g_q\|_{U \cup V} \leqslant \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant n$$

d'où la convergence uniforme sur $U \cap V$ de la suite $g_\bullet := (g_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, en vertu de la condition de Cauchy uniforme. La continuité de la limite h de $g_\bullet$ aux points de V découle alors de la version complexe du théorème 3.16.

D'autre part, le théorème 3.17, tel qu'il est formulé, n'admet pas une généralisation évidente au cas des suites de fonctions de la variable complexe : en effet, la notion d'intégrale indéfinie ne s'applique qu'aux fonctions de la variable réelle. On dispose toutefois d'une théorie de l'intégration pour fonctions définies sur une partie (mesurable) $U \subset \mathbb{R}^n$: cette théorie permet de définir une bonne classe de fonctions intégrables sur U, et associe à toute telle fonction $g : U \to \mathbb{C}$ son intégrale

$$\int_U g(x)dx \in \mathbb{C}.$$

Par l'interprétation du corps complexe en terme du plan de Gauss, cette théorie s'applique alors aussi aux fonctions définies sur une partie $U \subset \mathbb{C}$. Donc, a toute suite $f_\bullet := (f_n : U \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ de fonctions intégrables définies sur une partie mesurable $U \subset \mathbb{C}$, on pourra quand même associer la suite numérique des intégrales

$$\Big(I_n := \int_U f_n(z)dz \,|\, n \in \mathbb{N}\Big).$$

Au lieu du théorème 3.17, on pourra encore affirmer que si la suite $f_\bullet$ converge uniformement sur U vers une fonction $l : U \to \mathbb{C}$, alors l est intégrable sur U et la suite des intégrales $(I_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers $\int_U l(z)dz$. Cela nécéssite d'un considérable travail préliminaire pour développer le langage et les outils analytiques indispensables : on laissera l'honneur à des cours plus avancés.

Exercice 3.21. Soit $(f_n : U \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions continues, définies sur une partie $U \subset \mathbb{C}$, et qui converge uniformement sur U vers une fonction

$l : U \to \mathbb{C}$. Soit aussi $z_\bullet := (z_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite numérique convergente avec $z_n \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et avec limite $L \in U$. Montrer que :

$$l(L) = \lim_{n\to+\infty} f_n(z_n).$$

Solution : En effet, soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|l - f_k\|_{U,\infty} < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant n.$$

D'autre part, par la version complexe du théorème 3.16, la fonction l est continue sur U, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|l(L) - l(z)\| < \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{D}(L, \delta)$$

et en outre, puisque $z_\bullet$ converge vers L, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|L - z_k\| < \delta \qquad \forall k \geqslant m.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\|l(L) - f_k(z_k)\| &= \|(l(L) - l(z_k)) + (l(z_k) - f_k(z_k))\| \\ &\leqslant \|l(L) - l(z_k)\| + \|l(z_k) - f_k(z_k)\| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $k \geqslant \max(n, m)$, d'où l'assertion.

Exercice 3.22. (Théorème de la double limite) L'exercice précédent peut être affiné de la façon suivante. Soit $(f_n : U \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions définies sur une partie $U \subset \mathbb{C}$, qui converge uniformement sur U vers une fonction $l : U \to \mathbb{C}$. Soit en outre $z_\bullet := (z_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ une suite numérique avec $z_k \in U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et supposons que la suite $f_n(z_\bullet) := (f_n(z_k) \,|\, k \in \mathbb{N})$ converge vers $y_n \in \mathbb{C}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors les suites $y_\bullet := (y_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, $(f_k(z_k) \,|\, k \in \mathbb{N})$ et $l(z_\bullet) := (l(z_k) \,|\, k \in \mathbb{N})$ convergent vers la même limite dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} f_n(z_k) = \lim_{k\to+\infty} f_k(z_k) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(z_k).}$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$(*) \qquad \|l - f_k\|_{U,\infty} < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant m.$$

On déduit :

$$(**) \qquad \|f_p - f_q\|_{U,\infty} \leqslant \|f_p - l\|_{U,\infty} + \|l - f_q\|_{U,\infty} < 2\varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m.$$

Par suite, en vertu des proposition 1.7 et 1.9, il vient :

$$\|y_p - y_q\| = \lim_{k\to+\infty} \|f_p(z_k) - f_q(z_k)\| \leqslant 2\varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m$$

d'où la convergence de la suite $y_\bullet$. Ensuite, on sait qu'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|f_m(z_p) - f_m(z_q)\| < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant u.$$

Par suite, pour tout $p, q \geqslant u$ on a, avec $(*)$:

$$\|l(z_p) - l(z_q)\| \leqslant \|l(z_p) - f_m(z_p)\| + \|f_m(z_p) - f_m(z_q)\| + \|f_m(z_q) - l(z_q)\| < 3\varepsilon$$

d'où la convergence de $l(z_\bullet)$. Posons alors $L := \lim\limits_{k\to+\infty} l(z_k)$. Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|L - l(z_k)\| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant r.$$

Avec $(*)$ il vient :

$$\|L - f_k(z_k)\| \leqslant \|L - l(z_k)\| + \|l(z_k) - f_k(z_k)\| \leqslant 2\varepsilon \qquad \forall k \geqslant \max(r, m)$$

et cela montre que la suite $(f_k(z_k) \,|\, k \in \mathbb{N})$ converge vers L.

En dernier lieu, soit $L' := \lim_{n \to +\infty} y_n$, et prenons $s, t \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|L' - y_s\| < \varepsilon \qquad s \geqslant m \qquad \text{et} \qquad \|y_s - f_s(z_k)\| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant t.$$

Avec $(**)$ il vient :

$$\|L' - f_k(z_k)\| \leqslant \|L' - y_s\| + \|y_s - f_s(z_k)\| + \|f_s(z_k) - f_k(z_k)\| \leqslant 4\varepsilon$$

pour tout $k \geqslant \max(t, m)$, et cela montre que $L = L'$.

4. Séries entières

4.1. **Rayon de convergence.** Soit $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels ou complexes. La *série entière associée à* $a_\bullet$ est la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de la variable x. Ainsi, chaque fonction $f_n(x) := a_n x^n$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et même pour tout $x \in \mathbb{C}$; si l'on décide de se borner aux valeurs réels de la variable x, on obtiendra une série de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ du type étudié aux sections 3.2 et 3.3, alors que si l'on admet aussi les valeurs complexes, on obtiendra une série de fonctions $(f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,|\, n \in \mathbb{N})$ *de la variable complexe*, du type contemplé dans la section 3.4. Afin de signaler que l'on considère des fonctions de la variable complexe, on dénote souvent cette même série par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Bien que les termes de ces séries soient des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou, respectivement, sur $\mathbb{C}$), leurs domaines de convergence seront évidemment seulement des parties de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$), et on souhaiterait pouvoir déterminer ces domaines à partir de la suite de constantes $a_\bullet$. Cette question est presque complètement résolue par le théorème 4.2 suivant, qui montre que le domaine de convergence d'une série entière a une forme assez simple ; pour sa preuve, rappelons d'abord que *le disque ouvert et le disque fermé de $\mathbb{C}$, de rayon $r > 0$, centrés au point $z_0 \in \mathbb{C}$* sont respectivement les parties :

$$\mathbb{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \|z - z_0\| < r\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{D}(z_0, r)} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \|z - z_0\| \leqslant r\}.$$

Avec cette notation, on a l'observation suivante :

Lemme 4.1. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière, et $r > 0$ un réel tel que la suite*

$$(\|a_n\| r^n \,|\, n \in \mathbb{N})$$

soit bornée. Soit aussi $0 < \rho < r$ un deuxième nombre réel. Alors on a :

(i) La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n z^n\|$ converge simplement sur $\mathbb{D}(0, r)$.

(ii) La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}(0, \rho)}$.

Démonstration. Comme $\mathbb{D}(0, r) = \bigcup_{0<\rho<r} \overline{\mathbb{D}(0, \rho)}$, on voit aisément que l'assertion (i) découle de (ii). Pour montrer (ii), posons

$$M := \sup\{\|a_n\| r^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

et soit aussi $0 < \rho < r$. Il vient :

$$\|a_n z^n\| = \|a_n\| r^n \frac{\|z^n\|}{r^r} \leqslant M \Big(\frac{\|z\|}{r}\Big)^n \leqslant M \cdot \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \qquad \forall z \in \overline{\mathbb{D}(0, \rho)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit :

$$\|a_n z^n\|_{\overline{\mathbb{D}(0,\rho)},\infty} \leqslant M \cdot (\rho/r)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais puisque $0 < \rho/r < 1$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot (\rho/r)^n$ converge, d'où la converge normale de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $\overline{\mathbb{D}(0, \rho)}$. □

Théorème 4.2. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière (de la variable complexe* z*). Alors il existe un unique* $R \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ *tel que :*

(i) *La série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ *converge pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *avec* $\|z_0\| < R$

(ii) *La série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ *diverge pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *avec* $\|z_0\| > R$.

On appelle R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Démonstration. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tels que la suite $(\|a_n\| r^n \mid n \in \mathbb{N})$ soit bornée. Noter que $\mathscr{R} \neq \varnothing$, car $0 \in \mathscr{R}$. Montrons que

$$R := \sup(\mathscr{R})$$

convient. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\|z_0\| < R$; alors il existe $r \in \mathscr{R}$ avec $\|z_0\| < r$, et par suite la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge (normalement) sur $\overline{\mathbb{D}(0, \|z_0\|)}$, d'après le lemme 4.1(ii). En particulier, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge.

De l'aute côté, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\|z_0\| > R$; alors $z_0 \notin \mathscr{R}$, c'est à dire la suite $(\|a_n z_0^n\| \mid n \in \mathbb{N})$ n'est pas bornée, et alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ est grossièrement divergente. □

Remarque 4.3. (i) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. D'après le théorème 4.2, si $R = 0$ (resp. si $R = +\infty$) le domaine de convergence de la série est l'ensemble $\{0\}$ (resp. est $\mathbb{C}$) ; sinon, $0 < R < +\infty$, et le domaine de convergence contient alors le disque ouvert $\mathbb{D}(0, R)$, et il est contenu dans le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(0, R)}$. Pour ce cas, le théorème ne nous renseigne pas sur la convergence *au bord du disque de convergence* $\mathbb{D}(0, R)$, c'est à dire, aux points du cercle de rayon R centré en 0 :

$$\overline{\mathbb{D}(0, R)} \setminus \mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = R\}.$$

Pour déterminer la nature de la série en ces points, il faudra donc une étude *ad hoc.*

(ii) Par commodité, on n'a énoncé le théorème 4.2 que pour les séries entières d'une variable *complexe* z, mais on en déduit aussitôt une variante évidente pour les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la variable *réelle* x : pour ces séries il existe un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ telle que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $|x_0| < R$ et diverge si $|x_0| > R$. Dans le cas réel, au lieu d'un disque de convergence on trouvera ainsi un *intervalle de convergence* $]-R, R[$, contenu dans le domaine de convergence de la série, et dont l'adhérence $[-R, R]$ contiendra ce domaine de convergence. Comme pour le cas complexe, le théorème ne nous renseigne pas sur la convergence aux bords de l'intervalle de convergence.

(iii) Le lemme 4.1 peut maintenant être précisé : on obtient que pour tout rayon $\rho \geqslant 0$ strictement plus petit du rayon de convergence R, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(0, \rho)}$. De même pour le cas des séries entières de la variable réelle : on a convergence normale de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle fermé $[-\rho, \rho]$, pour tout tel ρ.

(iv) Pour la question du comportement de la série *au bord* du disque de convergence, on a l'important résultat suivant :

Théorème 4.4. (Convergence radiale d'Abel) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière, et* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tel que la série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ *converge. Alors la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge uniformément sur le rayon :*

$$\mathscr{R}(z_0) := \{t z_0 \mid t \in [0, 1]\}.$$

Démonstration. Posons $c_n := a_n z_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et appliquons le critère d'Abel (proposition 2.36) aux séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Noter que pour $t \in [0,1]$, la suite $(t^n \,|\, n \in \mathbb{N})$ est monotone et bornée, et par hypothèse la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, donc les conditions (a) et (b) de la proposition 2.36 sont effectivement remplies. On obtient ainsi la convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \qquad \forall t \in [0,1].$$

En outre, puisque $|t^n| \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a des estimations pour les restes de cette série, de la forme :

$$\Big\|\sum_{k=q}^{p} c_k t^k\Big\| \leqslant 3M(q,p) \qquad \forall p \geqslant q \geqslant 0$$

avec $M(q,p) := \max\big(\big\|\sum_{k=q}^{j} c_k\big\| \,|\, j = q, \dots, p\big)$.

Or, noter que ces estimations sont indépendantes de t (pourvu que $t \in [0,1]$), et en outre, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M(q,p) < \varepsilon$ pour tout $p \geqslant q \geqslant N$ (proposition 2.4(i)). Cela montre que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(tz_0)^n$ de la variable réelle t vérifie la condition de Cauchy uniforme sur l'intervalle fermé $[0,1]$, et donc elle converge uniformément sur cet intervalle (corollaire 3.8(i)).

Mais évidemment cela revient à dire que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de la variable complexe z converge uniformément sur $\mathscr{R}(z_0)$. □

Remarque 4.5. (i) Noter que le théorème 4.4 n'est intéressant que si z_0 appartient *au bord* du disque de convergence $\mathbb{D}(0,R)$ (c'est à dire, si $\|z_0\| = R$), car on connait déjà la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans un voisinage de tout point situé *à l'intérieur* du disque $\mathbb{D}(0,R)$, d'après la remarque 4.3(iii).

(ii) Donc finalement, si $\|z_0\| = R$, le théorème de convergence radiale ne permet que de prolonger la convergence uniforme jusqu'au point z_0, le seul point du rayon que l'on ne pouvait pas attendre par la remarque 4.3(iii). On pourrait se demander quel est l'interêt de s'acharner pour atteindre juste un seul point de plus. Mais l'exemple 4.14 founira des illustrations remarquables de la puissance de cet outil.

Bien que la preuve du théorème 4.2 fournisse une expression pour le rayon R de convergence d'une série entière, celle-ci n'est pas suffisament explicite pour être d'utilité pratique. On souhaite alors des méthodes plus efficaces pour le calcul de R. On démarre avec l'observation simple suivante :

Lemme 4.6. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence R et respectivement R'. Supposons que :*

$$(*) \qquad \|a_n\| \leqslant \|b_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $R \geqslant R'$.

Démonstration. La preuve du théorème 4.2 montre que R (resp. R') est la borne supérieure de l'ensemble $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$) des nombres réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(\|a_n\| r^n \,|\, n \in \mathbb{N})$ (resp. la suite $((\|b_n\| r^n \,|\, n \in \mathbb{N})))$ soit bornée. Mais en vertu de $(*)$, il est clair que $\mathscr{R}' \subset \mathscr{R}$, d'où l'assertion. □

Ensuite, on peut extraire des règles de d'Alembert et de Cauchy des formules utiles pour le rayon de convergence :

Proposition 4.7. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière, avec rayon de convergence R. On a :*

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = L$, alors $R = 1/L$.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} \|a_n\|^{1/n} = L$, alors $R = 1/L$.

(Pour $L = 0$, on pose ici $1/0 := +\infty$).

Démonstration. (i) : Soit $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$; il vient :

$$l := \lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n} \right\| = \lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| \cdot r = Lr.$$

Par suite, pour $r < 1/L$ on a $l < 1$, et alors la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n r^n\|$ converge, d'après la règle de d'Alembert ; en particulier, la suite $(\|a_n\| r^n \mid n \in \mathbb{N})$ est bornée, d'où $r \leqslant R$. De l'autre côté, si $r > 1/L$, alors $l > 1$, et alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| r^n$ diverge, encore par la règle de d'Alembert ; compte tenu de la remarque 4.3(iii), on déduit que $r \geqslant R$ dans ce cas. L'identité $R = 1/L$ découle aussitôt de ces deux cas.

La preuve de (ii) est parfaitement analogue, et sera laissé en exercice. □

Exemple 4.8. (i) Avec la proposition 4.7(i) on voit aussitôt que la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a rayon de convergence $R = 1$. Bien sur, cela était déjà connu depuis l'exemple 2.34 : on a juste rajouté un élément de langage.

(ii) De même, d'après l'exemple 2.37(i), la série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ a rayon de convergence $R = +\infty$.

(iii) En outre, l'exemple 2.38(i) nous dit que les séries de Taylor de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ ont également rayon de convergence $R = +\infty$.

4.2. **Opérations sur les séries entières.**

Proposition 4.9. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries entières, avec rayons de convergence R et respectivement R'. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$$

a rayon de convergence $\geqslant \min(R, R')$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant r < \min(R, R')$, de sorte que les suites $(\|a_n\| r^n \mid n \in \mathbb{N})$ et $(\|b_n\| r^n \mid n \in \mathbb{N})$ sont bornées ; prenons alors un majorant M commun pour ces deux suites. Il vient :

$$\|(\lambda a_n + \mu b_n) r^n\| \leqslant (\|\lambda\| + \|\mu\|) M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cela montre que la suite $((\lambda a_n + \mu b_n) r^n \mid n \in \mathbb{N})$ est bornée, d'où l'assertion. □

4.2.1. *Produit de Cauchy de séries entières.* Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, et notons par $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ le produit de Cauchy des séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Alors, on définit le *produit de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ comme la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Le nom de cette série se justifie en remarquant que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ est le produit de Cauchy des séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z_0^n$: on laissera la simple vérification en exercice.

