Université de Lille

École doctorale **EDSPI**

Unité de recherche **Laboratoire Paul Painlevé**

Thèse présentée par **Robin Frot**

Soutenue le **17 septembre 2021**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Théorie analytique des nombres**

Non annulation simultanée de fonctions L sur $GL(3)$

Thèse dirigée par Gautami Bhowmik
Nicole Raulf

Composition du jury

Rapporteurs	Philippe Michel	École Polytechnique Lausanne	
	Maksym Radziwill	California Institute of Technology	
Examinateurs	Youness Lamzouri	Université de Lorraine	président du jury
	Anne Moreau	Université de Paris-Saclay	
	Jie Wu	Université Paris-Est	
Directrices de thèse	Gautami Bhowmik	Université de Lille	
	Nicole Raulf	Université de Lille	

Colophon

Mémoire de thèse intitulé « Non annulation simultanée de fonctions L sur $GL(3)$ », écrit par Robin Frot, achevé le 19 novembre 2021, composé au moyen du système de préparation de document LaTeX et de la classe yathesis dédiée aux thèses préparées en France.

Université de Lille

École doctorale **EDSPI**

Unité de recherche **Laboratoire Paul Painlevé**

Thèse présentée par **Robin Frot**

Soutenue le **17 septembre 2021**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Théorie analytique des nombres**

Non annulation simultanée de fonctions L sur $GL(3)$

Thèse dirigée par Gautami Bhowmik
Nicole Raulf

Composition du jury

Rapporteurs	Philippe Michel	École Polytechnique Lausanne	
	Maksym Radziwill	California Institute of Technology	
Examinateurs	Youness Lamzouri	Université de Lorraine	président du jury
	Anne Moreau	Université de Paris-Saclay	
	Jie Wu	Université Paris-Est	
Directrices de thèse	Gautami Bhowmik	Université de Lille	
	Nicole Raulf	Université de Lille	

Université de Lille

Doctoral School **EDSPI**

University Department **Laboratoire Paul Painlevé**

Thesis defended by **Robin Frot**

Defended on **September 17, 2021**

In order to become Doctor from Université de Lille

Academic Field **Mathematics**

Speciality **Analytic Number Theory**

Simultaneous nonvanishing of $GL(3)$ L-functions

Thesis supervised by Gautami Bhowmik
Nicole Raulf

Committee members

Referees	Philippe Michel	École Polytechnique Lausanne	
	Maksym Radziwill	California Institute of Technology	
Examiners	Youness Lamzouri	Université de Lorraine	Committee President
	Anne Moreau	Université de Paris-Saclay	
	Jie Wu	Université Paris-Est	
Supervisors	Gautami Bhowmik	Université de Lille	
	Nicole Raulf	Université de Lille	

Non annulation simultanée de fonctions L sur $GL(3)$

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est de calculer le premier moment des fonctions L associées à des formes de Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ tordues par des caractères de Dirichlet. En utilisant des méthodes standards faisant appel aux équations fonctionnelles approximées, nous démontrons le théorème suivant.

Théoreme. *Soit ϕ une forme cuspidale de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ satisfaisant la conjecture de Ramanujan–Petersson. Soit q un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$*

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi \otimes \chi\right) = 1 + O_\epsilon\left(q^{-2\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{4}{7}+\epsilon}\right),$$

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \overline{\chi}\right) = L(1+2\alpha, \phi) + O_\epsilon\left(q^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right)$$

où l'étoile indique que la somme porte sur les caractères de Dirichlet χ primitifs et pairs.

Si on compare cela à des résultats similaires pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ce théorème n'est pas vraiment satisfaisant car il ne couvre pas le cas où $\alpha = 0$. Dans le cas de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, la difficulté principale est d'effectuer la moyenne sur les coefficients de Fourier des formes de Maaß tordus par un caractère additif. De plus les sommes que nous devons borner sont aussi plus longues.
Les résultats ci-dessus peuvent être améliorés en effectuant une moyenne supplémentaire sur les modules de congruence q. Cette méthode permet de choisir une constante α ayant une partie réelle plus petite que précédemment, ce qui n'est toujours pas suffisant pour obtenir un résultat pour $\alpha = 0$. Pour faire cela, nous avons besoin de supposer la conjecture folklorique suivante

Conjecture. *Si $A(m,1)$ sont les coefficients Fourier d'une forme de Maaß ϕ pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ et $a \in \mathbb{R}$, alors, on a*

$$\sum_{m \ leqM} A(m,1) e(am) \ll M^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

qui est uniforme en a.

Cela nous conduit à notre résultat principal :

Théoreme. *Soit ϕ une forme de Hecke–Maaß sur $SL(3,\mathbb{Z})$, $\delta > 0$, $Q, Q_1, Q_2, \in \mathbb{Z}$, tels que $Q_1 Q_2 = Q$ et $Q_1 \asymp Q^{\frac{3}{4}+\delta}$. De plus, définissons*

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N}, q = q_1 q_2, q_i \text{ premier}, Q_i \leq q_i \leq 2Q_i\}.$$

Si on suppose en outre la conjecture ci-dessus, alors nous avons

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{4}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) = L(1,\phi) + O\left(q^{-\frac{1}{32}+\frac{\delta}{8}+\epsilon}\right)$$

où la somme porte sur les caractères primitifs et pairs.

La somme ci-dessus étant alors non nulle, au moins un de ses termes l'est également. Nous déduisons donc que pour une infinité de caractères de Dirichlet, le produit des deux fonctions L que nous avons considéré ci dessus est aussi non nul.

Mots clés : Fonctions L, Non annulation, Moments, Formes de Maaß

Laboratoire Paul Painlevé
Cité scientifique – Bâtiment M2 – CNRS U.M.R. 8524 – 59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex – France

Simultaneous nonvanishing of $GL(3)$ L-functions

Abstract

The main goal of this thesis is to compute the first moment of L-functions associated with Maaß forms and twists by Dirichlet characters on $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. Using standard methods involving the approximate functional equation, we prove that

Theorem. *Let ϕ be a Hecke–Maaß form on $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ satisfying the Ramanujan–Petersson conjecture. Let q be a prime number and $\alpha \in \mathbb{C}$ such that $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < \frac{1}{2}$. Then, for all $\epsilon > 0$*

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi\otimes\chi\right) = 1 + O_\epsilon\left(q^{-2\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{4}{7}+\epsilon}\right),$$

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi\otimes\chi\right) L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \overline{\chi}\right) = L(1+2\alpha,\phi) + O_\epsilon\left(q^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right)$$

where a star indicates that the sum is taken over primitive and even Dirichlet characters χ.

If we compare it to similar known results for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ this theorem is not really satisfactory in the sense that it does not cover the case $\alpha = 0$. In the $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ case, the main difficulty is the averaging of the Fourier coefficients twisted by additive characters. The sums that we need to bound are also longer.
Results of the above kind can sometimes be improved by performing an additional average over the congruence moduli. This technique does allows us to take a constant α with a smaller real part than in the above theorem which is still not enough to arrive at $\alpha = 0$. In order to do so, we have to assume the following folkroric conjecture

Conjecture. *If $A(m,1)$ are the Fourier coefficients of a Maaß form ϕ and $a \in \mathbb{R}$, then we have*

$$\sum_{m \ leqM} A(m,1)e(am) \ll M^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

which is uniform in a.

This leads to our main result:

Theorem. *Let ϕ be an Hecke–Maaß form on $SL(3,\mathbb{Z})$, $\delta > 0$, $Q, Q_1, Q_2, \in \mathbb{Z}$, such that $Q_1Q_2 = Q$ and $Q_1 \asymp Q^{\frac{3}{4}+\delta}$. Moreover, define*

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N}, q = q_1q_2, q_i \text{ prime}, Q_i \leq q_i \leq 2Q_i\}.$$

If we assume above conjecture, then we have

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q\in\mathcal{Q}} \frac{4}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \phi\otimes\chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) = L(1,\phi) + O\left(q^{-\frac{1}{32}+\frac{\delta}{8}+\epsilon}\right)$$

where the star indicates that the sum is taken over the characters $\chi = \chi_1\chi_2$ where χ_i is an even non primitive character modulo q_i.

The above sum being non zero, at least one of its terms is also non-zero. Thus we deduce that for an infinite number of Dirichlet characters the product of the two L functions considered above is non zero.

Keywords: L-functions, Nonvanishing, Moments, Maaß forms

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directrices de thèse Gautami Bhowmik et Nicole Raulf pour tout ce qu'elles m'ont apporté durant ces quatre années. Je tiens à remercier leur patience et le suivi attentif qu'elles ont su m'apporter.

Philippe Michel et Maksym Radziwiłł, mes deux rapporteurs, pour avoir accepté de relire cette thèse attentivement, avoir écrit leur rapport et donné de précieuses remarques.

Anne Moreau, Youness Lamzouri et Jie Wu pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier Dimitrios Chatzakos pour sa bonne humeur, pour ses conseils et pour m'avoir poussé à progresser en théorie des nombres.

Je souhaite à remercier les doctorants du bureau M3 114 qui m'ont permis d'avancer dans la bonne humeur autour de nombreux cafés.

Je remercie également les membres du laboratoire Paul Painlevé et de l'Université de Lille pour avoir fourni un cadre idéal dans lequel rédiger ma thèse.

Je voudrait également remercier l'ENS de Lyon pour m'avoir accordé le contrat doctoral qui a permis de financer cette thèse.

Un grand merci à Mylène qui m'a soutenu et supporté durant ces années.

Je souhaite aussi remercier les camarades lyonnais pour les week-ends de détente. Parmis eux, Alexandre, Antonin, Benjamin, Benoit, Clément, Florent, Grégoire, Idriss, Marc, Matthieu Thomas, Valentin, ...

Je souhaite finalement remercier ma famille pour m'avoir soutenu dans mon projet de faire des mathématiques.

Table des matières

Introduction

En théorie analytique des nombres, l'étude des fonctions L joue une rôle central. Le premier exemple historique de telles fonctions est celui des fonctions L de Dirichlet. Étant donné un caractère de Dirichlet, c'est-à-dire un morphisme

$$\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*,$$

pour un certain $q \in \mathbb{N}$, il est possible de définir la fonction L suivante pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(s, \chi) := \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \ premier} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ces fonctions ont été introduites en 1837 par Dirichlet ([Dir37]) afin de démontrer son théorème de la progression arithmétique :

Théorème 0.0.1 (Dirichlet)**.** *Étant donné deux entiers m et n premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers p congrus à m modulo n.*

Ce résultat fut démontré dans un premier temps dans le cas où n est un nombre premier, puis l'année suivante dans le cas général. La démonstration de ce résultat repose en grande partie sur le fait que nous pouvons caractériser les classes de congruences grâce aux caractères χ à l'aide de la transformée de Fourier discrète. Un autre ingrédient primordial de la démonstration est la non annulation des fonctions L de Dirichlet en la valeur 1, ainsi que l'existence du pôle en 1 de la fonction ζ. Cela permet encore de constater l'importance du rôle des zéros et des pôles des fonctions L dans des applications arithmétiques.

Parmi ces foncions, la plus célèbre est probablement la fonction ζ de Riemann. Elle s'obtient en prenant χ constant égal à 1. Elle est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \ premier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Comme nous pouvons le constater dans les deux expressions de ces fonctions, il est possible de relier les objets purement arithmétiques que sont les nombres premiers avec une fonction méromorphe. Bien entendu, ces fonctions possèdent des propriétés supplémentaires telles qu'une équation fonctionnelle reliant leurs valeurs en s et celles en $1 - s$. Cette symétrie permet de prolonger les fonctions L de Dirichlet et la fonction ζ de Riemann en des fonctions méromorphes sur tout le plan complexe ayant au plus 1 pour unique pôle (lorsque le caractère est trivial). Le centre de cette symétrie est $1/2$ et la droite laissée invariante est celle de partie réelle égale à $1/2$. Comme nous le verrons quand nous rencontrerons d'autres fonctions L, une conjecture folklorique veut que les centres d'intérêts des fonctions L se situe sur cette droite. Dans le cas de la fonction

ζ, il s'agit de la très célèbre hypothèse de Riemann, formulée en 1859 par Bernhard Riemann stipulant que les zéros non triviaux de la fonction ζ se situent sur cette droite. La fonction ζ ayant de forts liens avec les nombres premiers, la connaissance de ses zéros apporterait une grande précision sur la répartition des nombres premiers.

Les fonctions L précédentes s'obtiennent à partir des transformées de Mellin des fonctions θ et l'équation fonctionnelle s'obtient grâce à l'analyse de Fourier. Une généralisation naturelle de ce problème est d'étudier les formes propres du Laplacien sur une variété hyperbolique : par exemple le demi-plan de Poincaré sur lequel agit un sous groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ muni de l'action par homographie. Cela donne lieu à l'étude des formes modulaires (holomorphes) et des formes de Maaß. Dans cette thèse nous ne considérerons des formes que de poids 0 et de niveau 1, c'est-à-dire les formes invariantes par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Nous définirons ces dernières dans le premier chapitre. Puisque ces objets possèdent des développements de Fourier, il est possible de définir des fonctions L à l'aide de leurs coefficients de Fourier qui partagent des propriétés avec les fonctions L de Dirichlet telles que la multiplicativité. Elles sont de plus entières et satisfont une équation fonctionnelle ainsi qu'un produit eulérien. Si f est une forme de Hecke–Maaß, de coefficients de Fourier a_n, définissons la fonction L associée à f de la manière suivante pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(s,f) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

Il est également possible de généraliser le demi-plan de Poincaré à $\mathrm{GL}(3)$ avec une action de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ pour obtenir de nouvelles formes Maaß pour ce nouveau quotient. L'objet de cette thèse est l'étude de la non annulation des fonctions L associées aux formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. Enfin, il est possible de multiplier les coefficients des fonctions L par un caractère de Dirichlet. Cela revient à regarder des formes de Maaß pour un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ou $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. Remarquons que la généralisation à $GL(n)$ se fait de manière similaire à celle de $\mathrm{GL}(2)$ à $\mathrm{GL}(3)$. Ce saut théorique est traité en détail dans le livre de Goldfeld [Gol06].

Les principaux problèmes liés à ces fonctions L est l'étude de leur annulation éventuelle ainsi qu'à leur comportement asymptotique en la partie imaginaire où en le conducteur du caractère (problèmes de sous-convexité) lorsque la partie réelle est fixée à $1/2$. Dans le second problème, nous parlons ici de sous-convexité car la borne triviale de convexité s'obtient directement avec l'équation fonctionnelle et le principe de Phragmén–Lindelhöf. Citons quelques résultats célèbres de sous-convexité connus pour les fonctions L considérées. Dans le cas de $\mathrm{GL}(1)$ (pour les caractères de Dirichlet), nous avons la borne historique de Burgess [Bur63]

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \ll q^{\frac{3}{16}+\epsilon}$$

où q est le module du caractère de Dirichlet. Elle a été améliorée récemment par Petrow et Young ([PY19]) pour obtenir l'exposant de Weyl $1/6$. Le cas des fonctions L pour $\mathrm{GL}(2)$ a été traité de manière très générale par Michel et Vankatesh dans [MV10]. Enfin, un résultat similaire pour les formes pour $\mathrm{GL}(3)$ a récemment été démontré par Munshi dans [Mun15]. Remarquons que la sous convexité en t s'obtient en générale de manière similaire en constatant que la translation par it revient à tordre les fonctions L par la fonction multiplicative $n \mapsto n^{-it}$.

Nous allons dorénavant nous préoccuper des problèmes d'annulation. Une conjecture folklorique veut que si toutes les fonctions L d'une famille donnée s'annulent en un point, par exemple en $1/2$, cela impliquera de fortes propriétés arithmétiques sur les coefficients. Il est donc raisonnable de penser qu'en considérant certaines familles, il est possible de montrer qu'au moins une, voire une proportion positive de fonctions L de ces familles ne s'annulent pas en un point donné.

Un des premiers résultats de ce type est le suivant ([BM92]).

Théorème 0.0.2 (Balasubramanian, Murty). *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour q assez grand,*

$$\frac{1}{\phi(q)} \left| \left\{ \chi[q], L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \neq 0 \right\} \right| > (c - \epsilon)$$

où $c \geq 0.04$.

Ce résultat a ensuite été amélioré jusqu'à atteindre $c = 5/13$ ([KMN21]). La méthode utilisée pour démontrer ce type résultat est l'évaluation des moments (mollifiés) des familles de fonctions L considérées, ainsi que l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans le cas des caractères quadratiques (tels que $\chi^2 = 1$), la proportion de non annulation est beaucoup plus élevée : 7/8 ([Sou00]). Il est également possible de considérer une non-annulation simultanée de plusieurs fonctions L. Par exemple, le résultat motivant l'écriture de cette thèse est le suivant ([DK15]).

Théorème 0.0.3 (Das, Khan). *Soit f une forme de Hecke–Maaß paire pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et q un nombre premier, alors*

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) \overline{L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)} = L(1, f) + O\left(q^{-\frac{1}{64}+\epsilon}\right).$$

Remarquons en particulier que ce résultat implique l'existence d'un caractère de Dirichlet tel que l'un des termes de la somme soit non nul. En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwartz et le calcul du second moment, [BFK+17],

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]} \left| L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) \right|^2 \ll \ln(q),$$

il est possible de déduire une proportion positive de non annulation pour les produits de fonctions L du résultat de Das et Khan. Cela a été fait par Zacharias dans [Zac19]. Remarquons qu'il est également possible d'obtenir des résultats en faisant une moyenne directement sur les formes considérées. Par exemple, il a récemment été démontré que les formes modulaires de poids $4k$ et de niveau 1 ne s'annulent pas en 1/2 avec une proportion de 1/5 ([BF21]).

