



N°d'ordre NNT :

**THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET
SAINT-ÉTIENNE**

Membre de l'Université de Lyon

**Ecole Doctorale N°488
Sciences Ingénierie Santé**

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenance prévue le 12/01/2024, par :
Simon Rutard

**Valeurs aux entiers négatifs de fonctions multizêta de
type Hurwitz généralisées et de leurs dérivées.
Applications à certaines fonctions zêta de Witten
rattachées à des algèbres de Lie semi-simples.**

Devant le jury composé de :

Dominique Manchon

Chargé de recherche HDR, Université de Clermont-Auvergne

Kohji Matsumoto

Professeur, Nagoya university, Japan

Driss Essouabri

Professeur, Université Jean Monnet St-Étienne

Boris Adamczewski

Directeur de recherche, Université Claude Bernard Lyon 1

Gautami Bhowmik

Maîtresse de conférence HDR, Université de Lille

Stéphane Gaussent

Professeur, Université Jean Monnet St-Étienne

Marc Munsch

Maître de conférence, Université Jean Monnet St-Étienne

Federico Pellarin

Professeur, University of Rome Sapienza

Président.e

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Examineur

Examinatrice

Examineur

Examineur

Examineur

**Valeurs aux entiers négatifs de fonctions multizêta de
type Hurwitz généralisées et de leurs dérivées.
Applications à certaines fonctions zêta de Witten
rattachées à des algèbres de Lie semi-simples**

Thèse de doctorat en Mathématiques rédigée par
Simon Rutard

Sous la direction de Driss Essouabri
Institut Camille Jordan, Université Jean Monnet

12 Janvier 2024

Sommaire

1	Introduction	1
1.1	Notations	1
1.2	Tour d'horizon sur les fonctions zêta et multizêta	3
1.2.1	Quelques résultats sur les valeurs spéciales de certaines fonctions zêta	3
1.2.2	Quelques résultats sur certaines fonctions multizêta	11
1.2.3	Sur les formule asymptotiques de certaines partitions	14
1.3	Premières définitions	19
1.4	Principaux résultats	22
2	Expansion de Crandall de $Z(s, s')$	35
2.1	Démonstration de la Proposition 1.3.9	35
2.2	Enoncé de la formule de prolongement de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$	37
2.3	Expansion de Crandall directionnelle pour $Z(s, s')$	40
2.3.1	Lemmes	40
2.3.2	Résultats préliminaires	44
2.3.3	Démonstration de la Proposition 2.2.2	55
2.3.4	Démonstration de la Proposition 2.2.4	62
3	Calculs des coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$	67
3.1	Lemmes	67
3.2	Valeurs et dérivées de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$	71
3.2.1	Préliminaires	71
3.2.2	Calcul de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$	73
3.2.3	Calcul de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$	74
4	Démonstration du Théorème A et de ses corollaires	81
4.1	Enoncé du Théorème A	81
4.2	Démonstration du Théorème A	82
4.3	Sur les corollaires du Théorème A	82
4.3.1	Démonstration du Corollaire A1	83
4.3.2	Démonstration du Corollaire A2	83
4.3.3	Démonstration du Corollaire A3	84
5	Démonstration de la Proposition B et du Théorème D	85
5.1	Enoncé de la Proposition B et du Théorème D	85
5.2	Fonctions auxiliaires	86
5.2.1	Démonstration de la Proposition B	89
5.3	Démonstration du Théorème D	92
5.4	Sur les corollaires du Théorème D	100

5.4.1	Démonstration du Théorème C	100
5.4.2	Démonstration du Corollaire C1	101
5.4.3	Démonstration du Corollaire D1	102
5.4.4	Démonstration du Corollaire D2	102
5.4.5	Démonstration du Corollaire D3	104
6	Fonctions zêta de Witten	105
6.1	Généralités sur les algèbres de Lie	105
6.2	Système de racine d'une algèbre de Lie	106
6.3	Quelques résultats sur $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$	109
6.3.1	Pôles et résidus de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$	115
6.3.2	Valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et de $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}$	117
6.3.3	Pôles et résidus de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$	118
6.3.4	Valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$ et $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}$	120
6.4	Application à l'étude du comportement asymptotique de $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$	121
7	Annexe	125
7.1	Codes SAGE	125

Chapitre 1

Introduction

1.1 Notations

Notation. Soit A, B des ensembles. On notera l'inclusion large $A \subset B$ (ce que certains auteurs notent $A \subseteq B$), et l'inclusion stricte $A \subsetneq B$.

Notation. Soit A un ensemble, et $B \subset A$ un sous ensemble de A , on notera $B^c = A \setminus B$. On note $|A| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ le cardinal de A .

Notation. On notera par une lettre en gras pour désigner les multi-indices de la forme $\mathbf{x} = (x_a)_{a \in A} \in \mathbb{C}^A$ avec A un ensemble fini. Soit $B \subset A$, on notera $|\mathbf{x}|_B := \sum_{b \in B} x_b$. Si $B = A$, on notera directement

$$|\mathbf{x}| := |\mathbf{x}|_A.$$

Notation. Soit $1 \leq k \leq n$ des entiers. On notera $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ le vecteur avec un 1 à la k -ième composante, et des 0 ailleurs.

Notation. Soit A et B des ensembles finis, et $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_a)_{a \in A} \in (\mathbb{N}^B)^A$, avec $\mathbf{x}_a = (x_{a,b})_{b \in B}$ pour tout $a \in A$. On pose pour tout $b \in B$,

$$\mathbf{x}(b) := \sum_{a \in A} x_{a,b}.$$

Remarque 1.1.1. Soit A et B des ensembles finis, et $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_a)_{a \in A} \in (\mathbb{N}^B)^A$. Le multi-indice $\mathbf{x}$ correspond à une application $\mathbf{x} : A \times B \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto x_{a,b}$. En particulier, si A ou B est vide, $\mathbf{x}$ correspond à l'application vide. Dans ce cas, on a alors pour tout sous ensemble $\mathcal{A} \subset A$,

$$|\mathbf{x}|_{\mathcal{A}} = 0,$$

et pour tout $b \in B$,

$$\mathbf{x}(b) = 0.$$

Notation. Soit $s \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On note $s = \sigma + i\tau$ avec σ et τ respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de s .

Notation. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. On note H_x le demi-plan complexe ouvert d'abscisse x , et $\overline{H}_x$ son adhérence :

$$H_x := \{s \in \mathbb{C} | \sigma > x\},$$

$$\overline{H}_x := \{s \in \mathbb{C} | \sigma \geq x\}.$$

Notation. Soit $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+$. On note $\overline{D}_a(r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r :

$$\overline{D}_a(r) := \{z \in \mathbb{C} | |z - a| \leq r\}.$$

Notation. Soit $s \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, et $k \in \mathbb{N}$. On note $s_{\Delta,k} := (s, \dots, s) \in \mathbb{C}^k$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement s_{Δ} .

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle n -ième nombre harmonique le nombre rationnel suivant

$$h_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

avec la convention $h_0 = 0$.

On notera $\gamma = 0.5772156649\dots$ la constante d'Euler [OEI23a].

Définition-Propriété 1.1.2. [EMOT81, Chap.1] On note Γ la fonction gamma d'Euler définie sur H_0 par l'intégrale

$$\forall s \in H_0, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

La fonction Γ est holomorphe sur H_0 , et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples aux entiers négatifs. On note Γ son prolongement. On note également ψ la fonction digamma définie sur H_0 par la relation

$$\forall s \in H_0, \quad \psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$

La fonction ψ est holomorphe sur H_0 , et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples aux entiers négatifs.

Rappelons que Γ admet l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s \notin -\mathbb{N}),$$

et au voisinage de $s = 0$, on a le développement asymptotique suivant

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} - \gamma + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) s + O(s^2).$$

Aux entiers positifs, on a

$$\Gamma(N+1) = N!.$$

Rappelons également que la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qu'elle s'annule en les entiers négatifs.

Notation. On pose les coefficients binomiaux et multinomiaux de la manière suivante :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\binom{s}{k} = \begin{cases} \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} & \text{si } k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout entiers $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_P)$ tels que $n = k_1 + \dots + k_P$, on considère le coefficient multinomial :

$$\binom{n}{\mathbf{k}} = \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \dots k_P!} & \text{si } k_p \geq 0 \text{ pour tout } p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce manuscrit, on utilisera la détermination principale du logarithme, et on écrira pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|e^{i \arg(z)}$ avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$.

Par convention, on dira qu'une somme sur l'ensemble vide est nulle, et qu'un produit sur l'ensemble vide vaut 1.

1.2 Tour d'horizon sur les fonctions zêta et multizêta

On s'intéressera dans cette thèse à une classe de fonctions multizêta définie par la série de Dirichlet

$$Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n} + \mathbf{d}))^{-s'_q},$$

avec $P \geq 1$, $Q \geq 1$, $\mathbf{d} \in H_0^P$, et l_q des formes linéaires de rang P , dépendants de chaque variable n_p pour $1 \leq p \leq P$. On étudiera en particulier un domaine de convergence, son prolongement méromorphe, puis on établira des relations entre les valeurs directionnelles aux entiers négatifs de Z et aussi les valeurs spéciales de sa dérivée selon cette même direction.

Notons que des travaux de Komori [Kom10] permettent d'obtenir une expression des valeurs directionnelles en fonction de nombres de Bernoulli généralisés pour une classe plus large de fonctions multizêta. En revanche, ces nombres de Bernoulli généralisés sont parfois difficilement calculables. Les travaux exposés ici permettent d'obtenir des relations explicites en fonction de polynômes de Bernoulli classiques pour les valeurs directionnelles aux entiers négatifs de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. De plus, on obtient également des valeurs explicites pour la dérivée directionnelle en les entiers négatifs de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. On obtient ces expressions à l'aide d'une expansion de Crandall (c.f. [Cra12, §9.2]). Dans [BD18], cette stratégie a déjà fourni des approximations pour $\zeta^{AV}(-N)$ et $\partial_s \zeta^{AV}(-N)$, avec ζ^{AV} la fonction zêta de type Apostol-Vu sur la diagonale :

$$\zeta^{AV}(s) = \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s}.$$

Dans [BD18], Borwein et Tomkins étudient une fonction zêta de type Tornheim :

$$\zeta_P^T(s) := \sum_{n_1, \dots, n_P \geq 1} \frac{1}{n_1^s \dots n_P^s (n_1 + \dots + n_P)^s},$$

et calculent les valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_P^T(s)$, et de la dérivée $\partial_s \zeta_P^T(s)$. Dans [Ono21], Onodera étudie également cette classe de fonction zêta, et calcule également les valeurs de la dérivée seconde en s de $\zeta_P^T(s)$ en les entiers négatifs.

On pourra déduire de nos travaux des formules pour les valeurs spéciales des deux fonctions zêta de Witten suivantes, ainsi que de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s) &:= 6^s \sum_{n_1, n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s} \\ \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s) &:= 120^s \sum_{n_1, n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s (n_1 + 3n_2)^s (2n_1 + 3n_2)^s} \end{aligned}$$

De même, on pourra en déduire des formules pour les valeurs spéciales de certaines fonctions zêta de type Shintani, ainsi que de leurs dérivées

$$\zeta^{Sh}(s, \mathbf{d} | \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_Q) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{q=1}^Q \left(d_q + \sum_{p=1}^P c_{q,p} n_p \right)^{-s},$$

avec $P, Q \geq 1$ des entiers, et $d_q \in H_0$ et $c_{q,p} \in H_0$ pour tout $1 \leq p \leq P$ et $1 \leq q \leq Q$.

1.2.1 Quelques résultats sur les valeurs spéciales de certaines fonctions zêta

On souhaite donner ici un bref récapitulatif des résultats sur les valeurs spéciales de la fonction zêta de Riemann, sur la fonction zêta de Hurwitz, sur les fonctions zêta de Barnes, sur les fonctions zêta d'Euler-Zagier, sur certaines fonctions zêta de Witten et sur les fonctions zêta de Shintani. On mentionnera

également leur domaine d'holomorphie et de méromorphie. On donnera en particulier des résultats sur les valeurs aux entiers négatifs pour certaines de ces fonctions.

Toutes les fonctions zêta mentionnées dans le paragraphe précédent ont un domaine de convergence de la forme $H_{\sigma_0} = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_0\}$ avec $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, et elles sont holomorphes sur leur demi-plan de convergence. Pour donner un sens aux valeurs aux entiers $s = N \in \mathbb{Z}$ ne se situant pas dans le demi-plan de convergence de ces fonctions, on doit au préalable discuter de leur prolongement méromorphe, et de montrer que ce prolongement est régulier en l'entier que l'on considère.

On se propose tout d'abord de rappeler la formule d'Euler-Mac Laurin.

Théorème 1.2.1 (Formule d'Euler Mac-Laurin). *[Ten15] Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier, et $f : [a, b+1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^{k+1} sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b-1} f(n) &= \int_a^b f(t)dt + \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(n+1)!} (f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b b_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

où B_n désigne le n -ième nombre de Bernoulli, et $b_n(t)$ désigne le n -ième polynôme de Bernoulli periodisé.

On rappelle également l'expression de la fonction zêta de Riemann.

Définition 1.2.2. *Soit $s \in \mathbb{C}$. On appelle fonction zêta de Riemann la fonction suivante*

$$\forall s \in H_1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On verra dans la proposition suivante que l'on peut prolonger cette fonction sur $\mathbb{C}$:

Proposition 1.2.3. *La fonction zêta de Riemann est holomorphe sur H_1 , elle se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle en $s = 1$, qui est simple, de résidu 1.*

On peut démontrer le prolongement méromorphe à l'aide de la formule d'Euler Mac-Laurin 1.2.1, et cette formule donne au passage les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers négatifs en fonction des nombres de Bernoulli :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \zeta(-N) = (-1)^N \frac{B_{N+1}}{N+1}.$$

En particulier, on en déduit que $\zeta(-2N) = 0$ pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$.

A l'aide de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, on peut également relier les valeurs de ζ aux entiers positifs avec les valeurs de sa dérivée aux entiers négatifs.

Théorème 1.2.4. *Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on a la relation fonctionnelle*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

On en déduit en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta'(-2N) = \frac{(-1)^N (2N)!}{2^{2N+1} \pi^{2N}} \zeta(2N+1).$$

Pour des petites valeurs, on a également ces résultats-ci :

$$\begin{aligned} \zeta'(0) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi), \\ \zeta'(-1) &= \frac{1}{12} - \ln(A), \end{aligned}$$

avec $A = 1.28242712\dots$ la constante de Glaisher-Kinkelin définie dans [OEI23b].