Proposition 4.10. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, avec rayons de convergence R et respectivement R'. Alors le rayon de convergence de leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ est $\geqslant \min(R, R')$.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant r < \min(R, R')$, de sorte que les séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n$ sont absolument convergentes, d'après la remarque 4.3(iii). Par suite, leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ est également absolument convergent, par le théorème de Mertens (théorème 2.32(i)), d'où l'assertion. □

Proposition 4.11. (Intégration et dérivation de séries entières) *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière, avec rayon de convergence R. Alors les séries entières :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ont également rayon de convergence R.

Démonstration. Soit d'abord $R > 0$. Soient alors $r, s \in \mathbb{R}$ avec $0 < r < s < R$, de sorte que la suite $(\|a_n\| \cdot s^n \mid n \in \mathbb{N})$ est bornée, et posons

$$M := \sup\{\|a_n\| \cdot s^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Avec l'exemple 2.10, il vient :

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} n \cdot \|a_n\| \cdot r^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{r} \cdot \|a_n\| \cdot s^n \frac{r^n}{s^n} \leqslant \frac{M}{r} \cdot \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^n = 0$$

car on a $0 < r/s < 1$. Donc la suite $(n\|a_n\|r^n \mid n \in \mathbb{N})$ est bornée (lemme 1.5(i)) et cela montre que le rayon de convergence R' de $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ est $\geqslant r$. Puisque r peut être choisi arbitrairement proche à R, on conclut que $R' \geqslant R$.

De même, on a :

$$\frac{\|a_n\|}{n+1} r^{n+1} \leqslant \|a_n\| r^{n+1} \leqslant Mr \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et cela entraîne que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est $\geqslant R$.

Il reste à vérifier que les rayons de convergence de ces séries ne sont pas strictement plus grand que R. Or supposons par l'absurde que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ soit $R' > R$; on applique alors le résultat que l'on vient de montrer, à la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$, avec $b_n := \frac{a_{n-1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: on déduit que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n b_n z^{n-1}$ a rayon de convergence $\geqslant R'$. Mais noter que $n b_n = a_{n-1}$, et par hypothèse $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a rayon de convergence $R < R'$: contradiction ! Donc le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est bien R.

Un raisonnement analogue montre que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ doit être R.

Il reste à considérer le cas où $R = 0$. Mais si le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ était $R' > 0$, alors par le même raisonnement, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ serait $R' > 0$, contradiction ! De même l'on vérifie que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a rayon de convergence 0. □

Corollaire 4.12. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière avec rayon de convergence $R > 0$. Alors la somme $f(x)$ de la série est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et on a :*

$$(*) \qquad \boxed{f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} \qquad \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in]-R, R[.}$$

Démonstration. D'après la proposition 4.11, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ a également rayon de convergence R ; d'après la remarque 4.3(iii), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ converge alors uniformement sur $[-r, r]$, pour tout $r < R$, et noter que la dérivée de chaque terme $a_n x^n$ est précisément le polynôme $na_n x^{n-1}$, donc $f(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$, avec dérivée donnée par la première identité de $(*)$, en vertu du corollaire 3.18. Mais *la dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales d'une fonction*, donc $f(x)$ est finalement dérivable sur $\bigcup_{0<r<R}[-r, r] =]-R, R[$, comme souhaité. La deuxième identité de $(*)$ découle aussitôt du théorème 3.17.

En dernier lieu, afin de démontrer que la fonction $f(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, il suffit de prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-R, R[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque la dérivée $f'(x)$ est la somme d'une série entière avec le même rayon de convergence que $f(x)$, cela découle maintenant d'une simple récurrence sur n. □

Exemple 4.13. En vertu du corollaire 4.12 et de l'exemple 4.8(ii,iii), les fonctions e^x, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (cela est d'ailleurs bien connu).

Exemple 4.14. (i) Rappelons que la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a rayon de convergence 1, et sa somme est la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ (exemple 4.8(i)). D'après la proposition 4.11 et le corollaire 4.12, la série de Mercator

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

a alors de même rayon de convergence 1, et on a :

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

En outre, la série $g(x)$ converge aussi pour $x = 1$, d'après le critère de Leibniz (voir l'exemple 2.21), donc elle converge uniformement aussi sur l'intervalle $[-1, 0]$, d'après le théorème 4.4 de convergence radiale d'Abel. Par suite, $g(x)$ est une fonction *continue* sur $[-1, 0]$ (ainsi que sur $]-1, 1[$), en vertu du théorème 3.16 ; mais aussi la fonction $-\ln(1-x)$ est continue sur $[-1, 0]$, donc on peut calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = g(-1) = \lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} -\ln(1-x) = -\ln(2).$$

Noter que cela nous donne la somme d'une *série numérique*, mais pour sa démonstration on a eu recours aux *séries entières*.

(ii) Considérons la série entière :

$$h(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Evidemment la suite $((-1)^n r^{2n} \,|\, n \in \mathbb{N})$ est bornée si et seulement si $|r| \leqslant 1$, donc le rayon de convergence de $h(x)$ est 1, et évidemment on a :

$$h(x) = f(-x^2) = \frac{1}{1+x^2}$$

(avec $f(x)$ comme dans (i)). Donc, la série entière :

$$l(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

a aussi rayon de convergence 1 (proposition 4.11), et le corollaire 4.12 montre que :

$$l(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

En outre, la série $l(x)$ converge aussi pour $x = 1$, par le critère de Leibniz, donc elle converge uniformement sur $[0,1]$, par le théorème de convergence radiale d'Abel ; ainsi, $l(x)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ (théorème 3.16). Mais aussi la fonction $\arctan(x)$ est continue sur $[0,1]$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = l(1) = \lim_{x\to 1^-} l(x) = \lim_{x\to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

On a ainsi obtenu la formule de Leibniz :

$$\boxed{\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots}$$

(iii) Voici une dernière application qui complète le théorème 2.32 de Mertens. Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries convergentes, et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ leur produit de Cauchy. On va montrer que si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, alors on a encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Pour cela, on considère les séries entières $s(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $t(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de sorte que $u(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est le produit de Cauchy de $s(x)$ et $t(x)$ (voir le §4.2.1). Par hypothèse, $s(x)$, $t(x)$ et $u(x)$ convergent pour $x = 1$; en raisonnant comme dans (i) et (ii), on déduit que leurs rayons de convergence sont $\geqslant 1$, et leurs sommes sont des fonctions continues sur $[0,1]$. D'autre part on sait que

$$s(x) \cdot t(x) = u(x) \qquad \forall x \in]-1,1[$$

en vertu du théorème de Mertens, car les séries $s(x)$ et $t(x)$ sont normalement convergentes sur $[-r,r]$, pour tout $r < 1$ (remarque 4.3(iii)). Par suite :

$$u(1) = \lim_{x\to 1^-} u(x) = \lim_{x\to 1^-} s(x)\cdot t(x) = \lim_{x\to 1^-} s(x) \cdot \lim_{x\to 1^{-1}} t(x) = s(1)\cdot t(1)$$

d'où l'identité souhaitée.

4.3. **Séries de Taylor.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de 0. Suivant l'exemple 2.38(i), on associe à f sa *série de Taylor au point* $x_0 = 0$:

$$S(f,x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

que l'on regarde maintenant comme une série entière de la variable réelle x.

Lemme 4.15. *(i) Soit $f(x)$ la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors la série de Taylor $S(f,x)$ coïncide avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

(ii) En particulier, si deux séries entières ont la même somme sur un même voisinage de 0, alors elles coïncident terme à terme.

Démonstration. L'assertion (ii) suit aussitôt de (i). Pour vérifier (i), soit

$$S(f,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et montrons que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a bien $a_0 = f(0) = S(f,0) = b_0$. Soit alors $n > 0$, et supposons que l'assertion soit déjà connue pour les premiers $n-1$ coefficients de toute série entière de rayon de convergence R. Au vu de la proposition 4.11 et du corollaire 4.12, on a :

$$S(f',x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k x^{k-1} \qquad \text{et} \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, il vient alors $nb_n = na_n$, *i.e.* $b_n = a_n$. □

Remarque 4.16. (i) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de 0. Même si U contient un intervalle $]-r,r[$, la série $S(f,x)$ n'a pas forcément rayon de convergence $\geqslant r$.

(ii) Et même sur son son intervalle de convergence, $S(f,x)$ ne converge pas forcément vers $f(x)$ (sauf pour $x = 0$). Par exemple, soit la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc la somme de $S(f,x)$ est la fonction constante de valeur 0, et de l'autre côté $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$.

(iii) Toutefois, si l'on a des bornes adéquates pour la taille des k-dérivées de f dans un voisinage de 0, on peut obtenir des résultats positifs ; en effet on a :

Proposition 4.17. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de 0. On suppose qu'il existe $\varepsilon, M, C > 0$ tels que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset U$ et :*

$$\|f^{(k)}\|_{]-\varepsilon,\varepsilon[,\infty} \leqslant CM^k k! \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et posons $\rho := \min(\varepsilon, 1/M)$. Alors on a :

(i) Le rayon de convergence de la série de Taylor $S(f,x)$ est $\geqslant 1/M$.

(ii) $S(f,x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[-r,r]$, pour tout $r < \rho$.

Démonstration. (i) : Par hypothèse, $\|f^{(k)}(0)/k!\| \leqslant CM^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc le rayon de convergence de $S(f,x)$ est plus grand du rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} CM^k x^k$ (lemme 4.6). Mais on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{CM^{k+1}}{CM^k} = M$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} CM^k x^k$ est $1/M$ (proposition 4.7(i)).

(ii) : Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

peut s'exprimer par la formule du reste de Lagrange :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$$

où ξ est un nombre réel dans l'intervalle ouvert d'extremités 0 et x. Par suite :

$$\|R_n\|_{]-r,r[,\infty} \leqslant CM^{n+1} r^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, \varepsilon[.$$

Mais si $r < 1/M$, la suite $(C(Mr)^{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, d'où (ii), d'après la remarque 3.5(i). □

Exercice 4.18. On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et somme $s(x)$. On suppose que $s(x)$ soit solution de l'équation différentielle :

$$(*) \qquad (1+x^2)y''(x) = 2y(x) \qquad \forall x \in]-R, R[.$$

(a) Etablir une relation liant a_n et a_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire les valeurs de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) On suppose que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$. Montrer que $R = 1$, et que la série $s(x)$ converge aussi en $x = 1$ et $x = -1$.

Solution : (a) : D'après le corollaire 4.12, on a :

$$s'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1} \qquad s''(x) = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad \forall x \in]-R, R[$$

d'où :

$$\begin{aligned}(1+x^2)s''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n] x^n\end{aligned}$$

et compte tenu de $(*)$ et du lemme 4.15(ii), on déduit :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n = 2a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire :

$$(**) \qquad a_{n+2} = \frac{2+n-n^2}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{2-n}{n+2} a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) : Compte tenu de $(**)$, il vient :

$$a_2 = a_0 \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{2-2}{2+2} a_2 = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad a_{2p} = 0 \quad \forall p \geqslant 2.$$

et en outre :

$$a_{2p+1} = a_1 \prod_{k=1}^{p} \frac{2-(2k-1)}{(2k-1)+2} = a_1 \prod_{k=1}^{p} \frac{3-2k}{1+2k} \qquad \forall p \geqslant 1.$$

(c) : Si $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$, on a $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, d'où :

$$a_{2p} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{3-2k}{1+2k} \qquad \forall p \geqslant 1.$$

Autrement dit :

$$s(x) = x + \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p+1} \prod_{k=1}^{p} \frac{3-2k}{1+2k}.$$

On détermine le rayon avec la règle de D'Alembert : pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, posons :

$$u_p := a_{2p+1} x_0^{2p+1} \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Alors :

$$\lim_{p\to+\infty} \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \lim_{p\to+\infty} \left| \frac{a_{2p+3} x_0^{2p+3}}{a_{2p+1} x_0^{2p+1}} \right| = x_0^2 \cdot \lim_{p\to+\infty} \left| \frac{3-2(p+1)}{1+2(p+1)} \right| = x_0^2.$$

Donc $s(x_0)$ converge pour $x_0^2 < 1$, *i.e.* pour $|x_0| < 1$, et diverge pour $|x_0| > 1$. Cela achève de vérifier que $R = 1$. Pour vérifier la convergence au bord de l'intervalle de convergence, on va utiliser la règle de Raabe-Duhamel (proposition 2.15) : pour $x_0 = \pm 1$, on a :

$$\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \left| \frac{1-2p}{3+2p} \right| = \frac{2p-1}{2p+3} = 1 - \frac{4}{2p+3} < 1 - \frac{3/2}{p} \qquad \forall p \geqslant 2.$$

Puisque $3/2 > 1$, la proposition 2.15 nous dit que les séries $s(1)$ et $s(-1)$ convergent absolument, comme souhaité. Par le théorème de convergence radiale d'Abel, il s'ensuit que la série entière $s(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et la somme est alors une fonction continue sur $[-1, 1]$.

4.4. **Appendice : un théorème d'Abel amélioré.** Soit $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence $\geqslant 1$, et supposons que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Le théorème de convergence radiale d'Abel nous dit alors que la série entière $f(z)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$. Mais en fait, on peut affiner ce résultat : on a la convergence uniforme sur certaines parties fermées du disque $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$ contenant le segment $[0, 1]$, et qui ne sont contenues dans aucune partie de la forme $[0, 1] \cup \mathbb{D}(0, \rho)$ avec $\rho < 1$. Plus précisément, fixons $\vartheta \in [0, \pi/2[$ et $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, et considérons le secteur d'ouverture 2ϑ et rayon r, avec sommet en 1 :

$$\mathscr{S}(\vartheta, r) := \{1 - \eta e^{i\phi} \,|\, 0 \leqslant \eta \leqslant r, -\vartheta \leqslant \phi \leqslant \vartheta\}.$$

Avec cette notation, on a :

Théorème 4.19. *Soit $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entère avec rayon de convergence $\geqslant 1$, et supposons que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Alors, pour tout $\vartheta \in [0, \pi/2[$ et tout $r \in [0, 2\cos(\vartheta)[$, la série entière $f(z)$ converge uniformément sur le secteur fermé $\mathscr{S}(\vartheta, r)$.*

Démonstration. Posons
$$A_n := \sum_{k=n}^{+\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad M_n := \sup\{\|A_k\| \mid k \geqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $p \geqslant q \geqslant 0$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=q}^{p} a_k z^k &= \sum_{k=q}^{p} (A_k - A_{k+1}) z^k \\ &= A_q z^q + A_{q+1}(z^{q+1} - z^q) + \cdots + A_p(z^p - z^{p-1}) - A_{p+1} z^p\end{aligned}$$
d'où :
$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=q}^{p} a_k z^k\Big\| &\leqslant M_q(\|z\|^q + (\|z\|^q + \cdots + \|z\|^{p-1}) \cdot \|z-1\| + \|z\|^p) \\ &\leqslant M_q\Big(1 + \frac{\|1-z\|}{1-\|z\|} + 1\Big) \qquad \text{si } \|z\| < 1.\end{aligned}$$
Or, soit $z \in \mathscr{S}(\vartheta, r) \setminus \{1\}$; alors $z = 1 - \eta e^{i\phi}$ avec $0 < \eta \leqslant r$ et $-\vartheta \leqslant \phi \leqslant \vartheta$. Il vient $\|1 - z\| = \eta$ et :
$$\|z\|^2 = (1 - \eta e^{i\phi})(1 + \eta e^{-i\phi}) = 1 - \eta(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \eta^2 = 1 - 2\eta\cos(\phi) + \eta^2$$
d'où $\|z\|^2 < 1 - \eta^2 + \eta^2 = 1$ (car $2\cos(\phi) \geqslant 2\cos(\vartheta) > \eta$), et alors :
$$\frac{\|1-z\|}{1-\|z\|} = \frac{\eta(1+\|z\|)}{1-\|z\|^2} = \frac{\eta(1+\|z\|)}{2\eta\cos(\phi) - \eta^2} = \frac{1+\|z\|}{2\cos(\phi) - \eta} \leqslant \frac{2}{2\cos(\vartheta) - r}$$
d'où finalement, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant q$:
$$(*) \qquad \Big\|\sum_{k=q}^{p} a_k z^k\Big\| \leqslant M_q\Big(2 + \frac{2}{2\cos(\vartheta) - r}\Big) \qquad \forall z \in \mathscr{S}(\vartheta, r) \setminus \{1\}.$$
Mais noter que l'estimation $(*)$ vaut aussi trivialement pour $z = 1$ (et en fait on a plus précisément : $\|\sum_{k=q}^{p} a_k\| \leqslant 2M_q$ pour tout p, q comme ci-dessus) ; *i.e. :*
$$\Big\|\sum_{k=q}^{p} a_k z^k\Big\|_{\mathscr{S}(\vartheta,r),\infty} \leqslant M_q\Big(2 + \frac{2}{2\cos(\vartheta) - r}\Big)$$
d'où la convergence uniforme souhaitée, par la condition de Cauchy uniforme, car $\lim\limits_{q \to +\infty} M_q = 0$. □

5. Fonctions périodiques et séries de Fourier

5.1. Séries exponentielles et séries trigonométriques.

Définition 5.1. Soit $T > 0$ un nombre réel. Une *série trigonométrique de période* T est une série de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{avec} \quad u_n(x) := a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x) \quad \text{et} \quad \omega := \frac{2\pi}{T}$$

pour des suites de nombres complexes $a_\bullet := (a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, $b_\bullet := (b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$.