Ces résultats de non annulation donnent lieu à des applications concrètes. Par exemple, Iwaniec et Sarnak ont démontré qu'une proportion supérieure à 1/2 d'élément de la famille suivante

$$\{L(s, f)L(s, f \otimes \chi_D),\ f \text{ modulaire}\},$$

où χ_D est le caractère quadratique modulo D, est minorée en la valeur centrale implique qu'il n'existe pas de zéros de Landau-Siegel ([IS00]). Une autre application concerne la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer. Dans [KMV00], les auteurs démontrent que si un certain produit de trois fonctions L ne s'annule pas dans une certaine proportion positive, alors des quotients de certaines Jacobiennes satisfont à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

L'objectif de cette thèse est de démontrer un résultat de non annulation simultanée pour les formes de Hecke–Maaß pour $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$. Nous souhaitons démontrer que pour une forme de Maaß

ϕ et un nombre premier q, nous avons

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2},\phi\otimes\chi\right)\overline{L\left(\frac{1}{2},\chi\right)}\neq 0.$$

Comme nous pourrons le constater, pour obtenir un tel résultat, il faudra utiliser des hypothèses simplificatrices telles qu'une moyenne supplémentaire sur les modules q et une conjecture sur les moyennes des coefficients de Fourier des formes de Maaß considérées. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 0.0.4. *(F.) Soit ϕ une forme de Hecke–Maaß cuspidale sur $SL(3,\mathbb{Z})$, $\delta>0$, $Q, Q_1, Q_2, \in \mathbb{Z}$, tels que $Q_1Q_2=Q$ et $Q_1 \asymp Q^{\frac{3}{4}+\delta}$. Posons de plus*

$$\mathcal{Q}=\{q\in\mathbb{N}, q=q_1q_2, q_i \text{ est premier}, Q_i\leq q_i\leq 2Q_i\}.$$

En supposant la conjecture 1.5.6 vraie, nous avons

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi[q]}{}^{*} L\left(\frac{1}{2},\phi\otimes\chi\right)L\left(\frac{1}{2},\overline{\chi}\right)=L(1,\phi)+O\left(q^{-\frac{1}{32}+\frac{\delta}{8}+\epsilon}\right)$$

où l'étoile signifie que la somme est prise sur les caractères χ primitifs et pairs. Si nous remplaçons $\mathcal{Q}$ par

$$\mathcal{Q}'=\{q\in\mathbb{N}, q=q_1q_2, q_i \text{ est premier}, Q_i\leq q_i\leq 2Q_i, q_1\equiv 2[3]\},$$

nous pouvons prendre n'importe quel $\delta>-\frac{1}{4}$.

Chapitre 1

Préliminaires : caractères de Dirichlet, formes de Hecke-Maaß et fonctions L

L'objectif de ce chapitre est de compiler les définitions et les propriétés concernant les formes de Maaß nécessaires dans la thèse. La plupart de ces résultats, développés au cours du dernier siècle, sont désormais classiques et sont démontrés en grande partie dans le livre de Goldfeld [Gol06]. Ces démonstrations étant souvent techniques et longues, particulièrement celles pour rapport à $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, nous ne les écrirons pas toutes.

La section 1.5 énonce quant à elle des résultats beaucoup plus récents, dont les démonstrations sortent du sujet de cette thèse, et ne seront que cités et utilisés plus tard dans des calculs.

1.1 Caractères de Dirichlet

Dans cette première section, nous allons définir les caractères de Dirichlet et nous allons énoncer quelques propriétés utiles.

Définition 1.1.1. *Soit q un entier. Appelons caractère de Dirichlet modulo q tout morphisme de groupe*

$$\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*.$$

On appelle conducteur de χ le plus petit entier $q'|q$ tel que χ se factorise à travers la projection $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.
Si χ est un caractère de Dirichlet modulo q, il sera dit primitif si son conducteur est q.
Finalement, tout caractère de Dirichlet se prolonge à $\mathbb{Z}$ en posant $\chi(m) = 0$ si $(m, q) \neq 1$. Nous ne ferons pas de distinction entre χ et son prolongement à $\mathbb{Z}$.

A tout caractère de Dirichlet, nous pouvons associer la somme de Gauss

$$\epsilon(\chi) := \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=1}^{q-1} e\left(\frac{a}{q}\right) \chi(a) \tag{1.1.1}$$

où $e(x) := \exp(2i\pi x)$ est l'exponentielle complexe normalisée de sorte à avoir une période 1. Notons également $\phi(q) := \left|(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*\right|$ la fonction indicatrice d'Euler.

Dans les théorèmes que nous cherchons cherche à démontrer, des moyennes de caractères de Dirichlet interviennent. Nous avons les formules suivantes.

Proposition 1.1.2 (Orthogonalité des caractères de Dirichlet)**.** *Soit q un nombre premier et n un entier tel que $(q,n)=1$. Alors*

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi[q]}\chi(n) = \delta_{n\equiv 1[q]} \tag{1.1.2}$$

où

$$\delta_{n\equiv 1[q]} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 1[q], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ et q un nombre premier. Pour la première égalité, si $n=1$, nous avons $\chi(1)=1$ pour tout χ et donc l'égalité recherchée. Si $n \neq 1$ et a est un générateur de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ qui est cyclique car q est premier. Il existe $1 \leq t \leq q-2$ tel que $n = a^t$. Soit χ_0 le caractère de Dirichlet modulo q tel que $\chi_0(a^k) = \zeta_q^k$ où ζ_q est une racine $q-1$ primitive de l'unité. Nous avons

$$(1-\chi_0(n))\sum_{\chi[q]}\chi(n) = \sum_{\chi[q]}\chi(n) - \sum_{\chi[q]}(\chi_0\chi)(n) = 0.$$

En effet, l'ensemble des caractères de Dirichlet forme un groupe abélien et la multiplication par χ_0 est bijective. Puisque $\chi_0(n) \neq 1$, cela montre le résultat. □

Nous pouvons maintenant utiliser cette identité fondamentale pour démontrer d'autres résultats dont nous aurons besoin pour la suite. Commençons par définir pour la suite les caractères additifs que nous considérerons ainsi que des sommes exponentielles qui interviendront dans nos problèmes. Posons pour $k \geq 2$

$$\begin{aligned} e_q(n) &:= e\left(\frac{n}{q}\right) = \exp\left(2i\pi\frac{n}{q}\right), \\ Kl_k(n;q) &:= \frac{1}{q^{\frac{k-1}{2}}}\sum_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_k[q] \\ x_1\ldots x_k = n}} e_q(x_1+\ldots+x_k). \end{aligned}$$

Les dernières sommes s'appellent sommes de Kloosterman généralisées (normalisées) et interviennent naturellement dans nos problèmes à travers les identitées suivantes.

Lemme 1.1.3. *Reprenons les notations ci-dessus, nous avons alors pour* $(n,q)=1$

$$\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\chi(n)=\delta_{m\equiv\pm1[q]}-\frac{2}{\phi(q)}, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\epsilon(\overline{\chi})\chi(n)=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(e_q(n)+e_q(-n)\right)+\frac{2}{\phi(q)\sqrt{q}}, \tag{1.1.4}$$

$$\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\epsilon(\overline{\chi})^2\chi(n)=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(Kl_2(n;q)+Kl_2(-n;q)\right)-\frac{2}{\phi(q)q}, \tag{1.1.5}$$

$$\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\epsilon(\overline{\chi})^3\chi(n)=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(Kl_3(n;q)+Kl_3(-n;q)\right)+\frac{2}{\phi(q)q^{\frac{3}{2}}} \tag{1.1.6}$$

où l'étoile désigne que la somme est prise sur les caractères primitifs pairs.

Démonstration. Nous ne démontrerons que la quatrième formule, les autres étant similaires. L'idée générale est d'utiliser l'identité suivante. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo q. Nous avons

$$\frac{\chi(1)+\chi(-1)}{2}=\begin{cases}1 \text{ si } \chi \text{ est pair,}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\epsilon(\overline{\chi})^3\chi(n)&=\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\ primitif}\epsilon(\overline{\chi})^3(\chi(n)+\chi(-n))\\&=\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}\phi(q)}\sum_{\chi\neq\mathbf{1}_q}\sum_{a,b,c[q]}{}^{*}e_q(a+b+c)(\chi(\overline{abc}n)+\chi(-\overline{abc}n))\\&=\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}\phi(q)}\sum_{\chi\neq\mathbf{1}_q}\sum_{a,b,c[q]}{}^{*}e_q(a+b+c)(\chi(\overline{abc}n)+\chi(-\overline{abc}n))\\&-\frac{2}{\phi(q)q^{\frac{3}{2}}}\sum_{a,b,c[q]}{}^{*}e_q(a+b+c).\end{aligned}$$

La somme de droite est le produit de trois sommes de Ramanujan et vaut -1. En effet, nous avons

$$\sum_{a[q]}{}^{*}e_q(a)=\sum_{0}^{q-1}e\left(\frac{a}{q}\right)-1=-1$$

en rajoutant le cas où $a=0$. En appliquant le lemme 1.1.2, nous devons avoir $abc\equiv\pm n[q]$, ce qui fournit la somme de Kloosterman attendue. □

Finissons cette section par énoncer la borne de Weyl ($k=2$) et de Deligne ($k\geq3$) pour les sommes de Kloosterman rencontrées (nous pourrons par exemple nous référer à [FKM15], théorème 4.1).

Lemme 1.1.4. *Soit* n *tel que* $(n,q)=1$*. Nous avons alors pour tout* $k\geq2$*,*

$$Kl_k(n;q)\ll\ln(q). \tag{1.1.7}$$

1.2 Formes de Hecke-Maaß pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

Commençons par définir et rappeler les propriétés des formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

1.2.1 Demi-plan de Poincaré généralisé

Dans le cas classique de GL(2) nous pouvons définir le demi-plan de Poincaré de la manière suivante :

$$\mathfrak{h}^2 := \{x+iy \in \mathbb{C}, y>0\}.$$

Il existe une action naturelle continue de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{h}^2$.
Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $z \in \mathfrak{h}^2$, définissons alors l'action par homographie

$$\gamma \cdot z = (az+b)(cz+d)^{-1}.$$

Nous noterons $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Le sous-groupe $\Gamma(1)$ agit de façon discrète sur $\mathfrak{h}^2$ et a pour domaine fondamental

$$\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2 = \{z \in \mathfrak{h}^2, -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) < 1/2, |z| \geq 1\}.$$

La structure hyperbolique de $\mathfrak{h}^2$ passe au quotient et nous pouvons munir $\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2$ de la mesure de Haar $\frac{dxdy}{y^2}$. L'ensemble $\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2$ est alors de mesure finie $\frac{\pi}{3}$.
Notons finalement que l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2)$ des fonctions de carré intégrable sur le quotient peut être muni du produit de Petersson défini par :

$$\langle f, g\rangle := \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}^2} f(z)\overline{g(z)}\,\frac{dxdy}{y^2}.$$

1.2.2 Formes de Maaß

Nous pouvons maintenant définir les formes de Maaß .

Définition 1.2.1. *On appelle forme de Maaß de type ν pour $\Gamma(1)$ toute fonction lisse et non constante $f : \mathfrak{h}^2 \to \mathbb{C}$ telle que :*

(i) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$, nous avons $f(\gamma\cdot z) = g(z)$,

(ii) la fonction f est propre pour l'opérateur Laplacien $\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$: $\Delta f = \nu(1-\nu)f$,

(iii) la fonction f doit être de carré intégrable : $f \in \mathcal{L}^2\left(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2\right)$.

De plus nous dirons que f est cuspidale si $\lim_{y\to\infty} f(iy) = 0$.

Remarque 1.2.2. *Grâce à la positivité de $\langle f, f\rangle = \int_{\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2} |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2}$, il est possible de montrer que $\nu(1-\nu) > 0$ (voir la proposition 1.5.7).*

Pour une forme de Maaß f, nous avons alors $f(z+1)=f(z)$. Les formes de Maaß possèdent donc un développement de Fourier de la forme

$$f(z)=\sum_{m\neq 0} A_m(y)e(mx)$$

où nous avons encore posé

$$e(x):=\exp(2i\pi x).$$

En utilisant la partie (ii) de la définition et la liberté de la famille $\{x\mapsto e(mx), m\in\mathbb{Z}\}$, nous obtenons que les coefficients A_m doivent vérifier l'équation différentielle

$$A_m''(y)=((2\pi m)^2-y^{-2}\nu(1-\nu))A_m(y).$$

Les uniques solutions de cette équation différentielle qui sont de carré intégrable sont de la forme (pour $m\neq 0$)

$$A_m(y)=\lambda_m(g)\sqrt{2\pi y}K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)$$

où

$$K_z(y):=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y\left(u+\frac{1}{u}\right)}u^z\frac{du}{u}$$

est la fonction de Bessel modifiée. Finalement, nous avons la propriété suivante :

Proposition 1.2.3. *[Décomposition de Fourier-Whittaker] Soit f une forme de Maaß cuspidale de type ν pour Γ. Alors, nous avons pour $z\in\mathfrak{h}^2$ la décomposition suivante :*

$$f(z)=\sum_{m\neq 0}\lambda_f(m)\sqrt{2\pi y}K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx). \tag{1.2.1}$$

1.2.3 Opérateurs de Hecke

Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de la théorie des opérateurs de Hecke. nous pourrons par exemple trouver les détails dans [DS05] ou [Gol06]. Cependant, il est important d'énoncer les résultats que nous obtenons pour $SL(2,\mathbb{Z})$.

Définition 1.2.4. *Les opérateurs de Hecke agissant sur $\mathcal{L}^2(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2)$ sont définis par ($n\geq 1$) :*

$$T_nf(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{ad=n\\0\leq b\leq d}} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Définissons de plus

$$T_{-1}f(x+iy)=f(-x+iy).$$

Les opérateurs de Hecke satisfont aux propriétés suivantes :

Proposition 1.2.5 (Propriétés de opérateurs de Hecke)**.**

(i) Les opérateurs de Hecke commutent entre eux et avec le Laplacien Δ.

(ii) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2\left(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2\right)$, nous avons $\langle T_n f, g\rangle = \langle f, T_n g\rangle$.

(iii) Si m et n sont des entiers premiers entre eux, nous avons alors $T_m T_n = T_n T_m = Tmn$.

Démonstration. La démonstration du premier point est essentiellement un calcul direct ([Gol06], théorème 3.12.6). Le deuxième point ([Gol06], théorème 3.12.4) utilise une version plus générale des opérateurs de Hecke. Nous pourrons se référer au chapitre 5 du livre de Diamond et Shurman [DS05] pour un contexte plus général. □

En particulier, si f est une forme de Maaß, $T_n(f)$ en est aussi une. Nous pouvons maintenant définir les formes de Hecke-Maaß :

Définition 1.2.6. *On dit que $f \in \mathcal{L}^2(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^2)$ est une forme de Hecke–Maaß si f est une forme de Maaß et, pour tout $n \geq 1$, $T_n(f) = \lambda_n f$. De plus, nous dirons que f est paire (resp. impaire) si $T_{-1}f = f$ (resp. $T_{-1}f = -f$).*

Nous avons alors les faits suivants qui se trouvent dans [Gol06] (théorème 3.12.8) :

Proposition 1.2.7 (Multiplicativité des coefficients de Fourier). *Soit f une forme de Hecke-Maaß normalisée telle que $\lambda_f(1) = 1$. Alors nous avons $\lambda_n = \lambda_f(n)$. De plus, ces coefficients sont réels et vérifient*

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \lambda_f(mn) \qquad \textit{si } (m,n) = 1, \tag{1.2.2}$$

$$\lambda_f(p^k)\lambda_f(p^l) = \sum_{0\leq j\leq \min(k,l)} \lambda_f\left(p^{k+l-2j}\right). \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.8. *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons $\lambda(n)$ pour les coefficients de f.*

1.2.4 formes tordues par un caractère de Dirichlet

Si χ est un caractère de Dirichlet primitif modulo q, il est possible de définir les formes de Hecke–Maaß tordues par ce caractère. Soit f une forme de Hecke–Maaß qui possède la décomposition de Fourier–Whittaker (1.2.1), nous pouvons alors définir

$$f_\chi(z) = \sum_{m\neq 0} \lambda_f(m)\chi(m)\sqrt{2\pi y}K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx).$$

Cette fonction est alors invariante par le groupe

$$\Gamma(q^2) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ cq^2 & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\right\}$$

grâce aux relation suivantes

$$f_\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ cq^2 & d\end{pmatrix}\cdot z\right) = \chi(d)f_\chi(z),$$
$$f_\chi\left(-\frac{1}{q^2 z}\right) = \epsilon\chi^2 f_{\overline{\chi}}(z).$$

Ces équations peuvent se démontrer directement en utilisant l'automorphie de f et en exprimant f_χ en fonction de f grâce à l'identité

$$\chi(n) = \frac{\epsilon(\chi)}{\sqrt{q}}\sum_{a=1}^{q-1}\overline{\chi}(a)e_q(an).$$

1.3 Formes de Hecke-Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$

Dans cette section, nous généralisons toutes les notions nécessaires à la définition des formes de Hecke-Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. Notons qu'il est possible de remplacer 3 par $n \geq 2$ dans ce qui suit sans perte de généralité.

1.3.1 Demi-plan de Poincaré généralisé

Nous pouvons définir le demi-plan de Poincaré généralisé de la manière suivante :

Définition 1.3.1.

$$\mathfrak{h}^3 = \left\{ x\cdot y \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}),\ x = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1y_2 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R},\ y_k > 0 \right\}$$

Nous pouvons remarquer qu'il est aussi possible de définir $\mathfrak{h}^2$ de manière matricielle de la même façon. En effet, si nous posons

$$\mathfrak{h}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y > 0 \right\},$$

cet ensemble s'identifie avec le demi-plan de Poincaré défini précédemment. Il est alors possible de retrouver l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ par multiplication matricielle. Cela se démontre en utilisant la décomposition d'Iwasawa afin d'écrire le demi plan de Poincaré comme un groupe de matrices. Nous l'énonçons dans le cas de $\mathfrak{h}^3$ (voir la proposition 1.2.6 de [Gol06]).

Proposition 1.3.2 (Décomposition d'Iwasawa)**.** *Nous avons les isomorphismes suivants*

$$\mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{h}^3 \times \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R},$$
$$\mathfrak{h}^3 \simeq \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\langle \mathrm{O}(3,\mathbb{R}), \mathbb{R}\rangle$$

où nous avons identifié le centre de $GL(3,\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$.

Il existe donc, comme pour le cas de $\mathfrak{h}^2$, une action de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{h}^3$ par multiplication à gauche.

L'action de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ est discrète et la mesure invariante pour cette action est

$$d^*z = \frac{dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2}{y_1^3y_2^3}.$$

Le domaine fondamental de l'action, identifié à $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3$, est de volume fini. Nous pouvons à nouveau définir le produit de Petersson : pour f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3)$, posons

$$\langle f, g\rangle := \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}^3} f(z)\overline{g(z)}d^*z.$$

1.3.2 Opérateurs de Casimir

Pour définir les formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, nous aurons besoin de généraliser le Laplacien qui est défini naturellement sur les fonctions lisses $\mathfrak{h}^2 \to \mathbb{C}$. Nous devrons pour cela définir des opérateurs différentiels sur les fonctions $f : \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ qui se comportent bien par passage au quotient sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3$.