Définition 1.2.5. Soit $d \in H_0$ un complexe, on appelle fonction zêta d'Hurwitz la fonction zêta

$$\forall s \in H_0, \quad \zeta(s, d) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+d)^s}.$$

Observons qu'en $d = 1$, on retrouve la fonction zêta de Riemann. Cette fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2.6. La fonction zêta de Hurwitz se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle en $s = 1$, qui est simple. De plus, le résidu en ce pôle vaut 1.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Via la formule de Mac-Laurin, on obtient pour $\sigma > 1$ que

$$\begin{aligned} \zeta(s, d) &= \frac{d^{1-s}}{1-s} + \sum_{i=0}^n \binom{-s}{i} \frac{(-1)^i B_{i+1}}{i+1} d^{-s-i} \\ &\quad + (-1)^n \binom{-s}{n+1} \int_0^{+\infty} b_{n+1}(x)(x+d)^{-s-n-1} dx. \end{aligned} \quad (1.1)$$

L'intégrale présente dans la formule précédente converge absolument pour tout $\sigma > -n$. Ainsi, cette formule permet de prolonger méromorphiquement la fonction zêta de Hurwitz pour $\sigma > -n$, avec un pôle unique en $s = 1$, d'ordre 1, et de résidu 1. $\square$

On a également des résultats sur les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Hurwitz (voir [Apo76, Théorème 12.13]) :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \zeta(-N, x) = -\frac{b_{N+1}(x)}{n+1},$$

avec $b_{N+1}(x)$ le $N+1$ -ième polynôme de Bernoulli. De même, il était connu par Hurwitz (voir [Ber85, Formule (3)]) que

$$(\partial_s \zeta(s, d))|_{s=0} = \ln(\Gamma(d)) + \zeta'(0) = \ln(\Gamma(d)) - \frac{1}{2} \ln(2\pi). \quad (1.2)$$

Observons également que, pour tout $s \neq 1$, et tout $d \in H_0$, on a $\zeta(s, d) = d^{-s} + \zeta(s, d+1)$. En dérivant selon s , on trouve alors

$$\partial_s \zeta(s, d)|_{s=-N} = -d^N \ln(d) + \partial_s \zeta(s, d+1)|_{s=-N}. \quad (1.3)$$

Par un jeu de réécriture de la série de Dirichlet $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right)$, on obtient que $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s)$. Ainsi, en dérivant des deux côtés par rapport à s , on trouve

$$\partial_s \zeta\left(s, \frac{1}{2}\right)|_{s=-1} = -\frac{\ln(2)}{6} - \frac{1}{2} \zeta'(-1). \quad (1.4)$$

Des travaux de Miller et Adamchik (voir [MA98]) ont établi des relations explicites entre les valeurs des dérivées de la fonction zêta d'Hurwitz suivant s , en les entiers négatifs, avec un coefficient rationnel d , et des valeurs spéciales de logarithme, de fonctions polygamma, et de la fonction zêta de Riemann.

La fonction zêta d'Hurwitz admet une relation fonctionnelle appelée formule d'Hurwitz. Avant de l'exprimer, on a besoin d'introduire la fonction zêta de Lerch :

Définition 1.2.7. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > 1$, $d \in H_0$, et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$. On pose

$$\phi(z, s, d) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+d)^s}.$$

Cette fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle est même holomorphe pour tout $z \neq 1$, et elle admet un unique pôle, qui est simple, en $s = 1$ lorsque $z = 1$ [EMOT81, §1.11].

Théorème 1.2.8 (Formule d'Hurwitz). [Apo76, §12.7] Soit $d \in]0, 1]$ un réel, et $s \in \mathbb{C}$ un complexe tel que, soit $d \in]0, 1[$ et $\operatorname{Re}(s) > 0$, soit $d = 1$ et $\operatorname{Re}(s) > 1$. Alors,

$$\zeta(1-s, d) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-i\pi s/2} \phi(e^{2i\pi d}, s, 1) + e^{i\pi s/2} \phi(e^{-2i\pi d}, s, 1) \right).$$

Remarquons au passage que le cas $d = 1$ de la formule précédente correspond à l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann.

On mentionne maintenant quelques résultats sur les fonctions zêta de Barnes. On utilisera certains de ces résultats plus tard dans le manuscrit.

Définition 1.2.9. Soit $P \in \mathbb{N}$ un entier, et $(c_1, \dots, c_P)$ une famille de complexes dans H_0 , et $d \in H_0$. On appelle fonction zêta de Barnes la fonction zêta de la forme

$$\forall s \in H_P, \quad \zeta^B(s, d|c_1, \dots, c_P) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{(\sum_{p=1}^P c_p n_p + d)^s}.$$

Cette fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on a

Proposition 1.2.10. [Rui00] La fonction zêta de Barnes $s \mapsto \zeta^B(s, d|c_1, \dots, c_P)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec comme seules singularités des pôles simples en les $s = 1, \dots, P$.

Quelques-uns de nos résultats s'exprimeront en fonction de valeurs spéciales de ces fonctions là. On aura en particulier besoin d'un résultat démontré par Sakane et Aoki dans [SA22]. On pose tout d'abord

$$C_{P,x}(t) := (t-x+P-1)(t-x+P-2)\dots(t-x+1) \in (\mathbb{Z}[x])[t] \quad (P \geq 2),$$

et $C_{1,x}(t) = 1$. Remarquons au passage que $C_{2,x}(t) = t - x + 1$.

Théorème 1.2.11. [SA22, Théorème 4] Soit $d \in H_0$, et $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_P) \in \mathbb{Q}^P$ des rationnels. On écrit $c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, c_P = \frac{a_P}{b_P}$ avec $a_p, b_p \geq 1$ des entiers premiers entre eux pour tout p . On pose

$$x(\mathbf{c}) := \frac{\operatorname{ppcm}(a_1, \dots, a_P)}{\operatorname{pgcd}(b_1, \dots, b_P)}, \text{ et } \beta_1 := \frac{x(\mathbf{c})}{c_1}, \dots, \beta_P := \frac{x(\mathbf{c})}{c_P}, \text{ alors on a}$$

$$\begin{aligned} \zeta^B(s, d|c_1, \dots, c_P) = \\ \frac{x(\mathbf{c})^{-s}}{(P-1)!} \sum_{v_1=0}^{\beta_1-1} \dots \sum_{v_P=0}^{\beta_P-1} \sum_{k=0}^{P-1} C_{P, \frac{d+c_1 v_1 + \dots + c_P v_P}{x(\mathbf{c})}}^{(k)}(0) \zeta\left(s-k, \frac{d+c_1 v_1 + \dots + c_P v_P}{x(\mathbf{c})}\right) \end{aligned}$$

On démontrera une généralisation du théorème précédent dans le Théorème B, en utilisant une stratégie similaire à celle utilisée par Aoki et Sakane dans [SA22].

Exemple 1.2.12. On trouve

$$\begin{aligned} \zeta^B(s, d|1, 1) &= (1-d)\zeta(s, d) + \zeta(s-1, d), \\ \zeta^B(s, d|1, 2) &= 2^{-s} \left[\left(1 - \frac{d}{2}\right) \zeta\left(s, \frac{d}{2}\right) + \left(1 - \frac{d+1}{2}\right) \zeta\left(s, \frac{d+1}{2}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d}{2}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+1}{2}\right) \right], \\ \zeta^B(s, d|1, 3) &= 3^{-s} \left[\left(1 - \frac{d+2}{3}\right) \zeta\left(s, \frac{d+2}{3}\right) + \left(1 - \frac{d+1}{3}\right) \zeta\left(s, \frac{d+1}{3}\right) + \left(1 - \frac{d}{3}\right) \zeta\left(s, \frac{d}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \zeta\left(s-1, \frac{d+2}{3}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+1}{3}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d}{3}\right) \right], \\ \zeta^B(s, d|2, 3) &= 6^{-s} \left[\left(1 - \frac{d+7}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d+7}{6}\right) + \left(1 - \frac{d+5}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d+5}{6}\right) + \left(1 - \frac{d+4}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d+4}{6}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{d+3}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d+3}{6}\right) + \left(1 - \frac{d+2}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d+2}{6}\right) + \left(1 - \frac{d}{6}\right) \zeta\left(s, \frac{d}{6}\right) \right. \\ &\quad \left. + \zeta\left(s-1, \frac{d+7}{6}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+5}{6}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+4}{6}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+3}{6}\right) + \zeta\left(s-1, \frac{d+2}{6}\right) \right. \\ &\quad \left. + \zeta\left(s-1, \frac{d}{6}\right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient au passage les valeurs spéciales $\zeta^B(0, 2|1, 1) = \frac{5}{12}$, $\zeta^B(0, 3|1, 2) = \frac{11}{24}$, $\zeta^B(0, 4|1, 3) = \frac{19}{36}$, et $\zeta^B(0, 5|2, 3) = \frac{31}{72}$. On peut également dériver les formules obtenues précédemment pour $\zeta^B(s, d|c_1, c_2)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (\zeta^B)'(0, 2|1, 1) &= -\zeta'(0, 2) + \zeta'(-1, 2), \\ (\zeta^B)'(0, 3|1, 2) &= -\frac{11 \ln(2)}{24} - \frac{1}{2}\zeta'\left(0, \frac{3}{2}\right) - \zeta'(0, 2) + \zeta'\left(-1, \frac{3}{2}\right) + \zeta'(-1, 2), \\ (\zeta^B)'(0, 4|1, 3) &= -\frac{19 \ln(3)}{36} - \zeta'(0, 2) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) + \zeta'(-1, 2) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right), \\ (\zeta^B)'(0, 5|2, 3) &= -\frac{31 \ln(6)}{72} - \zeta'(0, 2) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{2}\zeta'\left(0, \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{5}{6}\right) \\ &\quad + \zeta'(-1, 2) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{3}{2}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{7}{6}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{6}\right), \end{aligned}$$

en notant $(\zeta^B)' = \partial_s \zeta^B$, et $\zeta'(s, d) = \partial_s \zeta(s, d)$.

Shintani a introduit des fonctions zêta lui permettant d'étudier des fonctions zêta de Dedekind rattachées à un corps de nombre totalement réel (voir [Shi76b], [Shi76a], [Shi77a], [Shi77b], [Shi77c], [Shi80]). Ces fonctions généralisent en particulier les fonctions zêta de Barnes :

Définition 1.2.13. Soit $P, Q \in \mathbb{N}$ des entiers, $\mathbf{c} = (c_{q,p})_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q}$ et $(d_q)_{1 \leq q \leq Q}$ deux familles de complexes dans H_0 . On appelle fonction zêta de Shintani la fonction zêta suivante

$$\zeta^{Sh}(s, \mathbf{d}|\mathbf{c}) = \sum_{n_1, \dots, n_P \geq 0} \prod_{q=1}^Q (c_{q,1}n_1 + \dots + c_{q,P}n_P + d_q)^{-s}.$$

Observons que, pour $Q = 1$, on retrouve la définition de la fonction zêta de Barnes. Cette fonction zêta est holomorphe sur $H_{P/Q}$, et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Shintani a prouvé que cette fonction possède les mêmes pôles que ceux de la fonction $\frac{\Gamma(Ps - Q)}{\Gamma(s)}$. Il a également prouvé certaines formules aux entiers négatifs de ces fonctions. Une partie de notre travail permet en particulier d'étudier les valeurs de certaines de ces fonctions aux entiers négatifs, ainsi que les valeurs de leurs dérivées.

On déduit de ce qui précède que les fonctions zêta de Barnes et de Shintani sont régulières en les entiers négatifs. La valeur de leurs dérivées par rapport à la variable s en $s = 0$ permettent de définir des fonctions multigamma, introduites par Barnes dans [Bar04], puis généralisées par Ruijsenaars.

Définition 1.2.14. Soit $P \in \mathbb{N}^*$ un entier, et $(c_1, \dots, c_P)$ une famille de complexes dans H_0 , et $d \in H_0$. On appelle fonction multigamma de Barnes la fonction

$$\Gamma_P(d|c_1, \dots, c_P) := \exp((\partial_s \zeta^B(s, d|c_1, \dots, c_P))|_{s=0}).$$

Exemple 1.2.15. Soit $d \in H_0$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_0(d|) &= \frac{1}{d} \\ \Gamma_1(d|1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(d), \end{aligned}$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler.

Barnes obtient aussi une relation fonctionnelle

$$\Gamma_P(d|c_1, \dots, c_P) = \Gamma_{P-1}(d|c_1, \dots, c_{P-1}) \Gamma_P(d + c_P|c_1, \dots, c_P),$$

qui généralise la relation fonctionnelle de la fonction gamma d'Euler.

Via les fonctions zêta de Shintani, Friedman et Ruijsenaars ont introduit dans [FR04] des fonctions multigamma de type Shintani, via une construction similaire à celle utilisée par Barnes.

Définition 1.2.16. Soit $P, Q \in \mathbb{N}^*$ des entiers, $\mathbf{c} = (c_{q,p})_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q}$ et $(d_q)_{1 \leq q \leq Q}$ deux familles de complexes dans H_0 . On appelle fonction multigamma de Shintani la fonction :

$$\Gamma_P(\mathbf{d}|\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_P) := \exp((\partial_s \zeta^{Sh}(s, \mathbf{d}|\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_P))|_{s=0}),$$

en notant $\mathbf{c}_q = (c_{q,p})_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$.

Dans [FR04], Friedman et Ruijsenaars étudient ces fonctions multigamma de Shintani pour en déduire des formules de type Raabe, généralisant la formule de Raabe suivante :

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x)) dx = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

On discutera à présent d'une classe de fonctions zêta rattachées à des algèbres de Lie. Witten a introduit dans [Wit91] la série

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\dim(\rho)^{2g}},$$

où g est un entier positif, et ρ parcourt les représentations irréductibles, à isomorphisme près, d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $g \in \mathbb{N}^*$. Witten démontre en particulier que

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\dim(\rho)^{2g}} \in \pi^{2g} \mathbb{Q}.$$

Zagier introduira par la suite les fonctions zêta de Witten :

Définition 1.2.17. [Zag94] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple. On appelle fonction zêta de Witten rattachée à $\mathfrak{g}$ la fonction zêta

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) := \sum_{\rho} \dim(\rho)^{-s},$$

où ρ parcourt les classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$.

On introduit ensuite $r_{\mathfrak{g}}(n)$ le nombre de classes d'isomorphismes parmi les représentations de dimension n .

Définition 1.2.18. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Notons $r_{\mathfrak{g}}(n)$ le nombre de représentations de dimension n de $\mathfrak{g}$, à isomorphisme près.