On appelle ω la *pulsation*, et $a_\bullet, b_\bullet$ les *coefficients trigonométriques* de la série.

Remarque 5.2. (i) Avec la notation de la définition 5.1, noter que chaque terme $u_n(x)$ est une fonction T*-périodique*, c'est à dire, périodique de période T. Par suite, si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge sur $\mathbb{R}$, sa somme sera de même T-périodique.

(ii) Toute série trigonométrique peut être réécrite sous forme d'une *série exponentielle* ; pour cela noter les identités suivantes :

$$\boxed{\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

qui se déduisent de la formule d'Euler pour e^{ix} (voir l'exemple 2.38(ii)). Il vient alors aisément :

$$a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x) = c_n e^{i\omega n x} + c_{-n} e^{-i\omega n x}$$

avec :

$$\boxed{c_n := \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} := \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad \forall n \geqslant 1.}$$

Si l'on pose aussi

$$\boxed{c_0 := a_0}$$

on trouve ainsi (avec $u_n(x)$ comme dans la définition 5.1) :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{i\omega n x} + c_{-n} e^{-i\omega n x}).$$

On appelle $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ les *coefficients exponentiels* de la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(iii) Evidemment on peut récuperer les coefficients trigonométriques à partir des coefficients exponentiels, en inversant les relations ci-dessus :

$$\boxed{a_0 := c_0 \qquad a_n := c_n + c_{-n} \qquad b_n := i(c_n - c_{-n}) \qquad \forall n \geqslant 1.}$$

Proposition 5.3. *Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ une série trigonométrique de période T, avec coefficients trigonométriques $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, et avec coefficients exponentiels $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes.

(b) Les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k}$ sont absolument convergentes.

En outre, ces conditions entraînent :

(c) La série $a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et T-périodique.

Démonstration. L'équivalence des conditions (a) et (b) découle aussitôt de la proposition 2.29(ii). Ensuite, noter que :

$$\|a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)\|_{\mathbb{R},\infty} \leqslant \|a_n\| + \|b_n\| \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Compte tenu du théorème 3.16, cela entraîne immédiatement que (b)⇒(c), car chaque terme $u_n(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. □

Corollaire 5.4. *Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une série trigonométrique de période T :*

$$s(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

avec coefficients trigonométriques $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$, et avec coefficients exponentiels $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p b_n$ sont absolument convergentes.

(b) Les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} k^p c_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} k^p c_{-k}$ sont absolument convergentes.

En outre, ces conditions entraînent :

(c) $s(x)$ converge normalement à une fonction T-périodique de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'équivalence de (a) et (b) découle encore de la proposition 2.29(ii). Ensuite, noter que :

$$\cos(\omega n x)' = -\omega n \sin(\omega n x) \qquad \sin(\omega n x)' = n\omega \cos(\omega n w) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc $(n\omega b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ et $(-n\omega a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ sont les coefficients trigonométriques de la série trigonométrique de période T :

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x).$$

D'après la proposition 5.3, si $p = 1$, les conditions (a) et (b) entraînent alors que $f(x)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue. En dernier lieu, noter que si les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ convergent absolument, il en est de même pour les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, car $\|a_n\| \leqslant \|n a_n\|$ et $\|b_n\| \leqslant \|n b_n\|$ pour tout $n \geqslant 1$. Encore avec la proposition 5.3, il s'ensuit que (a) et (b) entraînent aussi la convergence normale de la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Mais alors, cette dernière est de classe $\mathscr{C}^1$, en vertu du corollaire 3.18, et sa dérivée est donnée par $f(x)$.

Le cas où $p > 1$ s'ensuit aussitôt, par une simple récurrence sur p. □

Proposition 5.5. *Soient $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{i\omega n x}$ une série exponentielle de période $T = 2\pi/\omega$. On suppose que :*

(a) $c_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

(b) La suite $(c_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ est décroissante.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{i\omega n x}$ converge sur la partie ouverte $U := \mathbb{R} \setminus \{kT \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, et sa somme est une fonction continue sur U.

Démonstration. Il s'agit d'une application du critère de Dirichlet pour séries numériques (proposition 2.22). En effet, soit $x \in U$, et posons

$$v_n := e^{i\omega n x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est géométrique de raison $e^{i\omega x} \neq 1$ (car $x \notin \{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}$), donc :

$$\sum_{k=n}^{n+m} v_k = v_n \sum_{k=0}^{m} v_k = v_n \frac{1 - v_{m+1}}{1 - e^{i\omega x}} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Noter que $\|v_n\| = 1$ et $\|1 - v_{m+1}\| \leqslant 1 + \|v_{m+1}\| = 2$; en outre :

$$1 - e^{i\omega x} = e^{i\omega x/2}(e^{-i\omega x/2} - e^{i\omega x/2}) = -2ie^{i\omega x/2}\sin(\omega x/2)$$

d'où :

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+m} v_k\Big\| \leqslant \frac{2}{\|1 - e^{i\omega x}\|} = \frac{1}{|\sin(\omega x/2)|} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

(et noter que $\sin(\omega x/2) \neq 0$, car $\omega T = 2\pi$ et $x \notin \{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}$). Par le critère de Dirichlet, la série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{i\omega nx}$ converge alors simplement sur U, et on a les estimations suivantes pour ses restes :

$$(*) \qquad \Big\|\sum_{k=n}^{n+m} c_n e^{i\omega kx}\Big\| \leqslant \frac{c_n}{|\sin(\omega x/2)|} \qquad \forall x \in U, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Avec ces estimations (et, comme d'habitude, avec la condition de Cauchy uniforme) on peut ensuite étudier la convergence uniforme de notre série. Pour cela, noter que

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]kT, (k+1)T[.$$

Pour tout $\delta \in]0, T[$, posons alors

$$U(\delta) := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [kT + \delta, kT - \delta] \qquad \text{de sorte que} \quad U = \bigcup_{\delta\in]0,T[} U(\delta).$$

La fonction $|\sin(\omega x/2)|$ de la variable x est continue sur $U(\delta)$, et ne s'annulle pas sur $U(\delta)$; donc la fonction $f(x) := 1/|\sin(\omega x/2)|$ est également continue sur $U(\delta)$, en particulier elle est *bornée* sur chaque partie compacte $[kT + \delta, kT - \delta]$. Mais $f(x)$ est en outre T-périodique sur $U(\delta)$, donc finalement $f(x)$ est *bornée sur* $U(\delta)$, pour tout $\delta \in]0, T[$. Soit alors $M(\delta) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que :

$$\|f(x)\|_{U(\delta),\infty} \leqslant M(\delta).$$

Avec $(*)$, il vient :

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+m} c_n e^{i\omega kx}\Big\|_{U(\delta),\infty} \leqslant c_n M(\delta) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Puisque la suite $(c_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers 0, on déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{i\omega nx}$ satisfait la condition de Cauchy uniforme sur toute telle partie $U(\delta)$, et donc elle converge uniformement sur chaque partie $U(\delta)$ (corollaire 3.8).

Comme chaque terme $c_n e^{i\omega nx}$ est une fonction continue de la variable x, il s'ensuit que la somme de la série est continue sur chaque $U(\delta)$ (théorème 3.16(ii)), et donc aussi sur la réunion U des parties $U(\delta)$. □

Corollaire 5.6. *(i) Soient* $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ *et* $f(x) := c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{i\omega nx} + c_{-n}e^{-i\omega nx})$ *une série exponentielle de période* $T := 2\pi/\omega$. *Supposons que les suites* $(c_n \mid n \in \mathbb{N})$ *et* $(c_{-n} \mid n \in \mathbb{N})$ *vérifient les conditions (a) et (b) de la proposition 5.5. Alors* $f(x)$ *converge sur* $U := \mathbb{R}\setminus\{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}$, *et sa somme est une fonction continue sur* U.

(ii) Soit $g(x) := a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(\omega nx)+b_n\sin(\omega nx))$ une série trigonométrique de période T, et supposons que les suites $(a_n \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ et $(b_n \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ vérifient les conditions (a) et (b) de la proposition 5.5. Alors $g(x)$ converge sur U, et sa somme est une fonction continue sur U.

Démonstration. (i) : Il suffit de montrer les mêmes assertions pour les séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{i\omega nx} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}e^{-i\omega nx}.$$

Pour la première, les assertions sont déjà connue, en vertu de la proposition 5.5. Pour la deuxième, on fait le changement de variables $y := -x$ (noter que $U = -U := \{-x \mid x \in U\}$) ; alors la deuxième série devient $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n e^{i\omega ny}$, avec $d_n := c_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et évidemment la suite $(d_n \mid n \in \mathbb{N})$ satisfait les conditions (a) et (b) de la proposition 5.5, d'où les assertions souhaitées.

(ii) : Il suffit de vérifier les assertions pour les séries :

$$g_1(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(\omega nx) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} ib_n\sin(\omega nx).$$

Sous forme exponentielle, la série $g_1(x)$ devient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{a_n}{2}e^{i\omega nx} + \frac{a_n}{2}e^{-i\omega nx}\Big).$$

Puisque la suite $(a_n \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition 5.5, il en est de même pour la suite $(a_n/2 \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$, d'où les assertions souhaitées, d'après (i). Ensuite, la série $g_2(x)$ deveint, sous forme exponentielle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{b_n}{2}e^{i\omega nx} - \frac{b_n}{2}e^{-i\omega nx}\Big)$$

et il suffit de montrer les assertions pour les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2}e^{i\omega nx}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2}e^{-i\omega nx}$. Mais la suite $(b_n/2 \mid n \in \mathbb{N})$ satisfait encore les conditions (a) et (b) de la proposition 5.5, donc on conclut avec (i). □

5.2. **Séries de Fourier.** Les questions centrales de la théorie de Fourier, sont de comment caractériser les fonctions qui s'expriment par la somme d'une série trigonométrique, et de comment récupérer les coefficients exponentiels ou trigonométriques d'une série trigonométrique, à partir de la somme $f(x)$ de la série, si l'on suppose que la série converge sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. Concernant la deuxième question, le premier résultat important est fourni par la proposition 5.8 suivante ; pour la preuve, observons d'abord :

Lemme 5.7. *Soient $T > 0$ un réel, et $\omega := 2\pi/T$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega kx}dx = \begin{cases} 1 & \textit{si } k = 0 \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. L'assertion est claire pour $k = 0$. Pour $k \neq 0$, on a :

$$\int e^{i\omega kx}dx = \frac{e^{i\omega kx}}{\omega k}.$$

Par suite :

$$\int_0^T e^{ik\omega x}dx = \frac{1}{\omega k}(e^{i\omega kT} - e^0) = \frac{1}{\omega k}(e^{2\pi ki} - 1) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

d'où l'assertion. □

Proposition 5.8. *Soit* $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{i\omega nx} + c_{-n}e^{-i\omega nx})$ *une série exponentielle de période* $T := 2\pi/\omega$*, uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$*. Alors on a :*

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\omega kx}dx \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.}$$

Démonstration. Noter d'abord que la convergence uniforme de la série entraîne la continuité sur $\mathbb{R}$ de sa somme $f(x)$ (théorème 3.16(iii)), et ainsi f est *intégrable* sur tout intervalle de longueur finie. Noter en outre que $\|e^{i\omega kx}\|_{\mathbb{R},\infty} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc la série de fonctions :

$$c_0 e^{-i\omega kx} + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{i\omega nx} + c_{-n}e^{-i\omega nx})e^{-i\omega kx}$$

est encore uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est $f(x)e^{-i\omega kx}$, par la proposition 3.13. En outre, d'après le théorème 3.17 on peut échanger la série avec l'intégrale :

$$\int_0^T f(x)e^{-i\omega kx}dx = \int_0^T c_0 e^{-i\omega kx}dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T (c_n e^{i\omega(n-k)x} + c_{-n}e^{-i\omega(n+k)x})dx.$$

Compte tenu du lemme 5.7, on obtient alors avec $k = 0$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T c_0 dx = c_0$$

et pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ il vient :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\omega kx}dx = \frac{1}{T}\int_0^T c_k dx = c_k$$

comme souhaité. □

Corollaire 5.9. *Soit* $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(\omega nx) + b_n \sin(\omega nx))$ *une série trigonométrique de période* $T := 2\pi/\omega$*, uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$*. Alors :*

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\omega nx)dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\omega nx)dx \qquad \forall n \geqslant 1.}$$

Démonstration. Soient $(c_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ les coefficients exponentiels de la série $f(x)$; puisque $a_0 = c_0$, la première identité est claire, par la proposition 5.8. Ensuite, puisque :

$$\cos(\omega nx) = \frac{e^{i\omega nx} + e^{-i\omega nx}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(remarque 5.2(ii)), il vient :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{c_n + c_{-n}}{2} = \frac{a_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

toujours d'après la proposition 5.8 et la remarque 5.2(iii), d'où l'identité pour a_n. Un calcul analogue démontre l'identité pour b_n. □

Remarque 5.10. (i) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique, on a :

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

En effet, par la *relation de Chasles* on on a :

$$\int_a^{T+a} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx$$

et avec le changement de variable $y = x - T$ il vient :

$$\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(y)dy.$$

Il suffit alors d'observer que la relation de Chasles donne :

$$\int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Ainsi, afin de calculer les coefficients trigonométriques ou exponentiels d'une série trigonométrique uniformement convergente sur $\mathbb{R}$, on pourra effectuer des intégrations sur n'importe quel intervalle de longueur T qui nous conviendra.

(ii) Noter en outre que *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est une fonction impaire,* c'est-à-dire, si :

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors on a :

$$\boxed{a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(\omega n x)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

En effet, d'après (i), on peut intégrer sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$, et par le changement de variable $y = -x$, on trouve :

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{T}\Big(\int_0^{T/2} f(x)dx + \int_{-T/2}^0 f(x)dx\Big) &= \frac{1}{T}\Big(\int_0^{T/2} f(x)dx + \int_0^{T/2} f(-y)dy\Big) \\ &= \frac{1}{T}\Big(\int_0^{T/2} f(x)dx - \int_0^{T/2} f(y)dy\Big) = 0 \end{aligned}$$

et comme la fonction $f(x)\cos(\omega n x)$ est encore impaire pour tout $n \geqslant 1$, le même calcul s'applique aussi aux autres coefficients a_n. D'autre part, on a :

$$f(-x)\sin(-\omega n x) = f(x)\sin(\omega n x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'où, par le même changement de variables :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\Big(\int_0^{T/2} f(x)\sin(\omega nx)dx + \int_{-T/2}^{0} f(x)\sin(\omega nx)dx\Big) \\ &= \frac{2}{T}\Big(\int_0^{T/2} f(x)\sin(\omega nx)dx + \int_0^{T/2} f(y)\sin(\omega ny)dy\Big) \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(\omega nx)dx \end{aligned}$$

(iii) De même, *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est une fonction paire*, c'est-à-dire, si l'on a :

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors on a :

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(\omega nx)dx \qquad b_n = 0 \qquad \forall n \geqslant 1}$$

car on peut appliquer les calculs de (ii) aux fonctions impaires $f(x)\sin(\omega nx)$ et aux fonctions paires $f(x)$ et $f(x)\cos(\omega nx)$.

5.2.1. Revenons maintenant à la première question évoquée au début de cette section : soient $T > 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique ; peut-on écrire $f(x)$ comme la somme d'une série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de période T ?

La discussion précédente nous suggère qu'il faudra, du moins provisoirement, supposer que $f(x)$ soit intégrable sur l'intervalle $[0, T]$, et nous fournit dans ce cas des candidats évidents pour les coefficients (exponentiels ou trigonométriques) de la série cherchée $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 5.11. (i) Soient $T > 0$ un réel, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0, T]$. Les *coefficients de Fourier exponentiels* (resp. *trigonométriques*) de f sont les suites numériques $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ (resp. $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ et $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$) données par les formules de la proposition 5.8 (resp. du corollaire 5.9).