Définition 1.3.3. *Notons $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. Soit $f : \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une fonction lisse et $\alpha \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Nous pouvons définir*

$$D_\alpha f(g) := \frac{\partial}{\partial t}(f.\exp(t\alpha))\bigg|_{t=0},$$

pour $g \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$.

L'ensemble D^3 des opérateurs différentiels D_α ($\alpha \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$) est une algèbre de Lie, isomorphe à l'algèbre universelle enveloppante de $GL(3,\mathbb{R})$. Notons $\mathfrak{D}^3$ le centre de D^3. Il est possible d'expliciter $\mathfrak{D}^3$:

Proposition 1.3.4. *Définissons les opérateurs de Casimir Δ_2 et Δ_3 de la manière suivante (voir les propositions 2.3.3 et 2.3.5 de [Gol06])*

$$\Delta_2 = \sum_{i_1,i_2=1}^{3} D_{E_{i_1,i_2}} \circ D_{E_{i_2,i_1}},$$

$$\Delta_3 = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{3} D_{E_{i_1,i_2}} \circ D_{E_{i_2,i_3}} \circ D_{E_{i_3,i_1}},$$

où $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. Nous avons alors

$$\mathfrak{D}^3 = \mathbb{R}[\Delta_2, \Delta_3]$$

qui est le sous-anneau des opérateurs différentiels engendré par les opérateurs de Casimir.

Nous avons alors la propriété fondamentale suivante :

Proposition 1.3.5. *Soit $D \in \mathfrak{D}^3$ et $f : \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une fonction lisse. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $g \in GL(3,\mathbb{R})$, $k \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}^*$ (où $\mathbb{R}^*$ est vu comme le centre de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$), nous avons*

$$Df(\gamma \cdot g \cdot k \cdot z) = Df(g).$$

En particulier, D est bien défini sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3$.

Finissons par définir une fonction qui sera utile dans l'étude des formes de Maaß .

Définition 1.3.6. *Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2$. Posons $I_\nu : \mathfrak{h}^3 \to \mathbb{C}$ définie par*

$$I_\nu(s) = y_1^{1+\nu_1+2\nu_2} y_2^{1+2\nu_1+\nu_2}.$$

Nous avons alors (voir proposition 2.4.3 de [Gol06]).

Proposition 1.3.7. *La fonction I_ν est propre pour tous les opérateurs $D \in \mathfrak{D}^3$. Nous noterons $\lambda_\nu(D)$ la valeur propre associée.*

1.3.3 Formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$

Nous pouvons enfin donner la définition d'une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$:

Définition 1.3.8. *On appelle forme de Maaß cuspidale pour* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *de type* $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *toute fonction lisse* $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3)$ *vérifiant*

(i) pour tout $D \in \mathfrak{D}^3$*, nous avons* $D\phi = \lambda_\nu(D)\phi$.

(ii) ϕ *est cuspidale :* $\int_{U\cap\Gamma\backslash U} \phi(uz)du = 0$ *pour* $U = U_1, U_2$ *avec*

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme avec $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, les formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ ont une décomposition de Fourier-Whittaker. Cependant, le groupe

$$U_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

n'est pas abélien, contrairement à $U_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ et Cela rend le problème plus compliqué.

Définissons les fonctions de Jacquet–Whittaker.

Définition 1.3.9 (Fonctions de Jacquet-Whittaker)**.** *Soit* $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ *et*

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in U_3(\mathbb{Z}).$$

Définissons le caractère ψ_m *de* $U_3(\mathbb{Z})$ *par*

$$\psi_m(u) = e(m_1u_1 + m_2u_2).$$

Nous pouvons alors définir la fonction de Jacquet-Whittaker de type ν *et de caractère* ψ_m *par*

$$W_{Jacquet}(z; \nu, \psi_m) = \int_{U_3(\mathbb{R})} I_\nu(w_3 \cdot u \cdot z)\overline{\psi_m(u)}du_1du_2du_3$$

où $z \in \mathfrak{h}^3$ *et* $w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces fonctions sont propres pour Δ_2 et Δ_3 et vérifient la condition de cuspidalité (ii) de la définition 1.3.8. Nous pouvons montrer que ce sont les seuls fonctions vérifiant ces propriétés ainsi que des propriétés d'intégrabilité (théorème (6.1.6) de [Gol06]). Nous pouvons alors écrire la décomposition de Jacquet-Whittaker.

Théorème 1.3.10 (Décomposition de Jacquet-Whittaker ([Gol06], formule (6.2.1))**.** *Soit* ϕ *une forme de Maaß cuspidale pour* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *de type* ν*. Nous avons alors pour* $z \in \mathfrak{h}^3$

$$\phi(z) = \sum_{\gamma \in U_2(\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{Z})} \sum_{m_2 \neq 0} \sum_{m_1 \geq 1} \frac{A(m_1, m_2)}{|m_1m_2|} \times W_{Jacquet}\left(\begin{pmatrix} |m_1m_2| & & \\ & m_1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} z; \nu, \psi_{1,\frac{m_2}{|m_2|}} \right). \tag{1.3.1}$$

Pour la démonstration, il s'agit de l'expression (6.2.1) de [Gol06].

A toute forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, nous pouvons associer sa forme duale (proposition 6.3.1 de [Gol06]).

Proposition 1.3.11. *Soit ϕ une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ de type (ν_1,ν_2) et ω la matrice*

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle alors forme duale la fonction

$$\widetilde{\phi}(z) := \phi(\omega \cdot {}^t(z)^{-1} \cdot \omega).$$

Cette fonction est encore une forme de Maaß de type (ν_2,ν_1). De plus, si les coefficients de Fourier de ϕ sont $A(m_1,m_2)$, ceux de $\widetilde{\phi}$ sont $A(m_2,m_1)$.

1.3.4 Opérateurs de Hecke

Nous n'allons encore une fois ne faire que définir les opérateurs de Hecke agissant sur $\mathcal{L}^2(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3)$ et n'en citer que les propriétés essentielles.

On définit les opérateurs de Hecke pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ de la manière suivante :

Définition 1.3.12. *Soit $n \geq 1$ et $\phi \in \mathcal{L}^2\left(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^3\right)$. Définissons alors l'opérateur de Hecke T_n par*

$$T_n\phi(z) := \frac{1}{n} \sum_{\substack{abc=n \\ 0\leq c_1,c_2<c \\ 0\leq b_1<b}} \phi\left(\begin{pmatrix} a & b_1 & c_1 \\ 0 & b & c_2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot z\right).$$

Tout comme dans le cas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, les opérateurs de Hecke possèdent des propriétés de commutativité et de multiplicativité.

Proposition 1.3.13. *Les opérateurs de Hecke pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ sont normaux pour le produit de Petersson, commutent entre eux et avec les opérateurs de Casimir Δ_2 et Δ_3.*

Pour la démonstration, nous pouvons se référer au théorème 6.4.6 de [Gol06]. et la remarque qui suit la démonstration.

Les formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ qui sont propres pour les opérateurs de Hecke sont dites de Hecke–Maaß.

Proposition 1.3.14 (Multiplicativité des coefficient de Fourier)**.** *Soit ϕ une forme de cuspidale de Hecke–Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ qui a la décomposition de Fourier (1.3.1) normalisée telle que $A(1,1) = 1$. Nous avons alors*

$$T_n\phi = A(n,1)\phi.$$

De plus, les coefficients de ϕ vérifient les règles de multiplicativité suivantes :

$$\begin{aligned} &A(m_1m_1', m_2m_2') = A(m_1,m_2)A(m_1',m_2'), && \text{si } (m_1m_2, m_1'm_2') = 1 \\ &A(p^k,1)A(p^{k_1},p^{k_2}) = \sum_{\substack{d_0+d_1+d_2=k \\ 0\leq d_1\leq k_1 \\ 0\leq d_2\leq k_2}} A\left(p^{k_1+d_0-d_1}, p^{k_2+d_1-d_2}\right). \end{aligned}$$

Pour la démonstration, voir le théoreme 6.4.11 de [Gol06].

Remarque 1.3.15. *Nous pouvons remarquer que les deux relations données sont suffisantes. En effet la dernière égalité appliquée à $k_1 = 0$ permet d'exprimer tous les $A(p^{k_1}, p^{k_2})$ sous forme de combinaisons linéaires de termes de la forme $A(p^i, 1)A(1, p^j)$ à l'aide d'une inversion de Möbius.*

Remarque 1.3.16. *Comme pour les formes sur* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$*, nous pourrions définir les opérateurs $T_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ avec $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ par*

$$T_{\epsilon_1,\epsilon_2}\phi(z) = \phi\left(\begin{pmatrix}\epsilon_1\epsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot z \cdot \begin{pmatrix}\epsilon_1\epsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Il est cependant aisé de voir que nous avons toujours $T_{\epsilon_1,\epsilon_2} f = f$. Cela signifie que toutes les formes de Maaß pour $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ *sont paires. Nous pouvons traduire cela par des relations sur les coefficients de Fourier : $A(m_1, m_2) = A(m_1, -m_2)$.*

1.4 Fonctions L

Après avoir défini les formes de Maaß, nous pouvons leur associer des séries de Dirichlet que nous prolongerons analytiquement en des fonctions appelées fonctions L. Afin d'en comprendre les propriétés, il est bon de rappeler le cas de la fonction ζ de Riemann et ses propriétés classiques.

1.4.1 Fonction ζ de Riemann

On définit la fonction ζ de Riemann pour tout nombre complexe s de partie réelle $\mathrm{Re}(s) > 1$ par la série de Dirichlet suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.1. *La fonction ζ de Riemann possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. De plus, elle possède le produit eulérien (pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$*)*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

En outre, elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \xi(1-s)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Il est important pour la suite de comprendre l'origine de ces propriétés. Le produit eulérien provient de la multiplicativité (triviale) des coefficients de la série de Dirichlet qui sont tous égaux à 1. Le prolongement analytique provient de l'identité

$$\xi(s) = \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}}\left(\theta(y) - \frac{1}{2}\right)\frac{dy}{y}$$

où la fonction thêta est définie par

$$\theta(y) = \frac{1}{2} \sum_n e^{-\pi n^2 y}.$$

On utilise alors le fait que θ est à décroissance rapide pour prolonger jusqu'à $\mathrm{Re}(s) > 0$. Finalement, nous obtenons l'équation fonctionnelle grâce aux propriétés d'automorphie de θ : $\theta(y^{-1}) = y^{-1/2}\theta(y)$. Cette identité provient de la formule de poisson et du fait que la fonction de Gauss est invariante par la transformée de Fourier.

1.4.2 Fonctions L tordues par un caractère de Dirichlet

Puisque les formes de Hecke–Maaß définies précédemment possèdent les propriétés d'automorphie et de multiplicativité de coefficients, nous pouvons construire des fonctions L aux propriétés similaires à celles de la fonction ζ de Riemann. Il s'agit ici des fonctions L de Dirichlet et des fonctions L associées à une forme de Maaß tordues par un caractère de Dirichlet.

Définition 1.4.2. *Soit χ un caractère de Dirichlet, f une forme de Maaß cuspidale sur* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *ayant pour décomposition* (1.2.1) *et ϕ une forme de Maaß cuspidale sur* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *ayant pour décomposition* (1.3.1)*. Définissons alors pour* $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &:= \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \\ L(s,f\otimes\chi) &:= \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda(n)\chi(n)}{n^s}, \\ L(s,\phi\otimes\chi) &:= \sum_{n\geq 1} \frac{A(n,1)\chi(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

Dans les deux derniers cas, nous pouvons aussi prendre $\chi \equiv 1$, le caractère trivial. Nous noterons alors $L(s,f)$ et $L(s,\phi)$ les fonctions L usuelles associées aux formes de Maaß.

Tout comme pour la fonction ζ de Riemann, la multiplicativité des coefficients des formes de Hecke–Maaß donnent un produit eulérien pour les fonctions L ci-dessus.

De plus, l'automorphie des formes de Maaß permettent d'obtenir des équations fonctionnelles et le prolongement analytique des fonctions L.

Proposition 1.4.3. *Soit χ un caractère de Dirichlet primitif modulo q,f une forme cuspidale de Hecke–Maaß pour* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *de type ν' paire et ϕ une forme cuspidale de Hecke–Maaß pour* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *de type ν. Les fonctions $L(s,\chi)$, $L(s,f\otimes\chi)$ possèdent un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfont les équations fonctionnelles suivantes :*

$$\begin{aligned} \Lambda(s,\chi) &:= \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi) \\ &= i^{\delta}\epsilon(\chi)\Lambda(1-s,\overline{\chi}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(s,f\otimes\chi) &:= q^s G'_{\nu'}(s+\delta) L(s,f\otimes\chi) \\ &= i^{2\delta}\epsilon(\chi)^2\Lambda(1-s,f\otimes\overline{\chi}), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\Lambda(s,\phi\otimes\chi) &:= q^{\frac{3s}{2}}G_\nu(s+\delta)L(\phi,f\otimes\chi)\\ &= i^{3\delta}\epsilon(\chi)^3\Lambda(1-s,\widetilde{\phi}\otimes\overline{\chi}),\end{aligned}$$

où $2\delta = 1-\chi(-1)$ *et*

$$\begin{aligned}G'_{\nu'}(s) &:= \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s-\nu'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+s+\nu'}{2}\right),\\ G_\nu(s) &:= \pi^{-\frac{3s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s-\nu_1-\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-1+s+\nu_1+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\nu_1-\nu_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Nous avons de plus les produits eulériens suivants (pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$*) :*

$$\begin{aligned}L(s,\chi) &= \prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},\\ L(s,f\otimes\chi) &= \prod_p\left(1-\frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}\right)^{-1},\\ L(s,\phi\otimes\chi) &= \prod_p\left(1-\frac{A(p,1)\chi(p)}{p^s}+\frac{A(1,p)\chi(p^2)}{p^{2s}}-\frac{\chi(p^3)}{p^{3s}}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Remarque 1.4.4. *Si nous prenons χ trivial, nous retrouvons dans le premier cas la fonction ζ qui a un pôle en 1. Dans les deux cas suivants, nous retrouvons aussi les fonctions L usuelles pour f et ϕ qui possèdent un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous allons présenter ici la démonstration de l'équation fonctionnelle et le produit eulérien dans le cas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. En effet, le cas des fonctions L de Dirichlet est plus classique. Une démonstration directe du cas de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ est bien plus long et technique, mais l'idée globale ne change pas. Nous pouvons trouver la démonstration de l'équation fonctionnelle pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ dans [Gol06], lemme 7.1.14. Il est également utile de noter la remarque 10.8.7 du même livre qui permet de retrouver plus simplement l'équation fonctionnelle à l'aide de l'expression de la fonction L associée série d'Eisenstein pour le sous groupe parabolique minimal.

Soit f une forme de Hecke–Maaß paire pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ possédant la décomposition de Fourier (1.2.1) et χ un caractère de Dirichlet primitif pair modulo q, le cas impair se traite de manière similaire.

Posons

$$f_\chi(z) := \sum_{m\neq 0}\lambda_f(m)\chi(m)\sqrt{2\pi y}K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx).$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que

$$f_\chi\left(\frac{-1}{q^2z}\right) = \epsilon(\chi^2)f_{\overline{\chi}}(z).$$

Nous avons alors d'une part

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_\chi(iy)y^s \frac{dy}{y} &= \sqrt{2\pi} \sum_{m\neq 0} \lambda_f(m)\chi(m) \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)y^{\frac{1}{2}+s}\frac{dy}{y} \\
&= 2(2\pi)^{-s}\sum_{m\geq 1} \frac{\lambda_f(m)\chi(m)}{m^{\frac{1}{2}+s}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}(y)y^{\frac{1}{2}+s}\frac{dy}{y} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-s}G'_\nu\left(s+\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{1}{2}+s, f\otimes\chi\right).
\end{aligned}$$

Nous avons d'autre part

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_\chi(iy)y^s\frac{dy}{y} &= \int_{\frac{1}{q}}^\infty \left(f_\chi(iy)y^s + f_{\overline{\chi}}\left(\frac{-i}{q^2y}\right)(q^2y)^{-s}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_{\frac{1}{q}}^\infty \left(f_\chi(iy)y^s + \epsilon(\chi)^2 f_{\overline{\chi}}(iy)\,(q^2y)^{-s}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \epsilon(\chi)^2q^{-2s}\int_{\frac{1}{q}}^\infty \left(f_\chi(iy)(q^2y)^s + \epsilon(\overline{\chi})^2 f_{\overline{\chi}}(iy)\,y^{-s}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \epsilon(\chi)^2q^{-2s}2^{-\frac{1}{2}}\pi^sG'_\nu\left(-s+\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{1}{2}-s, f\otimes\chi\right).
\end{aligned}$$

Cela démontre l'équation fonctionnelle. Pour le produit Eulérien, nous avons par multiplicativité des coefficients,

$$L(s, f\otimes\chi) = \prod_{p\ premier} \Phi_p(s)$$

où

$$\Phi_p(s) := \sum_{k\geq 0}\frac{\lambda(p^k)\chi(p)^k}{p^{ks}}.$$

Grâce à l'identité (1.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s}\Phi_p(s) &= \sum_{k\geq 0}\frac{\lambda(p)\lambda(p^k)\chi(p)^{k+1}}{p^{(k+1)s}} \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda(p^{k+1})+\lambda(p^{k-1}))\chi(p)^{k+1}}{p^{(k+1)s}} \\
&= \Phi_p(s) - 1 + \frac{\chi(p)^2}{p^{2s}}\Phi_p(s).
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\Phi_p(s) = \left(1 - \frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)^2}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

□

1.4.3 Equations fonctionnelles approchées

Nous allons démontrer ici les équations fonctionnelles approchées satisfaites par les fonctions L. Puisque la démonstration ne repose que sur de l'analyse complexe, nous démontrerons ces formules dans un cas général. Nous pouvons par exemple trouver ce résultat dans [IK04] (chapitre 5) Soit

$$L(s,\pi)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s},\ L(s,\widetilde{\pi})=\sum_{n\geq 1}\frac{\overline{a}_n}{n^s},$$

qui sont définies pour $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0\in\mathbb{R}$. Supposons alors que nous avions l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}\Lambda(s,\pi):&=q^{\frac{ds}{2}}G(s)L(s,\pi)\\&=\epsilon(\pi)q^{\frac{d(1-s)}{2}}G(1-s)L(1-s,\widetilde{\pi})\\&=\epsilon(\pi)\Lambda(1-s,\widetilde{\pi})\end{aligned}$$

où α est un complexe de module 1 et G est un produit de fonction Γ. Si nous supposons de plus que les fonctions $\Lambda(s,\pi)$ et $\Lambda(s,\widetilde{\pi})$ sont entières, nous avons alors :