Il est bien connu qu'une représentation d'une algèbre de Lie semi-simple se décompose de manière unique en somme directe de représentations irréductibles. Ainsi pour une représentation ρ de $\mathfrak{g}$, on a en particulier qu'il existe des entiers $k_1, \dots, k_m$ et des représentations irréductibles $\phi_1, \dots, \phi_m$ tels que

$$\dim(\rho) = \sum_{i=1}^m k_i \dim(\phi_i).$$

Plus précisément, pour les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(5)$ et $\mathfrak{g}_2$, on a :

Exemple 1.2.19. [Hum72, §24.3]

- 1) L'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(3)$ est de la forme $(\phi_{i,j})_{i,j \geq 1}$, avec

$$\dim(\phi_{i,j}) = \frac{ij(i+j)}{2}.$$

On obtient que le nombre de représentations irréductibles de dimension n de $\mathfrak{sl}(3)$ est

$$\left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^{*2} \mid \frac{ij(i+j)}{2} = n \right\} \right|,$$

et on obtient une expression du nombre de représentations $r_{\mathfrak{sl}(3)}(n)$ de $\mathfrak{sl}(3)$:

$$\begin{aligned} r_{\mathfrak{sl}(3)}(n) &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \dim(\phi_{i,j}) = n \right\} \right|, \\ &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \frac{ij(i+j)}{2} = n \right\} \right|. \end{aligned}$$

2) L'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathfrak{so}(5)$ est de la forme $(\phi_{i,j})_{i,j \geq 1}$, avec

$$\dim(\phi_{i,j}) = \frac{ij(i+j)(i+2j)}{3!}.$$

On obtient que le nombre de représentations irréductibles de dimension n de $\mathfrak{so}(5)$ est

$$\left| \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^*2 \mid \frac{ij(i+j)(i+2j)}{3!} = n \right\} \right|,$$

et on obtient une expression du nombre de représentations $r_{\mathfrak{so}(5)}(n)$ de $\mathfrak{so}(5)$:

$$\begin{aligned} r_{\mathfrak{so}(5)}(n) &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \dim(\phi_{i,j}) = n \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \frac{ij(i+j)(i+2j)}{3!} = n \right\} \right|. \end{aligned}$$

3) L'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_2$ est de la forme $(\phi_{i,j})_{i,j \geq 1}$, avec

$$\dim(\phi_{i,j}) = \frac{ij(i+j)(i+2j)(i+3j)(2i+3j)}{5!}.$$

On obtient que le nombre de représentations irréductibles de dimension n de $\mathfrak{g}_2$ est

$$\left| \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^*2 \mid \frac{ij(i+j)(i+2j)(i+3j)(2i+3j)}{5!} = n \right\} \right|,$$

et on obtient une expression du nombre de représentations $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$ de $\mathfrak{g}_2$:

$$\begin{aligned} r_{\mathfrak{g}_2}(n) &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \dim(\phi_{i,j}) = n \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*2} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \frac{ij(i+j)(i+2j)(i+3j)(2i+3j)}{5!} = n \right\} \right|. \end{aligned}$$

Posons $f_{\mathfrak{g}}(n)$ le nombre de représentations irréductibles de dimension n d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Alors par définition des fonctions zêta de Witten, on a

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{\mathfrak{g}}(n)}{n^s}.$$

On verra dans le Chapitre 6 que ces fonctions zêta admettent une écriture simplifiée à l'aide de produits de formes linéaires, via le Théorème de Weyl 6.2.9.

Exemple 1.2.20. [KMT23] On pose $\mathfrak{sl}_{n+1} = \{X \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$, et $\mathfrak{so}_{2n+1} = \{X \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^tX + X = 0\}$, où Tr désigne la trace, et tX désigne la transposée d'une matrice. Pour ces algèbres de Lie, on peut associer des fonctions de zêta de Witten :

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{sl}(2)}(s) &= \zeta(s), \\ \zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s) &= 2^s \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s}, \\ \zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s) &= 6^s \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s}.\end{aligned}$$

Pour l'algèbre de Lie exceptionnelle $\mathfrak{g}_2$ décrite dans [Bou81], on a

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s) = 120^s \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s (n_1 + 3n_2)^s (2n_1 + 3n_2)^s}.$$

Notons que dans la littérature, on trouve parfois des variantes multivariées de ces fonctions zêta dans les travaux de Matsumoto, Komori, Yasushi et Tsumura [KMT10c], [KMT10b], [KMT12], [KMT11b]. Ces auteurs donnent une expression de l'ensemble des singularités de ces fonctions multizêta de Witten. Cela nous permet en particulier d'obtenir des candidats pôles pour la fonction zêta de Witten univariée correspondante.

- De [KMT10d, Théorème 6.2], on en déduit que la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ admet des pôles de la forme

$$s = \frac{1}{2}, \quad s = \frac{1-k}{3} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (1.5)$$

- De [KMT11a, Théorème 3.1], on en déduit que la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$ admet des pôles de la forme

$$s = \frac{1}{3}, \quad s = \frac{1-k}{5} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (1.6)$$

On montrera via la Proposition 2.2.4 que les entiers négatifs ne sont pas des pôles pour $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ et pour $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$.

Ces fonctions zêta sont très adaptées pour étudier les représentations des algèbres de Lie semi-simples, et on peut exprimer leurs valeurs spéciales afin d'obtenir des informations sur ses représentations. En particulier, des travaux de Romik [Rom17] permettent d'étudier le comportement asymptotique du nombre de représentations de degré n de $\mathfrak{sl}(3)$ en fonctions des valeurs $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{sl}(3)}(0)$, ainsi que des résidus de $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s)$ en des singularités de $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}$. Kurokawa et Ochiai dans [KO13] ont étudiés les valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s)$, puis en ont déduit des résultats pour les valeurs de certaines fonctions zêta de Witten p -adiques.

Onodera a par la suite obtenu d'autres formules en étudiant une fonction zêta de type Mordell-Tornheim :

$$\zeta_P^{MT}(s) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{(n_1 + d_1)^s \dots (n_P + d_P)^s (n_1 + d_1 + \dots + n_P + d_P)^s},$$

avec $P \geq 2$ un entier. Observons qu'en posant $P = 2$, on obtient $2^{-s} \zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s)$.

Onodera calcule les valeurs de cette fonction zêta en les entiers négatifs via une expansion de Crandall. Cette stratégie consiste à découper le domaine d'intégration d'une représentation intégrale de la fonction zêta qui nous intéresse, le domaine dépendant d'une variable libre. Dans les faits, Onodera obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\zeta_P^{MT}(s, \mathbf{d}) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{(n_1 + d_1)^s \dots (n_P + d_P)^s (n_1 + d_1 + \dots + n_P + d_P)^s} \int_{\theta(n_1 + d_1 + \dots + n_P + d_P)}^{+\infty} e^{-y} y^{s-1} dy \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-d_p y_p} \phi(e^{-y}, s, d_p) dy_1 \dots dy_P\end{aligned}$$

avec ϕ la fonction zêta de Lerch décrite dans la Définition 1.2.7, et où θ est une variable libre réelle suffisamment petite. Le premier terme à droite de l'égalité précédente aura le bon goût d'être holomorphe et de s'annuler en les entiers négatifs. Le second terme peut être réexprimé via la formule d'Erdélyi 2.6, et Onodera obtient finalement les formules suivantes :

Théorème 1.2.21. [Ono21, Théorème 3, Théorème 4] Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{R}_*^{+P}$ et $t \in \llbracket 1, P-1 \rrbracket$ tel que $t < |\mathbf{d}|$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \zeta_P^{MT}(-N, \mathbf{d}) &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \frac{(-1)^{(N+1)(|\mathcal{P}|)} N!^{|\mathcal{P}|+1}}{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}|} = (|\mathcal{P}|+1)N + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!} \\ \zeta_P^{MT'}(-N, \mathbf{d}) &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathcal{P}^c|(N+1)-1} N!^{|\mathcal{P}^c|} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}} \\ u \geq 0 \\ |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}|} + u = (|\mathcal{P}^c|+1)N + |\mathcal{P}^c|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{(-1)^N \zeta'(-N - u, |\mathbf{d}| - t)}{u!} + \frac{1}{|\mathcal{P}^c|} \sum_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(-1)^N \zeta'(-N - u, d_p)}{u!} \right) \end{aligned}$$

où l'on a noté $\zeta_P^{MT'}(s, \mathbf{d}) := \partial_s \zeta_P^{MT}(s, \mathbf{d})$

Onodera obtient également des valeurs pour les dérivées secondes [Ono21, Théorème 5], que l'on ne détaillera pas ici. On cherchera dans cette thèse à généraliser le théorème ci-dessus pour une classe de fonctions zêta plus large. Cela nous permettra en particulier d'obtenir des valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{s_0(5)}(s)$ et de $\zeta_{g_2}(s)$, ainsi que celles de leurs dérivées premières.

1.2.2 Quelques résultats sur certaines fonctions multizêta

On donnera ici quelques résultats sur les valeurs spéciales de certaines fonctions multizêta rattachées à des produits de formes linéaires. En particulier, on détaillera des expressions de ces valeurs pour les fonctions multizêta d'Euler Zagier :

Définition 1.2.22. Soit $P \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_P) \in H_0^P$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_P) \in \mathbb{C}^P$ des complexes tels que $\operatorname{Re}(d_i) > -\operatorname{Re}(c_1)$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. On appelle fonction multizêta d'Euler-Zagier généralisée la fonction

$$\zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}, \mathbf{d}) = \sum_{\substack{n_1 \geq 1 \\ n_2, \dots, n_P \geq 0}} \prod_{p=1}^P (c_1 n_1 + \dots + c_p n_p + d_p)^{-s_p}.$$

On notera $\zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}) := \zeta(\mathbf{s}, \mathbf{1}, (0, 1, \dots, P-1))$ la fonction multizêta d'Euler Zagier.

Observons que, via un changement de variable, on peut réécrire la fonction zêta d'Euler-Zagier "classique" sous la forme suivante,

$$\zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_P} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_P^{s_P}}.$$

Proposition 1.2.23. La fonction multizêta d'Euler-Zagier généralisée $\zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{d})$ est holomorphe sur $\{(s_1, \dots, s_P) \in \mathbb{C}^P \mid \sigma_k + \dots + \sigma_P > P+1-k, 1 \leq k \leq P\}$, et est méromorphe sur $\mathbb{C}^P$, avec des pôles inclus dans les hyperplans de la forme

$$s_p + \dots + s_P = (P+1-p) - k_p, \quad (1 \leq p \leq P, k_1, \dots, k_P \in \mathbb{N}).$$

On voit de la proposition précédente que la quantité $\zeta_P^{EZ}(-\mathbf{N}, \mathbf{d})$ n'a pas toujours un sens. De plus, un résultat de [AET01] précise même que la plupart des multi-entiers négatifs sont en fait des singularités pour $\zeta_P^{EZ}(\mathbf{s})$. Afin d'étudier tout de même les valeurs de cette fonction, Akiyama, Egami et Tanigawa étudient les valeurs "régulières" de cette fonction zêta en posant

$$\zeta_P^{EZ,reg}(-\mathbf{N}) := \lim_{s_1 \rightarrow -N_1} \dots \lim_{s_P \rightarrow -N_P} \zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}).$$

Les auteurs introduisent également des valeurs "non régulières" en inversant les limites précédentes, en posant

$$\zeta_P^{EZ,non-reg}(-\mathbf{N}) := \lim_{s_P \rightarrow -N_P} \dots \lim_{s_1 \rightarrow -N_1} \zeta_P^{EZ}(\mathbf{s}).$$

Dans [AET01] et dans [AT01], les auteurs obtiennent une formule récursive entre les valeurs régulières $\zeta_P^{EZ,reg}(-\mathbf{N})$ (respectivement $\zeta_P^{EZ,non-reg}(-\mathbf{N})$ avec $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^P$, et les valeurs régulières de la forme $\zeta_{P-1}^{EZ,reg}(-\mathbf{N}')$ (respectivement $\zeta_{P-1}^{EZ,nonreg}(-\mathbf{N}')$), avec $\mathbf{N}' \in \mathbb{N}^{P-1}$ afin d'obtenir une expression explicite des valeurs régulières et non régulières aux entiers négatifs. Ces résultats ont par la suite été généralisés par Sasaki dans [Sas09a] et dans [Sas09b] à des ordres de limites différentes que celles des valeurs régulières et non-régulières aux multi-entiers négatif.

On peut également étudier les valeurs "directionnelles" de cette fonction multizêta. Dans [Kom10], Komori introduit la notion de valeur directionnelle pour de telles fonctions multizêta, et donne une expression de celles-ci pour des fonctions multi-zêta de type Hurwitz-Lerch. Komori en déduit alors des formules pour les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Shintani et d'Euler-Zagier, en utilisant des nombres de Bernoulli généralisés (souvent non explicites).

Définition 1.2.24. Soit $P, Q \in \mathbb{N}^*$ des entiers, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_Q)$, $\mathbf{c} = (c_{q,p})_{(q,p) \in \llbracket 1, Q \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket}$ et $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_P)$ des complexes tels que $c_{q,p} \in \overline{H}_0$, $d_q \in H_0$ et $\xi_q \in \mathbb{T} = \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$. On appelle fonction multizêta d'Hurwitz-Lerch la fonction multizêta

$$\zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{s}) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \dots \sum_{n_P=0}^{+\infty} \frac{e^{\xi_1 n_1} \dots e^{\xi_P n_P}}{(c_{1,1}n_1 + \dots + c_{1,P}n_P + d_1)^{s_1} \dots (c_{Q,1}n_1 + \dots + c_{Q,P}n_P + d_Q)^{s_Q}}.$$

On pose également les valeurs directionnelles de ζ^{HL} , suivant une direction $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^P$:

$$\zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, -\mathbf{N}) := \lim_{\boldsymbol{\mu} \rightarrow 0} \zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, -\mathbf{N} + s\boldsymbol{\mu}).$$

Komori montre que cette fonction multizêta est holomorphe sur $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C} \mid \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \operatorname{Re}(s_q) > \sigma_{0,q}\}$ avec $\sigma_{0,q} > 0$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. Il démontre également que cette fonction multizêta admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^Q$, et que les valeurs directionnelles définies précédemment ont un sens. Avant de brièvement résumer ses résultats, on doit imposer les conditions suivantes sur les données de la fonction multizêta ζ^{HL} :

On suppose qu'il existe un entier $P_0 \in \llbracket 1, P \rrbracket$ et un ensemble $\mathcal{B} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \times \llbracket 1, P_0 \rrbracket$ tel que

$$\begin{cases} c_{q,p} = 0 \text{ si et seulement si } (q,p) \in \mathcal{B}^c \\ \xi_p = 0 \text{ si et seulement si } p \in \llbracket 1, P_0 \rrbracket, \end{cases}$$

avec $\mathcal{B}^c = \llbracket 1, Q \rrbracket \times \llbracket 1, P_0 \rrbracket \setminus \mathcal{B}$. On pose $\mathcal{B}_{\bullet,p} := \{q \mid (q,p) \in \mathcal{B}\}$. On suppose que $\mathcal{B}_{\bullet,p} \neq \emptyset$ pour tout $p \in \llbracket 1, P_0 \rrbracket$.

Komori donne dans [Kom10] une représentation intégrale surfacique (c'est-à-dire une représentation intégrale dont le domaine est une surface) de la fonction multizêta $\zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{s})$. Cette représentation intégrale surfacique généralise en particulier la représentation intégrale usuelle de la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2i\pi s} - 1)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

où C désigne le contour de Hankel [EMOT81, §1.10]. Au passage, il est bon de rappeler que cette représentation intégrale de $\zeta(s)$ permet en particulier d'obtenir une formule pour les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers négatifs à l'aide des nombres de Bernoulli, en utilisant la relation

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{z^k}{k!}.$$

Dans la même veine, Komori utilise ensuite la représentation intégrale surfacique obtenue dans [Kom10, Théorème 3.14] pour obtenir une expression des valeurs directionnelles en fonction de nombres de Bernoulli généralisés $B_w(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{k})$ avec $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^Q$. Pour voir la construction de ces nombres, voir [Kom10, Définition 3.20].