(ii) Dans la situation de (i), soit $\omega := 2\pi/T$; *la série de Fourier* de f est la série

$$\boxed{S(f, x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(\omega nx) + b_n\sin(\omega nx)) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{i\omega nx} + c_{-n}e^{-i\omega nx}).}$$

(iii) Il est utile aussi d'introduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, *le p-ème polynôme trigonométrique de* f, noté :

$$\boxed{S_p(f, x) := \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{i\omega kx}.}$$

Remarque 5.12. (i) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions T-périodiques et intégrables sur $[0, T]$. Alors :

$$S(\lambda f + \mu g, x) = \lambda S(f, x) + \mu S(g, x) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, si $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ et $(d_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ sont les coefficients exponentiels des séries de Fourier de f et g respectivement, alors les coefficients exponentiels de $\lambda f + \mu g$ sont $(\lambda c_k + \mu d_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$, et de même pour les coefficients trigonométriques. En effet, cela découle aussitôt de la linéarité de l'intégrale.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le lemme 5.7 nous dit que les coefficients exponentiels de Fourier de $f_n(x) := e^{i\omega nx}$ sont donnée par la suite $(c_k \mid k \in \mathbb{N})$ avec :

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la série de Fourier $S(f_n, x)$ ne contient qu'un terme non nul, et

$$S(f_n, x) = f_n(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Avec (i), l'identité $S(g, x) = g$ s'étend, plus généralement, à toute combinaison $\mathbb{C}$-linéaire *finie* $g := \sum_{n=q}^{p} r_n e^{i\omega nx}$ des fonctions $(f_n \mid n \in \mathbb{Z})$. En particulier, cette identité est vérifiée avec $g(x) = \cos(\omega nx)$ et $g(x) = \sin(\omega nx)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour une fonction f vérifiant seulement les conditions (assez faibles) de la définition 5.11, la convergence de la série de Fourier de f n'est pas, en général, assurée. Toutefois, on a au moins le résultat important suivant :

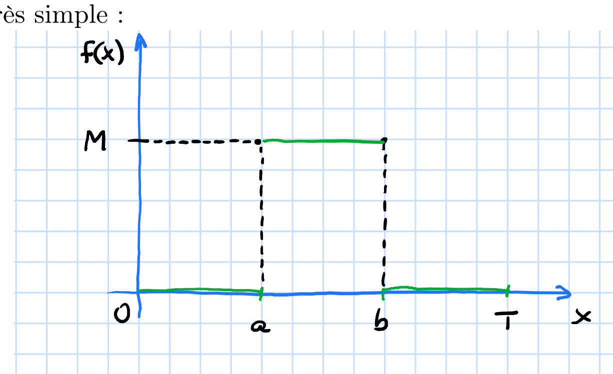
Lemme 5.13. (de Riemann-Lebesgue) *(i) Soient $T > 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0, T]$. Alors les suites des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f convergent vers 0.*

(ii) Plus précisément, pour toute fonction intégrable $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ on a :

$$\boxed{\lim_{t \to \pm\infty} \int_0^T f(x) e^{ixt} dx = 0.}$$

Démonstration. En vertu de la remarque 5.2(ii,iii), il est clair que la suite des coefficients de Fourier exponentiels $c_\bullet := (c_k \mid k \in \mathbb{N})$ converge vers 0 si et seulement s'il en est de même pour celle des coefficients de Fourier trigonométriques. En outre, évidemment (ii) entraîne que $c_\bullet$ converge vers 0. Donc, il suffit de montrer (ii).

- Pour cela, on suppose d'abord que f soit une fonction en escalier d'un type très simple :



Donc, f est constante de valeur M sur un intervalle $I \subset [0, T]$ (noter que I peut ne pas contenir l'une ou l'autre de ses extremités), et $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, T] \setminus I$. Puisque :

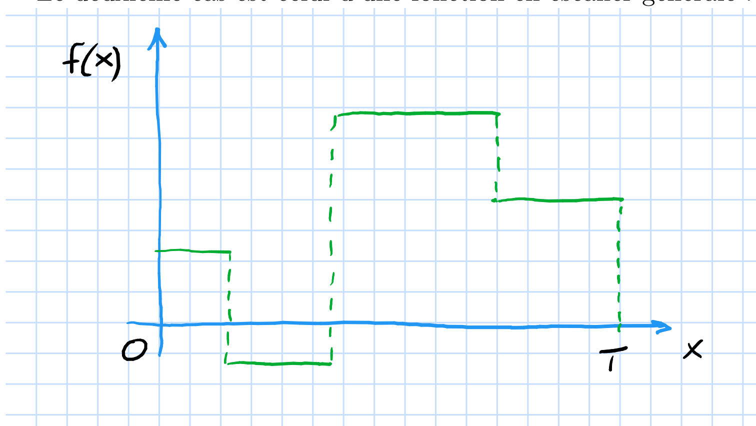
$$\int e^{ixt} dx = \frac{1}{it} e^{ixt} \qquad \forall t \neq 0$$

il vient :

$$\left\| \int_0^T f(x) e^{ixt} dx \right\| = \left\| \int_a^b M e^{ixt} dx \right\| = \left\| \frac{M}{it} (e^{ibt} - e^{iat}) \right\| \leqslant \left\| \frac{2M}{it} \right\|$$

d'où l'assertion, dans ce cas.

- Le deuxième cas est celui d'une fonction en escalier générale :



Mais une telle fonction $f(x)$ est une somme finie de fonctions du type précédent, donc l'assertion se déduit pour toute telle $f(x)$, par la linéarité de l'intégrale.

- En dernier lieu, si $f(x)$ est une fonction intégrable sur $[0, T]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier $g(x)$ telle que :

$$\int_0^T \|f(x) - g(x)\| dx < \varepsilon.$$

Par le cas précédent, il existe $R \geqslant 0$ tel que :

$$\left\| \int_0^T g(x) e^{ixt} dx \right\| < \varepsilon \qquad \forall |t| \geqslant R.$$

Par suite, pour $|t| \geqslant R$ il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T f(x) dx \right\| &\leqslant \left\| \int_0^T (f(x) - g(x)) e^{ixt} dx \right\| + \left\| \int_0^T g(x) e^{ixt} dx \right\| \\ &\leqslant \int_0^T \|f(x) - g(x)\| dx + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

d'où l'assertion (ii). □

Exemple 5.14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

On souhaite calculer les coefficients de Fourier de f. Pour cela, noter d'abord que f est *presque impaire* : en effet, considérons aussi la fonction 2π-périodique paire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi] \backslash \{0, \pi, 2\pi\}$, et *deux fonctions qui ne diffèrent que pour un nombre fini de valeurs ont les mêmes intégrales*, donc les coefficients de Fourier de $f(x)$ sont données par les formules de la remarque 5.10(ii).

Donc, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque $\omega = 1$, on a, pour tout $n \geqslant 1$:
$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx) = -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1).$$
Autrement dit :
$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impaire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est paire.} \end{cases}$$
La série de Fourier de f est alors :
$$S(f,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin((2k+1)x).$$

La partie (i) du lemme 5.13 peut être affiné considérablement ; en effet, on a :

Proposition 5.15. (Inégalité de Bessel) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0,T]$. Soient aussi $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ les coefficients exponentiels, et $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, $(b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ les coefficients trigonométriques de la série de Fourier de f. Alors on a :*
$$(*) \qquad \boxed{\|a_0\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\|a_n\|^2 + \|b_n\|^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|c_k\|^2 \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \|f(x)\|^2 dx.}$$

Démonstration. Avec la remarque 5.2(ii), on vérifie aisément que :
$$\|a_0\| = \|c_0\| \qquad \text{et} \qquad \|c_n\|^2 + \|c_{-n}\|^2 = \frac{\|a_n\|^2 + \|b_n\|^2}{2} \qquad \forall n \geqslant 1$$
d'où l'égalité dans $(*)$, et donc il suffira de vérifier l'inégalité de $(*)$.

Pour cela, soit $S_n(f,x)$ le n-ème polynôme trigonométrique de f, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la définition 5.11(iii)). Evidemment :
$$(*) \qquad M := \int_0^T \|f(x) - S_n(f,x)\|^2 dx \geqslant 0.$$
Rappelons que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ on a :
$$\|z-w\|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = \|z\|^2 + \|w\|^2 - (z\overline{w} + \overline{z}w) = \|z\|^2 + \|w\|^2 - 2\mathfrak{R}(z\overline{w}).$$
Par suite :
$$(**) \qquad M = \int_0^T \|f(x)\|^2 dx + \int_0^T \|S_n(f,x)\|^2 dx - 2\int_0^T \mathfrak{R}(f(x)\overline{S_n(f,x)})dx.$$
Or, avec comme d'habitude, $\omega := 2\pi/T$, on a :
$$\int_0^T \|S_n(f,x)\|^2 dx = \int_0^T \Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega kx}\Big)\cdot\Big(\sum_{l=-n}^{n} \overline{c}_l e^{-i\omega lx}\Big)dx \qquad (\text{car } \overline{e^{i\omega lx}} = e^{-i\omega lx})$$
$$= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}\int_0^T c_k\overline{c}_l e^{i\omega(k-l)x}dx.$$

Mais d'après le lemme 5.7, les seules termes qui donnent une contribution non nulle dans la somme double ci-dessus, sont ceux pour lequels on a $k - l = 0$, *i.e.*

$k = l$. Ainsi, finalement :

$$(***) \qquad \int_0^T \|S_n(f,x)\|^2 dx = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^T \|c_k\|^2 dx = T \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\int_0^T \Re(f(x)\overline{S_n(f,x)})dx &= \Re\Big[\int_0^T f(x)\overline{S_n(f,x)}dx\Big] = \Re\Big[\int_0^T f(x)\cdot \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k e^{-i\omega kx} dx\Big]\\ &= \Re\Big[\sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \int_0^T f(x)\cdot e^{-i\omega kx} dx\Big]\\ &= \Re\Big(\sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k c_k T\Big) = T\sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2.\end{aligned}$$

Avec $(*)$, $(**)$ et $(***)$, on conclut que :

$$M = \int_0^T \|f(x)\|^2 dx - T\sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2 \geqslant 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et l'inégalité souhaitée s'ensuit, en prenant la limite pour $n \to +\infty$. □

5.3. **Convergence des séries de Fourier.** Malgré les résultats prometteurs de la section précédente, l'intégrabilité sur $[0,T]$ de la fonction T-périodique f ne suffit pas pour déduire la convergence de la série de Fourier $S(f,x)$ de f sur $\mathbb{R}$, et en fait, même la continuité de f ne suffit pas tout à fait non plus. Pour l'étape suivante, posons comme toujours $\omega := 2\pi/T$, et introduisons le *noyau de Dirichlet :*

$$D_p(x) := \sum_{k=-p}^{p} e^{i\omega kx} \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a déjà rencontré des telles sommes finies, et on a vu qu'on peut les évaluer en remarquant qu'il s'agit des premiers terms d'une série géométrique (voir *e.g.* la preuve de la proposition 5.5). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{kT \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$$\begin{aligned}D_p(x) &= e^{-i\omega px} \sum_{k=0}^{2p} e^{i\omega kx} = e^{i\omega px} \frac{1 - e^{i\omega(2p+1)x}}{1 - e^{i\omega x}}\\ &= e^{-i\omega(p+1/2)x} \frac{1 - e^{i\omega(2p+1)x}}{e^{-i\omega x/2} - e^{i\omega x/2}} = \frac{e^{-i\omega(p+1/2)x} - e^{i\omega(p+1/2)x}}{e^{-i\omega x/2} - e^{i\omega x/2}}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{D_p(x) = \frac{\sin((2p+1)\omega x/2)}{\sin(\omega x/2)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{kT \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \forall p \in \mathbb{N}.}$$

Avec cette notation, on a :

Lemme 5.16. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0,T]$, et $p \in \mathbb{N}$; alors on a :*

$$S_p(f,x) = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} (f(x+t) + f(x-t))D_p(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $S_p(f,x)$ désigne le p-ème polynôme trigonométrique de f (définition 5.11(iii)).

Démonstration. Notons par $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ les coefficients exponentiels de la série de Fourier de f ; soit en outre $\omega := 2\pi/T$; on calcule :

$$\begin{aligned} S_p(f,x) = \frac{1}{T}\sum_{k=-p}^{p}\int_0^T f(u)e^{i\omega kx}e^{-i\omega ku}du &= \frac{1}{T}\sum_{k=-p}^{p}\int_0^T f(u)e^{i\omega k(x-u)}du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(u)D_p(x-u)du \\ &= \frac{1}{T}\int_{-x}^{T-x} f(t+x)D_p(t)dt \end{aligned}$$

(avec le changement de variable $t = u - x$, et comme $D_p(-t) = D_p(t)$). Mais puisque f et D_p sont T-périodiques, avec la remarque 5.10(i) il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{i\omega kx} &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t+x)D_p(t)dt \\ &= \frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/2} f(t+x)D_p(t)dt + \int_{-T/2}^{0} f(u+x)D_p(u)du\Big] \\ &= \frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/2} f(u+x)D_p(u)du + \int_0^{T/2} f(x-t)D_p(t)dt\Big] \end{aligned}$$

(avec le changement de variable $t = -u$, et comme $D_p(-t) = D_p(t)$), d'où le lemme. □

Définition 5.17. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f satisfait les *conditions ponctuelles de Dirichlet* en x_0, si les limites suivantes existent dans $\mathbb{C}$:

$$f(x_0^+) := \lim_{t\to x_0^+} f(t) \qquad \text{et} \qquad f(x_0^-) := \lim_{t\to x_0^-} f(t)$$

$$f'(x_0^+) := \lim_{y\to x^+} \frac{f(y) - f(x_0^+)}{y - x_0} \qquad \text{et} \qquad f'(x_0^-) := \lim_{y\to x_0^-} \frac{f(y) - f(x_0^-)}{y - x_0}.$$

Théorème 5.18. (de Dirichlet) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0,T]$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f satisfait les conditions ponctuelles de Dirichlet en x_0, alors la série de Fourier $S(f,x)$ de f converge pour $x = x_0$, et on a :*

$$\boxed{S(f,x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.}$$

Démonstration. Noter d'abord que le noyau de Dirichlet $D_p(t)$ est une fonction paire ; d'après les remarques 5.10(iii) et 5.12(ii) on a alors :

$$\frac{2}{T}\int_0^{T/2} D_p(t)dt = 1 \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

d'où :

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)) \cdot D_p(t)dt \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Soit en outre $S_p(f,x)$ le p-ème polynôme trigonométrique de f ; compte tenu du lemme 5.16, il vient :

$$S_p(f,x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}[(f(x_0+t)-f(x_0^+))+(f(x_0-t)-f(x_0^-))]D_p(t)dt$$

pour tout $p\in\mathbb{Z}$. Posons alors :

$$\Phi^+(x_0,t):=\frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{\sin(\omega t/2)}\qquad \Phi^-(x_0,t):=\frac{f(x_0-t)-f(x_0^-)}{\sin(\omega t/2)}\qquad \forall t\in]0,T/2]$$

ainsi que :

$$\Phi^+(x_0,0):=\frac{2}{\omega}f'(x_0^+)\qquad\qquad \Phi^-(x_0,0):=\frac{2}{\omega}f'(x_0^-)$$

de sorte que l'on a, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$S_p(f,x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}(\Phi^+(x_0,t)+\Phi^-(x_0,t))\sin\Big(\frac{2p+1}{2}\omega t\Big)dt.$$

Mais noter que $\sin(\frac{2p+1}{2}\omega t)=\frac{1}{2i}(e^{i(2p+1)\omega t/2}-e^{-i(2p+1)\omega t/2})$; alors, si l'on montre que $\Phi^+(x_0,t)$ et $\Phi^-(x_0,t)$ sont *intégrables sur* $[0,T/2]$ (par rapport à la variable t), le lemme de Riemann-Lebesgue nous dira que la limite pour $p\to+\infty$ de l'intégrale ci-dessus est égale à 0, et cela achèvera la preuve du théorème. On détaille la preuve pour $\Phi^+(x_0,t)$: le même raisonnement s'applique à $\Phi^-(x_0,t)$. Observons d'abord :

Affirmation 5.19. Soit $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction telle que :

(a) g est continue en a

(b) g est intégrable sur $[c,b]$, pour tout $c\in]a,b[$.

Alors g est intégrable sur $[a,b]$.

Preuve : Rappelons qu'une fonction $h:I\to\mathbb{C}$ est intégrable sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ si et seulement s'il en est de même pour les fonctions $\Re(h),\Im(h):I\to\mathbb{C}$ (les parties réelles et imaginaires de h). De même, h est continue en $x\in I$ si et seulement s'il en est de même pour $\Re(h)$ et $\Im(h)$. Donc, quitte à remplacer g par $\Re(g)$ et $\Im(g)$, on peut supposer que g soit à valeurs réelles.