Proposition 1.4.5. *Soit L une fonction comme ci-dessus. Supposons de plus que λ est une fonction entière. Nous avons alors pour $|\mathrm{Re}(\alpha)|<\frac{1}{2}$*

$$L\left(\frac{1}{2}+\alpha,\pi\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}V_G\left(\frac{n}{Xq^{\frac{d}{2}}}\right)+\epsilon(\pi)q^{-d\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{\overline{a}_n}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}V_G\left(\frac{nX}{q^{\frac{d}{2}}}\right)\tag{1.4.1}$$

pour $X>0$, où

$$V_g(y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)}y^{-s}\frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}.\tag{1.4.2}$$

Démonstration. La démonstration repose sur le principe de Phragmén–Lindelöf. Commençons par appliquer le théorème des résidus sur un rectangle :

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R_t}X^s\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)\frac{ds}{s}$$

où R_t est le rectangle $|\mathrm{Re}(s)|\leq\sigma_0+1$, $|\mathrm{Im}(s)|\leq t$. De plus, si $\mathrm{Re}(s)=\sigma_0+1$, alors

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)\ll q^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}\left|G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)L\left(\frac{3}{2}+\mathrm{Re}(\alpha)+\sigma_0,\pi\right)\right|.$$

Puisque $G(s)$ est à décroissance rapide, en $\mathrm{Im}(s)$, il en est de même pour $\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)$ sur cette droite. En appliquant l'équation fonctionnelle de Λ, il en est de même pour la droite $\mathrm{Re}(s)=-\sigma_0-1$. Enfin, le principe de Phragmén–Lindelhöf permet de conclure que la fonction $\Lambda(1/2+\alpha+s)$ est à décroissance rapide uniforme sur la bande $|\mathrm{Re}(s)|\leq\sigma_0+1$. Il est donc possible de faire tendre t vers l'infini :

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)} X^s\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)\frac{ds}{s} - \frac{1}{2i\pi}\int_{(-\sigma_0-1)} X^s\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)} X^s\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)\frac{ds}{s} - \epsilon(\pi)\frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)} X^{-s}\Lambda\left(\frac{1}{2}-\alpha+s,\overline{\pi}\right)\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, nous avons fait le changement de variable $s \mapsto -s$ et nous avons appliqué l'équation fonctionnelle. Enfin, nous pouvons expliciter la première intégrale (la deuxième se fait de manière identique) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)} X^s\Lambda\left(\frac{1}{2}+\alpha+s,\pi\right)\frac{ds}{s} &= \frac{q^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}}{2i\pi}\int_{(\sigma_0+1)} q^{\frac{ds}{2}}X^sG\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha+s}}\frac{ds}{s}\\ &= q^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}V_G\left(\frac{n}{Xq^{\frac{d}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à diviser l'identité obtenue par

$$q^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)$$

pour obtenir le résultat voulu. □

Nous pouvons également établir des bornes sur V_G. Supposons que nous avons

$$G(s) := \pi^{-\frac{ds}{2}}\prod_{i=1}^{d}\Gamma\left(\frac{s+\mu_i}{2}\right)$$

avec $-1/2 < \mu_1 \leq ... \leq \mu_d \leq 1/2$. On dispose alors du résultat suivant

$$V_G(y) = \begin{cases} 1 + O_\epsilon\left(y^{\frac{1}{2}+\mu_1-\epsilon}\right), \\ O_A\left(y^{-A}\right). \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Afin d'obtenir ces résultats, il suffit d'écrire la définition de V_G :

$$V_G(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(5)} y^{-s}\frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}$$

L'intégrande est holomorphe et est à décroissance rapide en $\mathrm{Im}(s)$ uniformément sur les bandes verticales $\{s \in \mathbb{C}, a < \mathrm{Re}(s) < b\}$. Nous pouvons donc, comme dans la démonstration de l'équation fonctionnelle approchée, déplacer la droite d'intégration en traversant potentiellement le pôle en 0 dont le résidu vaut 1. En déplaçant la courbe d'intégration à droite, nous avons pour tout $A > 0$

$$V_G(y) \ll \int_{(A)} |y^{-s}|\left|\frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\right|\frac{ds}{|s|} \ll_A y^{-A}$$

En déplaçant la droite d'intégration en $-1/2-\mu_1+\epsilon$, nous ne rencontrons que le pôle en 0 par hypothèse sur les pôles de G. Il vient donc

$$\begin{aligned} V_G(y) &= 1 + \frac{1}{2i\pi}\int_{(-1/2-\mu_1)} y^{-s}\frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\frac{ds}{s}} \\ &= 1 + O_\epsilon\left(y^{\frac{1}{2}+\mu_1-\epsilon}\right). \end{aligned}$$

1.4.4 Formule de Voronoï

Nous énonçons ici la formule de Voronoï pour les formes de Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. Il s'agit d'une formule sommatoire, similaire à l'équation fonctionnelle approchée, qui s'applique principalement dans le cas où la forme de Maaß est tordue par un caractère additif.

Proposition 1.4.6 (Formule de Voronoï)**.** *Soit ϕ une forme de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ et q un nombre premier. Soit de plus W une fonction lisse à support dans $[1/2,2]$. Nous avons alors pour $(a,q)=1$*

$$\begin{aligned} &\sum_{m\in\mathbb{N}} A(m,1)(e_q(m\overline{a})+e_q(-m\overline{a}))W\left(\frac{m}{M}\right) \\ &\qquad = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{m>0}\frac{A(1,m)}{m}(Kl_2(am;q)+Kl_2(-am;q))\Psi\left(\frac{mM}{q^3}\right) \\ &\qquad + 2\pi^{-\frac{3}{2}}\sum_{m>0}\frac{A(q,m)}{m}\Psi\left(\frac{mM}{q}\right) \end{aligned}$$

où

$$\Psi(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} y^{-s}\frac{G(1+s)}{G(-s)}\mathcal{M}W(-s)ds.$$

Cette formule a été obtenue par Miller et Schimd [MS06]. Nous avons également une démonstration directe par Goldfeld et Li dans [GL08] qui la généralise pour $GL(n)$. Cependant, leur démonstration repose essentiellement sur des lemmes permettant de démontrer l'équation fonctionnelle des fonctions L considérées. Nous pouvons alors remarquer que nous pouvons écrire l'exponentielle dans la somme de gauche comme une somme sur les caractères de Dirichlet et appliquer directement l'équation fonctionnelle après avoir effectué une inversion de Mellin sur W. Cela revient à la même preuve que celle de l'équation fonctionnelle approchée.

1.5 Coefficients des formes de Maaß

L'étude des coefficients des formes de Maaß est intéressant en elle-même. Ici, nous n'exposerons ces résultats que comme des outils servant à mener des calculs. Dans toute la section, nous fixons une forme de Hecke–Maaß f (resp. ϕ) pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$) ayant la décomposition de Fourier (1.2.1) (resp. (1.3.1)).

1.5.1 Bornes triviales

En utilisant les convolutions de Rankin–Selberg, nous pouvons obtenir que nous avons les bornes simples suivantes.

Proposition 1.5.1. *Nous avons les bornes suivantes :*

$$\sum_{n<N} |\lambda(n)|^2 \ll N^{1+\epsilon} \tag{1.5.1}$$

$$\sum_{n<N} |A(n,1)|^2 \ll N^{1+\epsilon}. \tag{1.5.2}$$

Cela donne également les bornes ponctuelles $|\lambda(n)| \ll n^{\frac{1}{2}}$ et $|A(n,1)| \ll n^{\frac{1}{2}}$. Ces bornes sont loin d'être optimales. La conjecture de Ramanujan–Petersson exprime que le comportement moyen des coefficients (qui se comportent en moyenne comme une constante) est vérifié ponctuellement. Cette conjecture a d'abord été formulée dans les années 1930 pour les formes modulaires : les coefficients de telles formes doivent se comporter essentiellement comme la fonction diviseur.

Conjecture 1.5.2 (Ramanujan–Petersson)**.** *Nous avons pour tout n et $\epsilon > 0$ les bornes $|\lambda(n)| \ll n^{\epsilon}$ et $|A(n,1)| \ll n^{\epsilon}$.*

1.5.2 Meilleures bornes ponctuelles

Il est extrêmement difficile de s'approcher des bornes optimales. Cependant nous avons les résultats suivants dus à Kim et Sarnak [Kim03].

Théorème 1.5.3 (Kim–Sarnak)**.** *Nous avons*

$$|\lambda(n)| \ll n^{\frac{7}{64}+\epsilon}$$
$$|A(n,1)| \ll n^{\frac{5}{14}+\epsilon}$$

Nous remarquons que si ϕ est auto-adjointe, nous pouvons améliorer le deuxième exposant en $7/32$. En effet, dans ce cas, ϕ correspond au carré symétrique d'une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ce qui implique que ses paramètres de Satalé sont des carrés de paramètres de la forme sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sous-jacente (nous pourrons par exemple trouver ce résultat dans [Shi75]).

1.5.3 Bornes moyennes

Les bornes (1.5.1) et (1.5.2) sont optimales dans le sens où nous ne pouvons pas espérer mieux que la conjecture de Ramanujan–Petersson en moyenne. Cependant, en retirant le module de la somme, il peut y avoir des annulations entre les coefficients de Fourier. De l'analyse de Fourier permet d'obtenir une telle annulation pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Proposition 1.5.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, Nous avons la borne suivante, uniforme en α :*

$$\sum_{n<N} \lambda(n)e(\alpha n) \ll N^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi y}\lambda(n)K_{it_f}(2\pi n y)e(\alpha n) &= \int_0^1 f(x+iy)e(n(\alpha-x))dx \\ &= \int_0^1 f(x+\alpha+iy)e(-nx)dx.\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $y^{-1}dy$, nous obtenons

$$C\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}e(\alpha n) = \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x+\alpha+iy)\frac{dy}{y}\right) e(-nx)dx.$$

L'intégrale sur y à droite est convergente et est bornée indépendamment de x et α (voir [Iwa02] borne (8.3')). De plus, C est une constante qui ne dépend que de f. En sommant sur n, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n<N} \frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}e(\alpha n) &\ll \int_0^1 \left|\sum_{n<N} e(-nx)\right| dx \\ &\ll N^\epsilon.\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à effectuer une sommation par partie :

$$\begin{aligned}\sum_{n<N} \lambda(n)e(\alpha n) &\ll \sum_{n<N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\leq n} \frac{\lambda(k)}{\sqrt{k}}e(\alpha k) \\ &\ll N^{\frac{1}{2}+\epsilon}.\end{aligned}$$

□

Un analogue pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ n'est pas aussi aisé à démontrer car le groupe $U_3(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif, ce qui empêche d'accéder aux coefficients de Fourier facilement. Cependant, nous avons le résultat suivant du à Miller [Mil06].

Théorème 1.5.5 (Miller). *Avec les notations précédentes et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons la borne :*

$$\sum_{m\leq M} A(m,1)e(\alpha m) \ll M^{\frac{3}{4}+\epsilon}. \tag{1.5.3}$$

qui est uniforme en α.

Cette borne améliore la borne triviale par un facteur de $M^{\frac{1}{4}}$. Cela n'est pas suffisant pour notre dernière application. Nous utiliserons la conjecture folklorique suivante qui assure la non corrélation optimale des coefficients et des caractères additifs.

Conjecture 1.5.6. *Avec les notations précédentes et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons la borne :*

$$\sum_{m\leq M} A(m,1)e(\alpha m) \ll M^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

qui est uniforme en α.

1.5.4 Bornes pour les paramètres archimédiens

Soit g une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de type ν. Il est intéressant de connaître la partie réelle de ν qui intervient dans les facteurs gamma de l'équation fonctionnelle.

Proposition 1.5.7. *Soit f une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de type ν non nulle. Nous avons alors $\mathrm{Re}(\nu) = 1/2$.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\nu(1-\nu)\langle f,f\rangle &= \langle \Delta f, f\rangle = \langle f, \Delta f\rangle = \overline{\nu(1-\nu)}\langle f,f\rangle \\ |\nu(1-\nu)|^2\langle f,f\rangle &= \langle \Delta f, \Delta f\rangle > 0\end{aligned}$$

En effet, si nous avions $\Delta f = 0$ dans la deuxième ligne, f serait une fonction harmonique bornée et g serait alors constante. Nous en déduisons que $\nu(1-\nu) \in \mathbb{R}$. Comme $0 = \mathrm{Im}(\nu(1-\nu)) = \mathrm{Im}(\nu)(1 - 2\mathrm{Re}(\nu))$, nous avons le résultat souhaité. □

Dans le cas de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, cela n'est pas évident. Il est attendu que si ϕ est une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ de type (ν_1,ν_2), alors nous avons encore $\mathrm{Re}(\nu_i) = \frac{1}{2}$. Cependant, nous avons le résultat suivant dû à Kim et Sarnak dans [Kim03].

Théorème 1.5.8 (Kim–Sarnak)**.** *Soit ϕ est une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ de type (ν_1,ν_2). Nous avons alors,*

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}(\nu_1+\nu_2) - 1| &< \frac{5}{14}, \\ |\mathrm{Re}(\nu_1-\nu_2)| &< \frac{5}{14}.\end{aligned}$$

1.6 Bornes sur des sommes exponentielles

Terminons ce chapitre en donnant deux bornes sur des sommes exponentielles qui nous seront utiles par la suite.

Nous avons les bornes suivantes :

Lemme 1.6.1. *Soit q un nombre premier et $(a,b) \neq (0,1) \mod q$. Nous avons alors*

$$\sum_{\alpha \mod q} Kl_2(\alpha;q)Kl_2(b\alpha;q)e_q(a\alpha) \ll q^{\frac{1}{2}+\epsilon}, \tag{1.6.1}$$

$$\sum_{\alpha \mod q} Kl_3(\alpha;q)Kl_3(-b\alpha;q)e_q(a\alpha) \ll q^{\frac{1}{2}+\epsilon}. \tag{1.6.2}$$

Nous ne démontrerons ici que la borne (1.6.1), la deuxième est plus technique et est, par exemple, démontrée dans [BB85], [FKM15], [MS15]...

Démonstration. En explicitant les sommes de Kloosterman, nous avons

$$\sum_{\alpha \mod q} Kl_2(\alpha;q)Kl_2(b\alpha;q)e_q(a\alpha) = \frac{1}{q}\sum_{x,y=1}^{q-1}\sum_{\alpha=0}^{q-1} e_q(x+y+\alpha(\overline{x}+b\overline{y}+a)).$$

Dans le cas où $a = 0$, effectuer la somme sur α donne la congruence $y \equiv -x \mod q$. La somme restante est alors

$$\sum_{x=1}^{q-1} e_q(x(1-b)).$$

Puisque que dans ce cas, nous avons supposé que $b \neq 1$, il s'agit d'une somme de Ramanujan qui vaut -1.

Dans le cas où $\alpha \neq 0 \mod q$, la somme sur α impose la congruence $\overline{y} \equiv -a - b\overline{x}[q]$ qui n'est possible uniquement si $x \neq -a\overline{b}$. La somme devient donc

$$\sum_{\substack{x \mod q \\ x \neq 0, -\overline{a}b}} e_q(x - \overline{a + b\overline{x}}) = \sum_{\substack{x \mod q \\ x \neq 0, -\overline{a}b}} e_q(x - x\overline{(xa + b)}).$$

En posant $z = xa + b$, nous obtenons

$$\sum_{\substack{z \mod q \\ z \neq 0, b}} e_q(\overline{a}(z - b)(1 - \overline{z})) = e_q(-\overline{a}(1 + b)) \sum_{\substack{z \mod q \\ x \neq 0, b}} e_q(\overline{a}z + \overline{a}b\overline{z})$$

Le terme $z = b$ est de module 1. En le rajoutant et en le soustrayant, la somme est alors bornée par

$$|\sqrt{q}Kl_2(\overline{a}^2 b; q)| + 1 \ll q^{\frac{1}{2} + \epsilon}.$$

$\square$

Chapitre 2

Résultats pour un module q fixé

L'objectif de ce chapitre est de calculer les premiers moments des fonctions L associées à des formes de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ tordues par des caractères de Dirichlet. Ce travail à été étudié par Das et Khan dans [DK15] pour les formes de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Le résultat est le suivant.

Théorème 2.0.1 (Das, Khan (2014))**.** *Soit q un nombre premier et f une forme de Hecke–Maaß pair pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Nous avons alors pour tout $\epsilon > 0$*

$$\frac{2}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) = L(1,f) + O\left(q^{-\frac{1}{64}+\epsilon}\right)$$

où l'étoile signifie que nous sommons sur les caractères de Dirichlet pairs et primitifs modulo q.

Cela implique en particulier un résultat de non annulation :

Corollaire 2.0.2. *Pour q un nombre premier assez grand et f une forme de Hecke–Maaß pair pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Il existe alors un caractère χ modulo q non trivial tel que*

$$L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) \neq 0.$$

Il est possible de démontrer de manière similaire le résultat suivant.

Proposition 2.0.3. *Avec les notations du théorème 2.0.1, nous avons*

$$\frac{2}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) = 1 + O\left(q^{-\frac{25}{142}+\epsilon}\right).$$

Si nous supposons vraie la conjecture de Ramanujan–Petersson, l'exposant du terme d'erreur devient alors $-1/4$.

Le passage aux formes sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ pose trois problèmes majeurs. Premièrement, le degré de la fonction L (ou du produit de fonctions L) augmente de 1 ce qui donne des sommes plus longues à borner dans les équations fonctionnelles approchées ainsi que dans la formule de Voronoï. Deuxièmement, la borne de Miller (1.5.3) n'est pas optimale pour les formes sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ et la borne (1.5.4) est un outil crucial de la preuve du Théorème 2.0.1. Finalement, la meilleure constante connue pour la conjecture de Ramanujan–Petersson est bien plus grande pour les formes sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ que sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

La première contrainte est intrinsèque au problème et ne peut être contournée. Afin de faciliter l'évaluation du moment nous supposerons la conjecture de Ramanujan–Petersson. Comme nous le verrons, cela n'est pas suffisant pour trouver un résultat similaire à celui de Das et Khan.

Nous démontrons dans ce chapitre le théorème suivant.

Théorème 2.0.4. *Soit ϕ une forme cuspidale de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ satisfaisant à la conjecture de Ramanujan–Petersson et q un nombre premier. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < \frac{1}{2}$. Nous avons alors pour tout $\epsilon > 0$*

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi \otimes \chi\right) = 1 + O_\epsilon\left(q^{-2\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{4}{7}+\epsilon}\right),$$

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \overline{\chi}\right) = L(1+2\alpha, \phi) + O_\epsilon\left(q^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right).$$

où l'étoile signifie que nous sommons sur les caractères de Dirichlet pairs et primitifs modulo q.