Théorème 1.2.25. [Kom10, Théorème 3.14, Corollaire 3.16] *Sous les hypothèses décrites précédemment, la fonction multizêta $\zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{s})$ admet un prolongement méromorphe en $\mathbf{s}$ sur tout $\mathbb{C}^P$. De plus, ses singularités sont incluses dans les hyperplans de la forme*

$$\begin{cases} \sum_{q \in \mathcal{Q}} s_q = Q - k & (\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket, |\mathcal{Q}| \geq 2, k \in \mathbb{N}) \\ s_q = 1, \dots, P & (1 \leq q \leq Q). \end{cases}$$

De plus, Komori démontre dans [KMT10a, Théorème 3.22] que les valeurs directionnelles $\zeta^{HL}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, -\mathbf{N})_{\boldsymbol{\mu}}$ ont un sens, et il en donne une expression non explicite en général, en imposant une condition de non-annulation sur la somme des directions. On obtient au passage que, si l'on arrive à réexprimer les nombres de Bernoulli généralisés dans la formule obtenue par Komori, alors cette formule permet de montrer si un multientier négatif est une singularité pour ζ^{HL} . En effet, si l'on obtient deux valeurs distinctes de ζ^{HL} en un multientier négatifs, selon deux directions différentes, cela implique en particulier que le multientier négatif est une singularité.

Remarque 1.2.26. *La formule directionnelle [Kom10, Théorème 3.22] obtenue par Komori n'est pas très explicite, puisqu'il est parfois difficile d'obtenir une expression satisfaisante des nombres de Bernoulli généralisés qu'il introduit dans son article.*

Dans [EM20], Essouabri et Matsumoto ont étudié les valeurs directionnelles de la fonction multizêta d'Euler-Zagier généralisée. On donnera ici seulement une formule très simplifiée et beaucoup moins détaillée :

Théorème 1.2.27. [EM20, Théorème 1] *Soit $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^P$, et $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_P) \in \mathbb{C}^P$ tel que $\text{Re}(\mu_p + \dots + \mu_P) \neq 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. Alors la quantité $\zeta_P^{EZ}(-\mathbf{N}, \mathbf{c}, \mathbf{d})_{\boldsymbol{\mu}} := \lim_{s \rightarrow 0} \zeta_P^{EZ}(-\mathbf{N} + s\boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ existe, et on a :*

$$\zeta_P^{EZ}(-\mathbf{N}, \mathbf{c}, \mathbf{d})_{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\mathbf{k}=(k_1, \dots, k_P) \in \llbracket 0, |\mathbf{N}|+P+1 \rrbracket^P} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\mu}) \prod_{i=1}^P B_{k_i},$$

avec B_n qui désigne le n -ième nombre de Bernoulli, et $P_{\mathbf{k}}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$ qui est un polynôme explicite en les γ_p, d_p et μ_p pour $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$.

Remarque 1.2.28. Dans [EM21], Essouabri et Matsumoto ont obtenu un résultat similaire pour les valeurs spéciales d'une classe de fonction multizêta plus générale de la forme

$$\zeta_m(\mathbf{s}, \mathbf{P}) = \sum_{n_1, \dots, n_m} \frac{1}{\prod_{j=1}^m P_j(n_1, \dots, n_j)},$$

avec P_j un polynôme en les $X_1, \dots, X_j$ variables, pour $1 \leq j \leq m$, vérifiant la condition H0S (voir [Ess97]) tels que

$$\lim_{x_1 + \dots + x_j \rightarrow +\infty} P_j(x_1, \dots, x_j) = +\infty,$$

et en imposant que le polynôme P_m est homogène et elliptique.

1.2.3 Sur les formule asymptotiques de certaines partitions

On expliquera dans cette section quelques applications arithmétiques du calcul des valeurs spéciales des fonctions zêta de Witten, et de leurs dérivées. On citera notamment des résultats de Bridges, Bringmann, Brindle et Franke prépublié dans [BBBF23], et on mentionnera leur approche.

En combinatoire, il est classique d'utiliser une série génératrice de la forme

$$\omega(q) = \sum_{n \geq 0} r(n)q^n,$$

afin d'étudier le comportement d'une suite de réels $r(n)$. Si la fonction ω est holomorphe sur $|q| < 1$, alors on a par théorème de Cauchy que

$$r(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\omega(q)}{q^{n+1}} dq,$$

avec $\mathcal{C}$ un cercle centré en 0 parcouru dans le sens trigonométrique, inclus dans le disque unité. En général, il n'existe pas de résultat permettant d'obtenir une relation asymptotique pour une suite $r(n)$. On se concentrera dans la suite de cette section sur une série génératrice s'écrivant sous la forme d'un produit infini.

On considère une fonction $G_f(q)$ de la forme

$$G_f(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^{f(n)}},$$

avec $f(n)$ des réels. En distribuant le produit, on obtient

$$G_f(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_f(n)q^n, \tag{1.7}$$

On considère la série de Dirichlet

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + i\tau, \sigma > \sigma_0),$$

avec σ_0 son abscisse de convergence.

Exemple 1.2.29. [And76, 5.1.2] *Le plus simple produit infini auquel on puisse penser correspond à l'étude du nombre de partitions $p(n)$ d'un entier n :*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} p(n)q^n.$$

La série de Dirichlet correspondante est la fonction zêta de Riemann. Hardy et Ramanujan ont démontré que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

On pose maintenant

$$g_f(z) := G_f(e^{-z}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_f(n)e^{-nz}.$$

On suppose les conditions suivantes :

- i) $\sigma_0 > 0$.

- ii) L_f admet un prolongement méromorphe sur H_{-C_0} , avec $0 < C_0 < 1$ et tel que L_f n'ait qu'un seul pôle en $s = \sigma_0$ sur ce domaine, que ce pôle soit d'ordre 1, et de résidu A .
- iii) On a la majoration suivante lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et uniforme en $\sigma > -C_0$,

$$|L_f(s)| = O(|\tau|^{C_1}),$$

avec $C_1 > 0$ et $s = \tau + i\sigma$.

- iv) Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $z = x + 2i\pi y$ tel que $\arg(z) > \frac{\pi}{4}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \ll 1$, on a

$$\operatorname{Re}(g_f(z)) - g_f(x) \leq -C_2 x^{-\epsilon},$$

avec $C_2 > 0$ une constante dépendant de ϵ .

Le théorème de Meinardus donne alors une relation asymptotique pour la suite $p_f(n)$

Théorème 1.2.30 (de Meinardus). *[And76, Théorème 6.2] Pour $n \rightarrow +\infty$, on a*

$$p_f(n) = C n^\kappa \exp \left(n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha}} \right) (1 + O(n^{-\kappa_1})),$$

avec $p_f(n)$ définie via la formule (1.7), et C, κ, κ_1 des réels dépendant de $L_f(0), L'_f(0), C_0$ et α .

La démonstration de ce théorème repose sur la méthode du point selle, dont on expliquera quelques points clés ici. Pour les détails de la méthode, on se réfère à [FS09, VIII.3]. La méthode exploite le fait que l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{G_f(q)}{q^{n+1}} dq$ est indépendante du rayon du cercle $\mathcal{C}$ inclus dans le disque unité. On peut alors utiliser cette indépendance en choisissant judicieusement un rayon $\rho_0(n)$ adéquat. La méthode du point selle consiste à choisir ce rayon de tel sorte à minimiser $\left| \frac{G_f(q)}{q^n} \right|$ sur un arc de cercle mineur du cercle $\mathcal{C}_1(\theta_0(n))$. Concrètement, on choisit un tel point selle de tel sorte que la dérivée de l'intégrande en $q = \rho_0(n)$ soit un $O(n^\delta)$, avec δ bien choisie. Alternativement, on peut chercher ρ_n en étudiant la dérivée de la fonction

$$h_f(z) := \ln(L_f(z)) - n \log(z).$$

On cherche alors ρ_n de tel sorte que $h'_f(\rho_0(n)) = -n + O(n^\delta)$.

On aura alors une approximation quadratique lorsque $\theta \rightarrow 0$:

$$h_f(\rho_0(n)e^{i\theta}) - h_f(\rho_0(n)) =: -\frac{1}{2}\beta(\rho_0(n))\theta^2 + o(\theta^3) + O(n^\delta),$$

où $\beta(\rho(n))$ est une constante dépendant de $\rho(n)$, et du choix de δ . On cherchera alors à déterminer un angle $\theta_0(n)$ de tel sorte que

$$\beta(\rho_0(n))\theta_0(n)^2 \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} +\infty, \quad h''(\rho_0(n))\theta_0(n)^3 \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

Pour un tel choix de $\theta_0(n)$, on en déduit en particulier que le comportement de l'intégrale sur l'arc mineur $\mathcal{C}_0$ se comporte comme une intégrale gaussienne, dont les bornes dépendent de n , que l'on sait approximer.

Debruyne et Tennenbaum ont obtenu dans [DT20] une version plus générale du théorème de Meinardus en raffinant la condition iii) sur la croissance de L_f lorsque la partie imaginaire τ est grande. En étudiant les fonctions zêta de Witten, on s'apercevra que l'on ne peut pas appliquer simplement le théorème de Meinardus pour obtenir une expression asymptotique du nombre de représentations des algèbres de Lie $r_{\mathfrak{g}}(n)$ qui nous intéressent. Cependant, en modifiant astucieusement la preuve du Théorème de Meinardus, puis en étudiant les résidus de $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s)$ en $s = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, et en calculant les valeurs spéciales $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{sl}(3)}(0)$, Romik a obtenu le Théorème suivant :

Théorème 1.2.31. [Rom17, Théorème 1.1] *Au voisinage de $+\infty$, on a*

$$r_{\mathfrak{sl}(3)}(n) = (1 + o(1)) \frac{K}{n^{3/5}} \exp \left(A_1 n^{2/5} - A_2 n^{3/10} - A_3 n^{1/5} - A_4 n^{1/10} \right),$$

avec les constantes A_1, A_2, A_3, A_4 et K des constantes explicites : On pose tout d'abord

$$X = \left(\frac{1}{9} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right)^2 \zeta \left(\frac{5}{3} \right) \right), \quad Y = -\sqrt{\pi} \zeta \left(\frac{1}{2} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right).$$

Les constantes A_1, A_2, A_3, A_4, K sont alors définies par les relations suivantes :

$$A_1 = 5X^2 = 6.858260476...$$

$$A_2 = X^{-1}Y = 5.77360174...$$

$$A_3 = \frac{3}{80} X^{-4} Y^2 = 0.91134107...$$

$$A_4 = \frac{11}{3200} X^{-7} Y^3 = 0.35163754...$$

$$K = \frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{5}} X^{1/3} \exp \left(-\frac{1}{2560} X^{-10} Y^4 \right) = 2.44629033486...$$

Notons que dans [Rom17], le calcul de la constante Y dépend en particulier de la valeur spéciale $\zeta'_{\mathfrak{sl}(3)}(0) = -\ln(2\pi) + \ln(2)$ calculée dans [BD18]. De plus, toutes ces constantes dépendent également du calcul des résidus de $\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s)$ en $s = \frac{1}{2}$ et en $s = \frac{2}{3}$.

Romik conjecture qu'il est possible d'obtenir des résultats similaires sur des nombres de représentations $r_{\mathfrak{g}}(n)$ pour d'autres algèbres de Lie $\mathfrak{g}$. Pour étendre ce résultat, on a besoin d'établir un théorème de type Meinardus, et également d'obtenir des informations sur les pôles et les résidus de la fonction zêta de Witten correspondant dans la bande $0 \leq \Re(s) \leq 1$ pour la fonction zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{g}}(s)$, puis d'obtenir une expression de $\zeta'_{\mathfrak{g}}(0)$.

Motivés par cette question, Bridges, Brindle, Bringmann et Franke ont établi une variante du Théorème de Meinardus plus général dans le preprint [BBBF23]. Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$. On pose pour tout $q = e^{-z}$, $z \in H_0$ les fonctions

$$G_f(z) = \sum_{n \geq 0} p_f(n) q^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - q^n)^{f(n)}}, \quad L_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

On pose $\Lambda := \mathbb{N} \setminus f^{-1}(\{0\})$. On suppose les conditions suivantes :

(P1) Soit $\alpha > 0$ le pôle le plus large de L_f . Il existe un entier $L \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout nombre premier p ,

$$|\Lambda \setminus (p\mathbb{N} \cap \Lambda)| \geq L > \frac{\alpha}{2}.$$

(P2) Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+$ tel que L_f soit méromorphe sur $\overline{H}_{-R} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq -R\}$, et tel que L_f soit holomorphe sur la droite ($\Re(z) = -R$). De plus, on suppose que la fonction méromorphe $L_f^*(s) := \Gamma(s) \zeta(s+1) L_f(s)$ possède uniquement des pôles réels $\alpha := \gamma_1 > \dots$, que ces pôles sont simples à part en $s = 0$, où le pôle peut être un pôle double.

(P3) Il existe un réel $a < \frac{\pi}{2}$ tel que, sur chaque bande $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ dans le domaine d'holomorphie de L_f , on a

$$L_f(s) = O_{\sigma_1, \sigma_2} \left(e^{a|\tau|} \right) \quad (s = \sigma + i\tau),$$

lorsque $|\tau| \rightarrow +\infty$.

Théorème 1.2.32. [BBBF23, Théorème 1.4] On suppose les conditions (P1), (P2) et (P3). Notons L le réel de la condition (P1) et R le réel de la condition (P2). Alors pour $M, N \in \mathbb{N}$, on a

$$p_f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{C}{n^b} \exp \left(A_1 n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \sum_{j=2}^M A_j n^{\alpha_j} \right) \left(1 + \sum_{j=2}^N \frac{B_j}{n^{\nu_j}} + O_{L,R} \left(n^{-\min\{\frac{2L-\alpha}{2(\alpha+1)}, \frac{R}{\alpha+1}\}} \right) \right),$$

avec $0 \leq \alpha_M < \dots < \alpha_1 := \frac{\alpha}{\alpha+1}$, $0 < \nu_2 < \dots < \nu_N$, $A_1, \dots, A_M$ et $B_2, \dots, B_N$ des réels explicites.