D'après (a), pour tout $\varepsilon>0$ il existe alors $c\in]a,b[$ tel que :

$$|g(x)-g(a)|<\varepsilon\qquad\forall x\in[a,c[.$$

D'autre part, puisque g est intégrable sur $[c,b]$, il existe des fonctions en escalier $h_1,h_2:[c,b]\to\mathbb{R}$ telles que :

$$h_1(x)\leqslant g(x)\leqslant h_2(x)\quad\forall x\in[c,b]\qquad\text{et}\qquad\int_c^b(h_2(x)-h_1(x))dx<\varepsilon.$$

Soient alors $l_1,l_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ les fonctions en escalier telles que :

$$l_1(x):=\begin{cases}g(a)-\varepsilon & \forall x\in[a,c[\\ h_1(x) & \forall x\in]c,b]\end{cases}\qquad l_2(x):=\begin{cases}g(a)+\varepsilon & \forall x\in[a,c[\\ h_2(x) & \forall x\in[c,b].\end{cases}$$

Il vient :

$$l_1(x)\leqslant g(x)\leqslant l_2(x)\quad\forall x\in[a,b]\qquad\text{et}\qquad\int_a^b(l_2(x)-l_1(x))dx<\varepsilon+2\varepsilon(c-a).$$

Puisque ε est arbitraire, l'assertion s'ensuit. $\Diamond$

Par construction, $\Phi^+(x_0, t)$ est intégrable sur $]\varepsilon, T/2]$, pour tout $\varepsilon \in]0, T/2[$, car f est intégrable sur $[0, T]$. D'après l'observation 5.19, il ne reste alors qu'à montrer :

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi^+(x_0, t) = \Phi^+(x_0, 0).$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0^+} \Phi^+(x_0, t) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0^+))}{t} \cdot \frac{t}{\sin(\omega t/2)} \\ &= f'(x_0^+) \cdot \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\sin(\omega t/2)} \\ &= f'(x_0^+) \cdot \frac{2}{\omega}\end{aligned}$$

comme souhaité. □

On peut en outre déduire la convergence normale de la série de Fourier, sous les hypothèses de la définition suivante :

Définition 5.20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux* sur $\mathbb{R}$, s'il on a :

(a) f satisfait les conditions ponctuelles de Dirichlet en tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ il existe une suite finie :

$$c_0 := a < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k := b$$

telle que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c_i, c_{i+1}[$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$.

Remarque 5.21. (i) Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \Sigma$ pour une certaine partie *discrète* $\Sigma \subset \mathbb{R}$, *i.e.* une partie Σ qui rencontre tout intervalle $[a, b]$ de longueur finie en un nombre fini de points. On a deux prolongement naturels $g^+, g^- : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de f, car on peut poser :

$$g^+(x) := f'(x^+) \qquad \text{et} \qquad g^-(x) := f'(x^-) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On appelle g^+ et g^- les *dérivées à droite et à gauche de* f, respectivement.

(ii) Il est tentant de penser que g^+ et g^- soient continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais cela est *faux* en général : par exemple, soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie aisément que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; en effet :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Donc, f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et $g^+ = g^- = f'$; toutefois, f' n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car les limites de $f'(x)$ pour $x \to 0^+$ et pour $x \to 0^-$ n'existent pas.

(iii) De plus, g^+ et g^- *ne sont même pas forcément intégrables sur* $[a, b]$. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \frac{2}{x}\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et cette fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Toutefois, on a :

Lemme 5.22. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Supposons en outre que les dérivées g^+ à droite et g^- à gauche de f soient intégrables sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ de longueur finie. Alors on a :*

$$(*) \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b g^+(t)dt = \int_a^b g^-(t)dt \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On peut supposer que $a < b$, et par hypothèse il existe

$$c_0 := a < c_1 < \cdots < c_n := b$$

telle que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c_i, c_{i+1}[$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Puisque g^+ et g^- coïncident sur $[a,b] \setminus \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$, il est clair qu'elles ont les mêmes intégrales sur $[a,b]$. Il suffit donc de vérifier la première identité de $(*)$.

Supposons d'abord que $x, y \in]c_i, c_{i+1}[$ pour quelque $i \in \{0, \dots, n-1\}$; pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et pour toute suite finie $\xi_\bullet := (\xi_0 < \cdots < \xi_{N-1})$ avec :

$$d_j := c_i + j\frac{c_{i+1} - c_i}{N} < \xi_j < d_{j+1} := c_i + (j+1)\frac{c_{i+1} - c_i}{N} \qquad \forall j = 0, \dots, N-1$$

posons :

$$R(f', \xi_\bullet) := \sum_{j=0}^{k-1} f'(\xi_j)\frac{c_{i+1} - c_i}{N}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus 0$ il existe une suite $\xi_\bullet$ de longueur N comme ci-dessus, telle que :

$$f(y) - f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(f(d_{j+1}) - f(d_j)) = R(f', \xi_\bullet).$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour toute suite $\xi_\bullet$ comme ci-dessus de longueur N on a :

$$\left\| R(f', \xi_\bullet) - \int_x^y g^+(t)dt \right\| = \left\| R(f', \xi_\bullet) - \int_x^y f'(t)dt \right\| < \varepsilon$$

d'où $(*)$, dans ce cas. Puisque l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable est une fonction continue, et puisque f est continue sur $[a,b]$, on déduit aussitôt que les identités de $(*)$ sont vérifiées aussi si $x = c_i$ ou si $y = c_{i+1}$.

En dernier lieu, soient $x, y \in [a,b]$ et disons que :

$$c_{p-1} \leqslant x \leqslant c_p < \cdots < c_q \leqslant y \leqslant c_{q+1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_x^y g^+(t)dt &= \int_x^{c_p} g^+(t)dt + \int_{c_p}^{c_{p+1}} g^+(t)dt + \cdots + \int_{c_q}^y g^+(t)dt \\ &= (f(c_p) - f(x)) + (f(c_{p+1}) - f(c_p)) + \cdots + (f(y) - f(c_q)) \\ &= f(y) - f(x) \end{aligned}$$

comme souhaité. □

Corollaire 5.23. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier $S(f,x)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $g^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la dérivée à droite de f (voir la remarque 5.21(i)). D'après le lemme 5.22, f est alors une primitive de g^+, et on peut calculer les coefficients exponentiels de la série de Fourier g^+ avec une intégration par parties :

$$d_k = \frac{1}{T}\int_0^T g^+(t)e^{-i\omega kt}dt = \frac{1}{T}(F(T){-}F(0)){+}\frac{i\omega k}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega kt}dt \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

où :

$$F(x) := f(x)e^{-i\omega kx} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mais on a $F(T) = F(0)$, car f est T-périodique, donc finalement :

$$d_k = i\omega k c_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

où $(c_k \mid k \in \mathbb{Z})$ désigne les coefficients exponentiels de la série de Fourier de f.

Par l'inégalité de Bessel (proposition 5.15), on a alors :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|d_k\|^2 = \omega^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|kc_k\|^2 < +\infty.$$

Appliquons l'exercice 2.30 avec :

$$a_n := \|nc_n\| \qquad \text{et} \qquad b_n := 1/n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Puisque les séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergent, on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \|c_n\| < +\infty$$

et de même on vérifie que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|c_{-n}\| < +\infty.$$

D'après la proposition 5.3, ces deux conditions entraînent la convergence normale de $S(f,x)$. □

5.4. **L'identité de Parseval.** Dans cette section on souhaite montrer que l'inégalité de Bessel (proposition 5.15) est en fait une *égalité* pour toute fonction T-périodique et intégrable sur $[0,T]$.

Pour cela, il sera utile d'introduire un *produit scalaire hermitien* sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{L}(I,\mathbb{C})$ des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ intégrables sur un intervalle $I := [a,b]$ de longueur finie, analogue au produit hermitien sur $\mathbb{C}^n$ (voir le §1.4.1) : à savoir, pour tout couple $f, g : I \to \mathbb{C}$ de fonctions intégrables sur I on pose :

$$\boxed{\langle f, g\rangle_{I,2} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.}$$

Il est évident qu'il s'agit d'une application $\mathbb{R}$-bilinéaire sur l'espace $\mathscr{L}(I,\mathbb{C})$, et elle est en outre *sequilinéaire*, car on a :

$$\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle} \qquad \forall f, g \in \mathscr{L}(I,\mathbb{C}).$$

Comme déjà dans la discussion du produit hermitien de $\mathbb{C}^n$, on pose ensuite :

$$\boxed{\|f\|_{I,2} := \sqrt{\langle f, f\rangle_{I,2}} = \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 dx}.}$$

Proposition 5.24. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *On a :*

$$\boxed{\|\langle f, g\rangle_{I,2}\| \leqslant \|f\|_{I,2} \cdot \|g\|_{I,2} \qquad \forall f, g \in \mathscr{L}(I, \mathbb{C}).}$$

Démonstration. Puisque f et g sont intégrables sur $I = [a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $i = 0, \ldots, N-1$ des réels :

$$t_i, u_i \in [a + i\delta, a + (i+1)\delta] \qquad \text{avec } \delta := \frac{b-a}{N}$$

tels que :

$$\int_a^b \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| dx < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \|g(x) - g_\varepsilon(x)\| dx \leqslant \varepsilon$$

où l'on désigne par f_ε et g_ε les fonctions en escalier $I \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\left.\begin{array}{l} f_\varepsilon(x) = f(t_i) \\ g_\varepsilon(x) = g(u_i) \end{array}\right\} \qquad \forall x \in [a + i\delta, a + (i+1)\delta[, \forall i = 0, \ldots, N-1$$

et avec $f_\varepsilon(b) := t_{N-1}$, $g_\varepsilon(b) := u_{N-1}$. Noter que :

$$\int_a^b \|f_\varepsilon(x)\|^2 dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|f(t_i)\|^2.$$

L'inégalité triangulaire pour les nombres complexes donne :

$$\|\langle f, g\rangle_{I,2}\| \leqslant \|\langle f - f_\varepsilon, g\rangle_{I,2}\| + \|\langle f_\varepsilon, g - g_\varepsilon\rangle_{I,2}\| + \|\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon\rangle_{I,2}\|.$$

Mais noter que f et g sont *bornées* sur I, car elles sont intégrables sur I ; soit alors $M > 0$ tel que :

$$\|f\|_{I,\infty}, \|g\|_{I,\infty} \leqslant M \qquad \text{d'où aussi :} \qquad \|f_\varepsilon\|_{I,\infty}, \|g_\varepsilon\|_{I,\infty} \leqslant M.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \|\langle f - f_\varepsilon, g\rangle_{I,2}\| &= \left\| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \cdot \overline{g(x)} dx \right\| \\ &\leqslant \int_a^b \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \cdot \|g(x)\| dx \\ &\leqslant M \cdot \int_a^b \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| dx \leqslant M\varepsilon \end{aligned}$$

et de même :

$$\|\langle f_\varepsilon, g - g_\varepsilon\rangle_{I,2}\| \leqslant M\varepsilon$$

de sorte que :

$$(*) \qquad \|\langle f, g\rangle_{I,2}\| \leqslant 2M\varepsilon + \|\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon\rangle_{I,2}\|$$

et noter que :

$$\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon\rangle_{I,2} = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\overline{g(u_i)}.$$

Soient alors les vecteurs de $\mathbb{C}^N$:

$$\overrightarrow{v} := \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{w} := \begin{pmatrix} g(u_0) \\ \vdots \\ g(u_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Avec le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^N$ du §1.4.1, il vient :

$$\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon \rangle_{I,2} = \frac{b-a}{N} \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle_{\mathbb{C}^N}$$

et compte tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (lemme 1.17(i)), on déduit :

$$\|\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon \rangle_{I,2}\| \leqslant \frac{b-a}{N} \|\overrightarrow{v}\|_{\mathbb{C}^N} \cdot \|\overrightarrow{w}\|_{\mathbb{C}^N}.$$

Mais d'autre part, une simple inspection des définitions donne :

$$\frac{b-a}{N} \|\overrightarrow{v}\|^2_{\mathbb{C}^N} = \|f_\varepsilon\|^2_{I,2} \qquad \text{et} \qquad \frac{b-a}{N} \|\overrightarrow{w}\|^2_{\mathbb{C}^N} = \|g_\varepsilon\|^2_{I,2}$$

donc :

$$\|\langle f_\varepsilon, g_\varepsilon \rangle_{I,2}\| \leqslant \|f_\varepsilon\|_{I,2} \cdot \|g_\varepsilon\|_{I,2}$$

et au vu de $(*)$, il vient alors :

$$\|\langle f, g \rangle_{I,2}\| \leqslant 2M\varepsilon + \|f_\varepsilon\|_{I,2} \cdot \|g_\varepsilon\|_{I,2}.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \Big\| \int_a^b \big(\|f(x)\|^2 - \|f_\varepsilon(x)\|^2\big) dx \Big\| &= \Big\| \int_a^b \big(\|f(x)\| - \|f_\varepsilon(x)\|\big)\big(\|f(x)\| + \|f_\varepsilon(x)\|\big) dx \Big\| \\ &\leqslant 2M \cdot \Big\| \int_a^b \big(\|f(x)\| - \|f_\varepsilon(x)\|\big) dx \Big\| \\ &\leqslant 2M \cdot \int_a^b \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| dx \leqslant 2M\varepsilon \end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\|\langle f, g \rangle_{I,2}\| \leqslant 2M\varepsilon + (\|f\|_{I,2} + 2M\varepsilon) \cdot (\|g\|_{I,2} + 2M\varepsilon)$$

et en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient l'inégalité souhaitée. □

Corollaire 5.25. *Pour tous $f, g \in \mathscr{L}(I, \mathbb{C})$ on a :*

(i) $\|f+g\|^2_{I,2} = \|f\|^2_{I,2} + \|g\|^2_{I,2} + 2\mathfrak{R}(\langle f, g \rangle)$.

(ii) $\|f+g\|_{I,2} \leqslant \|f\|_{I,2} + \|g\|_{I,2}$.

(iii) $\|f-g\|_{I,2} \geqslant |\|f\|_{I,2} - \|g\|_{I,2}|$.

Démonstration. Pour (i) on calcule :

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2_{I,2} &= \langle f+g, f+g \rangle_{I,2} = \langle f, f \rangle_{I,2} + \langle g, g \rangle_{I,2} + \langle f, g \rangle_{I,2} + \langle g, f \rangle_{I,2} \\ &= \|f\|^2_{I,2} + \|g\|^2_{I,2} + \langle f, g \rangle_{I,2} + \overline{\langle f, g \rangle_{I,2}} \\ &= \|f\|^2_{I,2} + \|g\|^2_{I,2} + 2\mathfrak{R}(\langle f, g \rangle_{I,2}) \end{aligned}$$

comme souhaité. Au vu de (i) et de la proposition 5.24, on déduit :

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2_{I,2} &\leqslant \|f\|^2_{I,2} + \|g\|^2_{I,2} + 2\|\langle f, g \rangle_{I,2}\| \\ &\leqslant \|f\|^2_{I,2} + \|g\|^2_{I,2} + 2\|f\|_{I,2}\|g\|_{I,2} \\ &\leqslant (\|f\|_{I,2} + \|g\|_{I,2})^2 \end{aligned}$$

d'où (ii). Ensuite, avec (ii) il vient :

$$\|f\|_{I,2} \leqslant \|f-g\|_{I,2} + \|g\|_{I,2} \qquad \text{et} \qquad \|g\|_{I,2} \leqslant \|f-g\|_{I,2} + \|f\|_{I,2}$$

d'où :

$$\|f\|_{I,2} - \|g\|_{I,2} \leqslant \|f-g\|_{I,2} \qquad \text{et} \qquad \|g\|_{I,2} - \|f\|_{I,2} \leqslant \|f-g\|_{I,2}$$

et cela équivaut à (iii). □

Corollaire 5.26. *Soit $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de longueur finie. Alors :*

$$\int_a^b \|f(x)\| dx \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_{I,2} \qquad \forall f \in \mathscr{L}(I,\mathbb{C}).$$

Démonstration. Soient $g,h : [a,b] \to \mathbb{C}$ tels que $g(x) := 1$ et $h(x) := \|f(x)\|$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors $g,h \in \mathscr{L}(I,\mathbb{C})$ et on a :

$$\|g\|_{I,2} = \sqrt{b-a} \qquad \|h\|_{I,2} = \|f\|_{I,2} \qquad \langle h,g\rangle_{I,2} = \int_a^b \|f(x)\|dx$$

donc il suffit d'invoquer la proposition 5.24 pour conclure. □

5.4.1. On fixe maintenant un réel $T > 0$, et on pose comme d'habitude $\omega := 2\pi/T$; soient en outre $I := [0,T]$, et :

$$e_k(x) := e^{i\omega kx} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I.$$

Noter que $e_k \cdot \overline{e_l} = e_{k-l}$ pour tout $k,l \in \mathbb{Z}$. On peut alors reformuler le lemme 5.7 par les identités :

$$\langle e_k, e_l\rangle_{I,2} = \begin{cases} T & \text{si } k=l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \Big\langle \frac{e_k}{\sqrt{T}}, \frac{e_l}{\sqrt{T}} \Big\rangle_{I,2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \forall k,l \in \mathbb{Z}$$

qui expriment *l'orthonormalité* de la famille $\big(\frac{e_k}{\sqrt{T}} \,|\, k \in \mathbb{Z}\big)$ par rapport au produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_{I,2}$. En outre, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique et intégrable sur I, noter que les coefficients exponentiels $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ de la série de Fourier de f sont donnés par :

$$c_k = \frac{1}{T}\langle f_{|I}, c_k\rangle_{I,2} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lemme 5.27. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur I. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_{-n}, a_{1-n}, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$; posons*

$$g(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k(x) \qquad \forall x \in I$$

et notons aussi par $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ le n-ième polynôme trigonométrique de f. Alors on a :

(i) $\|f - S_n(f)\|_{I,2} \leqslant \|f-g\|_{I,2}$.