Nous pouvons remarquer que la première identité n'est pertinente que pour $\alpha > 0$ et la deuxième pour $\alpha > \frac{1}{10}$.

Nous pouvons remarquer que la première partie de ce théorème ressemble au résultat principal de [HK10], où la moyenne porte sur les caractères quadratiques. Ici, une difficulté supplémentaire vient de l'apparition de sommes de Gauss dans l'équation fonctionnelle, ce qui empêche d'obtenir une résultat pour $\alpha = 0$.

2.1 Preuve de la première partie du théorème 2.0.4

Commençons par démontrer la première partie du théorème. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha)$, q un nombre premier et

$$S_q := \frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi \otimes \chi\right).$$

où l'étoile signifie que la somme porte sur les caractères modulo q primitifs pairs.

En appliquant les équations fonctionnelles approchée 1.4.5 pour $L(s, \phi \otimes \chi)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} S_q &= \frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} \sum_{m \geq 1} \frac{A(m,1)\chi(m)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^\eta}\right) + q^{-3\alpha} \frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} \epsilon(\chi)^3 \sum_{m \geq 1} \frac{A(1,m)\overline{\chi}(m)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^{3-\eta}}\right) \\ &= S_1(q) + S_2(q) \end{aligned}$$

où $\eta > 0$ et

$$V(y) := \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} y^{-s} \frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \frac{ds}{s}.$$

Ici, $S_1(q)$ et $S_2(q)$ désignent respectivement la première et la deuxième somme. En effectuant les sommes sur les caractères de Dirichlet (en appliquant le lemme 1.1.3), nous obtenons

$$S_1(q) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv \pm 1[q]}} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^\eta}\right) - \frac{2}{\phi(q)} \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^\eta}\right)$$

$$S_2(q) = q^{-\frac{1}{2}-3\alpha} \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(1,m)}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(Kl_3(m;q) + Kl_3(-m;q)\right) V\left(\frac{m}{q^{3-\eta}}\right)$$
$$- \frac{q^{-\frac{3}{2}-3\alpha}}{\phi(q)} \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(1,m)}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}} V\left(\frac{m}{q^{3-\eta}}\right)$$

2.1.1 Terme principal

Commençons par calculer la somme $S_1(q)$ qui va nous donner le terme général. Bornons d'abord le terme d'erreur :

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^\eta}\right) \ll q^{-1} \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{|A(m,1)|}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} \left|V\left(\frac{m}{q^\eta}\right)\right|.$$

En utilisant la deuxième borne de (1.4.3), nous pouvons borner la contribution des termes tels que $m > q^{\eta+\epsilon}$ en $O_\epsilon\left(q^{-1000}\right)$ en prenant A arbitrairement grand dans la borne. Par exemple, pour $A = 1000/\epsilon$ et $y \geq q^\epsilon$,

$$V(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(1000/\epsilon)} y^{-s} \frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \frac{ds}{s} \ll y^{-\frac{1000}{\epsilon}} \ll q^{-1000}.$$

Pour les autres termes, nous avons $V(m/q^\eta) \ll q^\epsilon$. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et en appliquant la deuxième borne de la proposition 1.5.1, cette somme est bornée par

$$q^{-1+\epsilon} \left(\sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} \frac{|A(m,1)|^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} \frac{1}{m^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon}.$$

En effet, nous avons grâce à une sommation par partie

$$\begin{aligned}\sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} \frac{|A(m,1)|^2}{m} &\ll \sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} \left(\sum_{k\leq m} |A(k,1)|^2\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{q^{\eta+\epsilon}} \sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} |A(m,1)|^2 \\ &\ll \sum_{m\leq q^{\eta+\epsilon}} m^{-1+\epsilon} + q^\epsilon \\ &\ll q^\epsilon.\end{aligned}$$

Pour la première somme de $S_1(q)$, le terme $m = 1$ contribue a

$$\begin{aligned}
A(1,1)V\left(\frac{1}{q^\eta}\right) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} q^{\eta s}\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s} \\
&= 1 + \frac{1}{2i\pi}\int_{(-\frac{1}{7}+\epsilon)} q^{\eta s}\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s} \\
&= 1 + O\left(q^{-\frac{1}{7}\eta+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Le coefficient 1/7 vient du fait que les paramètres archimédiens des formes de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ sont de partie réels bornées par 5/14 d'après le résultat de Kim et Sarnak (théorème 1.5.8) Il est donc possible de déplacer le chemin d'intégration qu'à droite de la droite de partie réelle 1/7 afin d'éviter les pôles des fonctions Γ. Dans la première somme, il ne reste que les terme où $m = \pm 1 + kq$ avec $k \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m>1 \\ m\equiv \pm 1[q]}} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{m}{q^\eta}\right) &\ll q^\epsilon \sum_{\substack{1<m\ll q^{\eta+\epsilon} \\ m\equiv\pm 1[q]}} \frac{|A(m,1)|}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}} \\
&\ll q^\epsilon \sum_{1\le k\ll q^{\eta+\epsilon-1}} \frac{|A(kq\pm 1,1)|}{(kq\pm 1)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \\
&\ll q^{-\frac{1}{2}-\alpha+\epsilon} \sum_{1\le k\ll q^{\eta+\epsilon-1}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\alpha-\epsilon}} \\
&\ll q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon}.
\end{aligned}$$

Nous avons ici borné $|A(m,1)|$ ponctuellement car nous avons supposée vraie la conjecture de Ramanujan–Petersson.

Nous avons finalement

$$S_1(q) = 1 + O\left(q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon} + q^{-\frac{1}{7}\eta+\epsilon}\right).$$

2.1.2 Le terme d'erreur $S_2(q)$

Nous bornons directement la somme $S_2(q)$ grâce à la borne de Deligne (1.1.7). Nous obtenons, en utilisant à nouveau la borne (1.4.3) sur V et l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
S_2(q) &\ll q^{-\frac{1}{2}-3\alpha}\sum_{m\ge 1}\frac{|A(1,m)|}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}}|Kl_3(m;q)+Kl_3(-m;q)+q^{-2}|\left|V\left(\frac{m}{q^{3-\eta}}\right)\right| \\
&\ll q^{-\frac{1}{2}-3\alpha+\epsilon}\sum_{1\le m\le q^{3-\eta+\epsilon}}\frac{|A(1,m)|}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}} \\
&\ll q^{-\frac{1}{2}-3\alpha+\epsilon}\left(\sum_{1\le m\le q^{3-\eta+\epsilon}}|A(1,m)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\le m\le q^{3-\eta+\epsilon}} m^{-1+2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll q^{-\frac{1}{2}-3\alpha+\epsilon}q^{\frac{3}{2}-\frac{\eta}{2}+\epsilon}q^{3\alpha-\alpha\eta+\epsilon} \\
&= q^{1-\eta\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+\epsilon}.
\end{aligned}$$

Cette borne est assez brutale car nous ne tirons pas partie des résultats sur sommes de fonctions traces puisqu'elles ne s'appliquent pas dans le cas d'une somme trop courte. Par exemple, nous avons le résultat suivant [KLMS20] (théorème 1.4) :

$$\sum A(m,1)Kl_3(m;q)W\left(\frac{m}{X}\right) \ll_W X^{\frac{5}{6}}q^{\frac{2}{9}}$$

où W est une fonction à support compact dans $[1,2]$. Cependant, cette borne n'est valable que pour $X > q^{\frac{4}{3}}$ (sinon, la borne triviale est meilleure). Pour pouvoir améliorer la borne sur $S_2(q)$, il faudrait une borne similaire qui reste valable pour $X > q^{1-\delta}$. Nous pouvons finalement conclure que

$$S_q = 1 + O\left(q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon} + q^{-\frac{2}{7}\eta+\epsilon} + q^{1-\eta\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+\epsilon}\right).$$

En choisissant $\eta = 2$, nous obtenons

$$S_q = 1 + O\left(q^{-2\alpha+\epsilon} + q^{-\frac{4}{7}+\epsilon}\right).$$

Cela démontre alors la deuxième identité du théorème 2.0.4.

2.2 Preuve de la deuxième partie du théorème 2.0.4

Nous procédons ici de manière similaire. Posons

$$S'(q) = \frac{2}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \phi\otimes\chi\right)L\left(\frac{1}{2}+\alpha, \overline{\chi}\right).$$

En appliquant l'équation fonctionnelle approchée pour le produit $L(s,\phi\otimes\chi)L(s,\overline{\chi})$, nous avons cette fois

$$\begin{aligned} S'_q =& \frac{2}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\sum_{m,n\geq 1}\frac{A(m,1)\overline{\chi}(n)\chi(m)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}}V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right) \\ &+ q^{-4\alpha}\frac{2}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\sum_{m,n\geq 1}\frac{A(1,m)\chi(n)\overline{\chi}(m)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}}V\left(\frac{mn}{q^{4-\eta}}\right) \\ =& S'_1(q) + S'_2(q) \end{aligned}$$

où $\eta > 0$ et

$$V(y) := \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} y^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha+s}{2}\right)G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha}{2}\right)G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}.$$

En effectuant les sommes sur les caractères, nous obtenons

$$S_1'(q) := \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m\equiv\pm n[q]\\ (mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right) + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right),$$

$$S_2'(q) := q^{-\frac{1}{2}-4\alpha} \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (mn,q)=1)}} \frac{A(1,m)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(Kl_2(m\overline{n};q) + Kl_2(-m\overline{n}:q) - \frac{1}{\sqrt{q}\phi(q)}\right) V\left(\frac{mn}{q^{4-\eta}}\right).$$

2.2.1 Terme principal

Le terme principal sera à nouveau donné par l'évaluation de $S_1'(q)$. Comme précédemment, la deuxième somme de $S_1'(q)$ est bornée en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et une sommation par parties de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\sum_{m,n\geq 1} \frac{|A(m,1)|}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right) &\ll \frac{1}{q}\sum_{n<q^{\eta+\epsilon}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha+\epsilon}} \left(\sum_{m<q^{\eta+\epsilon}n^{-1}} \frac{|A(1,m)|^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m<q^{\eta+\epsilon}n^{-1}} \frac{1}{m^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\ll q^{\eta(\frac{1}{2}-\alpha)-1+\epsilon} \sum_{n<q^{\eta+\epsilon}} n^{-1}\\ &= q^{\eta(\frac{1}{2}-\alpha)-1+\epsilon}.\end{aligned}$$

Pour la somme restante, nous avons les termes diagonaux $m=n$ des autres cas. Pour calculer la contribution des termes diagonaux, explicitons la fonction V et calculons le pôle en 0 :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^{1+2\alpha}} V\left(\frac{m^2}{q^\eta}\right) &= \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^{1+2\alpha}} \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} q^{\eta s} m^{-2s} \frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} q^{\eta s}\left(1 - \frac{A(q,1)}{q^{1+2\alpha+2s}} + \frac{A(1,q)}{q^{2+4\alpha+4s}} - \frac{1}{q^{3+6\alpha+6s}}\right)\\ &\qquad \times L(1+2\alpha+2s,\phi)\frac{G\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

En effet, nous avons pour $s>1$

$$\sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^s} = \left(1 - \frac{A(q,1)}{q^s} + \frac{A(1,q)}{q^{2s}} - \frac{1}{q^{3s}}\right) L(s,\phi)$$

grâce au produit eulérien.

Comme précédemment, nous pouvons déplacer la droite d'intégration jusqu'à $\mathrm{Re}(s) = -\frac{1}{7}+\epsilon$ afin de récupérer le résidu en 0 qui vaut $L(1+2\alpha,\phi) + O\left(q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right)$. L'intégrale restante est quant à elle bornée en $O\left(q^{-\frac{2}{7}\eta+\epsilon}\right)$. La somme vaut donc

$$L(1+2\alpha,\phi)+O\left(q^{-\frac{1}{7}\eta+\epsilon}+q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right).$$

Pour le reste de la somme, distinguons les cas suivants si $m>n$ ou $m<n$. Dans le premier cas, Écrivons $m=kq\pm n$ où $k\geq \max(1,\mp n/q)$. Dans l'autre cas, écrivons $n=k'q\pm m$ où $k'\geq \max(1,\mp m/q)$. Calculons alors la contribution des termes du premier cas, le deuxième étant similaire. Nous utilisons à nouveaux les bornes (1.4.3) sur V et l'hypothèse de Ramanujan–Petersson.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m\equiv\pm n[q]\\ (mn,q)=1\\ m>n}}\frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}}V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right)&\ll q^\epsilon\sum_{1\leq n<q^{\eta+\epsilon}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\sum_{\max(1,\mp n/q)\leq k<q^{\eta-1+\epsilon}n^{-1}}\frac{|A(kq\pm n,1)|}{(kq\pm n)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\\ &\ll q^{-\frac{1}{2}+\alpha+\epsilon}\sum_{1\leq n<q^{\eta+\epsilon}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\sum_{\max(1,\mp n/q)\leq k<q^{\eta-1+\epsilon}n^{-1}}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\alpha}}\\ &=q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon}\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$S_1'(q)=L(1+2\alpha,\phi)+O\left(q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon}+q^{-\frac{1}{7}\eta+\epsilon}+q^{-\frac{9}{14}+\epsilon}\right).$$

2.2.2 Terme d'erreur $S_2'(q)$

Tout comme dans la section précédente, nous allons borner la somme $S_2'(q)$ directement avec la borne de Weyl :

$$Kl_2(m;q)\ll q^\epsilon.$$

En effet, les bornes sur les sommes bilinéaires de sommes de Kloosterman (comme par exemple le théorème 1.15) n'apportent rien dans notre plage de sommation.

Nous avons

$$\begin{aligned}S_2'(q)&\ll q^{-\frac{1}{2}-4\alpha}\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (mn,q)=1)}}\frac{A(1,m)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\left(Kl_2(m\overline{n};q)+Kl_2(-m\overline{n}:q)-\frac{1}{\sqrt{q}\phi(q)}\right)V\left(\frac{mn}{q^{4-\eta}}\right)\\ &\ll q^{-\frac{1}{2}-4\alpha}\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ mn<q^{4-\eta+\epsilon}}}\frac{|A(1,m)|}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\\ &\ll q^{-\frac{1}{2}-4\alpha}q^{(4-\eta)\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+\epsilon}\\ &=q^{\frac{3}{2}-\eta\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+\epsilon}.\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure qu'en choisissant $\eta=5/2$, nous avons

$$S_q'=L(1,f)+O\left(q^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\alpha+\epsilon}+q^{-\frac{5}{14}+\epsilon}\right).$$

Chapitre 3

Moyenne additionnelle sur les modules

Ce chapitre a pour but d'obtenir un résultat similaire à celui de Munshi et Sengupta ([MS15]) dans le cas d'un produit de fonctions L. Ils démontrent dans leur article le résultat suivant.

Théorème 3.0.1 (Munshi, Sengupta)**.** *Avec les notations du 3.1.1 (voir plus loin), nous avons*

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{2}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2},\phi\otimes\chi\right) = 1 + O\left(q^{-\frac{1}{2013}+\epsilon}\right).$$

Remarquons que dans leur article, les auteurs ne cherchent pas à optimiser l'exposant du terme d'erreur.

Nous utiliserons essentiellement la même méthode mais nous aurons besoin de supposer la conjecture 1.5.6 vraie qui affirme l'annulation en racine carré des coefficients des formes de Hecke Maaß pour $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$.

Nous pouvons de plus remarquer que l'idée de faire une moyenne additionnelle sur les modules de congruences provient de [Luo05] où Luo démontre un résultat de non annulation pour les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}(n,\mathcal{A}_{\mathbb{Q}})$. La principale différence entre la méthode de Munshi et Sengupta et celle de Luo est le fait de calculer initialement ou non les sommes sur les caractères.

3.1 Preuve du résultat conditionnel

Dans cette section nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit ϕ une forme de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, $\delta > 0$, $Q, Q_1, Q_2, \in \mathbb{Z}$, tels que $Q_1Q_2 = Q$ et $Q_1 \asymp Q^{\frac{3}{4}+\delta}$. Posons de plus*

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N}, q = q_1q_2, q_i \text{ est premier}, Q_i \leq q_i \leq 2Q_i\}.$$

En supposant la conjecture 1.5.6 vraie, nous avons alors

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{2}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} L\left(\frac{1}{2},\phi\otimes\chi\right) L\left(\frac{1}{2},\overline{\chi}\right) = L(1,\phi) + O\left(q^{-\frac{1}{32}+\frac{\delta}{8}+\epsilon}\right)$$

où l'étoile signifie que la somme est prise sur les caractères χ primitifs et pairs. Si nous remplaçons $\mathcal{Q}$ par

$$\mathcal{Q}' = \{q \in \mathbb{N}, q = q_1 q_2, q_i \text{ est premier}, Q_i \leq q_i \leq 2Q_i, q_1 \equiv 2[3]\},$$

nous pouvons alors prendre n'importe quel $\delta > -\frac{1}{4}$.