Lorsque la fonction méromorphe L_f ne possède que deux pôles strictement positifs, Bridges, Brindle, Bringmann et Franke obtiennent une formule plus précise. Introduisons tout d'abord les constantes suivantes : Posons $\alpha > \beta > 0$ les deux seuls pôles positifs de L_f . On note $\omega_\alpha = \text{Res}_{s=\alpha}(L_f(s))$ et $\omega_\beta = \text{Res}_{s=\beta}(L_f(s))$ les résidus de L_f en ses pôles positifs, et on pose $c_1 = \omega_\alpha \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1)$, $c_2 = \omega_\beta \Gamma(\beta+1) \zeta(\beta+1)$, $c_3 = L_f(0)$. On note

$$C = \frac{e^{L'_f(0)(\omega_\alpha \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1))^{\frac{1-L_f(0)}{\alpha+1}}}}{\sqrt{2\pi(\alpha+1)}} \quad b = \frac{1 - L_f(0) + \frac{\alpha}{2}}{\alpha+1}.$$

On note $\mathcal{P}_R$ l'union du singleton $\{0\}$ et des pôles plus grand que $-R$ de L_f^*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha+1} \mathcal{P}_R + \sum_{\mu \in \mathcal{P}_R} \left(\frac{\mu+1}{\alpha+1} - 1 \right) \mathbb{N},$$

$$\mathcal{M} := \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbb{N} + \left(- \sum_{\mu \in \mathcal{P}_R} \left(\frac{\mu+1}{\alpha-1} - 1 \right) \mathbb{N} \right) \cap \left[0, \frac{R+\alpha}{\alpha+1} \right].$$

Théorème 1.2.33. [BBBF23, Théorème 4.4] On suppose les conditions (P1), (P2) et (P3). Notons L le réel de la condition (P1) et R le réel de la condition (P2). De plus, on suppose que L_f n'a que deux pôles $\alpha > \beta > 0$ tels qu'il existe un entier $l \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'inégalité $\frac{l+1}{l} \beta < \alpha < \frac{l}{l-1} \beta$. Alors on a

$$p_f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{C}{n^b} \exp \left(A_1 n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + A_2 n^{\frac{\beta}{\alpha+1}} + \sum_{j=3}^{l+1} A_j n^{\frac{(j-1)\beta}{\alpha+1} + \frac{j-2}{\alpha+1} + 2-j} \right) \left(1 + \sum_{j=2}^N \frac{B_j}{n^{\nu_j}} + O_{L,R} \left(n^{-\min\{\frac{2L-\alpha}{2(\alpha+1)}, \frac{R}{\alpha+1}\}} \right) \right),$$

avec $A_1 := (\omega_\alpha \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$, et $A_2 := \frac{\omega_\beta \Gamma(\beta) \zeta(\beta+1)}{(\omega_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha+1))^{\frac{\beta}{\alpha+1}}}$, et pour tout $j \geq 3$,

$$\begin{aligned} A_j := & K_j + \frac{c_1^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\alpha} \sum_{m=1}^l \binom{-\alpha}{m} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_l \leq m \\ |\mathbf{k}|=m \\ k_1+2k_2+\dots+lk_l=j-1}} \binom{m}{\mathbf{k}} \frac{K_2^{k_1} \dots K_{l+1}^{k_l}}{c_1^{\frac{m}{\alpha+1}}} \\ & + \frac{c_2}{\beta c_1^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \sum_{m=1}^l \binom{-\beta}{m} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_l \leq m \\ |\mathbf{k}|=m \\ k_1+2k_2+\dots+lk_l=j-2}} \binom{m}{\mathbf{k}} \frac{K_2^{k_1} \dots K_{l+1}^{k_l}}{c_1^{\frac{m}{\alpha+1}}}, \end{aligned}$$

avec $(K_j)_{j \geq 3}$ décrit dans [BBBF23, Lemme 4.3], et $0 < \nu_2 < \dots$ les éléments strictements positifs de $\mathcal{L} + \mathcal{M}$.

Remarque 1.2.34. Pour étudier le comportement asymptotique de $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$, on aurait besoin de connaître K_3 , et d'après [BBBF23, Lemme 4.3], on a

$$K_3 = \frac{c_2^2(\alpha-2\beta)}{2(\alpha+1)^2 c_1^{\frac{2\beta+1}{\alpha+1}}},$$

avec c_1 et c_2 des constantes explicites telles que

$$c_1 = \omega_\alpha \Gamma(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1), \quad c_2 = \omega_\beta \Gamma(\beta + 1) \zeta(\beta + 1).$$

De plus, pour étudier le comportement asymptotique de $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$, on verra que l'entier $l = 2$ fonctionne car, on aurait alors $L_f(s) = \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$, et les pôles positifs de cette fonction zêta sont $s = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{1}{5}$.

En appliquant ce théorème, les 4 auteurs ont obtenu des résultats similaires à Romik pour le nombre de représentations $r_{\mathfrak{so}(5)}(n)$:

Théorème 1.2.35. [BBBF23, Théorème 1.3] Pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$r_{\mathfrak{so}(5)}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{C}{n^{\frac{7}{12}}} \exp \left(A_1 n^{\frac{1}{3}} + A_2 n^{\frac{2}{9}} + A_3 n^{\frac{1}{9}} + A_4 \right) \left(1 + \sum_{j=2}^{N+1} \frac{B_j}{n^{\frac{j-1}{9}}} + O_N \left(n^{-\frac{N+1}{9}} \right) \right),$$

avec

$$\begin{aligned} b &= \frac{7}{12}, \quad C = \frac{e^{\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0)} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{11}{24}} \sqrt{\pi}}, \quad A_1 = \frac{3^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}, \\ A_2 &= \frac{2^{\frac{8}{9}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right)}{3^{\frac{7}{9}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{9}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}}}, \quad A_3 = \frac{2^{\frac{40}{9}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \zeta\left(\frac{1}{3}\right)^2 \zeta\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3^{\frac{44}{9}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{20}{9}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{10}{9}}}, \\ A_4 &= \frac{2^8 \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right)^3 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3 \zeta\left(\frac{1}{3}\right)^3 \zeta\left(\frac{4}{3}\right)^3}{3^8 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4 \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

En revanche, ces 4 auteurs ne disposaient pas d'une formule explicite de $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0)$. On donnera dans notre travail une expression des valeurs spéciales $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)$. On donnera également des formules pour les résidus de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ en $s = \frac{1}{2}$ et en $s = \frac{1}{3}$, et des formules pour les résidus de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$ en $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{1}{5}$. On pourra alors obtenir une formule asymptotique explicite pour le nombre de représentations $r_{\mathfrak{so}(5)}(n)$, en donnant une expression du coefficient C du théorème précédent.

Notons au passage que nous trouverons une valeur différente pour $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(0)$ que dans [BBBF23, Proposition 5.15]. Nous interprétons cette différence de résultats en suggérant que les auteurs ont vraisemblablement commis une erreur en remplaçant $\zeta(0)$ par $\frac{1}{2}$, à la place de $-\frac{1}{2}$ dans la preuve de la Proposition 5.15.

On obtiendra également des formules explicites pour $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)$, et on pourra alors établir un théorème similaire au théorème précédent, pour le nombre de représentations $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$ en utilisant le Théorème 1.2.33.

Remarque 1.2.36. Quand on appliquera le Théorème 1.2.32 à l'étude asymptotique du nombre de représentations $r_{\mathfrak{g}}(n)$ d'une algèbre de Lie semi-simple, on verra que les coefficients $f(n)$ correspondent au nombre de représentations irréductibles de dimension n de $\mathfrak{g}$.

1.3 Premières définitions

On fixera dans tout ce manuscrit une famille $(l_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ de formes linéaires de rang P à coefficients dans le demi-plan de Poincaré $H_0 = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid \sigma > 0\}$ avec $P \geq 1$ et $Q \geq 1$ des entiers. On fixe également $\mathbf{d} = (d_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, $\mathbf{d}' = (d'_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ des complexes dans H_0 tels que $d'_q := l_q(\mathbf{d})$ pour tout $1 \leq q \leq Q$.

Notation. Soit $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, on note

$$l_q(\mathbf{n}) = \sum_{p=1}^P c_{q,p} n_p.$$

Par souci de clarté, on choisira tout le long de ce manuscrit d'utiliser l'indice p (ou l'indice i si p est déjà utilisée) lorsque l'on parcourera n'importe quel sous-ensemble $\mathcal{P}$ de $\llbracket 1, P \rrbracket$, et on utilisera l'indice q (ou l'indice j si q est déjà utilisée) lorsque l'on parcourera n'importe quel sous-ensemble $\mathcal{Q}$ de $\llbracket 1, Q \rrbracket$.

On définira tout d'abord les fonctions gamma incomplètes

Définition 1.3.1. Soit $\nu \in H_0$, $\theta > 0$, $s \in \mathbb{C}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \Gamma(s, \theta, \nu) &= \int_{\theta}^{+\infty} e^{-\nu y} y^{s-1} dy, \\ \gamma(s, \theta, \nu) &= \int_0^{\theta} e^{-\nu y} y^{s-1} dy, \quad \text{lorsque } \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

Ces fonctions gamma sont plus générales que celles que l'on peut trouver dans la littérature (par exemple dans [EMOT81, Chap.IX] ou dans [Cra12, §3]). On retrouve les fonctions gamma incomplètes classiques en posant $\nu = 1$. Pour nos usages, on aura besoin d'un ν quelconque dans H_0 .

On introduit maintenant des constantes qui apparaitront dans le théorème D. Par une décomposition en éléments simples, on trouve aisément :

Proposition 1.3.2. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. Notons $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$ et par les coefficients $c_{q,p}$, avec $1 \leq q \leq Q$ et $1 \leq p \leq P$. Soit $\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket$, $j, f \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}}$, $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c}$. On note $\mathcal{P}^c = \llbracket 1, P \rrbracket \setminus \mathcal{P}$, $\mathbf{w}_p = (w_{p,q})_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ et $\mathbf{v}_p = (v_{p,q})_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}}$. Il existe un polynôme $\tilde{P}_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'} \in \mathbb{K}[x]$ et deux familles de constantes $(C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\lambda \in \mathbb{N}}$ et $(D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\lambda \in \mathbb{N}, p \in \mathcal{P}}$ dont chacun des termes appartient au corps $\mathbb{K}$, tels que

$$\begin{aligned} x^{-N'_f - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x)^{-N_p - 1 - |\mathbf{v}_p|} &= \tilde{P}_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x) + \sum_{\lambda=1}^{N'_f + 1 - \mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{x^\lambda} \\ &+ \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=1}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{(c_{j,p} + c_{f,p} x)^\lambda} \end{aligned}$$

On note $P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}$ la primitive s'annulant en 1 de $\tilde{P}_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}$. On note $E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{K}$ le terme constant de $P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}$.

On note

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= -E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') - \sum_{\lambda=2}^{N'_f + 1 - \mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} \\ &- \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=2}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} ((c_{j,p} + c_{f,p})^{1-\lambda} - c_{j,p}^{1-\lambda}) \\ &+ \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (1, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \right). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3. 1) Notons que si $-N'_f - 1 + \mathbf{w}(f) \geq 0$, alors $C_{\mathcal{P},j,f,\mathbf{v},\mathbf{w},\lambda} = 0$ pour tout λ .

2) Dans le produit $\prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p}x)^{(-N_p-1-|\mathbf{v}_p|)}$, certains termes du produit peuvent apparaître plusieurs fois. C'est la raison pour laquelle la somme $\sum_{\lambda=1}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|+|\mathbf{v}|)}$ porte jusqu'à $|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|$. Si cela se produit, on a alors plusieurs choix possibles pour les constantes $D_{\mathcal{P},j,f,\mathbf{v},\mathbf{w},(\lambda,p)}$. Notons que ces différents choix n'auront aucun impact dans la définition de la constante $F_{\mathcal{P},j,f,\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$.

3) La constante $F_{\mathcal{P},j,f,\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ apparaîtra dans le calcul d'une intégrale, dans le Lemme 3.1.4.

Exemple 1.3.4. Soit $\mathcal{P} = \emptyset$, on a pour tout $\lambda \geq 1$,

$$\begin{aligned} C_{\emptyset,j,f,\mathbf{v},\mathbf{w},\lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= \delta_{\lambda, N'_f+1-\mathbf{w}(f)} \\ D_{\emptyset,j,f,\mathbf{v},\mathbf{w},(\lambda,p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= 0 \\ E_{\emptyset,j,f,\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= 0 \text{ si } \mathbf{w}(f) \leq N'_f \\ E_{\emptyset,j,f,\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= -\frac{1}{\mathbf{w}(f) - N'_f} \text{ si } \mathbf{w}(f) > N'_f, \end{aligned}$$

où l'on a noté δ le symbole de Kronecker.

On obtient en particulier que $F_{\emptyset,j,f,\mathbf{0},\mathbf{0}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Exemple 1.3.5. Soit $\mathcal{P} = \{p\}$, $j \neq f \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{e}_f$, alors on a

$$x_f^{-N'_f-1+\mathbf{w}(f)}(c_{j,p} + c_{f,p}x_f)^{-N_p-1-|\mathbf{v}_p|} = (c_{j,p} + c_{f,p}x_f)^{-1}.$$

Ainsi, on a $F_{\{p\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_f} = \frac{1}{c_{f,p}} \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \right)$.

Exemple 1.3.6. Soit $\mathcal{P} = \{p\}$, $j \neq f \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{e}_j$, alors on a

$$x_f^{-N'_f-1+\mathbf{w}(f)}(c_{j,p} + c_{f,p}x_f)^{-N_p-1-|\mathbf{v}_p|} = x_f^{-1}(c_{j,p} + c_{f,p}x_f)^{-1} = \frac{1}{c_{j,p}}x^{-1} - \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}}(c_{j,p} + c_{f,p}x_f)^{-1}.$$

Ainsi, on a $F_{\{p\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_j} = -\frac{1}{c_{j,p}} \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \right)$.

On étudiera dans ce manuscrit la fonction multizêta suivante :

Définition 1.3.7. Soit $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in H_1^P \times H_1^Q$, on pose

$$Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = Z(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \mathbf{s}') := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q}.$$

Remarque 1.3.8. Cette fonction multizêta est de la même forme d'une fonction multizêta de type Hurwitz-Lerch décrite dans 1.2.24, sans torsion :

$$Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \zeta^{HL}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{c}}, (s_1, \dots, s_P, s'_1, \dots, s'_Q)) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{\prod_{q=1}^{\tilde{Q}} \left(\tilde{d}_q + \sum_{p=1}^P \tilde{c}_{q,p} n_p \right)^{s'_q}},$$

avec $P_0 = P$, $\tilde{Q} := P + Q$, $\mathcal{B}^c = \cup_{1 \leq p \leq P} \llbracket 1, P \rrbracket \setminus \{p\} \times \{p\} \subset \llbracket 1, Q + P \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket$, $\tilde{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}, \mathbf{d}')$, et avec $\tilde{\mathbf{c}} = (c_{(q,p)})_{(q,p) \in \llbracket 1, Q' \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket}$ tels que

$$\begin{cases} \tilde{c}_{q,p} = 0 & \text{si } q \neq p \text{ et } q \leq P \\ \tilde{c}_{p,p} = 1 & \text{si } p \in \llbracket 1, P \rrbracket \\ \tilde{c}_{q,p} = c_{q-P,p} & \text{si } q > P. \end{cases}$$

En particulier, on pourra appliquer le Théorème 1.2.25 à $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$.