(ii) $\|f\|^2_{I,2} = \|f - S_n(f)\|^2_{I,2} + \|S_n(f)\|^2_{I,2}$.

(iii) $\|S_n(f)\|^2_2 = T \cdot \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2$.

(L'inégalité de (i) revient à dire que $S_n(f)$ est la meilleure approximation possible de f, parmi les polynômes trigonométriques g de degré $\leqslant n$).

Démonstration. Montrons d'abord :

$$(*) \qquad \langle f - S_n(f), g\rangle_{I,2} = 0.$$

En vertu de la sesquilinéarité du produit hermitien on se ramène aisément au cas où $g = e_k$, pour quelque $k \in \{-n, 1-n, \dots, n-1, n\}$. Mais pour tout tel k on a :

$$\langle f - S_n(f), e_k\rangle_{I,2} = \langle f, e_k\rangle_{I,2} - \langle S_n(f), e_k\rangle_{I,2} = Tc_k - Tc_k = 0.$$

Puisque $(*)$ est vérifiée pour *toute* combinaison $\mathbb{C}$-linéaire g de $e_{-n}, \dots, e_n$, elle est vérifiée aussi avec g remplacé par $S_n(f) - g$, *i.e.* :

$$\langle f - S_n(f), S_n(f) - g\rangle_{I,2} = 0$$

d'où, compte tenu du corollaire 5.25(i) :

$$\|f - g\|^2_{I,2} = \|(f - S_n(f)) + (S_n(f) - g)\|^2_2 = \|f - S_n(f)\|^2_{I,2} + \|S_n - g\|^2_{I,2}$$

d'où (i), et si l'on fait $g = 0$, on obtient aussi (ii). L'assertion (iii) n'est rien d'autre que l'identité $(***)$ dans la preuve de la proposition 5.15. □

Avec ces préliminaires, on est prêt pour démontrer :

Théorème 5.28. (Identité de Parseval) Soient $T > 0$ un réel, $I := [0, T]$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur I ; notons par $(c_k \,|\, k \in \mathbb{Z})$ les coefficients de Fourier exponentiels de f. On a :

$$\boxed{\frac{1}{T}\|f\|^2_{I,2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|c_k\|^2.}$$

Démonstration. Supposons d'abord que la série de Fourier $S(f, x)$ de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n(f, x)$ le n-ième polynôme de Fourier de f. Alors la suite de fonction $(S_n(f, x) \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge normalement vers f, et $(\overline{S_n(f, x)} \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge normalement vers $\overline{f}$. En vertu de la proposition 3.13(iii), $(S_n(f, x) \cdot \overline{S_n(f, x)} \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge alors normalement vers $f \cdot \overline{f}$. D'après le théorème 3.17(ii), on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f, x)\|^2_{I,2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T \|S_n(f, x)\|^2 dx = \int_0^T \|f(x)\|^2 dx = \|f\|^2_{I,2}$$

et d'autre part, $\|S_n(f, x)\|^2_{I,2} = T \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (lemme 5.27(iii)), d'où l'identité souhaitée, dans ce cas.

• En particulier, en vertu du corollaire 5.23, le théorème est vrai pour toute fonction T-périodique continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Supposons ensuite qu'il existe une suite de fonctions $(f_k \,|\, k \in \mathbb{N})$ T-périodiques continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lim_{k\to+\infty} \|f - f_k\|_{I,2} = 0$$

et soit $S_n(f_k)$ le n-ième polynôme trigonométrique de f_k, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$. Fixons $\varepsilon > 0$, et soient $k_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\|f - f_k\|_{I,2} < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant k_0 \qquad \text{et} \qquad \|f_{k_0} - S_n(f_{k_0})\|_{I,2} < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0$$

(l'existence de n_0 découle de la convergence normale de $(S_n(f_{k_0}) \mid n \in \mathbb{N})$ vers f_{k_0} : corollaire 5.23). Il vient :

$$\begin{aligned}\big|\|S_n(f)\|_{I,2} - \|f\|_{I,2}\big| &\leqslant \|S_n(f) - f\|_{I,2} \\ &\leqslant \|S_n(f_{k_0}) - f\|_{I,2} \qquad \text{(par le lemme 5.27(i))} \\ &\leqslant \|S_n(f_{k_0}) - f_{k_0}\|_{I,2} + \|f_{k_0} - f\|_{I,2} \\ &\leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

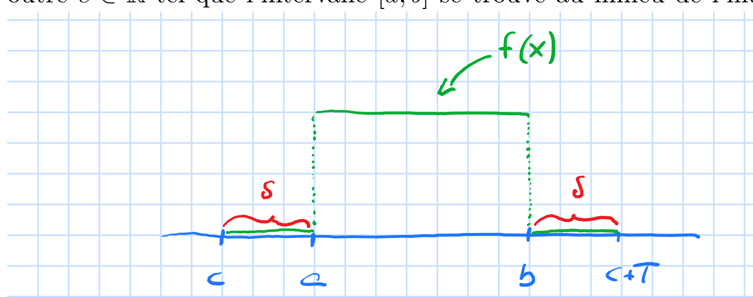
donc : $\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_{I,2} = \|f\|_{I,2}$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2_{I,2} = \|f\|^2_{I,2}$ et cela entraîne l'identité du théorème, encore par le lemme 5.27(iii).

• Ainsi, on est ramené à exhiber, pour toute fonction f comme dans le théorème, une suite de fonctions $(f_k \mid k \in \mathbb{N})$ vérifiant les conditions ci-dessus.

• Pour cela, supposons d'abord que f soit une fonction en escalier d'un type très simple : pour $0 \leqslant a < b \leqslant T$, soit :

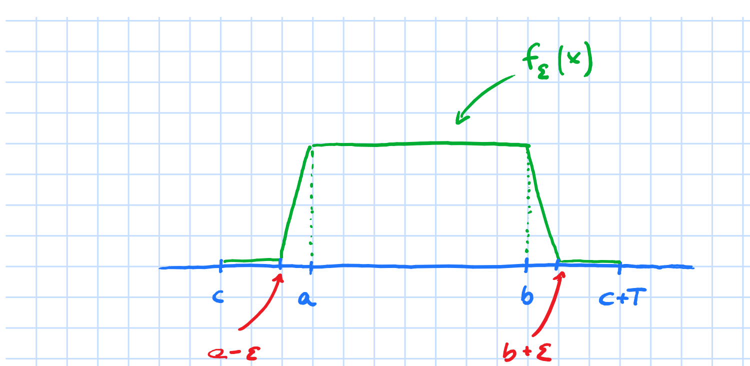
$$(*) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus [a,b]. \end{cases}$$

(Puisque f est T-périodique, évidemment $(*)$ détermine complètement f). Soit en outre $c \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[a,b]$ se trouve au milieu de l'intervalle $[c, c+T]$:



de sorte que $\delta := a - c = c + T - b$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \delta[$, posons :

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 + (x-a)/\varepsilon & \text{si } x \in [a-\varepsilon, a] \\ 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 - (x-b)/\varepsilon & \text{si } x \in [b, b+\varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \in [c, c+T] \setminus [a-\varepsilon, b+\varepsilon]. \end{cases}$$



Un simple calcul montre que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f - f_\varepsilon\|^2_{I,2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_c^{c+T} \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|^2 dx = 0$$

et évidemment f_ε est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon \in]0, \delta[$. Donc, le théorème est maintenant connu pour la fonction f.

• Ensuite, soit f une fonction en escalier quelconque ; alors f est une combinaison linéaire de fonctions $f_1, \dots, f_n$ du type précédent :

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \qquad \text{avec} \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Si on approxime chaque f_i par une suite de fonctions $(f_{i,\varepsilon} \,|\, \delta_i > \varepsilon > 0)$ comme ci-dessus, on obtient une suite d'approximations pour f :

$$f_\varepsilon = a_1 f_{1,\varepsilon} + \cdots + a_n f_{n,\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon < \delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$$

et évidemment f_ε est encore continue, T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, pour tout $\varepsilon \in]0, \delta[$. En outre :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f - f_\varepsilon\|_{I,2} \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{i=1}^n \|a_i\| \cdot \|f_i - f_{i,\varepsilon}\| = 0.$$

• En dernier lieu, soit f une fonction T-périodique intégrable sur I arbitraire ; pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve une fonction en escalier

$$g : I \to \mathbb{C} \qquad \text{avec} \qquad \|f - g\|_{I,2} < \varepsilon.$$

Puis, en raisonnant comme ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve une fonction T-périodique continue $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $\|g - g_\varepsilon\|_{I,2} < \varepsilon$, d'où :

$$\|f - g_\varepsilon\|_{I,2} \leqslant \|f - g\|_{I,2} + \|g - g_\varepsilon\|_{I,2} < 2\varepsilon.$$

La suite $(g_\varepsilon \,|\, \varepsilon > 0)$ nous permet de conclure que le théorème est vrai pour f. □

Exercice 5.29. Soient $T > 0$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions T-périodiques continues ayant les mêmes coefficients exponentiels de Fourier. Comme application de l'identité de Parseval on peut montrer que $f = g$. Pour cela, posons $h := f - g$; d'après la remarque 5.12(i), les coefficients exponentiels de Fourier de h sont tous nuls, et l'identité de Parseval entraîne alors que :

$$(*) \qquad \int_0^T k(x)dx = 0 \qquad \text{avec} \qquad k(x) := \|h(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ est encore continue et 2π-périodique. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in [0, T]$ tel que $M := k(x_0) > 0$; alors il existe $\delta \in]0, T/2[$ tel que $k(x) \geqslant M/2$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Par suite :

$$\int_0^T k(x)dx = \int_{x_0 - T/2}^{x_0 + T/2} k(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} k(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{M}{2}dx = M\delta > 0$$

et cela contredit $(*)$.

Exercice 5.30. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique impaire telle que :

$$f(x) = x(\pi - x) \qquad \forall x \in [0, \pi].$$

(a) Déterminer la série de Fourier $S(f, x)$ de f.

(b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $S(f, x) = f(x)$?

(c) En déduire la somme de la série :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

(d) Utiliser l'identité de Parseval, pour calculer :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}.$$

Solution. (a) : Puisque f est impaire et 2π-périodique, sa pulsation est $\omega = 1$, et sa série de Fourier est (voir la remarque 5.10(ii)) :

$$S(f,x) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(nx) \qquad \text{avec} \qquad b_n := \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

On calcule les coefficients b_n avec deux intégrations par parties :

$$b_n = \frac{2}{\pi}[g(\pi) - g(0)] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}dx$$

avec $g(x) := -x(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais $g(0) = g(\pi) = 0$, donc :

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n}[h(\pi) - h(0)] + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} 2\frac{\sin(nx)}{n}dx$$

avec $h(x) := (\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais $h(0) = h(\pi) = 0$, donc :

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{4}{\pi n^2}\cdot\frac{1}{n}(\cos(0) - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

D'où, finalement :

$$\boxed{S(f,x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2p+1)^3}\sin((2p+1)x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

(b) : Puisque f est une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série $S(f,x)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ (corollaire 5.23).

(c) : On fait $x = \pi/2$, et on remarque que $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; d'après (b), on déduit :

$$f(\pi/2) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2p+1)^3}(-1)^p \qquad \text{d'où :} \qquad \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.}$$

(d) : D'un côté, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx &= 2\int_0^{\pi} (\pi^2 x^2 + x^4 - 2\pi x^3)dx \\ &= 2\Big(\frac{\pi^2\pi^3}{3} + \frac{\pi^5}{5} - \frac{2\pi\pi^4}{4}\Big) = \frac{\pi^5}{15}\end{aligned}$$

et de l'autre côté :

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^2(2p+1)^6}.$$

Par l'identité de Parseval, on déduit alors :

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^5}{15}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{64}{\pi^2(2p+1)^6}\qquad \text{d'où :}\qquad \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.}$$

5.5. **Une application physique : la temperature d'une barre homogène.** On termine ce chapitre avec une application remontant à Joseph Fourier (1822) et qui a motivé l'introduction des séries qui, depuis, portent son nom.

- Considérons une barre d'une matière homogène, de longueur L finie. On suppose que la temperature soit mantenue constante aux extremités A et B de la barre : soient alors T_A et T_B les temperatures aux points A et B respectivement.
- On choisit une coordonnée x, de sorte que A soit l'origine, *i.e.* $x(A)=0$, et B soit le point avec $x(B)=L$.
- On suppose en outre de connaître la *distribution initiale de la temperature* dans la barre, *i.e.* la distribution au temps $t=0$. Cette distribution sera alors une fonction :

$$u_0(x):[0,L]\to\mathbb{R}\qquad\text{avec}\qquad u_0(0)=T_A\quad\text{et}\quad u_0(L)=T_B.$$

Il est naturel de supposer que u_0 soit au moins continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,L]$.

- Le problème (considéré par Fourier dans son célèbre mémoire du 1822) est de déterminer la distribution de la temperature de la barre en tout temps futur $t>0$. Cette distribution sera alors donnée par une fonction de deux variables :

$$u(x,t):[0,L]\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}$$

telle que $u(x,t)$ représente la temperature au temps t et à la position x, pour tout $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Avec cette notation, on a la *condition initiale* :

$$\text{(CI)}\qquad u(x,0)=u_0(x)\qquad\forall x\in[0,L]$$

et les *conditions aux bords* :

$$\text{(CB)}\qquad u(0,t)=T_A\qquad u(L,t)=T_B\qquad\forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

- La physique nous dit que $u(x,t)$ doit être solution de *l'équation de la chaleur* :

$$(*)\qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

où $\alpha>0$ désigne le *coefficient de diffusion thermique*. Ce coefficient est une constante réelle, car par hypothèse la barre est homogène.

- Donc, notre problème revient à resoudre l'équation $(*)$, soumise à la condition initiale (CI) et aux conditions aux bords (CB).

1$^{\text{ère}}$*étape : on se ramène au cas où* $T_A=T_B=0$.
En effet, écrivons :

$$u_0(x)=v_0(x)+w_0(x)\qquad\text{avec } v_0(x):=T_A+\frac{T_B-T_A}{L}x\quad\forall x\in[0,L]$$

(évidemment, $w_0(x)=u_0(x)-v_0(x)$ pour tout $x\in[0,L]$). Noter que la fonction

$$v(x,t):=v_0(x)\qquad\forall(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

est une solution de l'équation de la chaleur, car :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v_0'' = 0.$$

(Il s'agit d'une *solution stationnaire*, qui représente un *état d'équilibre thermique* de la barre.) La solution $v(x,t)$ remplit les conditions (CB), et remplit la condition initiale suivante :

$$(\mathrm{CI}') \qquad v(x,0) = v_0(x) \qquad \forall x \in [0,L].$$

D'autre part, noter que $v_0(0) = T_A$ et $v_0(L) = T_B$, de sorte que :

$$w_0(0) = w_0(L) = 0.$$

Soit alors $w(x,t)$ une solution de l'équation de la chaleur, avec la condition initiale et les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{CI}'') & w(x,0) = w_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ (\mathrm{CB}'') & w(0,t) = w(L,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}. \end{array}$$

Puisque l'équation de la chaleur est une équation *linéaire* aux dérivées partielles, il s'ensuit que la somme des solutions

$$u(x,t) := v(x,t) + w(x,t)$$

sera encore une solution de $(*)$. Aux bords, on trouve :

$$\left.\begin{array}{r} u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = T_A \\ u(L,T) = v(L,t) + w(L,t) = T_B \end{array}\right. \qquad \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

et $u(x,t)$ remplit la condition initiale :

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = v_0(x) + w_0(x) = u_0(x) \qquad \forall x \in [0,L].$$

Donc, on est ramené à trouver une solution $w(x,t)$ vérifiant (CI'') et (CB'').

$2^{\text{ème}}$ *étape : on cherche une solution de* $(*)$ *à variables séparées* :

$$u(x,t) = f(x) \cdot g(t) \qquad \forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

vérifiant les conditions aux bords :

$$(\mathrm{CB}) \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

mais pour l'instant on n'impose pas la condition initiale (CI). Il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x) \cdot g'(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f''(x) \cdot g(t)$$

d'où :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{g'(t)}{g(t)}$$

pour tout $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ avec $u(x,t) \neq 0$. Cela revient à dire que $f''(x)/f(x)$ et $g'(t)/(\alpha g(t))$ *sont égaux à une même constante* $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tous tels (x,t).

On arrive donc aux équations :

$$(**) \qquad \begin{array}{r} f''(x) = \lambda f(x) \\ g'(t) = \lambda \alpha g(t) \end{array} \qquad \forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Noter que si $u_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0,L]$, la fonction u avec $u(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ est une solution de $(*)$ vérifiant (CI) et (CB). On peut donc supposer que u_0 ne soit pas identiquement nulle sur $[0, L]$, et cela revient à supposer que $g(0) \neq 0$, et que $f(x)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0, L]$.