Remarque 3.1.2. *Remplacer $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{Q}'$ revient à imposer qu'il n'existe pas de racine cubique de l'unité non triviale modulo q_1 lorsque $q = q_1 q_2$ avec $q_1 \asymp Q_1$. En effet, si a est un générateur de $\mathbb{F}_{q_1}^{\times}$ et a^l une racine cubique de l'unité, nous obtenons $a^{3l} = 1$ et donc $3l = k(q_1 - 1)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Si $q_1 \equiv 2[3]$, et alors nécessairement $3|k$ et $l = k'(q_1 - 1)$. Nous avons donc $a^l \equiv 1[q_1]$.*

Corollaire 3.1.3. *Si nous supposons la conjecture* 1.5.6 *vraie, il existe une infinité de caractères de Dirichlet χ tels que*

$$L\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) \neq 0.$$

3.1.1 Application des équations fonctionnelles approchées

Commençons par poser

$$S := \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{2}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}{}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right).$$

Les équations fonctionnelles approchées pour les deux fonctions L sont les suivantes :

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{2}, f \otimes \chi\right) &= \sum_{m \geq 1} \frac{A(m,1)\chi(m)}{m^{\frac{1}{2}}} V_1\left(\frac{m}{q_1^{\eta}}\right) + \epsilon(\chi)^3 \sum_{m \geq 1} \frac{A(1,m)\overline{\chi}(m)}{m^{\frac{1}{2}}} V_1\left(\frac{m}{q^{3-\eta_1}}\right), \\ L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}}} V_2\left(\frac{n}{q_2^{\eta}}\right) + \epsilon(\overline{\chi}) \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}}} V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} V_1(y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} y^{-s} \frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{ds}{s} \\ V_2(y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} y^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Rappelons que les sommes de Gauss intervenant dans les équations fonctionnelles sont définies par

$$\epsilon(\chi) = \sum_{a=0}^{q-1} e_q(a)\chi(a)$$

comme dans le cas où q est premier. Remarquons tout de même que, puisque q_1 et q_2 sont premiers entre eux, il existe deux caractères de Dirichlet χ_i modulo q_i tels que $\chi = \chi_1\chi_2$. Nous avons dans ce cas $\epsilon(\chi) = \chi_1(q_2)\chi_2(q_1)\epsilon(\chi_1)\epsilon(\chi_2)$. Notons aussi que, puisque nous supposons que q est primitif, les caractères χ_i ne sont pas triviaux. En effectuant le produit de ces deux équations fonctionnelles, nous obtenons

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

où

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\sum_{m,n\geq 1}\frac{A(m,1)\chi(m)\overline{\chi}(n)}{\sqrt{mn}}V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right)\\
T_2 &= \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^3\sum_{n,m}\frac{A(m,1)\overline{\chi}(mn)}{\sqrt{mn}}V_1\left(\frac{m}{q^{3-\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right)\\
T_3 &= \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\overline{\chi})\sum_{n,m}\frac{A(m,1)\chi(mn)}{\sqrt{mn}}V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right)\\
T_4 &= \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\sum_{n,m}\frac{A(m,1)\overline{\chi}(m)\chi(n)}{\sqrt{mn}}V_1\left(\frac{m}{q^{3-\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right)
\end{aligned}$$

Les sommes T_1 et T_2 se pourront être évaluées comme dans [MS15]. Commençons par calculer les sommes T_3 et T_4 qui nécessitent l'utilisation de la conjecture 1.5.6.

3.1.2 Calcul de T_3 et T_4

En calculant la somme sur χ, nous obtenons

$$\begin{aligned}
T_3 =&\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{n,m\geq 1}\frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}}\\
&\times\left(e_{q_1}(\pm q_2 mn)e_{q_2}(\pm q_1 mn)-\frac{e_{q_1}(\pm q_2 mn)}{\phi(q_2)}-\frac{e_{\pm q_2}(q_1 mn)}{\phi(q_1)}+\frac{2}{\phi(q)}\right)V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right).
\end{aligned}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\overline{\chi})\chi(a) &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{\chi[q]\\ \chi\ primitif}}\epsilon(\overline{\chi})\chi(a)(1+\chi(-1))\\
&= \frac{1}{\phi(q_1)\phi(q_2)}\sum_{\substack{\chi_1[q_1]\\ \chi_1\ primitif}}\sum_{\substack{\chi_2[q_2]\\ \chi_2\ primitif}}\epsilon(\overline{\chi}_1)\epsilon(\overline{\chi}_2)\chi_1(aq_2)\chi_2(aq_1)(1+\chi_1\chi_2(-1))\\
&=\frac{1}{\phi(q_1)\phi(q_2)}\sum_{\chi_1[q_1]}\sum_{\chi_2[q_2]}\epsilon(\overline{\chi}_1)\epsilon(\overline{\chi}_2)\chi_1(aq_2)\chi_2(aq_1)(1+\chi_1\chi_2(-1))\\
&\quad-\frac{1}{\phi(q_2)}\sum_{\chi_1[q_1]}\epsilon(\overline{\chi}_1)\chi_1(aq_2)(1+\chi_1(-1))\\
&\quad-\frac{1}{\phi(q_1)}\sum_{\chi_2[q_2]}\epsilon(\overline{\chi}_2)\chi_2(aq_1)(1+\chi_2(-1))\\
&\quad+1.
\end{aligned}$$

En utilisant les bornes (1.4.3) pour V_1 et de V_2, nous pouvons sommer jusqu'à $m \leq q^{\eta_1+\epsilon}$ et $n \leq q^{\eta_2+\epsilon}$ avec un terme d'erreur en $O(q^{-1000})$. Pour simplifier les notations, nous ne traiterons que le cas où $\pm$ est $+$. L'autre cas se traite de manière identique. En utilisant une sommation par parties, nous obtenons que la somme sur m est bornée par

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{k\leq m} A(k,1)\left(e_{q_1}(q_2kn)e_{q_2}(q_1kn) - \frac{e_{q_1}(q_2kn)}{\phi(q_2)} - \frac{e_{q_2}(q_1kn)}{\phi(q_1)} + \frac{1}{\phi(q)}\right)\left|\frac{V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)}{\sqrt{m}} - \frac{V_1\left(\frac{m+1}{q^{\eta_1}}\right)}{\sqrt{m+1}}\right|.$$

En utilisant la conjecture 1.5.6, la somme sur k est bornée par $m^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. Nous avons de plus

$$\begin{aligned}\frac{V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)}{\sqrt{m}} - \frac{V_1\left(\frac{m+1}{q^{\eta_1}}\right)}{\sqrt{m+1}} &\ll \int_0^1 \frac{-1}{2(m+x)^{\frac{3}{2}}}V_1\left(\frac{m+x}{q_1^{\eta}}\right) + \frac{1}{q^{\eta_1}(m+x)^{\frac{1}{2}}}V_1'\left(\frac{m+x}{q^{\eta_1}}\right)dx \\ &\ll m^{-\frac{3}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}q^{-\eta_1}\end{aligned}$$

donc la somme sur m est bornée par

$$\sum_{m\leq q^{\eta_1+\epsilon}} \frac{m^{\epsilon}}{q^{\eta_1}} + m^{-1+\epsilon} \ll Q^{\epsilon}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}T_3 &\ll \frac{Q^{\epsilon}}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right) \\ &\ll Q^{-\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}.\end{aligned}$$

Remarquons que si nous n'utilisons pas la conjecture 1.5.6 vraie, la borne ci dessus devient $Q^{\frac{\eta_1}{4}-\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}$, ce qui ne convient pas car l'objectif est de choisir η_2 petit et η_1 grand. Pour la somme T_4, prenons une partition dyadique de l'unité sur m. Il suffit alors de borner des sommes de la forme

$$T_4(M) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\sum_{n,m}\frac{A(1,m)\overline{\chi}(m)\chi(n)}{\sqrt{mn}}W\left(\frac{m}{M}\right)V_2\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right).$$

Considérons la somme sur m :

$$T_4'(M) := \frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\sum_{m}\frac{A(1,m)\overline{\chi}(m)}{\sqrt{m}}W\left(\frac{m}{M}\right).$$

En utilisant l'inversion de Mellin sur W et en appliquant l'équation fonctionnelle de $L(s,\phi\otimes\chi)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}T_4'(M) &= \frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\sum_{m}\frac{A(1,m)\overline{\chi}(m)}{\sqrt{m}}\frac{1}{2i\pi}\int_{(2)}\left(\frac{M}{m}\right)^s\mathcal{M}W(s)ds \\ &= \frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]}\epsilon(\chi)^2\frac{1}{2i\pi}\int_{(2)}M^sL\left(\frac{1}{2}+s,\widetilde{\phi}\otimes\overline{\chi}\right)\mathcal{M}W(s)ds.\end{aligned}$$

En utilisant successivement l'équation fonctionnelle de la fonction L, le changement de variable $s \mapsto -s$ et le décalage de la droite d'intégration de $\mathrm{Re}(s) = -2$ à $\mathrm{Re}(s) = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} T_4'(M) &= \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} \epsilon(\overline{\chi}) \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} \left(\frac{q^3}{M}\right)^s \frac{G(s+\frac{1}{2})}{G(s-\frac{1}{2})} L\left(\frac{1}{2}+s, \phi \otimes \chi\right) \mathcal{M}W(s)ds \\ &= \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} \epsilon(\overline{\chi}) \sum_m \frac{A(m,1)\chi(m)}{\sqrt{m}} \Psi\left(\frac{mM}{q^3}\right) \end{aligned}$$

où

$$\Psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} y^s \frac{G(s+\frac{1}{2})}{G(s-\frac{1}{2})} MW(-s)ds.$$

Remarquons que cela est possible car $\mathcal{M}W$ est une fonction à décroissance rapide en $\mathrm{Im}(s)$ puisque W est à support compact. Nous pouvons remarquer que nous avons directement démontré une formule équivalente à la formule de Voronoï énoncée au chapitre 1. Nous obtenons alors

$$T_4(M) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} \epsilon(\overline{\chi}) \sum_{n,m} \frac{A(m,1)\chi(mn)}{\sqrt{mn}} \Psi\left(\frac{mM}{q^3}\right) V\left(\frac{n}{q^{1-\eta_2}}\right).$$

Cette somme se borne alors comme T_3 par $Q^{-\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}$. Nous avons en effet vu dans le calcul de T_3 que la conjecture 1.5.6 implique que ce type de somme ne dépend pas de la longueur de la somme sur m.

3.1.3 Terme principal : T_1

Comme dans la plupart des problèmes de ce type, nous obtenons le terme principal comme étant composé des termes diagonaux $m = n$. Nous supposerons dorénavant que $q^\epsilon < q^{\eta_2} < \min(Q_1, Q_2)^{\frac{1}{2}}$. Procédons comme dans [MS15]. Nous avons

$$T_1 = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi[q]} \sum_{m,n \geq 1} \frac{A(m,1)\chi(m)\overline{\chi}(n)}{\sqrt{mn}} V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right) V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right)$$

En effectuant la somme sur χ comme pour T_3, nous obtenons

$$\begin{aligned} T_1 = &\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{m \equiv \pm n[q]} \frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}} V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right) V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right) \\ &- \frac{1}{|\mathcal{Q}|\phi(q_1)} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{m \equiv \pm n[q_2]} \frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}} V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right) V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right) \\ &- \frac{1}{|\mathcal{Q}|\phi(q_2)} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{m \equiv \pm n[q_1]} \frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}} V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right) V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right) \\ &+ \frac{2}{|\mathcal{Q}|\phi(q)} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{m,n} \frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}} V_1\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right) V_2\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right). \end{aligned}$$

La dernière somme se borne par $q^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}-1}$ en utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy–Schwarz et une sommation par parties. Les termes diagonaux $m=n$ des autres sommes sont

$$\begin{aligned}\left(1+O(Q_2^{-1})\right)\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{m}\frac{A(m,1)}{m}V\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)V\left(\frac{m}{q^{\eta_2}}\right)\\ =\frac{\left(1+O(Q_2^{-1})\right)}{(2i\pi)^2}\int_{(2)}\int_{(2)}q^{\eta_1 s_1+\eta_2 s_2}L(1+s_1+s_2,\phi)\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s_1\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\frac{ds_1ds_2}{s_1s_2}\end{aligned}$$

Nous pouvons alors déplacer les droites d'intégration en $\mathrm{Re}(s_1)=-1/7+\epsilon$ et $\mathrm{Re}(s_2)=-1/2+\epsilon$ successivement, la contribution des termes diagonaux devient

$$L(1,\phi)\left(1+O(Q_2^{-1})\right)+\frac{\left(1+O(Q_2^{-1})\right)}{(2i\pi)^2}\int_{(-1/2+\epsilon)}q^{\eta_2 s_2}L(1+s_2,\phi)\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\frac{ds_2}{s_2}$$

$$\begin{aligned}&+\frac{\left(1+O(Q_2^{-1})\right)}{(2i\pi)}\int_{(-1/7+\epsilon)}q^{\eta_1 s_1+\eta_2 s_2}L(1+s_1,\phi)\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s_1\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{ds_1}{s_1}\\ &+\frac{\left(1+O(Q_2^{-1})\right)}{(2i\pi)^2}\int_{(-1/2+\epsilon)}\int_{(-1/7+\epsilon)}q^{\eta_1 s_1+\eta_2 s_2}L(1+s_1+s_2,\phi)\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s_1\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\frac{ds_1ds_2}{s_1s_2},\end{aligned}$$

soit une contribution de

$$L(1,f)+O\left(Q^{-\frac{\eta_1}{7}+\epsilon}+Q^{-\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}+Q_2^{-1}\right).$$

Les termes non diagonaux de la première somme correspondent à

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{m,n\geq 1,m\neq n}\frac{A(m,1)}{\sqrt{mn}}\sum_{q\in\mathcal{Q},q|m\pm n}V\left(\frac{m}{q^{\eta_1}}\right)V\left(\frac{n}{q^{\eta_2}}\right).$$

En effet, si $m\equiv\pm n[q]$, alors cela implique que $q|m\mp n$. De plus, puisque nous avons déjà écarté les termes tels que $m=n$, la quantité $m\mp n$ possède au plus $\ln(10+|m\mp n|)$ diviseurs. Puisque les sommes sur m et n sont de longueurs respectives $Q^{\eta_1+\epsilon}$ et $Q^{\eta_2+\epsilon}$ grâce aux bornes (1.4.3) pour un coût négligeable, nous obtenons que la somme sur q est bornée par Q^ϵ. La contribution des termes restant est alors, en utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy–Schwarz, une sommation par parties et la borne (1.5.1),

$$Q^{-1+\epsilon}\sum_{m\leq Q^{\eta_1+\epsilon},\ n\leq Q^{\eta_2+\epsilon}}\frac{|A(m,1)|}{\sqrt{mn}}\ll Q^{\frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2}-1+\epsilon}.$$

3.1.4 Terme restant : T_2

Il ne nous reste plus qu'à calculer la somme restante en effectuant la somme sur χ. Cela se fait exactement comme dans le cas de T_3, et nous obtenons

$$\begin{aligned}
T_2 = &\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}\sum_{\substack{m,n\\(mn,q)=1}}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{3-\eta_1}}\right)V\left(\frac{n}{(q_1q_2)^{\eta_2}}\right)\\
&+\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\phi(q_1)q_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{q_2}}\sum_{\substack{m,n\\(mn,q)=1}}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{3-\eta_1}}\right)V\left(\frac{n}{(q_1q_2)^{\eta_2}}\right)\\
&+\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\phi(q_2)q_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{q_1}}\sum_{\substack{m,n\\(mn,q)=1}}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{3-\eta_1}}\right)V\left(\frac{n}{(q_1q_2)^{\eta_2}}\right)\\
&+\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\phi(q_1q_2)(q_1q_2)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{m,n\\(mn,q)=1}}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{3-\eta_1}}\right)V\left(\frac{n}{(q_1q_2)^{\eta_2}}\right)\\
&+T_2^-,
\end{aligned}$$

où T_2^- est composée de somme identiques aux quatre premières avec un signe $-$ dans toutes les sommes de Kloosterman. Le calcul de cette somme est identique à celui des premières, et nous ne l'écrirons pas. Remarquons aussi que les sommes sur q_1 et q_2 ont des paramètres variant respectivement dans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$. Cela revient exactement à sommer sur $q \in \mathcal{Q}$.

Nous pouvons borner trivialement les trois dernières sommes. Par exemple, en utilisant la borne de Deligne (1.1.7) ainsi que les bornes (1.4.3) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous pouvons borner la deuxième somme par

$$\begin{aligned}
&Q^{-\frac{3}{2}}Q_1^{-2}\sum_{n<Q^{\eta_2+\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q_1,q_2}\sum_{m<Q^{3-\eta_1+\epsilon}}\frac{|A(1,m)|}{\sqrt{m}}|Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)|\\
&\ll Q^{-\frac{1}{2}+\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}Q_1^{-2}\left(\sum_{m<Q^{3-\eta_1+\epsilon}}|A(1,m)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m<Q^{3-\eta_1+\epsilon}}m^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\ll Q^{-1+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}+\epsilon}Q_1^{-2}.
\end{aligned}$$

Rappelons que $Q_1 = Q^{\frac{3}{4}+\delta}$. La deuxième somme est donc bornée en $O\left(Q^{-\frac{1}{2}+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}+2\delta+\epsilon}\right)$. La troisième somme se borne de la même manière en échangeant les rôles de q_1 et q_2 : elle est bornée en $O\left(Q^{\frac{1}{2}+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}-2\delta+\epsilon}\right)$. En effet, nous avons $Q_1Q_2 = Q$ et donc $Q_2 = Q^{\frac{1}{4}-\delta}$. Finalement, la dernière est négligeable devant les deux premières : elle est bornée en $O\left(Q^{-1+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}}\right)$. Au total les trois sommes contribuent à

$$O\left(Q^{\frac{1}{2}+2\delta-\frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}\right).$$

Il ne reste qu'à borner la première somme, ce qui est évidemment le plus difficile. Afin de prendre une partition dyadique de l'unité, il faut prendre quelques précautions. Nous pouvons se ramener aux sommes suivantes :

$$T_2(M,N) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}\sum_{m,n}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)$$
$$\times W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)V_1\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{3-\eta_1}}\right)V_2\left(\frac{n}{(q_1q_2)^{\eta_2}}\right)$$

où M en N sont des réels et W une fonction lisse à support compact dans $[1,2]$. Puisque nous avons les bornes (1.4.3), nous pouvons négliger les contributions des termes où $M > Q^{3-\eta_1+\epsilon}$ ou $N > Q^{\eta_2+\epsilon}$. En développant les fonctions V_1 et V_2, nous avons

$$T_2(M,N) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{(\epsilon)}\int_{(\epsilon)} R_{M,N}(s_1,s_2)\frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s_1\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\frac{ds_2}{s_2}\frac{ds_1}{s_1}$$

où

$$R_{M,N}(s_1,s_2) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}\sum_{m,n}\left(\frac{q^{3-\eta_1}}{m}\right)^{s_1}\left(\frac{q^{\eta_2}}{n}\right)^{s_2}\frac{A(1,m)}{\sqrt{mn}}$$
$$\times Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous obtenons que $R_{M,N}(s_1,s_2)^2$ est borné par

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|^2}\left(\sum_{\substack{q_1\in\mathcal{Q}_1\\ m,n\geq 1}}\frac{|A(1,m)|^2}{q_1nm}W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\right)$$
$$\times\left(\sum_{n,m,q_1}\left(\frac{q^{3-\eta_1}}{m}\right)^{2\epsilon}\left|\sum_{q_2}\left(\frac{q^{\eta_2}}{n}\right)^{s_2}\frac{1}{\sqrt{q}_2}Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)\right|^2 W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\right)$$
$$\ll \frac{(QMN)^\epsilon}{|\mathcal{Q}|^2}\sum_{m,n,q_1,q_2,q_2'}\frac{1}{\sqrt{q_2q_2'}}$$
$$\times Kl_3(mn\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(mn\overline{q}_1^3;q_2)Kl_3(-mn\overline{q_2'}^3;q_1)Kl_3(-mn\overline{q}_1^3;q_2')W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right).$$

Nous pouvons alors appliquer la formule de Poisson à la dernière somme :

$$R_{M,N}(s_1,s_2)^2 \ll \frac{M^{1+\epsilon}}{|Q|^2}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\geq 1\\ q_1,q_2,q_2'}} C(m,n,q_1,q_2,q_2')\widehat{W}\left(\frac{mM}{q_1q_2q_2'}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)$$

où

$$C(m,n,q_1,q_2,q_2') := \frac{1}{q_1(q_2q_2')^{\frac{3}{2}}}\sum_{\alpha \mod q_1q_2q_2'} Kl_3(\alpha n\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(\alpha n\overline{q}_1^3;q_2)$$
$$\times Kl_3(-\alpha n\overline{q_2'}^3;q_1)Kl_3(-\alpha n\overline{q}_1^3;q_2')e_{q_1q_2q_2'}(\alpha m).$$

En intégrant par parties la transformée de Fourier de W, nous obtenons que la contribution des termes $m \geq QQ_2^{\frac{1}{2}}M^{-1}Q^{\epsilon}$ est négligeable. Puisque $(q_1, q_2q_2') = 1$, nous pouvons écrire α de manière unique comme

$$\alpha = \alpha_1 q_2 q_2' \overline{q}_2 \overline{q}_2' + \alpha_2 q_1 \overline{q}_1.$$

Nous pouvons alors écrire

$$C(m, n; q_1, q_2, q_2') = A(m, n; q_1, q_2, q_2')B(m, n; q_1, q_2, q_2')$$

où

$$A(m, n; q_1, q_2, q_2') := \frac{1}{q_1} \sum_{\alpha_1 \mod q_1} Kl_3(\alpha_1 n\overline{q}_2^3; q_1)Kl_3(-\alpha_1 n\overline{q_2'}^3; q_1)e_{q_1}(\alpha_1 m\overline{q}_2\overline{q}_2'),$$

$$B(m, n; q_1, q_2, q_2') := \frac{1}{(q_2q_2')^{\frac{3}{2}}} \sum_{\alpha_2 \mod q_2q_2'} Kl_3(\alpha_2 n\overline{q}_1^3; q_2)Kl_3(-\alpha_2 n\overline{q}_1^3; q_2')e_{q_2q_2'}(\alpha_2 m\overline{q}_1).$$

Nous déterminerons dans la suite des bornes pour A et B selon certains cas.