A l'aide de la remarque précédente, et du Théorème 1.2.25), on voit que la fonction multizêta $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est méromorphe sur tout $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$, et ce même théorème fournit également des informations sur l'ensemble des singularités de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. On dispose également d'un domaine de convergence, cependant pour nos besoins, on a besoin d'un domaine de convergence plus large que ce que propose le Théorème 1.2.25. On montrera alors un domaine de convergence plus précis dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.9. *On pose*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q} := \left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q \mid \sum_{p \in \mathcal{P}} \sigma_p + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > |\mathcal{P}|, \emptyset \neq \mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket \right\}.$$

La fonction multizêta $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ a pour domaine de convergence $\mathcal{D}$, et est méromorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$, avec des singularités incluses dans l'union d'hyperplans :

$$\begin{cases} \sum_{p \in \mathcal{P}} s_p + \sum_{q \in \mathcal{Q}} s'_q = Q + P - n & (\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket, \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket, |\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}| \geq 2, n \in \mathbb{N}) \\ s_p = 1, \dots, P & (1 \leq p \leq P) \\ s'_q = 1, \dots, P & (1 \leq q \leq Q). \end{cases}$$

On notera de la même manière $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ son prolongement méromorphe. En général, les valeurs aux multientiers négatifs n'ont pas de sens puisque certains multientiers négatifs sont des pôles pour Z . C'est pourquoi on fixera une direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$ et un multi-entier négatif $-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, et l'on étudiera la fonction multizêta Z en ce multi-entier, et selon la direction choisie. Il découle de la Proposition 1.3.9 que $s \mapsto Z(-\mathbf{N} + s\boldsymbol{\mu}, -\mathbf{N}' + s\boldsymbol{\mu}')$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et est holomorphe pour $s = \sigma + i\tau$, avec σ suffisamment grand. On peut alors définir la fonction zêta suivante :

Définition 1.3.10. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in (\mathbb{R}_+)^P \times (\mathbb{R}_+^*)^Q$. On pose alors pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) := Z(-\mathbf{N} + s\boldsymbol{\mu}, -\mathbf{N}' + s\boldsymbol{\mu}').$$

On considère également la fonction univariable suivante, qui consiste à évaluer la fonction décrite précédemment selon la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$, et pour $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Définition 1.3.11. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$. On pose

$$Z_\Delta : s \in \mathbb{C} \mapsto Z((s, \dots, s), (s, \dots, s)).$$

Remarque 1.3.12. Si l'on pose $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, et $\boldsymbol{\mu}' = \mathbf{1}$, alors $Z_{\mathbf{0}, \mathbf{0}'}(s)$ correspond à une fonction zêta de type Shintani

$$Z_{\mathbf{0}, \mathbf{0}'}(s) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s}.$$

Gardons tout de même en tête que les coefficients d'_q ne sont pas libres, et dépendent des choix de d_p et des choix des coefficients $(c_{p,q})_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q}$.

Par la Proposition 1.3.9, on sait que $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid (-\mathbf{N} + s\boldsymbol{\mu}, -\mathbf{N}' + s\boldsymbol{\mu}') \in \mathcal{D}\}$. Ainsi, il existe un réel $\sigma_{\mathbf{0}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$ tel que l'application $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ soit holomorphe sur $H_{\sigma_{\mathbf{0}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$. On dira que $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est holomorphe pour $\sigma \gg_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') 1$, ou parfois seulement $\sigma \gg 1$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Afin de donner un sens aux valeurs directionnelles de Z en les multi-entiers négatifs, on doit prouver que $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est régulière en $s = 0$. Des travaux de Komori prouvent bien que cette valeur directionnelle a un sens. Dans ce manuscrit, on détaillera une méthode de prolongement différente dans la Proposition 2.2.4 pour prouver que ces valeurs directionnelles ont un sens, ce qui nous permettra **surtout** d'obtenir des formules explicites sur les valeurs spéciales directionnelles de Z , ainsi que celles de sa dérivée.

Notation. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in (\mathbb{R}_+)^P \times (\mathbb{R}_+^*)^Q$. On pose alors la valeur en $(-\mathbf{N}, -\mathbf{N}')$ de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ selon la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$,

$$Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} := Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(0)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'},$$

et on pose la valeur de la dérivée directionnelle en $(-\mathbf{N}, -\mathbf{N}')$ de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ selon la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$,

$$Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} := \partial_s (Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}|_{s=0}.$$

On introduit désormais des fonctions auxiliaire (que l'on appellera des fonctions zêta de Barnes généralisés) dont le rôle sera crucial dans les formules de $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$.

Définition 1.3.13. Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, et $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. On pose pour tout $\sigma \gg 1$,

$$\varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} (n_1 + d_1)^{R_1} \dots (n_P + d_P)^{R_P} (l_j(\mathbf{n}) + d'_j)^{-s}.$$

Remarque 1.3.14. Si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, on obtient une fonction zêta de Barnes : $\varphi_{\mathbf{0}}^j(s) = \zeta_P^B(s, d'_j | c_{j,1}, \dots, c_{j,P})$.

La fonction $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ correspond à une fonction de type $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$, avec $Q = 1$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu}' = 1$, $\mathbf{N} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{N}' = \mathbf{0}$. On en déduit en particulier qu'elle admet un prolongement méromorphe, et qu'elle est régulière en les entiers négatifs. La dérivée première de ces fonctions auxiliaires interviendra dans l'expression de $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$, il est donc très intéressant d'avoir une expression exploitable des valeurs spéciales en les entiers négatifs de ces fonctions auxiliaires.

1.4 Principaux résultats

Comme il est mentionné dans la section précédente, on démontrera par une autre méthode le résultat de Komori sur l'existence des valeurs directionnelles $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ dans la Proposition 2.2.4. Pour obtenir ce résultat, on utilise dans le chapitre 2 une stratégie appelée expansion de Crandall, développée dans [Cra12], qui était initialement utilisée pour obtenir des approximations numériques de certaines fonctions zêta et certaines fonctions L . Cette stratégie a par la suite été utilisée par Borwein et Dilcher dans [BD18] pour étudier les valeurs d'une fonction zêta de type Mordell-Torheim, et approximer sa dérivée en les entiers négatifs. Par la suite, Onodera a donné des formules exactes pour les valeurs aux entiers négatifs d'une fonction zêta de type Mordell-Torheim généralisée, ainsi que des valeurs de ses dérivées d'ordre 1 et 2 dans [Ono21]. L'astuce utilisée par Onodera pour calculer les valeurs des dérivées aux entiers négatifs repose en partie sur le fait d'introduire des fonctions auxiliaires ressemblant à des fonctions zêta de Barnes, avec un terme polynomial au numérateur du terme général de la série, puis de donner une formule des dérivées de ces fonctions auxiliaires.

Plus précisément, on décrira une formule de prolongement pour la fonction méromorphe $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ dans la Proposition 2.2.4 :

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} = K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'},$$

où $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ sera holomorphe sur tout $\mathbb{C}$, et s'annulant en $s = 0$, et $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles qui sont tous simples, de la forme

$$\begin{aligned} s &= \frac{n}{\mu_p} & (1 \leq p \leq P \text{ tel que } \mu_p \neq 0, \ n \in \mathbb{Z}_{\geq N_p+1}) \\ s &= \frac{n}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} & (\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket, \ n \in \mathbb{Z}_{\leq |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}|}^*) \end{aligned}$$

En particulier, on constatera que 0 n'est pas un pôle pour la fonction méromorphe $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{\mu, \mu'}$, et donc on reprouvera que les valeurs directionnelles ont un sens pour la fonction $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$.

Le fait que $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{\mu, \mu'}$ admette un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ découle directement de la Proposition 1.3.9, et ce même théorème donne également des candidats pour les pôles de cette fonction. Il suffit en effet de remplacer s_p par $-N_p + \mu_p s$ et s'_q par $-N'_q + \mu'_q s$ pour obtenir des candidats pôles. Cependant, l'ensemble de pôles que l'on donne ici est plus précis.

Remarquons au passage que le terme $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{\mu, \mu'}(\theta, s)$ ne contribuera pas à la formule des valeurs spéciales directionnelles, puisqu'il s'annule en $s = 0$. En revanche, si on dérive ce terme, il n'est pas nul en général, et est particulièrement pathologique. On introduira alors des fonctions auxiliaires $(\varphi_{\mathbf{R}}^j)_{j \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ qui aideront à récupérer l'information du terme $\partial_s(K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{\mu, \mu'}(\theta, s))$ en $s = 0$. On pourra alors évaluer la formule de prolongement en $s = 0$ pour obtenir une formule explicite sur les valeurs directionnelles des dérivées.

Théorème A. Soit $(\mu, \mu') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^Q$. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. On a

$$Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\mu, \mu'} = (-1)^{|\mathbf{N}'|} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{(-1)^{N'_j} \mu'_j N'_j!}{|\mu'| + |\mu|_{\mathcal{P}}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$$

$$\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!}, \quad (1.8)$$

avec

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q, p}^{v_{p, q}} \right),$$

où l'on rappelle les notations

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \quad \mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p, q},$$

et

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \quad \mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p, q}.$$

Remarque 1.4.1. 1) L'expression décrivant $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ est une somme finie. En effet, on voit que

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (N'_q - \mathbf{w}(q)) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mathbf{v}(q) = \sum_{(p, q) \in \mathcal{P} \times (\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\})} v_{p, q}. \text{ Comme } \mathbf{w}(q) \text{ est positif pour tout } q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \text{ on en déduit la majoration suivante :}$$

$$\sum_{(p, q) \in \mathcal{P} \times (\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\})} v_{p, q} \leq |\mathbf{N}'|.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{P}$, et tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, on a que $0 \leq v_{p, q} \leq |\mathbf{N}'|$.

2) L'expression des valeurs de $Z_{\mu, \mu'}^{\mu, \mu'}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ est décrite par une somme finie. En effet, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$ tel que $|\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|$ on a $0 \leq k_p \leq |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$.

3) Les termes de la forme $\zeta(-n, d)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $d \in H_0$ s'expriment à l'aide des polynômes de Bernoulli :

$$\zeta(-n, d) = -\frac{B_{n+1}(d)}{n+1}.$$

De plus, en $d = 1$, on a $\zeta(-n, 1) = \zeta(-n)$, et

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{b_{n+1}}{n+1},$$

où b_{n+1} est le $n+1$ -ième nombre de Bernoulli.

4) Si tous les coefficients d_p valent 1, alors le produit $\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!}$ sera fréquemment nul. En effet, s'il existe $p \in \mathcal{P}^c$ tel que $N_p + k_p$ soit pair et plus grand que 2, alors le produit est nul.

En $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, on obtient les expressions simplifiées suivantes :

Corollaire A1. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. On a

$$Z(-(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}' \\ \mathcal{P} \subsetneq [1, P]}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!}. \quad (1.9)$$

Remarque 1.4.2. On obtient au passage la même formule que [Ono21] en $N = 0$, une fois avoir remplacé toutes les directions par 1.

Via le Théorème A, on a également une formule pour les valeurs sur la diagonale de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ en considérant la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$:

Corollaire A2. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$Z_{\Delta}(-N) = \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \frac{(-1)^{(|\mathcal{P}|+1+Q)N+|\mathcal{P}|}}{Q+|\mathcal{P}|} N!^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=(Q+|\mathcal{P}|)N+|\mathcal{P}|}} Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right),$$

où l'on rappelle les notations

$$\forall q \in [1, Q], \quad \mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q},$$

et

$$\forall q \in [1, Q] \setminus \{j\}, \quad \mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p,q}.$$

Remarque 1.4.3. Observons à l'aide du corollaire précédent que, si l'on pose $Q = 1$, $P \geq 1$ un entier quelconque, et $l_1(\mathbf{n}) = n_1 + \dots + n_P$, on trouve via les formules précédentes que $Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) = 1$, et que

$$Z_{\Delta}(-N) = \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, P]} \frac{(-1)^{|\mathcal{P}|N+|\mathcal{P}|}}{1+|\mathcal{P}|} N^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=(1+|\mathcal{P}|)N+|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!}.$$

Cette formule coïncide avec celle obtenue par Onodera dans [Ono21, Théorème 3].

On peut également fournir une variante qualitative du Théorème A sur les valeurs directionnelles aux entiers négatifs de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$:

Corollaire A3. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$, et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. On note $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$, par les coefficients complexes $(d_p)_{p \in [1, P]}$ et $(c_{q,p})_{p \in [1, P], q \in [1, Q]}$, et par les directions μ_p pour tout $p \in [1, P]$, et μ'_q pour tout $q \in [1, Q]$. Alors $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) \in \mathbb{K}$.

On a également une expression de la dérivée directionnelle en les entiers négatifs de Z . Cette expression fait intervenir des fonctions "auxiliaires", que l'on appellera fonction zêta de type Barnes généralisée.

Si l'on suppose qu'une forme linéaire l_j est à coefficients rationnels, on dispose d'une relation entre la fonction auxiliaire $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ et la fonction zêta de Hurwitz :

Proposition B. Soit $j \in [1, Q]$ un entier. On suppose que l_j est une forme linéaire à coefficients rationnels pour $1 \leq j \leq Q$. Pour tout $1 \leq p \leq P$, on pose $c_{j,p} = \frac{a_{j,p}}{b_{j,p}}$ la décomposition irréductible de $c_{j,p}$,

avec $a_{j,p} > 0$ et $b_{j,p} > 0$. On pose alors $x_j(\mathbf{c}) = \frac{\text{ppcm}(a_{j,p})}{\text{pgcd}(b_{j,p})} \in \mathbb{Q}_+^*$, et $\beta_{j,p}(\mathbf{c}) := \frac{x_j(\mathbf{c})}{c_{j,p}} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq p \leq P$. Alors pour tout $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, la fonction $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ admet la relation suivante pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = & x_j(\mathbf{c})^{-s} \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c})-1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c})-1}} \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, \mathbf{k}' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + \mathbf{k}' = |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}^c|} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-R_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})}\right)}{k_p!} \\ & \cdot \frac{\zeta(s - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} \end{aligned}$$

En dérivant en s la fonction auxiliaire $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$, puis en évaluant la dérivée en $s = -N$ avec N un entier positif, on trouve aisément le corollaire suivant via la proposition précédente.

Corollaire B1. Avec les mêmes notations que la Proposition B, on a pour tout $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{R}}^{j'}(-N) = & x_j(\mathbf{c})^N \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}^{R_p}(\mathbf{c}) \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c})-1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c})-1}} \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \right) \\ & \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, \mathbf{k}' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + \mathbf{k}' = |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}^c|} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-R_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})}\right)}{k_p!} \\ & \cdot \left(\frac{\zeta'(-N - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} - \ln(x_j(\mathbf{c})) \frac{\zeta(-N - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} \right). \end{aligned}$$

On commence par énoncer une version qualitative sur les valeurs spéciales de la dérivée directionnelle de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$:

Théorème C. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. On note $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$, par les coefficients complexes $(d_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ et $(c_{q,p})_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket, q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$, et par les directions $(\mu_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, $(\mu'_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$. Alors,

$$Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} \in \text{Vect}_{\mathbb{K}} \left[\gamma, \ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right)_{1 \leq q, j \leq Q, 1 \leq p \leq P}, (\zeta'(-n, d_p))_{n \in \mathbb{N}, |\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + P}, \right. \\ \left. (\varphi_{\mathbf{n}}^{j'}(-N'_j))_{\mathbf{n} \in \llbracket 0, |\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| \rrbracket^P, j \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \right],$$

où γ désigne la constante d'Euler, et les φ_j sont les fonctions auxillaires, dites de Barnes généralisées, décrites dans la Définition 1.3.13.