$3^{\text{ème}}$ *étape : montrons que* :

$$\lambda < 0.$$

En effet, supposons d'abord par l'absurde que $\lambda > 0$. Alors les solutions de $(**)$ sont de la forme :

$$f(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \qquad g(t) = C_3 e^{\lambda \alpha t}$$

avec $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Puisque on suppose que $g(0) \neq 0$, on doit avoir $C_3 \neq 0$, et puisque $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, on doit avoir :

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_1 e^{\sqrt{\lambda} L} + C_2 e^{\sqrt{\lambda} L} = 0$$

d'où :

$$C_1 (e^{\sqrt{\lambda} L} - e^{-\sqrt{\lambda} L}) = 0.$$

Mais puisque la fonction e^x est strictement croissante, on a $e^{\sqrt{\lambda} L} - e^{-\sqrt{\lambda} L} > 0$, d'où $C_1 = 0$ et par suite $C_2 = 0$, *i.e.* $f(x)$ est identiquement nulle sur $[0, L]$, contradiction. De même, si $\lambda = 0$, les solutions de $(**)$ sont de la forme :

$$f(x) = C_1 + C_2 x \qquad \text{et} \qquad g(t) = C_3$$

avec $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. On a encore $C_3 \neq 0$, et en outre :

$$C_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_1 + C_2 L = 0$$

d'où $C_1 = C_2 = 0$, et cela conduit à nouveau à une contradiction.

$4^{\text{ème}}$ *étape* : puisque $\lambda < 0$, les solutions de $(**)$ s'écrivent sous la forme :

$$f(x) = C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x) \qquad \text{et} \qquad g(t) = C_3 e^{\lambda \alpha t}$$

avec $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ et on sait déjà que $C_3 \neq 0$. En outre, comme $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, il vient

$$C_2 = f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(\sqrt{-\lambda} L) = 0$$

i.e. $\sqrt{-\lambda} L \in \pi \mathbb{Z}$, et cela revient à dire que :

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

Donc, finalement :

$$u(x,t) = C e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big) \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

$5^{\text{ème}}$ *étape : il est temps maintenant de réintroduire la condition initiale* :

$$\text{(CI)} \qquad u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in [0, L].$$

Les solutions obtenues à l'étape précédente ne vérifient pas cette condition, mais l'idée de Fourier est qu'une superposition de ces solutions devrait fournir une solution remplissant (CI). Cette superposition n'est rien d'autre que la somme d'une série :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big)}$$

et il faudrait donc choisir la suite des coefficients réels $(C_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ de sorte que $u(x,t)$ soit convergente, et que sa somme vérifie (CI). Puisque chaque terme de la série est une solution de l'équation $(*)$ de la chaleur, d'après le corollaire 5.4, la somme $u(x,t)$ sera encore une solution de $(*)$, *pourvu que la convergence de la série soit normale, et assez rapide*, de sorte que la somme soit au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,L]\times]0,+\infty[$.

Or, noter que :

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) \qquad \forall x \in [0,L].$$

Donc, les coefficients $(C_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ sont précisément les coefficients trigonométriques de la série de Fourier de la fonction $2L$-périodique impaire qui coïncide avec $u_0(x)$ sur $[0,L]$. D'après notre cours, on sait alors qu'il faut prendre :

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.}$$

Noter que :

$$\|C_n\| \leqslant \frac{2}{L}\int_0^L \|u_0(x)\|dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

(et en fait, $C_n \to 0$ pour $n \to +\infty$, par le lemme de Riemann-Lebesgue). Posons

$$u_n(x,t) := C_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Noter aussi que :

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k} = \Big(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}\Big)^k u_n(x,t) \qquad \forall k,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

et on voit aisément que :

$$(***) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^p\Big(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}\Big)^k C_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2} < +\infty \qquad \forall p,k \in \mathbb{N}, \forall t > 0.$$

Avec le corollaire 3.18, on déduit que les dérivées partielles d'ordre k de $u(x,t)$ par rapport à la variable t existent pour tout $k > 0$ sur $]0,+\infty[$, et en outre :

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}\Big)^k C_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) \qquad \forall (x,t) \in [0,L]\times\mathbb{R}_{>0}.$$

En dernier lieu, toujours avec $(***)$, et avec le corollaire 5.4, on déduit que $\partial^k u/\partial t^k(x,t)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[0,L]$, pour tout $t > 0$ et tout $p,k \in \mathbb{N}$, *i.e.* $u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,L]\times\mathbb{R}_{>0}$.

5.6. **Appendice : l'intégrale de Dirichlet.** Cette appendice montre comment appliquer le noyau de Dirichlet afin de calculer une célèbre intégrale, qui sera utilisée lors de la preuve du théorème 6.13 au chapitre suivant.

La fonction :

$$\mathrm{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{telle que} \qquad \mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a des nombreuses applications dans l'analyse mathématique, la physique, et l'analyse des signaux. Elle est continue et paire sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (cela revient à dire que $\int_0^{+\infty}|\mathrm{sinc}(x)|dx = +\infty$). Toutefois, on a l'importante identité suivante :

Proposition 5.31. (Intégrale de Dirichlet) *Avec la notation ci-dessus :*

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \mathrm{sinc}(x)dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Démonstration. Pour tous réels $T, a > 0$, noter que :

$$\Big|\int_T^{T+a} \frac{\sin(x)}{x}dx\Big| \leqslant \int_T^{T+a} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{a}{T}.$$

Donc il suffira de vérifier la convergence vers $\pi/2$ de la suite numérique :

$$(a_n \,|\, n\in\mathbb{N}) \qquad \text{telle que} \qquad a_n := \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Noter en outre que, par le changement de variable $u := x/(2n+1)$, on a :

$$(*) \qquad a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{u}du \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Or, considérons la fonction

$$f : [0,\pi/2] \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons d'abord que f est continue sur $[0,\pi/2]$. La continuité sur $]0,\pi/2]$ est immédiate ; pour vérifier la continuité de f en 0, rappelons le développement limité du sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Par suite :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3/6+o(x^3)}{x^2-x^4/6+o(x^4)} = 0$$

d'où l'assertion. Avec le lemme 5.13 de Riemann-Lebesgue on déduit :

$$(**) \qquad 0 = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(\lambda x)dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{\sin(\lambda x)}{x} - \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)}\Big)dx.$$

Rappelons d'autre part que pour tout $p\in\mathbb{N}$, le p-ème noyau de Dirichlet 2π-périodique (*i.e.* avec pulsation $\omega = 1$) est donné par

$$D_p(x) = \sum_{k=-p}^{p} e^{ikx} = \frac{\sin((2p+1)x/2)}{\sin(x/2)} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

(voir la section 5.3), et d'après le lemme 5.7 on a :

$$\int_0^{\pi/2} D_p(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} D_p(2x)dx = \frac{\pi}{2} \qquad \forall p\in\mathbb{N}$$

car D_p est une fonction paire. Avec $(**)$, il s'ensuit que :

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2p+1)x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

d'où l'identité souhaitée, compte tenu de $(*)$. □

6. La transformée de Fourier

La méthode des séries de Fourier nous permet d'effectuer *l'analyse harmonique* des fonctions T-périodiques, pour toute période $T > 0$: c'est à dire, elle exprime, sous certaines hypothèses assez générales, toute telle fonction f comme une *superposition* de termes de la forme $a_n \cos(2\pi nx/T)$ et $b_n \sin(2\pi nx/T)$ (avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$) qui s'interprètent comme les composantes harmoniques simples de f. Noter que *le spectre des composantes harmoniques de f a un caractère discret* : on ne trouve que des sinus et cosinus dont les fréquences sont des multiples *entiers* de $1/T$.

La transformée de Fourier tente, par contre, de fournir l'analyse harmonique des fonctions de la variable réelle *qui ne sont pas nécessairement périodiques.* L'idée est simplement de faire tendre la période T vers l'infini dans les formules qui expriment les coefficients de Fourier des fonctions T-périodiques ; mais alors que le spectre d'une fonction périodique est discret, pour une fonction non-périodique on doit s'attendre à trouver des composantes harmoniques de fréquence arbitraire. Donc, plutôt que par des suites dénombrables $(a_n, b_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ de coefficients, les composantes harmoniques d'une fonction non-périodique seront codifiées par des fonctions d'une variable réelle ω ; on arrive ainsi à l'expression :

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}.}$$

On appelle la fonction $\widehat{f}$ ainsi définie *la transformée de Fourier de f* ; pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur $\widehat{f}(\omega)$ nous signale la présence (ou absence) d'une composante de pulsation ω dans le spectre harmonique de f, et la norme du nombre complexe $\widehat{f}(\omega)$ devrait nous permettre d'évaluer la taille relative de cette composante.

Noter que l'expression ci-dessus est bien définie dès que f est *intégrable sur* $\mathbb{R}$, car la fonction $e^{-i\omega x}$ de la variable x est bornée sur $\mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, et donc le produit $f(x)e^{-i\omega x}$ est encore intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout tel ω.

Evidemment, on voudrait aussi un homologue du théorème de Dirichlet, permettent de récuperer la fonction f à partir de sa transformée $\widehat{f}$. Un tel résultat *d'inversion de Fourier* est effectivement disponible, sous certaines conditions ; puisque le spectre de f n'est plus donné par une suite de coefficients, mais plutôt par une fonction de la variable réelle ω, la série de Fourier – qui fournit cette inversion pour les fonctions périodiques – devra être remplacée par une intégrale.

6.1. **Premières propriétés.** On utilisera souvent la notation alternative :

$$\mathscr{F}(f)$$

pour désigner la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. En outre pour toute telle f posons :

$$\boxed{\|f\|_{1,\mathbb{R}} := \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|dx.}$$

Noter que, puisque f est intégrable, sa transformée $\widehat{f}$ est *bornée* : en effet, puisque $\|f(x)e^{-i\omega x}\| = \|f(x)\|$ pour tout $x, \omega \in \mathbb{R}$, on a (notation de la remarque 3.5(i)) :

$$\boxed{\|\widehat{f}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \|f\|_{1,\mathbb{R}}.}$$

Exemple 6.1. Soient $a > 0$ un réel, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction telle que :

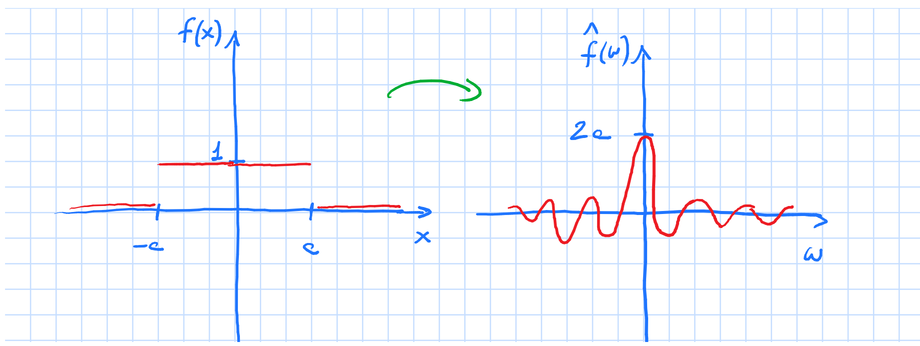
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f : pour $\omega \neq 0$ on a :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}dx = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) = \frac{2\sin(\omega a)}{\omega}$$

et pour $\omega = 0$ on a :

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2a.$$



Noter que :

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} = 2a$$

donc $\widehat{f}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 6.2. (i) On voit aussi aussitôt de la définition, que la transformée de Fourier est un opérateur *linéaire* : pour tout couple de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathscr{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{F}(f) + \mu \mathscr{F}(g) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

(ii) En outre, noter que :

$$\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}e^{i\omega x}dx \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(où $\overline{f(x)}$ désigne le conjugué complexe de $f(x)$), donc :

$$\overline{\mathscr{F}(f)}(\omega) = \mathscr{F}(\overline{f})(-\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Voici une autre propriété très utile :

Proposition 6.3. (Translation et dilatation) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ posons :*

$$f_a(x) := f(x + a) \qquad g_\lambda(x) := f(\lambda x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors f_a et g_λ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{f_a}(\omega) &= e^{i\omega a}\widehat{f}(\omega) \\ \widehat{g_\lambda}(\omega) &= \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\omega/\lambda) \end{aligned} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

On dit que f_a *est la* translation *de* f *de vecteur* a*, et* g_λ *est la* dilatation *de* f *de rapport* λ*.*

Démonstration. L'intégrabilité de f_a et g_λ est évidente. Pour calculer $\widehat{f_a}$ on intègre par le changement de variable : $u := x + a$; il vient :

$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega(u-a)}du \\ &= e^{i\omega a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}dx = e^{i\omega a}\widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Esuite, si $\lambda > 0$, on calcule $\widehat{g_\lambda}$ par le changement de variable : $u := \lambda x$; il vient :

$$\widehat{g_\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u/\lambda}\frac{1}{\lambda}du = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\omega/\lambda).$$

Si $\lambda < 0$, on pose $u := -\lambda x$, et le même calcul montre que dans ce cas on a $\widehat{g_\lambda}(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\omega/\lambda)$, comme souhaité. □

Théorème 6.4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$*. Alors* $\widehat{f}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*, et on a :*

$$(*) \qquad \lim_{\omega\to\pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Démonstration. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe une suite $(f_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{1,\mathbb{R}} = 0$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_{\infty,\mathbb{R}} = 0.$$

Cela revient à dire que la suite de fonctions $(\widehat{f_n} \,|\, n \in \mathbb{N})$ converge uniformement sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$. Donc, si chaque $\widehat{f_n}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il en sera de même pour $\widehat{f}$ (théorème 3.16(i)). D'autre part, toute fonction en escalier est une combinaison linéaire finie de fonctions $g_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec $a \leqslant b$, telles que :

$$g_{ab}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par la linéarité de la transformée de Fourier (remarque 6.2(i)), on est ainsi à ramené à vérifier la continuité de g_{ab}, pour tout $a \leqslant b$. On voit aisément que $\widehat{g_{aa}}(\omega) = 0$ pour tout $a, \omega \in \mathbb{R}$, donc on peut supposer que $a < b$. Pour cela, quitte à remplacer g_{ab} par sa translation de vecteur $(a+b)/2$, on peut supposer, d'après la proposition 6.3, que $b = -a > 0$. Mais noter que $g_{a,-a}$ est la fonction de l'exemple 6.1, et la continuité de $\widehat{g_{-a,a}}$ a déjà été remarquée.

Ensuite, pour tout $T > 0$, écrivons :

$$f(x) = g_T(x) + h_T(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $g_T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dénote la fonction telle que :

$$g_T(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leqslant T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(et évidemment $h_T(x) := f(x) - g_T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit $\varepsilon > 0$; puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe $T > 0$ tel que $\|h_T\|_{1,\mathbb{R}} < \varepsilon$. Par suite :

$$\|\widehat{f} - \widehat{g_T}\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|\widehat{h_T}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \|h_T\|_{1,\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

Mais noter que :

$$\widehat{g_T}(\omega) = \int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

D'après le lemme 5.13 de Riemann-Lebesgue, il existe alors $R \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|\omega| \geqslant R \quad \Rightarrow \quad \|\widehat{g_T}(\omega)\| < \varepsilon.$$

Il vient :

$$|\omega| \geqslant R \quad \Rightarrow \quad \|\widehat{f}(\omega)\| \leqslant \|\widehat{f}(\omega) - \widehat{g_T}(\omega)\| + \|\widehat{g_T}(\omega)\| < 2\varepsilon$$

d'où $(*)$. □

Proposition 6.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors on a :*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Noter d'abord :

Affirmation 6.6. Sous les hypothèses de la proposition, on a : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Preuve : On a :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme f' est intégrable, il s'ensuit que $M := \lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe, et $M \in \mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que $M \neq 0$; alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\|f(x)\| > \|M/2\|$ pour tout $x \geqslant a$, et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|dt \geqslant \int_a^{+\infty} \|M/2\|dt = +\infty$$

contredisant l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$. De même l'on vérifie que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. ◊

Avec l'observation 6.6, on peut alors calculer par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\omega)e^{-i\omega x}dx \\
&= \big(\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-i\omega x} - \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-i\omega x}\big) + i\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= i\omega\widehat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Corollaire 6.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et supposons que f et ses dérivées successives $f', \dots, f^{(k)}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors on a :*

$$(*) \qquad \boxed{\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

En particulier :

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \omega^k \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Démonstration. L'identité $(*)$ découle aussitôt de la proposition 6.5, par récurrence sur k. Pour la deuxième assertion, il suffit alors d'appliquer le théorème 6.4 à la fonction intégrable $f^{(k)}$, et ensuite d'utiliser $(*)$. □

La morale du corollaire est que plus la fonction f est régulière (c'est à dire, dérivable en haut degré, avec dérivées intégrables), plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini. Réciproquement, la proposition suivante montre que plus f décroît rapidement à l'infini, plus sa transformée de Fourier est régulière.