Bornes pour B

Commençons par borner B. Si $q_2 = q_2'$, la borne de Weil donne

$$B(m, n; q_1, q_2, q_2') \ll Q_2^{-1+\epsilon}$$

Sinon, nous avons $(q_2, q_2') = 1$ et nous pouvons écrire $\alpha_2 = \alpha_2' q_2\overline{q}_2 + \alpha_2'' q_2'\overline{q}_2'$ de manière à séparer à nouveau la somme :

$$B(m, n; q_1, q_2, q_2') = \frac{1}{(q_2q_2')^{\frac{3}{2}}} \sum_{\alpha_2''[q_2]} Kl_3(\alpha_2'' n\overline{q}_1^3; q_2)e_{q_2}(\alpha_2'' m\overline{q}_1\overline{q}_2') \sum_{\alpha_2'[q_2']} Kl_3(\alpha_2' n\overline{q}_1^3; q_2')e_{q_2'}(\alpha_2' m\overline{q}_1\overline{q}_2).$$

Nous avons affaire à un produit de deux sommes identiques. Supposons que $m = 0$. Nous avons alors pour $(k, q_2) = 1$,

$$\sum_{\alpha_2[q_2]} Kl_3(\alpha_2 k; q_2) = \frac{1}{q_2} \sum_{\alpha_2[q_2]} \sum_{a,b=1}^{q_2-1} e_{q_2}(a + b + \alpha_2 k\overline{ab}) = 0$$

Sinon, si $m \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha_2[q_2]} Kl_3(\alpha_2 n\overline{q}_1^3; q_2)e_{q_2}(\alpha_2 m\overline{q}_1\overline{q}_2') &= \frac{1}{q_2} \sum_{a,b=1}^{q_2-1} e_{q_2}(a + b + \alpha_2(n\overline{q_1}^3\overline{ab} + m\overline{q_1q_2'})) \\
&= \sum_{a=1}^{q_2-1} e_{q_2}(a + n\overline{mq_1^2q_2'}\overline{a}) \\
&= \sqrt{q_2}Kl_2(n\overline{mq_1^2}q_2'; q_2) \\
&\ll \sqrt{q_2}.
\end{aligned}$$

A la dernière ligne, nous avons utilisé la borne de Weyl pour borner la somme de Kloosterman 1.1.7. Nous avons donc finalement, dans le cas où $m \neq 0$,

$$B(m,n;q_1q_2q_2') \ll Q_2^{-2+\epsilon}.$$

Bornes pour A

Commençons par traiter le cas où $q_1|m$. Nous pouvons effectuer dans ce cas les sommes successives après avoir développé les sommes de Kloosterman :

$$\begin{aligned}
A(m,n;q_1,q_2,q_2') &= \frac{1}{q_1}\sum_{\alpha_1[q_1]} Kl_3(\alpha_1 n\overline{q}_2^3;q_1)Kl_3(-\alpha_1 n\overline{q_2'}^3;q_1)\\
&= \frac{1}{q_1^3}\sideset{}{^*}\sum_{a_1,a_2,b_1,b_2[q_1]}\sum_{\alpha_1[q_1]} e_{q_1}(a_1+a_2+b_1+b_2+n\alpha_1(\overline{a_1a_2q_2}^3-\overline{b_1b_2q_2'}^3))\\
&= \frac{1}{q_1^2}\sideset{}{^*}\sum_{a_1,a_2,b_1[q_1]} e_{q_1}(a_1+a_2+b_1+a_1a_2\overline{b}_1q_2^3\overline{q_2'}^3)\\
&= \frac{1}{q_1}\sum_{a_1[q_1]} e_{q_1}(a_1+a_1q_2^3\overline{q_2'}^3)-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}\\
&\ll Q_1^{-1}(q_1,q_2^3-q_2'^3).
\end{aligned}$$

En effet, la dernière somme vaut -1 si $\overline{q}_2^3{q_2'}^3 \neq -1[q_1]$ et q_1-1 sinon. Dans le cas où $(q_1,m)=1$, nous pouvons utiliser la borne (1.6.2) pour obtenir

$$A(m,n;q_1,q_2,q_2') \ll q_1^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \ll Q_1^{-\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Il ne reste alors qu'à mettre en commun les bornes obtenues pour A et B pour conclure.

Borne sur C et $T_2(M)$

En utilisant les résultats sur A et B, nous obtenons

$$C(n,q_1,q_2,q_2') \ll Q^\epsilon \begin{cases} Q_2^{-1} \text{ si } m=0,\ q_2=q_2',\\ 0 \text{ si } m=0,\ q_2\neq q_2',\\ Q_1^{-1}Q_2^{-1}(q_1,m) \text{ si } m\neq 0,\ q_2=q_2',\\ Q_1^{-\frac{1}{2}}Q_2^{-2} \text{ si } m\neq 0,\ q_2\neq q_2'.\end{cases}$$

En effet, puisque $q_2,q_2' < q_1^{\frac{1}{3}-\epsilon}$ (car Nous avons supposé $\delta \geq 0$), $q_2^3 = {q_2'}^3$ si et seulement si $q_2 = q_2'$, et donc $q_1|q_2^3-{q_2'}^3$ si et seulement si $q_2=q_2'$. Dans le cas où il n'existe pas de racine cubique de l'unité modulo q_1, nous avons automatiquement que $q_2^3 \equiv {q_2'}^3$ si et seulement si $q_2 \equiv q_2'$. Il suffit alors de supposer que $2Q_2 < Q_1$ (et donc $\delta > -\frac{1}{4}+\epsilon$) pour avoir $q_2 = q_2'$. En utilisant ce résultat, il ne reste plus qu'à calculer $R_{M,N}(s_1,s_2)$:

$$\begin{aligned}
R_{M,N}(s_1,s_2)^2 \ll & \frac{M^{1+\epsilon}}{|Q|^2} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\geq 1\\ q_1,q_2,q_2'}} C(n,q_1,q_2,q_2')\widehat{W}\left(\frac{mM}{q_1q_2q_2'}\right) W\left(\frac{n}{N}\right)\\
\ll & \frac{Q^{\epsilon}M^{1+\epsilon}}{|Q|^2} \sum_{\substack{n\ll N\\ q_1,q_2}} Q_2^{-1}\\
& + \frac{Q^{\epsilon}M^{1+\epsilon}}{|Q|^2} \sum_{\substack{0<|m|\ll QQ_2M^{-1}\\ n\ll N\\ q_1,q_2}} Q_1^{-1}Q_2^{-1}(m,q_1)\\
& + \frac{Q^{\epsilon}M^{1+\epsilon}}{|Q|^2} \sum_{\substack{0<|m|\ll QQ_2M^{-1}\\ n\ll N\\ q_1,q_2,q_2'}} Q_1^{-\frac{1}{2}}Q_2^{-2}\\
\ll & M^{1+\epsilon}N^{1+\epsilon}Q^{-1+\epsilon}Q_2^{-1} + N^{1+\epsilon}Q^{-1+\epsilon}Q_2 + Q^{\epsilon}N^{1+\epsilon}Q_1^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant que $M \leq Q^{3-\eta_1+\epsilon}$, $N \leq Q^{\eta_2+\epsilon}$, $Q_1 \asymp Q^{\frac{3}{4}+\delta}$ et $Q_1Q_2 = Q$, nous avons

$$R_{M,N}(s_1,s_2) \ll Q^{\frac{7}{8}+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}+\frac{\delta}{2}+\epsilon} + Q^{-\frac{3}{8}-\frac{\delta}{2}+\frac{\eta_2}{2}+\epsilon}.$$

En prenant η_2 suffisamment petit, nous obtenons

$$R_{M,N}(s_1,s_2) \ll Q^{\frac{7}{8}+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}+\frac{\delta}{2}+\epsilon}.$$

Finalement, il reste

$$\begin{aligned}
T_2(M,N) \ll & \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{(\epsilon)}\int_{(\epsilon)} |R_{M,N}(s_1,s_2)| \frac{G_\nu\left(\frac{1}{2}+s_1\right)}{G_\nu\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{ds_2}{s_2}\frac{ds_1}{s_1}\\
\ll & Q^{\frac{7}{8}+\frac{\eta_2}{2}-\frac{\eta_1}{2}+\frac{\delta}{2}+\epsilon}.
\end{aligned}$$

3.1.5 Optimisation

En rassemblant tous les résultats précédents, nous obtenons

$$S = L(1,f) + Q^{\epsilon}O\left(Q^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}-1} + Q^{-\frac{\eta_2}{2}} + Q^{\frac{7}{8}-\frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2}+\frac{\delta}{2}}\right).$$

Nous avons l'égalité dans les deux premières bornes si

$$\frac{\eta_1+\eta_2}{2} - 1 = \frac{-\eta_2}{2},$$

donc si

$$\frac{\eta_1}{2} = 1 - \eta_2.$$

Nous avons alors l'égalité dans les deuxième et troisième bornes si

$$-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\eta_2+\frac{\delta}{2}=-\frac{\eta_2}{2}$$

et donc si

$$\eta_2=\frac{1}{16}-\frac{\delta}{4}.$$

Nous pouvons alors prendre n'importe quel $\delta \geq 0$, ce qui donne la première partie du théorème 3.1.1.

Si pour tout $q_1 \in \mathcal{Q}_1$, il n'existe pas de racine cubique modulo Q_1 (ce qui est le cas en restreignant la somme sur les $q_1 \equiv 2[3]$) nous n'utilisons que le fait que $Q_1^{1+\epsilon} > Q_2$. Nous pouvons alors prendre $\delta > -\frac{1}{4}$. Nous obtenons donc le résultat souhaité :

$$S = L(1,\phi) + O\left(Q^{-\frac{1}{32}+\frac{\delta}{4}+\epsilon}\right).$$

3.2 Un résultat non conditionnel

Il est intéressant de mener le calcul sans supposer la conjecture 1.5.6 vraie afin d'obtenir un résultat améliorant le théorème 2.0.4. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit ϕ une forme de Hecke–Maaß sur $SL(3,\mathbb{Z})$, $\delta > 0$, $Q, Q_1, Q_2, \in \mathbb{Z}$ tels que $Q_1Q_2 = Q$ et $Q_1 \asymp Q^{\frac{1}{2}+\delta}$. Posons*

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N}, q = q_1q_2, q_i \text{ est premier}, Q_i \leq q_i \leq 2Q_i, q_1 \equiv 2[3]\}.$$

Nous avons alors

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\chi[q]}{}^{*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha,\phi\otimes\chi\right)L\left(\frac{1}{2}+\alpha,\overline{\chi}\right) = L(1+2\alpha,\phi)+O\left(q^{\frac{1}{8}-\frac{9}{4}\alpha+\frac{\delta}{8}+\epsilon}\right)$$

où l'étoile signifie que la somme est prise sur les caractères χ pair et non primitifs modulo q.

En prenant $\delta = \epsilon$, nous constatons que le terme d'erreur est bien négligeable pour $\alpha > 1/18$, alors que le théorème 2.0.4 n'était valide que pour $\alpha > 1/10$. Nous procéderons comme précédemment.

Il faut remarquer que si nous remplaçons $L(s,\overline{\chi})$ par $L(s,\chi)$ dans le calcul du moment, il est possible d'obtenir $\alpha > 0$. Ce cas est en fait traité dans [Luo05] pour le cas $n = 4$. Ici le fait d'avoir une conjugaison complexe ne permet pas de se ramener directement dans le cas d'une représentation de $GL(4)$. Il est raisonnable de penser qu'avec plus de travail, il serait possible d'appliquer la méthode de Luo. Son principal avantage est de retirer la nécessité d'avoir $Q_2 < Q_1$. Cela pourrait potentiellement améliorer les parties réelles α admissibles et nous étudierons ce problème dans un article résumant cette thèse.

3.2.1 Équation fonctionnelle approchée et terme principal

Ici, nous appliquons l'équation fonctionnelle approchée du produit, et non des fonctions L indépendamment, comme nous l'avions fait dans la section 2.2 du chapitre 2. Si nous posons $\widetilde{S}$

la somme du théorème 3.2.1, nous avons

$$\widetilde{S} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2$$

où

$$\widetilde{T}_1 := \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} \sum_{m,n \geq 1} \frac{A(m,1)\chi(m)\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right),$$

$$\widetilde{T}_2 := \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{q^{-4\alpha}}{\phi(q)} \sum_{\chi[q]}^{*} \epsilon(\chi)^2 \sum_{n,m} \frac{A(m,1)\overline{\chi}(m)\chi(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}} V\left(\frac{m}{q^{4-\eta}}\right)$$

avec

$$V(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(2)} y^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha+s}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \frac{ds}{s}.$$

Après avoir effectué la somme sur χ, la somme $\widetilde{T}_1$ se calcule de manière entièrement similaire à T_1, ce qui permet d'obtenir le même résultat que pour S'_1, sans recourir à l'hypothèse de Ramanujan–Petersson. La somme sur χ donne

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_1 =& \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{m \equiv \pm n[q] \\ (mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right) + ET(\eta) \\
=& \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{(mn,q)=1} \frac{A(m,1)}{m^{1+2\alpha}} V\left(\frac{m^2}{q^\eta}\right) \\
&+ \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{m \equiv \pm n[q] \\ (mn,q)=1 \\ m \neq n}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} V\left(\frac{mn}{q^\eta}\right) + ET(\eta)
\end{aligned}$$

où le terme d'erreur $ET(\eta)$ correspond aux trois dernières sommes du calcul de T_1, et sont aussi bornées par $O\left(Q_2^{-1+\epsilon}\right)$. En développant V et en déplaçant la droite d'intégration, la première somme contenant les termes diagonaux devient comme dans la section précédente,

$$\begin{aligned}
(1+O(Q_2^{-1}))&\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \int_{(2)} q^{\eta s} L(1+2\alpha+2s) \frac{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha+s}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \frac{ds}{s} \\
&= (1+O(Q_2^{-1}))L(1+2\alpha) \\
&+ \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \int_{(-1/7+\epsilon)} q^{\eta s} L(1+2\alpha+2s) \frac{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha+s}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha}{2}\right) G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \frac{ds}{s} \\
&= L(1+2\alpha,\phi) + O(Q_2^{-1+\epsilon} + Q^{-\frac{\eta}{7}+\epsilon}).
\end{aligned}$$

La somme des termes non diagonaux se borne comme dans la section précédente par

$$\sum_{mn<Q^{\eta+\epsilon}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \frac{1}{Q} \sum_{q|m\mp n} 1 \ll Q^{\eta(\frac{1}{2}-\alpha)-1+\epsilon}.$$

Nous obtenons finalement

$$\widetilde{T}_1 = L(1+2\alpha,\phi) + O\left(Q^{\eta\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-1+\epsilon} + Q^{-\frac{1}{7}\eta+\epsilon} + Q^{-\frac{1}{2}+\delta+\epsilon}\right).$$

Cela nous fournit le terme principal.