Si les formes linéaires $(l_j)_{j \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ sont à coefficients rationnels, alors on peut utiliser le Corollaire B1 pour obtenir un résultat plus précis :

Corollaire C1. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. On suppose que les formes linéaires $(l_j)_{j \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ et les coefficients $(d_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ sont rationnels. On note $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$, et par les directions $(\mu_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, $(\mu'_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$. Pour tout $1 \leq p \leq P$, on pose $c_{q,p} = \frac{a_{q,p}}{b_{q,p}} \in \mathbb{Q}$ la décomposition irréductible de $c_{q,p}$ avec $a_{q,p} > 0$ et $b_{q,p} > 0$. On pose alors $x_q(\mathbf{c}) = \frac{\text{ppcm}(a_{q,p})}{\text{pgcd}(b_{q,p})} \in \mathbb{Q}_+^*$, et $\beta_{q,p}(\mathbf{c}) := \frac{x_q(\mathbf{c})}{c_{q,p}} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq p \leq P$. Posons également l'ensemble

$$A := \{l_j(x_{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})) | j \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \mathbf{v} \in \llbracket 0, \beta_{j,1} - 1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 0, \beta_{j,P} - 1 \rrbracket\}.$$

On a alors

$$Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} \in \text{Vect}_{\mathbb{K}} \left[\gamma, \ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right)_{q, j \in \llbracket 1, Q \rrbracket}, (\ln(x_j(\mathbf{c})))_{1 \leq j \leq Q}, (\zeta'(-n, y))_{0 \leq n \leq P|\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + P, y \in A} \right],$$

où γ désigne la constante d'Euler

La formule pour $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ est en fait explicite. Elle admet une formule faisant intervenir les valeurs spéciales des dérivées des fonctions zêta de Barnes généralisées $\varphi_j^{\mathbf{R}}$, des valeurs spéciales des dérivées en s de la fonctions zêta de Hurwitz, et des valeurs spéciales de la fonction zêta de Hurwitz. On détaille cette formule dans le théorème ci-dessous.

Théorème D. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$, alors

$$\begin{aligned}
Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}| + N'_j} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& \cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p(\gamma - h_{N_p}) + \mu'_j(\gamma - h_{N'_j}) \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\
& + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \\
& \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s = -N'_j} \\
& - \sum_{j=1}^Q (\gamma - h_{N'_j}) \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \\
& \cdot \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \Bigg),
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket},$$

pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$, et tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = & \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\
& \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = & (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\
& \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\
& + (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \\
& \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')
\end{aligned}$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ la constante posée dans la Proposition 1.3.2.

Remarque 1.4.4. Ce théorème ramène ainsi le calcul des dérivées directionnelles en les multientiers négatifs $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ aux calculs des valeurs aux entiers négatifs de la dérivée des fonctions auxiliaires $\varphi_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^j$.

$$\varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} (n_1 + d_1)^{R_1} \dots (n_P + d_P)^{R_P} (l_j(\mathbf{n}) + d'_j)^{-s} \quad (j \in [1, Q], \mathbf{R} \in \mathbb{N}^P).$$

Si les coefficients des formes linéaires l_j sont rationnels, alors on dispose d'une expression explicite de la valeur de $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}}^j(-N)$ en fonction des valeurs spéciales des dérivées de la fonction zêta d'Hurwitz via la Proposition B.

Remarque 1.4.5. On observe que la formule pour $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ ne fait intervenir que des sommes finies.

En effet, il est clair que la somme $\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathbf{N}'|+|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} \varphi_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^j$ est finie. De même, on a que la somme $\sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \varphi_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^j$ présente dans le calcul de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1$ et de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ est finie puisque

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathcal{P}, \forall b \in [1, Q] \setminus \{j\}, \quad 0 \leq v_{a,b} \leq \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = |\mathbf{N}'| \\
\forall p \in \mathcal{P}^c, \forall q \in [1, Q], \quad 0 \leq w_{p,q} \leq |\mathbf{w}_p| = k_p \leq |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}|.
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, la somme $\sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \varphi_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^j$ est également finie.

Si les coefficients $\mathbf{c}$ sont rationnels, on peut remplacer les dérivées des fonctions auxiliaires aux entiers négatifs par la formule obtenue dans le Corollaire B1 :

Corollaire D1. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. Pour tout $1 \leq p \leq P$, on pose $c_{q,p} = \frac{a_{q,p}}{b_{q,p}} \in \mathbb{Q}$ la décomposition irréductible de $c_{q,p}$ avec $a_{q,p} > 0$ et $b_{q,p} > 0$. On pose alors $x_q(\mathbf{c}) = \frac{\text{ppcm}(a_{q,p})}{\text{pgcd}(b_{q,p})} \in \mathbb{Q}_+^*$, et $\beta_{q,p}(\mathbf{c}) := \frac{x_q(\mathbf{c})}{c_{q,p}} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq p \leq P$. On a

$$\begin{aligned}
Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}| + N'_j} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& \cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p(\gamma - h_{N_p}) + \mu'_j(\gamma - h_{N'_j}) \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\
& + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}| + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \\
& \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + \sum_{j=1}^Q \mu'_j x_j(\mathbf{c})^{N'_j} \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall q \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}(\mathbf{c})^{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p} \\
& \cdot \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c}) - 1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c}) - 1}} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}^c|} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})})}{k_p!} \right) \\
& \cdot \left(\frac{\zeta'(-N'_j - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} - \ln(x_j(\mathbf{c})) \frac{\zeta(-N'_j - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} \right) \\
& - \sum_{j=1}^Q (\gamma - h_{N'_j}) \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall q \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \\
& \cdot \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \Bigg)
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in [1, P]},$$

pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$, et tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$,

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!.$$

et

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\ + (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}').$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ la constante posée dans la Proposition 1.3.2.

Remarque 1.4.6. Posons $Q = 1$, et $P \geq 1$ un entier quelconque, on considère $l_1(\mathbf{n}) = n_1 + \dots + n_P$ (et donc $c_{1,1} = \dots = c_{1,P} = 1$), $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$, et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (N_\Delta, N_\Delta)$, en rappelant que $N_\Delta = (N, \dots, N)$. On trouve alors via le corollaire précédent que

- Pour tout $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$, on a $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(1, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = 1$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(1, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = 0$.
- Avec les notations du Corollaire D1, on a $\mathbf{x}_1(\mathbf{c}) = 1$, et $\beta_{1,p} = 1$ pour tout $1 \leq p \leq P$.
- On a $\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := \mathbf{N}_\Delta \in \mathbb{N}^P$.
- Dans l'expression de $Z'(-(N_\Delta, N_\Delta))$ du corollaire précédent, on trouve que la première somme de $\mathbf{1}, \mathbf{1}$ la formule s'annule avec la dernière somme de la formule.

Via les quatres points précédents, on trouve que

$$Z'(-(N_\Delta, N_\Delta)) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket \\ \mathbf{1}, \mathbf{1}}} \frac{N!^{|\mathcal{P}|+1}}{|\mathcal{P}|+1} (-1)^{|\mathcal{P}|(N+1)} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|(N+1)+|\mathcal{P}|}} \\ \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta'(-N - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\ + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} N!^{|\mathcal{P}^c|} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}|+k' = |\mathcal{P}^c|(N+1)+|\mathcal{P}^c|-1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \frac{\zeta'(-N - k', d'_1)}{k'!} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!}.$$

Cette expression correspond à une forme développée de la formule obtenue par Onodera dans [Ono21, Théorème 4] (avec le paramètre $d_1 = 0$ dans le Théorème d'Onodera).

En posant $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dans le Théorème D, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire D2. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$, alors

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \gamma(\mu'_j + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) + Q_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ & + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\ & + \sum_{j=1}^Q \mu'_j (\zeta^B)'(0, d'_j | \mathbf{c}_j) - \sum_{j=1}^Q \gamma \mu'_j \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = & \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\mathbf{w}'=(w'_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \prod_{p \in \mathcal{P}^c} [0, k_p]} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{w'_p} c_{f,p}^{w'_p} c_{j,p}^{k_p - w'_p} \right) \\ & + \gamma |\boldsymbol{\mu}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}, \end{aligned}$$

et $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ la constante définie dans la Proposition 1.3.2.

Remarque 1.4.7. Les termes de la forme $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dans le corollaire précédent découlent de l'étude de la fraction rationnelle

$$x^{-1+k_p} \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x)^{-1}.$$

En étudiant $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, et $\boldsymbol{\mu}' = \mathbf{1}$, on obtient que $Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = \partial_s (\zeta^{Sh}(s, (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_Q), \mathbf{d}')|_{s=0})$, c'est-à-dire la dérivée première par rapport à s , en $s = 0$, de la fonction zêta de Shintani définie dans 1.2.13. Rappelons que, avec la Définition 1.2.16 et la Définition 1.2.14, on a $(\partial_s \zeta^B(s, d | c_1, \dots, c_P))|_{s=0} = \ln(\Gamma_P(d | c_1, \dots, c_P))$, et $\partial_s (\zeta^{Sh}(s, \mathbf{d}' | \mathbf{c}))|_{s=0} = \ln(\Gamma_P(\mathbf{d}' | \mathbf{c}))$. On obtient alors via le corollaire précédent que le logarithme de la fonction multigamma de Shintani $\Gamma_P^{Sh}(\mathbf{d}' | \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_Q)$ s'exprime complètement à l'aide du logarithme de la fonction gamma de type Barnes.

Corollaire D3. On a

$$\begin{aligned} \ln(\Gamma_P(\mathbf{d}' | \mathbf{c})|_{s=0}) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q \frac{(-1)^{|\mathcal{P}|}}{Q} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \left(\gamma \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) + Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ & + \sum_{j=1}^Q \ln(\Gamma_P(d'_j | \mathbf{c}_j)) - \gamma \sum_{j=1}^Q \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!}, \end{aligned}$$

avec

$$Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \sum_{\mathbf{w}' = (w'_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \llbracket 0, k_p \rrbracket} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{w'_p} c_{f,p}^{w'_p} c_{j,p}^{k_p - w'_p} \right) \\ + \gamma(Q-1) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}.$$

En appliquant le Corollaire A1 et le Corollaire D2 aux deux fonctions zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$, on obtient les formules suivantes :

Théorème E. *On a les valeurs spéciales pour $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ en $s = 0$:*

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) = \frac{29}{60}, \\ \zeta_{\mathfrak{so}(5)}(0) = \frac{7}{18}.$$

De plus, on a les valeurs spéciales pour $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(s)$ et $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ en $s = 0$:

$$\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0) = \frac{29}{60} \ln(120) + 2\gamma\zeta(0)^2 + \frac{1}{4}\zeta(0)\zeta'(0) - 4\gamma\zeta(-1) + \frac{1}{5}\zeta'(-1)(\ln(3) + 2\ln(2)) - \frac{14}{5}\zeta'(-1) \\ - \frac{11}{9} \ln(2) - \frac{23}{24} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(\pi) - 5\zeta'(0) + 3\zeta'(-1) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) \\ + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{5}{6}\right), \\ \zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0) = \frac{7}{18} \ln(6) - \frac{11}{24} \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(\pi) + \left(\frac{1}{2}\zeta(0)^2 - \frac{1}{2}\zeta(-1)\right) \gamma - \frac{11}{4}\zeta'(0) - \frac{13}{6}\zeta'(-1)$$

On peut simplifier la formule de $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0)$ sous cette forme :

$$\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0) = -\frac{13}{6} \left(\frac{1}{12} - \ln(A) \right) + \frac{1}{6}\gamma + \frac{47}{36} \ln(2) + \frac{7}{18} \ln(3) + \frac{9}{8} \ln(\pi) \simeq 2.94635...$$

avec A la constante de Gleicher-Kirkelin [OEI23b], et γ la constante d'Euler [OEI23a].

Via la formule précédente, on obtient une expression explicite de la constante C dans le Théorème 1.2.35 :

$$C = \frac{e^{\frac{1}{6}\gamma} 2^{\frac{35}{36}} \pi^{\frac{9}{8}} A^{\frac{13}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{12}}}{3^{\frac{5}{72}} e^{\frac{13}{72}} \sqrt{\pi}}.$$

On obtient alors une version explicite du Théorème 1.2.35 obtenu par Bridges, Brindle, Bringmann et Franke dans [BBBF23, Théorème 1.3] :

Corollaire F. *Pour tout entier $N \geq 1$, on a*

$$r_{\mathfrak{so}(5)}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{7}{12}}} \exp\left(A_1 n^{\frac{1}{3}} + A_2 n^{\frac{2}{9}} + A_3 n^{\frac{1}{9}} + A_4\right) \left(1 + \sum_{j=2}^{N+1} \frac{B_j}{n^{\frac{j-1}{9}}} + O_N\left(n^{-\frac{N+1}{9}}\right)\right),$$

avec

$$b = \frac{7}{12}, \quad C = \frac{2^{\frac{35}{36}} \pi^{\frac{9}{8}} A^{\frac{13}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{12}}}{3^{\frac{5}{72}} e^{\frac{13}{72} + \frac{1}{9}\gamma} \sqrt{\pi}}, \quad A_1 = \frac{3^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}, \\ A_2 = \frac{2^{\frac{8}{9}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right)}{3^{\frac{7}{9}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{9}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}}}, \quad A_3 = \frac{2^{\frac{40}{9}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \zeta\left(\frac{1}{3}\right)^2 \zeta\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3^{\frac{44}{9}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{20}{9}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{10}{9}}}, \\ A_4 = \frac{2^8 \left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right)^3 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3 \zeta\left(\frac{1}{3}\right)^3 \zeta\left(\frac{4}{3}\right)^3}{3^8 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4 \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

On souhaite désormais appliquer les résultats obtenus dans le Théorème E afin d'obtenir une formule asymptotique du nombre de représentations $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$ de l'algèbre de Lie exceptionnelle $\mathfrak{g}_2$, formule que l'on obtient via le Théorème 1.2.33 obtenu par Bridges, Brindle, Bringmann et Franke dans [BBBF23, Théorème 4.4]. On pose tout d'abord

$$\begin{aligned} l_1^*(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, \\ l_2^*(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \end{aligned}$$

et on pose

$$\begin{aligned} \omega_\beta := & 120^{\frac{1}{5}} \frac{\Gamma(\frac{4}{5})}{\Gamma(\frac{1}{5})^4} \zeta\left(\frac{1}{5}\right) \left(\int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_2 dx_3 dx_4 \right. \\ & + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_3 dx_4 \\ & + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_2 dx_4 \\ & \left. + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_2 dx_3 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_\alpha = & 120^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{1}{3})} \left(\int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_2 dx_3, \right. \\ & + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_2 dx_4 \\ & + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_3 dx_4 \\ & \left. + \int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_2 dx_3 dx_4 \right). \end{aligned}$$

On trouve alors une formule asymptotique de $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$, dont certains de ces coefficients s'expriment en fonction des résidus ω_α et ω_β , et des valeurs spéciales $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)$.