Proposition 6.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et supposons que la fonction*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \textit{telle que} \qquad g(x) := xf(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors on a :

$$\mathscr{F}(f)' = -i\mathscr{F}(g).$$

Démonstration. Fixons $\omega \in \mathbb{R}$; on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{f}(\omega+h) - \widehat{f}(\omega)}{h} &= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{e^{-i(\omega+h)x} - e^{-i\omega x}}{h} dx \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x} \cdot \frac{e^{-ihx} - 1}{-ixh} dx.
\end{aligned}$$

Mais noter que :

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{iy} - 1}{iy} = 1$$

car cette limite calcule la dérivée en $y = 0$ de la fonction e^{iy}. Donc la fonction :

$$\phi(h, x) := \begin{cases} \frac{e^{-ihx}-1}{-ihx} & \text{si } hx \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est *continue et bornée* sur $\mathbb{R}^2$. Posons alors :

$$M := \sup(\|\phi(h,x)\| \mid (h,x) \in \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \psi_h(x) := -ig(x)e^{-i\omega x}\phi(x,h) \quad \forall (h,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Il vient :

$$\|\psi_h\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant M\|g\|_{\infty,\mathbb{R}} \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

donc ψ_h est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, car par hypothèse g est intégrable sur $\mathbb{R}$. En outre :

$$\lim_{h\to 0} \psi_h = -ig(x)e^{-i\omega x}\phi(x,0) = -ig(x)e^{-i\omega x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_h(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -ig(x)e^{-i\omega x}dx = -i\widehat{g}(\omega)$$

comme souhaité. □

Corollaire 6.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction, et $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $x^k f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathscr{F}(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et on a :*

$$\boxed{\mathscr{F}(f)^{(n)} = (-i)^n \mathscr{F}(x^n f) \qquad \forall n = 0, \ldots, k.}$$

Démonstration. Ici $x^k f$ désigne la fonction telle que $x \mapsto x^k f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussi, $\mathscr{F}(f)^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de $\mathscr{F}(f)$ pour tout $n = 0, \ldots, k$, de sorte que $\mathscr{F}(f)^{(0)} = \mathscr{F}(f)$, $\mathscr{F}(f)^{(1)} = \mathscr{F}(f)'$, et ainsi de suite.

Or, noter que si $x^k f$ est intégrable, il en est de même pour $x^n f$, pour tout $n = 0, \ldots, k$. L'identité pour $\mathscr{F}(f)^{(n)}$ découle alors aussitôt de la proposition 6.8, par une simple récurrence sur n. Comme on sait en outre que $\mathscr{F}(x^k f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 6.4), on déduit aussi que $\mathscr{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. □

Exemple 6.10. (Fonction gaussienne) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction telle que :

$$f(x) := e^{-x^2/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evidemment f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre, puisque $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, on a :

$$0 < f(x) < \frac{1}{1 + x^2/2 + x^4/24} \qquad |f'(x)| < \frac{|x|}{1 + x^2/2 + x^4/24} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, f, xf et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. D'après les propositions 6.5 et 6.8, la transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\mathscr{F}(f)' = -i\mathscr{F}(xf) \qquad \mathscr{F}(-xf) = \mathscr{F}(f') = i\omega\mathscr{F}(f).$$

Autrement dit, f et $\mathscr{F}(f)$ sont solutions des équations différentielles :

$$f' + xf = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}(f)' + \omega\mathscr{F}(f) = 0.$$

Mais alors :

$$\widehat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

pour une constante $C \in \mathbb{C}$. On déterminera la constante C dans la section suivante.

6.2. **Formules de Poisson et de Plancherel, et inversion de Fourier.**

Théorème 6.11. (Formule sommatoire de Poisson) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que f, f' et f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que :*

$$(*) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} |x|^\alpha \cdot |f(x)| = 0.$$

Alors, pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbb{R}$ on a :

$$(**) \qquad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(b + an) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\Big(\frac{2\pi n}{a}\Big) e^{i2\pi nb/a}.}$$

Démonstration. Posons :

$$c := \frac{2\pi b}{a} \qquad \text{et} \qquad g(x) := f\Big(\frac{ax}{2\pi}\Big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après la proposition 6.3, l'identité $(*)$ équivaut à :

$$(***) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(c+2\pi n) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a}{2\pi} \widehat{g}(n) e^{inc} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(n) e^{inc}.$$

et la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ainsi définie vérifie encore les conditions du théorème.

Afin de montrer $(***)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ posons :

$$h_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x+2\pi n) \qquad h_2(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(n)e^{inx} \qquad k(x) := |x|^\alpha g(x).$$

Noter que $M := \|k\|_{\infty,\mathbb{R}} < +\infty$, en vertu de $(*)$; en outre, pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in [-2\pi N, 2\pi N]$ on a :

$$\begin{aligned}\Big\|h_1(x) - \sum_{n=-N}^{N} g(x+2\pi n)\Big\| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} (\|g(x+2\pi n)\| + \|g(x-2\pi n)\|) \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \Big(\frac{M}{|x+2\pi n|^\alpha} + \frac{M}{|x-2\pi n|^\alpha}\Big)\end{aligned}$$

et la série de fonctions

$$h_3(x) := \sum_{n=N+1}^{+\infty} \Big(\frac{M}{|x+2\pi n|^\alpha} + \frac{M}{|x-2\pi n|^\alpha}\Big)$$

converge normalement sur $[-2\pi N, 2\pi N]$, car $\alpha > 1$. Par suite, la série de fonctions $h_1(x)$ converge normalement sur $[-2\pi N, 2\pi N]$ pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; sa somme est alors une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 3.16(ii)), et par construction elle est en outre 2π-périodique. Ensuite, noter que

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^2 \cdot \widehat{g}(n) = 0$$

car g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec g, g' et g'' intégrables sur $\mathbb{R}$ (corollaire 6.7). Par suite, la somme de la série exponentielle $h_2(x)$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ (proposition 5.3). Pour conclure, il suffira donc de vérifier que $h_1 = h_2$, et puisque il s'agit de deux fonctions 2π-périodiques continues, l'exercice 5.29 nous ramène à montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de h_1 et h_2 coïncident.

Or, d'après la proposition 5.8, les coefficients de Fourier exponentiels de h_2 sont donnés par la suite $(\widehat{g}(n)/(2\pi) \,|\, n \in \mathbb{Z})$. Les coefficients $(c_j \,|\, k \in \mathbb{Z})$ de h_1 sont donnés par :

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x+2\pi n)e^{-ikx}dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Mais noter que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x+2\pi n)e^{-ikx}$ converge encore normalement sur $[0, 2\pi]$, donc d'après le théorème 3.17 on peut récrire :

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g(x+2\pi n)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g(x+2\pi n)e^{-ik(x+2\pi n)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} g(u)e^{-iku}du \quad (\text{par changement de variable } u := x+2\pi n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iku}du = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k)\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Exemple 6.12. On peut maintenant compléter l'exemple 6.10 : posons $f(x) := e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on voit aisément que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions du théorème 6.11, et on a vu que $\widehat{f}(\omega) = Cf(\omega)$ pour une constante $C \in \mathbb{C}$ à déterminer. Prenons alors $a := \sqrt{2\pi}$ et $b := 0$; il vient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{2\pi}n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Cf(\sqrt{2\pi}n)$$

d'où $C = \sqrt{2\pi}$. Puisque on a aussi $C = \widehat{f}(0)$, on obtient donc la formule suivante pour *l'intégrale gaussienne :*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.}$$

Théorème 6.13. (Inversion de Fourier) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f satisfait les conditions ponctuelles de Dirichlet en x_0 (voir la définition 5.17). Alors on a :*

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x_0} d\omega = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.}$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x_0} d\omega &= \int_{-T}^{T} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \Big) e^{i\omega x_0} d\omega \\ &= \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega(x_0 - x)} dx d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Big(\int_{-T}^{T} e^{i\omega(x_0-x)} d\omega \Big) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, un calcul comme dans l'exemple 6.1 montre que :

$$\phi_T(x) := \int_{-T}^{T} e^{i\omega(x_0-x)} d\omega = \begin{cases} \dfrac{2\sin(T(x_0-x))}{x_0 - x} & \text{si } x \neq x_0 \\ 2T & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc il vient :

$$\int_{-T}^{T} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x_0} d\omega = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi_T(x) dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\phi_T(x) dx$$

et on peut récrire :

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi_T(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x_0 - x} 2\sin(T(x_0 - x))dx + f(x_0^-) \int_{-\infty}^{x_0} \phi_T(x)dx.$$

Or, puisque f satisfait les conditions ponctuelles de Dirichlet en x_0, l'observation 5.19 entraîne aisément que la fonction

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad \psi(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0^-)}{x_0 - x} & \text{si } x < x_0 \\ -f'(x_0^-) & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

est intégrable sur $[a, x_0]$, pour tout $a < x_0$; comme, en outre, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit aussitôt que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Et en dernier lieu, puisque $2\sin(T(x_0 - x)) = -i(e^{iT(x_0-x)} - e^{-iT(x_0-x)})$, le théorème 6.4 entraîne que :

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) 2\sin(T(x_0 - x))dx = \lim_{T\to+\infty} -i(e^{iTx_0}\widehat{\psi}(T) - e^{-iTx_0}\widehat{\psi}(-T)) = 0.$$

De l'autre côté, par le changement de variable $u := T(x_0 - x)$, on calcule :

$$\int_{-\infty}^{x_0} \phi_T(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(u)}{u} du = \pi \qquad \forall T > 0$$

avec la proposition 5.31. Donc, finalement :

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi_T(x)dx = \lim_{T\to+\infty} f(x_0^-) \int_{-\infty}^{x_0} \phi_T(x)dx = \pi f(x_0^-).$$

Un calcul analogue donne de même :

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\phi_T(x)dx = \lim_{T\to+\infty} f(x_0^+) \int_{x_0}^{+\infty} \phi_T(x)dx = \pi f(x_0^+)$$

d'où l'identité souhaitée. □

Corollaire 6.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable et continue sur $\mathbb{R}$, et supposons que $\mathscr{F}(f)$ soit également intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f)(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Posons $g := \widehat{f}$; au vu du théorème 6.13, il suffit de remarquer que :

$$\widehat{g}(-x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega x_0} d\omega \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

car f est continue. □

Remarque 6.15. Les conditions du corollaire 6.14 sont notamment vérifiées, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec f, f' et f'' intégrables sur $\mathbb{R}$, car alors, en vertu du théorème 6.4 et du corollaire 6.7, on a une majoration :

$$\|\widehat{f}(\omega)\| \leqslant \frac{M}{\omega^2 + 1} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

pour quelque réel $M \geqslant 0$, de sorte que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le dernier résultat de cette section est l'homologue de l'identité de Parseval, reliant les normes $\| \cdot \|_{\mathbb{R},2}$ d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Pour la preuve, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 6.16. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors $f \cdot \widehat{g}$ et $\widehat{f} \cdot g$ sont également intégrables sur $\mathbb{R}$, et on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)g(x)dx.$$

Démonstration. Noter que la fonction

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad h(x,y) := f(x)g(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini, on peut alors échanger l'ordre d'intégration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dx\Big)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dy\Big)dx.$$

Mais on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dx\Big)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dy\Big)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx$$

d'où l'assertion. □

Théorème 6.17. *(i) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables, et supposons que l'une de f ou g vérifie les conditions du corollaire 6.14. Alors on a :*

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{R},2} = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{\mathbb{R},2}.$$

(ii) (Formule de Plancherel) *En particulier, si f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si $\widehat{f}$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :*

$$\|f\|_{\mathbb{R},2} = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_{\mathbb{R},2}.$$

Démonstration. Disons que g vérifie les conditions du corollaire 6.14 ; au vu de la remarque 6.2(ii), on a alors :

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}^2(g)(-x)} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}(g)})(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'où, d'après le lemme 6.16 :

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{R},2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}(g)})(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx$$

comme souhaité. □

6.3. **Transformée de Fourier des fonctions paires et impaires.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et posons :

$$g(x) := f(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après la proposition 6.3 on a :

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(-\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

En particulier :

- Si f est *paire*, alors $g = f$, et par suite $\widehat{f}$ est *paire*.
- Si f est *impaire*, alors $g = -f$, et par suite $\widehat{f}$ est *impaire*.

6.3.1. Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable et *paire*. On a, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{\widehat{f}(\omega)+\widehat{f}(-\omega)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-i\omega x}+e^{i\omega x}}{2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx.\end{aligned}$$

Si en outre f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on a aussi :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^2(f)(-x) = \frac{1}{4\pi}(\mathscr{F}^2(f)(x)+\mathscr{F}^2(f)(-x)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, en vertu du corollaire 6.14 (ici on a posé $\mathscr{F}^2 := \mathscr{F} \circ \mathscr{F}$).

Donc, pour les fonctions paires, il convient d'introduire une transformée de Fourier mieux adaptée, qui parfois simplifie les calculs :

Définition 6.18. La *transformée de Fourier en cosinus* de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ paire et intégrable sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$\boxed{\widehat{f}_c : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad \widehat{f}_c(\omega) := \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}.}$$

Si f est en outre continue sur $\mathbb{R}$, avec $\widehat{f}_c$ intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on a la *formule d'inversion de Fourier en cosinus* :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widehat{f}_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

6.3.2. De même, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable et *impaire*, on a, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{\widehat{f}(\omega)-\widehat{f}(-\omega)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-i\omega x}-e^{i\omega x}}{2}dx \\ &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx\end{aligned}$$

et si f est en outre continue avec $\widehat{f}$ intégrable, on a en outre :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{4\pi}(\mathscr{F}^2(f)(-x)-\mathscr{F}^2(f)(x)) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\frac{e^{-i\omega x}-e^{i\omega x}}{2i}d\omega \\ &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\sin(\omega x)d\omega = -\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\sin(\omega x)d\omega\end{aligned}$$

et cela motive la définition suvante :

Définition 6.19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. La *transformée de Fourier en sinus* de f est la fonction :

$$\boxed{\widehat{f}_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad \widehat{f}_s(\omega) := \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}.}$$

Si f est en outre continue sur $\mathbb{R}$, avec $\widehat{f}_s$ intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on a la *formule d'inversion de Fourier en sinus* :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \widehat{f}_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

6.3.3. Noter que les transformées de Fourier en sinus ou cosinus d'une fonction f ne font intervenir que la restriction de f à la démi-droite positive $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. On peut alors associer à *toute* fonction $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ses transformées en cosinus $\widehat{f}_c$ et en sinus $\widehat{f}_s$, définies par les expressions des définitions 6.18 et 6.19 : ces opérations reviennent à prolonger f sur $\mathbb{R}$ en une fonction paire ou impaire, et à calculer la transformée de Fourier du prolongement (à multiplication par 2 ou respectivement par $-2i$ près).

On peut, d'autre part, aussi prolonger f en une fonction

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \text{telle que} \qquad f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Noter que :

$$\widehat{f}_0(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \widehat{f}_c(\omega) - i\widehat{f}_s(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

car $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)$. Puisque $\widehat{f}_c$ est paire et $\widehat{f}_s$ est impaire, on déduit :

$$(*) \qquad \begin{aligned} \widehat{f}_c(\omega) &= \frac{1}{2}(\widehat{f}_0(\omega) + \widehat{f}_0(-\omega)) \\ \widehat{f}_s(\omega) &= \frac{i}{2}(\widehat{f}_0(\omega) - \widehat{f}_0(-\omega)) \end{aligned} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

6.3.4. Supposons ensuite que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, et que sa dérivée f' soit intégrable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, de sorte que l'on puisse aussi prolonger également f' en une fonction $f'_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nulle pour tout réel négatif. Comme f_0 n'est pas forcément continue en 0, la relation entre $\widehat{f}_0$ et $\widehat{f'_0}$ exprimée par la proposition 6.5 doit être modifiée. Pour cela, on reprend la preuve de la proposition : le même raisonnement nous ramène au cas où f a *support compact*, *i.e.* f est nulle sur une démi-droite $]a, +\infty[$ (pour quelque $a > 0$) ; dans ce cas, on calcule encore par intégration par parties :

$$\widehat{f'_0}(\omega) = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \big(\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-i\omega x} - f(0)\big) + i\omega\int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

d'où :

$$\boxed{\widehat{f'_0}(\omega) = i\omega\widehat{f}_0(\omega) - f(0) \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

D'autre part, avec les relations $(*)$ du paragraphe précédent, on peut exprimer $\widehat{f'_c}$ et $\widehat{f'_s}$ en termes de $\widehat{f'_0}$; en résumant, on déduit les identités suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{f'_c}(\omega) &= \omega\widehat{f}_s(\omega) - f(0) \\ \widehat{f'_s}(\omega) &= -\omega\widehat{f}_c(\omega) \end{aligned} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.}$$

En dernier lieu, si $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, et si f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, alors les relations ci-dessus entraînent en outre :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \widehat{f''_c}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}_c(\omega) - f'(0) & \\ & \forall \omega \in \mathbb{R}. \\ \widehat{f''_s}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}_s(\omega) + \omega f(0) & \end{array}}$$