3.2.2 Calcul de $\widetilde{T}_2$

Le problème restant est d'appliquer la méthode précédente à $\widetilde{T}_2$. Nous avons

$$\widetilde{T}_2 = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q_1,q_2} (q_1q_2)^{-\frac{1}{2}-4\alpha} \sum_{\substack{n,m\\(mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(Kl_2(\pm mn\overline{q_2^2};q_1) - \frac{2}{\sqrt{q_1}\phi(q_1)}\right)$$
$$\times \left(Kl_2(\pm mn\overline{q_1^2};q_2) - \frac{2}{\sqrt{q_2}\phi(q_2)}\right) V\left(\frac{mn}{(q_1q_2)^{4-\eta}}\right).$$

Commençons par remarquer que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_2 = {} & \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q_1,q_2} (q_1q_2)^{-\frac{1}{2}-4\alpha} \sum_{\substack{n,m\\(mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \\ & \times Kl_2(\pm mn\overline{q_2^2};q_1) Kl_2(\pm mn\overline{q_1^2};q_2) V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{4-\eta}}\right) \\ & + O\left(Q^{\frac{3}{4}-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\frac{3}{2}\delta+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

En effet, puisque nous supposons que $Q_2 < Q_1$, le pire terme d'erreur est

$$\begin{aligned}& \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \sum_{q_1,q_2} \frac{2}{q_1^{\frac{1}{2}+4\alpha} q_2^{1+4\alpha}\phi(q_2)} \sum_{n,m} \frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha}} Kl_2(\pm mn\overline{q_2^2};q_1) V\left(\frac{m}{(q_1q_2)^{4-\eta}}\right) \\ & \ll Q^{-1+\epsilon} \sum_{q_1,q_2} \frac{(q_1q_2)^{(4-\eta)(\frac{1}{2}+\alpha)+\epsilon}}{q_1^{\frac{1}{2}+4\alpha} q_2^{2+4\alpha}} \\ & \ll Q^{\frac{3}{2}-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\epsilon} Q_2^{-\frac{3}{2}} \\ & \ll Q^{\frac{3}{4}-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\frac{3}{2}\delta+\epsilon}.\end{aligned}$$

Nous avons en effet choisi ici $Q_2 \asymp Q^{\frac{1}{2}-\delta}$. Nous avons également utilisé la borne de Weyl pour borner la somme de Kloosterman. En pratique, nous aurons $\eta > 2$ et $\delta = \epsilon$, ce qui nous assure que ce terme d'erreur est borné par $Q^{-\frac{1}{4}+\epsilon}$.

Pour la somme restante, nous l'évaluons en prenant des partitions dyadiques de l'unité. Soit W une fonction lisse à support dans le segment $[1/2,2]$. Nous avons à évaluer $O(\ln Q)$ sommes de la forme

$$\widetilde{T}_2(M,N,s) := \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\sum_{q_1,q_2}(q_1q_2)^{-\frac{1}{2}-4\alpha+s}\sum_{\substack{n,m\\(mn,q)=1}}\frac{A(m,1)}{(mn)^{\frac{1}{2}-\alpha+s}}Kl_2(\pm\overline{mnq_2^2};q_1)Kl_2(\pm\overline{mnq_1^2};q_2)$$
$$\times W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)$$

où $MN \ll Q^{4-\eta+\epsilon}$, puisque nous avons dans ce cas

$$\widetilde{T}_2 = \sum_{M,N}\frac{1}{2i\pi}\int_{(\epsilon)}\widetilde{T}_2(M,N;s)\frac{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha+s}{2}\right)G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+\alpha}{2}\right)G_\nu\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\frac{ds}{s}+O\left(Q^{-\frac{1}{4}+\epsilon}\right).$$

Nous allons étudier la somme les sommes $\widetilde{T}_2(M,N;s)$ de deux manières selon que $N < Q^{\frac{1}{2}}$ ou non.

3.2.3 Calcul de $\widetilde{T}_2(M,N)$ pour $N < Q^{\frac{1}{2}}$

Dans ce cas nous procédons de manière similaire à la borne pour T_2 de la section précédente. Après avoir appliqué l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous avons pour $\mathrm{Re}(s) = \epsilon$:

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_2(M,N;s)^2 \ll& \frac{1}{|\mathcal{Q}|^2}\left(\sum_{\substack{q_1\in\mathcal{Q}_1\\m,n\geq 1}}\frac{|A(1,m)|^2}{q_1^{1+8\alpha+\mathrm{Re}(s)}(mn)^{1-2\alpha+\mathrm{Re}(2s)}}W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\right)\\
&\times\left(\sum_{n,m,q_1}\left|\sum_{q_2}\frac{1}{q_2^{\frac{1}{2}+4\alpha+s}}Kl_2(mn\overline{q}_2^2;q_1)Kl_2(mn\overline{q}_1^2;q_2)\right|^2W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\right)\\
\ll& \frac{Q^\epsilon(MN)^{2\alpha+\epsilon}}{Q^2Q_1^{8\alpha}}\sum_{m,n,q_1,q_2,q_2'}\frac{1}{(q_2q_2')^{\frac{1}{2}+4\alpha+\mathrm{Re}(s)}}W\left(\frac{m}{M}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\\
&\times Kl_2(mn\overline{q}_2^2;q_1)Kl_2(mn\overline{q}_1^2;q_2)Kl_2(-mn\overline{q_2'}^2;q_1)Kl_2(-mn\overline{q}_1^2;q_2').\end{aligned}$$

Nous appliquons alors la formule de Poisson pour la somme sur m de sorte à obtenir

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_2(M,N;s)^2 \ll& \frac{Q^\epsilon(MN)^{2\alpha+\epsilon}}{Q^2Q_1^{8\alpha}}\sum_{q_1,q_2,q_2'}\frac{1}{(q_2q_2')^{4\alpha}}\\
&\times\sum_{\substack{n,m\\(mn,q)=1}}A'(m,n;q_1,q_2,q_2')B'(m,n;q_1,q_2,q_2')\widehat{W}\left(\frac{mM}{q_1q_2q_2'}\right)W\left(\frac{n}{N}\right)\end{aligned}$$

où

$$A'(m,n;q_1,q_2,q_2') := \frac{1}{q_1}\sum_{\alpha_1 \mod q_1}Kl_2(\alpha_1\overline{nq_2^2};q_1)Kl_2(-\alpha_1\overline{nq_2'^2};q_1)e_{q_1}(\alpha_1m\overline{q}_2\overline{q}_2'),$$
$$B'(m,n;q_1,q_2,q_2') := \frac{1}{(q_2q_2')^{\frac{3}{2}}}\sum_{\alpha_2 \mod q_2q_2'}Kl_2(\alpha_2\overline{nq_1^2};q_2)Kl_2(-\alpha_2\overline{nq_1^2};q_2')e_{q_2q_2'}(\alpha_2m\overline{q}_1).$$

Il est possible de borner ces quantités de manière entièrement similaire à celles de la section précédente. Pour A', utilisons (1.6.1) à la place de (1.6.2) si $(q_1, m) = 1$. Sinon, si $q_1|m$, un calcul direct donne encore $A' \ll Q_1^{-\frac{1}{2}}$. Pour borner B', utilisons encore la borne de Weyl dans le cas où $q_2 = q_2'$ pour obtenir $B' \ll Q_2^{-1}$. Dans le cas où $q_2 \neq q_2'$, nous pouvons décomposer les congruences modulo q_2 et q_2' de la même manière que dans le calcul de B. Nous obtenons encore dans ce cas $B' \ll Q_2{-}2 + \epsilon$ et $B' = 0$ si $m = 0$. Nous avons,

$$\widetilde{T}_2(M,N;s) \ll (MN)^{\frac{1}{2}+\alpha+\epsilon} Q^{-\frac{1}{2}-4\alpha+\epsilon} Q_2^{-1} + (MN)^{\alpha} N^{\frac{1}{2}} Q^{-4\alpha+\epsilon} Q_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Ici, nous pouvons prendre $Q_1 = Q^{\frac{1}{2}+\delta}$ avec $\delta > 0$.
Nous avons finalement

$$\widetilde{T}_2(M,N;s) \ll Q^{\frac{5}{4}-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\frac{\delta}{2}+\epsilon} + Q^{-\alpha\eta-\frac{\delta}{2}+\epsilon},$$

puisque nous supposons que $MN \leq Q^{4-\eta+\epsilon}$ et $N < Q^{\frac{1}{2}}$.

3.2.4 Calcul de $\widetilde{T}_2(M,N)$ pour $N \geq Q^{\frac{1}{2}}$

Pour se ramener au cas précédent, nous devons prendre un peu plus de précautions. Commençons par appliquer la formule de Poisson à la somme sur n :

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_2(M,N;s) = \frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha}}{|\mathcal{Q}|} &\sum_{q_1,q_2} (q_1q_2)^{-\frac{3}{2}-4\alpha} \sum_{\substack{n,m \\ (mn,q)=1}} \\ &\times \sideset{}{^*}\sum_{\alpha'[q_1q_2]} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}} Kl_2(\pm m\overline{\alpha' q_2^2}; q_1) Kl_2(\pm m\overline{\alpha' q_1^2}; q_2) e_{q_1q_2}(\alpha' n) \\ &\times W\left(\frac{m}{M}\right) \widehat{W}\left(\frac{nN}{q_1q_2}\right)\end{aligned}$$

où

$$\widehat{W}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}} W(x) e(-xy) dx.$$

En décomposant α modulo q_1 et q_2, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_2(M,N) = \frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha}}{|\mathcal{Q}|} &\sum_{q_1,q_2} (q_1q_2)^{-1-4\alpha} \\ &\times \sum_{\substack{n,m \\ (mn,q)=1}} \frac{A(m,1)}{m^{\frac{1}{2}-\alpha}} Kl_3(\pm mn\overline{q_2^3}; q_1) Kl_3(\pm mn\overline{q_1^3}; q_2) W\left(\frac{m}{M}\right) \widehat{W}\left(\frac{nN}{q_1q_2}\right).\end{aligned}$$

Nous constatons ici que nous retrouvons la même somme que celle de T_2, avec pour différence principale que la somme sur n est de longueur N/Q et qu'il y a potentiellement le terme constant $n = 0$. Le terme constant contribue au plus à

$$\frac{(NM)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{Q} \sum_{q_1q_2} \frac{1}{(q_1q_2)^{2+4\alpha}} \ll Q^{-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\epsilon}.$$

Nous pouvons donc supposer que $N \leq Q^{1+\epsilon}$. Pour le reste, nous avons comme pour T_2 une borne en

$$Q^{\epsilon}\frac{(MN)^{\alpha}}{Q^{4\alpha}}\left(\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{2}}Q_2^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{Q}{N}\right)^{\frac{1}{2}}Q_1^{-\frac{1}{2}}\right) \ll Q^{2-\eta\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+\epsilon}N^{-1}Q_2^{-\frac{1}{2}}+Q^{\frac{1}{2}-\eta\alpha+\epsilon}N^{-\frac{1}{2}}Q_1^{-\frac{1}{2}}$$
$$\ll Q^{\frac{5}{4}-\eta(\frac{1}{2}+\alpha)+\frac{\delta}{2}+\epsilon}+Q^{-\alpha\eta-\frac{\delta}{2}+\epsilon}.$$

Nous avons utilisé que $MN \leq Q^{4-\eta+\epsilon}$, $N \geq Q^{\frac{1}{2}}$ et $Q_2 \asymp Q^{\frac{1}{2}-\delta}$. Remarquons encore une fois que nous sommes dans le cas où il n'y a pas de racine cubique modulo q_1, ce qui permet de prendre n'importe quel $\delta > 0$. Nous obtenons ainsi la même borne que précédemment.

Finalement, en prenant $\delta = \epsilon$, $\eta = 9/4$, nous avons

$$\widetilde{S} = L(1+2\alpha,\phi) + O\left(Q^{\frac{1}{8}-\frac{9}{4}\alpha+\epsilon}\right).$$

ce qui conclue la preuve du théorème 3.2.1.

Conclusion

Nous avons donc pu répondre partiellement dans cette thèse au problème initial : existe-t-il des caractères de Dirichlet χ tels que

$$L\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes \chi\right) L\left(\frac{1}{2}, \overline{\chi}\right) \neq 0$$

où ϕ est une forme de Hecke–Maaß sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$? La réponse s'avère être positive si nous remplaçons $1/2$ par $1/2 + \alpha$ où α est de partie réelle assez grande.

Plusieurs pistes de recherche s'offrent à nous quant à l'amélioration de ces résultats. Tout d'abord, il serait intéressant d'améliorer la borne de Miller du Théorème 1.5.5 [Mil06] pour se rapprocher de la borne optimale de la conjecture folklorique 1.5.6. La méthode actuelle peut être aisément améliorée si nous arrivons à obtenir de meilleures bornes sur les moyennes de sommes de Kloosterman.

L'amélioration de telles bornes, comme par exemple le théorème 1.3 de [KLMS20] dans notre cas peuvent s'avérer utiles non seulement dans l'amélioration de la borne de Miller, mais également dans le calcul directe des sommes qui nous concernent.

Une autre piste intéressante que nous avons étudiée et choisie de ne pas faire figurer dans cette thèse est l'étude du cas où la forme de Maaß est auto-adjointe. D'après Gelbart–Jacquet [GJ78] ou Shimura [Shi75], le produit de fonctions L est alors une fonction L de Rankin–Selberg de forme de Maaß sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. L'intérêt principal est de pouvoir écrire les fonctions L comme une intégrale :

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes \chi\right) \Lambda\left(\frac{1}{2}, \chi\right) = \Lambda\left(\frac{1}{2}, f_\chi \times f\right) = \Lambda(1, \chi^2) \iint_{\Gamma_0(q^2)\backslash \mathfrak{h}^2} f_\chi(z) f(z) E\left(z, \frac{1}{2}, \overline{\chi}^2\right) dz^\times$$

où E est la série d'Eisenstein sur le groupe considéré de caractère χ^2. Cela permet de se ramener directement à l'évaluation de somme faisant intervenir des coefficients de Fourier de formes de Maaß sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. De plus, l'utilisation des équations fonctionnelles de f et f_χ rendent plus souple le choix des sommes exponentielles considérées. L'inconvénient principal de cette méthode est l'étude à la pointe 0 qui donne des sommes très longues à borner. Nous envisageons par la suite de revenir sur cette méthode afin de voir l'impact d'une moyenne additionnelle sur les modules comme nous avons fait au chapitre 3.

Enfin, le problème (plus difficile) venant naturellement à l'esprit est celui de l'évaluation du second moment des fonctions L pour $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$. Cela permettrait en effet d'obtenir une proportion positive de caractères donnant une non annulation comme cela à été fait dans [Zac19] ou bien dans [BFK+17]. Pour l'instant, cela semble hors de portée des méthodes considérées ici.

Bibliographie

[BB85] Bryan J Birch and Enrico Bombieri. On some exponential sums. *Annals of Mathematics*, 121(2) :345–350, 1985.

[BF21] Olga Balkanova and Dmitry Frolenkov. Moments of L-functions and the liouville–green method. *Journal of the European Mathematical Society*, 23(4) :1333–1380, 2021.

[BFK+17] Valentin Blomer, Étienne Fouvry, Emmanuel Kowalski, Philippe Michel, and Djordje Milićević. On moments of twisted L-functions. *American Journal of Mathematics*, 139(3) :707–768, 2017.

[BM92] Ramakrishna Balasubramanian and V Kumar Murty. Zeros of dirichlet L-functions. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, volume 25, pages 567–615, 1992.

[Bur63] David A Burgess. On character sums and L-series. II. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) :524–536, 1963.

[Dir37] PG Lejeune Dirichlet. Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression. *Bericht über die Verhandlungen der königlich Presussischen Akademie der Wissenschaften Berlin*, pages 309–312, 1837.

[DK15] Soumya Das and Rizwanur Khan. Simultaneous nonvanishing of Dirichlet L-functions and twists of Hecke-Maass L-functions. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 30(3) :237–250, 2015.

[DS05] Fred Diamond and Jerry Michael Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228. Springer, 2005.

[FKM15] Étienne Fouvry, Emmanuel Kowalski, and Philippe Michel. Trace functions over finite fields and their applications. In *Colloquium de Giorgi 2013 and 2014*, pages 7–35. Springer, 2015.

[GJ78] Stephen Gelbart and Hervé Jacquet. A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3). In *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, volume 11, pages 471–542, 1978.

[GL08] Dorian Goldfeld and Xiaoqing Li. The Voronoi formula for $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathrm{R})$. *Int. Math. Res. Not. IMRN,(2) : Art. ID rnm144*, 39, 2008.

[Gol06] Dorian Goldfeld. *Automorphic forms and L-functions for the group* $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathrm{R})$, volume 99. Cambridge University Press, 2006.

[HK10] Jeff Hoffstein and Alex Kontorovich. The first non-vanishing quadratic twist of an automorphic L-series. *arXiv preprint arXiv :1008.0839*, 2010.

[IK04] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53. American Mathematical Society Providence, RI, 2004.

[IS00] Henryk Iwaniec and Peter Sarnak. The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and landau-siegel zeros. *Israel Journal of Mathematics*, 120(1) :155–177, 2000.

[Iwa02] Henryk Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53. American Mathematical Soc., 2002.

[Kim03] Henry Kim. Functoriality for the exterior square of GL(4) and the symmetric fourth of GL(2). *Journal of the American Mathematical Society*, 16(1) :139–183, 2003.

[KLMS20] Emmanuel Kowalski, Yongxiao Lin, Philippe Michel, and Will Sawin. Periodic twists of GL(3) automorphic forms. In *Forum of Mathematics, Sigma*, volume 8. Cambridge University Press, 2020.

[KMN21] Rizwanur Khan, Djordje Milićević, and Hieu T Ngo. Nonvanishing of dirichlet L-functions, II. *Mathematische Zeitschrift*, pages 1–11, 2021.

[KMV00] Emmanuel Kowalski, Philippe Michel, and Jeffrey VanderKam. Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications. *Inventiones mathematicae*, 142(1) :95–151, 2000.

[Luo05] Wenzhi Luo. Nonvanishing of L-functions for GL(n, A_Q). *Duke Mathematical Journal*, 128(2) :199–207, 2005.

[Mil06] Stephen D. Miller. Cancellation in additively twisted sums on $GL(n)$. *Amer. J. Math.*, 128(3) :699–729, 2006.

[MS06] Stephen D Miller and Wilfried Schmid. Automorphic distributions, L-functions, and Voronoi summation for GL(3). *Annals of mathematics*, 164(2) :423–488, 2006.

[MS15] Ritabrata Munshi and Jyoti Sengupta. On effective determination of Maass forms from central values of Rankin–Selberg L-function. In *Forum Mathematicum*, volume 27, pages 467–484. De Gruyter, 2015.

[Mun15] Ritabrata Munshi. The circle method and bounds for L-functions-IV : Subconvexity for twists of GL(3) L-functions. *Annals of Mathematics*, pages 617–672, 2015.

[MV10] Philippe Michel and Akshay Venkatesh. The subconvexity problem for GL(2). *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 111 :171–271, 2010.

[PY19] Ian Petrow and Matthew P Young. The fourth moment of Dirichlet L-functions along a coset and the Weyl bound. *arXiv preprint arXiv :1908.10346*, 2019.

[Shi75] Goro Shimura. On the holomorphy of certain Dirichlet series. *Proceedings of the London mathematical society*, 3(1) :79–98, 1975.

[Sou00] Kannan Soundararajan. Nonvanishing of quadratic Dirichlet L-functions at $s = 1/2$. *Annals of Mathematics*, 152(2) :447–488, 2000.

[Zac19] Raphaël Zacharias. Simultaneous non-vanishing for Dirichlet L-functions. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 69, pages 1459–1524, 2019.