Théorème G. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$r_{\mathfrak{g}_2}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{C}{n^b} \exp\left(A_1 n^{\frac{1}{4}} + A_2 n^{\frac{3}{20}} + A_3 n^{\frac{1}{20}}\right) \left(1 + \sum_{j=2}^{N+1} \frac{B_j}{n^{\frac{j-1}{20}}} + O\left(n^{-\frac{N+1}{20}}\right)\right),$$

avec B_j des réels explicites, et avec C, b, A_2, A_3 tels que :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{e^{\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)} (\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{1-6\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)}{8}} \sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}}, \quad b = \frac{6-6\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)+1}{8}, \\
K_2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\omega_\beta \Gamma(\frac{6}{5}) \zeta(\frac{6}{5})}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{20}}}, \quad K_3 = -\frac{3}{160} \cdot \frac{(\omega_\beta \Gamma(\frac{6}{5}) \zeta(\frac{6}{5}))^2}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{21}{20}}}, \\
A_1 &:= 4 \left(\omega_\alpha \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right) \right)^{\frac{3}{4}}, \quad A_2 := \frac{\omega_\beta \Gamma(\frac{1}{5}) \zeta(\frac{6}{5})}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{1}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{20}}}, \\
A_3 &:= K_3 + 3 \left(\binom{-1/3}{1} K_3 + \binom{-1/3}{2} \frac{K_2^2}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{4}}} \right) + \frac{5 (\omega_\beta \Gamma(\frac{6}{5}) \zeta(\frac{6}{5}))}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{18}{20}}} \binom{-1/5}{1} K_2 \\
\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0) &= \frac{29}{60} \ln(120) + 2\gamma \zeta(0)^2 + \frac{1}{4} \zeta(0) \zeta'(0) - 4\gamma \zeta(-1) + \frac{1}{5} \zeta'(-1) (\ln(3) + 2 \ln(2)) - \frac{14}{5} \zeta'(-1) \\
&\quad - \frac{11}{9} \ln(2) - \frac{23}{24} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(\pi) - 5\zeta'(0) + 3\zeta'(-1) - \frac{2}{3} \zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3} \zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) \\
&\quad + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3} \zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{6} \zeta'\left(0, \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{6} \zeta'\left(0, \frac{5}{6}\right), \\
\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) &= \frac{29}{60}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.4.8. Les B_j peuvent être calculés d'après les coefficients b_j obtenus via [BBBF23, Lemme 3.6].

Chapitre 2

Expansion de Crandall de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$

On fixera dans ce chapitre des coefficients $\mathbf{c} = (c_{q,p})_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, des complexes $\mathbf{d} = (d_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, $\mathbf{d}' = (d'_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$ tels que $d_p \in H_0$ pour tout $1 \leq p \leq P$, et vérifiant pour tout $1 \leq q \leq Q$,

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \quad d'_q = \mathbf{c}_q \cdot \mathbf{d} = \sum_{p=1}^P c_{q,p} d_p.$$

De plus, on fixera dans ce chapitre un multi-entier $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et une direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$. Toutes les majorations de ce chapitre dépendront potentiellement de ces constantes, mais l'on choisira de ne pas spécifier cette dépendance pour des soucis de clarté dans la rédaction.

On étudiera tout d'abord le prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ et on étudiera ses singularités dans la démonstration de la Proposition 1.3.9. Ensuite on décomposera la fonction méromorphe $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ à l'aide d'une expansion de Crandall, et on obtiendra que une formule de prolongement pour la fonction univariable $Z(-\mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}s, -\mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}'s)$. Plus précisément, on obtiendra décomposition de cette fonction méromorphe suivant une somme entre une fonction holomorphe s'annulant en $s = 0$, et une fonction méromorphe correspondant à une série de type Erdélyi. Cette formule de prolongement sera cruciale dans la démonstration des Théorèmes A et D.

2.1 Démonstration de la Proposition 1.3.9

Le prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ et la forme des singularités découlent du Théorème 1.2.25. On cherche ici à montrer que $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est absolument convergente sur le domaine $\mathcal{D}$ introduit dans la Proposition 2.1.1. Il suffira de montrer que la série décrivant $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{D}$. On se propose de démontrer la proposition suivante, plus générale que ce que l'on veut prouver dans la Proposition 1.3.9 :

Proposition 2.1.1. *Soit $P, Q \geq 1$ deux entiers, et $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in (H_0^P)^Q$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_p) \in H_0^P$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_q) \in H_0^Q$. On pose*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q} := \left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q \mid \sum_{p \in \mathcal{P}} \sigma_p + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > |\mathcal{P}|, \emptyset \neq \mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket \right\}.$$

La fonction $Z_{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}^{P,Q}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + \alpha_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \left(\sum_{p=1}^P \gamma_{q,p} n_p + \beta_q \right)^{-s'_q}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{D}$.

Démonstration. Toutes les constantes intervenantes dans la preuve de cette proposition dépendront implicitement du choix des coefficients $(\gamma_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$, de $\boldsymbol{\alpha}$ et de $\boldsymbol{\beta}$. On ne marquera pas cette dépendance

pour améliorer la clarté de la rédaction. On démontrera ce résultat par principe de récurrence. Le cas $P = 1$ est trivial.

Supposons que le résultat est vrai pour tout $k < P$. Soit $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in H_0^{P+Q}$, et $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P$. Alors on a les inégalités suivantes

$$(n_p + 1) \ll n_p + Re(\alpha_p) \leq |n_p + \alpha_p| \leq n_p + |\alpha_p| \ll (n_p + 1),$$

De même, on obtient que

$$\sum_{p=1}^P n_p + P \ll \sum_{p=1}^P Re(\gamma_{q,p})n_p + Re(\beta_q) \leq \left| \sum_{p=1}^P \gamma_{q,p}n_p + \beta_q \right| \leq \sum_{p=1}^P |\gamma_{q,p}|n_p + |\beta_q| \ll \sum_{p=1}^P n_p + P.$$

En prenant le produit sur $\llbracket 1, P \rrbracket$ et $\llbracket 1, Q \rrbracket$, on trouve que

$$\left| \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \right| \ll e^{(\sum_{p=1}^P |\tau_p| + \sum_{q=1}^Q |\tau'_q|)\pi/2} \prod_{p=1}^P (n_p + 1)^{-\sigma_p} (P + \sum_{p=1}^P n_p)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)}.$$

On souhaite désormais montrer que la série $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + 1)^{-\sigma_p} (P + \sum_{p=1}^P n_p)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)}$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{D}$. On peut découper cette série en somme finie de séries de la forme $\sum_{0 \leq n_{f(1)} \leq \dots \leq n_{f(P)}} \prod_{p=1}^P (n_p + 1)^{-\sigma_p} (P + \sum_{p=1}^P n_p)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)}$, avec $f \in \mathfrak{S}_P$, et en termes de la forme $Z_{1,1,P}^{k,1}((\sigma_1 + \dots + \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{k-1}+1} + \dots + \sigma_{i_k}), \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)$ avec $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k = P$ et $(i_1, \dots, i_k) \neq (1, \dots, P)$ (ce qui implique en particulier $k < P$). Par principe de récurrence, la série de Dirichlet $Z_{1,1,P}^{k,1}((\sigma_1 + \dots + \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{k-1}+1} + \dots + \sigma_{i_k}), \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)$ converge normalement sur tout compact de

$$\left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q \left| \left[\sum_{p \in \mathcal{P}} (\sigma_{i_p} + \dots + \sigma_{i_{p+1}-1}) \right] + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > |\mathcal{P}|, \mathcal{P} \subset \{i_1, \dots, i_{k-1}\} \right. \right\},$$

et on observe que cet ensemble ci-dessus contient bien l'ensemble $\mathcal{D}_{P,Q}$.

Fixons la permutation triviale $f = Id \in \mathfrak{S}_P$. On trouve alors par changement de variable que

$$\sum_{0 \leq n_{f(1)} \leq \dots \leq n_{f(P)}} \prod_{p=1}^P (n_p + 1)^{-\sigma_p} (P + \sum_{p=1}^P n_p)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P \left(1 + \sum_{i=1}^p n_i \right)^{-\sigma_p} \left(P + \sum_{p=1}^P p n_p \right)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)}.$$

Comme précédemment, on trouve la majoration suivante :

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P \left(1 + \sum_{i=1}^p n_i \right)^{-\sigma_p} \left(P + \sum_{p=1}^P p n_p \right)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)} \ll \zeta_P^{EZ}(\sigma_1, \dots, \sigma_{P-1}, \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q + \sigma_P),$$

Par le Lemme 1.2.23, on en déduit que ce terme là converge normalement sur tout compact de l'ensemble

$$\{(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q | \sigma_p + \dots + \sigma_P + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > P + 1 - p, 1 \leq p \leq P\}.$$

On obtient alors que la série $\sum_{0 \leq n_{f(1)} \leq \dots \leq n_{f(P)}} \prod_{p=1}^P (n_p + 1)^{-\sigma_p} (P + \sum_{p=1}^P n_p)^{-(\sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q)}$, avec $f \in \mathfrak{S}_P$ converge normalement sur tout compact de

$$\{(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q | \sigma_{f(p)} + \dots + \sigma_{f(P)} + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > P + 1 - p, 1 \leq p \leq P\}.$$

On trouve finalement que $Z_{\gamma, \alpha, \beta}^{P,Q}$ converge normalement sur tout compact de

$$\left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q \left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \sigma_p + \sigma'_1 + \dots + \sigma'_Q > |\mathcal{P}|, \emptyset \neq \mathcal{P} \subset [1, P] \right. \right\}.$$

□

Pour obtenir le prolongement méromorphe de la fonction multizêta $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$, et les singularités de cette fonction multizêta, il suffit d'utiliser le Théorème 1.2.25. En effet, via la Remarque 1.3.8, la fonction multizêta $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est de la forme $\zeta^{HL}(\mathbf{0}, \widetilde{\mathbf{d}}, \widetilde{\mathbf{c}}, (s_1, \dots, s_P, s'_1, \dots, s'_Q))$ introduite dans la Définition 1.2.24. On peut donc appliquer le Théorème 1.2.25 pour cette fonction multizêta.

2.2 Enoncé de la formule de prolongement de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$

On souhaite ici établir une formule de prolongement de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$. Avant d'exprimer cette formule, on se doit d'introduire des fonctions de la forme $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$, qui apparaitront dans la formule de prolongement.

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{P} \subsetneq [1, P]$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. On pose $l_p^*(\mathbf{x}) = c_{1,p}x_1 + \dots + c_{Q,p}x_Q$ pour tout $1 \leq p \leq P$. Pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, avec $\sigma \gg 1$, on considère les fonctions

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{k_p} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q,$$

et

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) = \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q,$$

où l'on a posé $dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q = dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_Q$, et où l'on a posé $\widehat{\mathbf{x}}^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_Q)$, avec $1 \leq j \leq Q$.

On dispose de la proposition suivante pour majorer ces fonctions, et pour calculer plus tard la valeur en $s = 0$ de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ et de $h'_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$.

Proposition 2.2.2. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$, et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. Soit $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. Alors

i) $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}$ et $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

ii) Pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration suivante, uniformément pour $s \in D_0(r)$:

$$|h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)| \ll_r (QM)^{|\mathbf{k}|}, \quad (2.1)$$

avec $M := \max_{1 \leq q \leq Q, 1 \leq p \leq P} (|c_{q,p}|)$.

iii) Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit, et $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = & \sum_{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \\
& \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\
& \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j, p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f, p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q, \quad (2.2)
\end{aligned}$$

avec les notations $\mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p, q}$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$, et $\mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p, q}$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. De plus, on peut dériver le terme général de la série précédente en s pour obtenir une expression de $\partial_s h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$.

Remarque 2.2.3. 1) Le point iii) de cette proposition sera critique pour évaluer $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ et $\partial_s h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ en $s = 0$ dans les sous-sections 3.2.2 et 3.2.3.

2) On peut obtenir des résultats similaires au points ii) et iii) de la proposition précédente pour les fonctions de la forme $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s)$, cependant nous n'auront pas besoin d'étudier en détail ce type de fonction.

On peut désormais énoncer la formule de prolongement de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$. On découpera cette fonction analytique en deux parties qui dépendront de s et d'une variable libre $\theta > 0$ suffisamment petite. La première, que l'on notera $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$, sera holomorphe en s et s'annulera en $s = 0$. L'autre terme sera une série de type Erdélyi (dans le genre de la série présente dans la formule d'Erdelyi, c.f. 2.6), que l'on notera $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$. Ce second terme contiendra les hypothétiques singularités de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$, et l'on notera cet ensemble de singularités $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, dont l'expression est

$$\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = \left[\bigcup_{\substack{1 \leq p \leq P \\ \mu_p \neq 0}} \frac{1}{\mu_p} \mathbb{Z}_{\geq N_p + 1} \right] \cup \left[\bigcup_{\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket} \frac{1}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|^{\mathcal{P}}} \mathbb{Z}_{\leq |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}|}^* \right].$$

Proposition 2.2.4. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. Alors la fonction univariable $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et ses pôles sont contenus dans $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$. Plus précisément, on a la formule de prolongement suivante :

Pour tout $\theta > 0$ suffisamment petit, et tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, on a

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s), \quad (2.3)$$

avec $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ et $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ tels que :

1) Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \sum_{\substack{\emptyset \neq Q \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \\ \mu, \mu'}} \sum_{A_Q \subset Q^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_Q|} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_Q} \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \right. \\ \left. \cdot \prod_{q \in A_Q} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_Q} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right). \quad (2.4)$$

2) Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, on pose

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right. \\ \left. \frac{\theta(|\mu'| + |\mu|_{\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|_{\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \\ + \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right). \quad (2.5)$$

De plus, on a que :

- i) $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est une fonction holomorphe en s sur tout $\mathbb{C}$, et s'annule en $s = 0$.
- ii) $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est une fonction méromorphe en s sur $\mathbb{C}$, avec des pôles inclus dans $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$. De plus, on peut dériver suivant s la série décrite dans l'expression de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$, terme à terme.

Remarque 2.2.5. 1) $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ sera l'unique contributeur lors du calcul de la valeur directionnelle $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$, puisque la fonction $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ s'annule en $s = 0$. En revanche, lorsque l'on étudiera la valeur de la dérivée $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$, il faudra tenir compte du terme $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$.

2) On verra dans la preuve de la Proposition 2.2.4 que la série

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \prod_{q \in A_Q} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_Q} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q),$$

décrit une fonction holomorphe en s sur $\mathbb{C}$ (la série est en fait absolument convergente sur $\mathbb{C}$). En particulier, on pourra considérer la dérivée de cette série en s , et l'évaluer en $s = 0$ dans la démonstration du Théorème D. Notons que l'on ne cherchera jamais à calculer directement les valeurs de cette série, ou les valeurs de sa dérivée en s .

A l'aide de cette proposition, on obtiendra au passage que la fonction $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est régulière en 0, et on aura alors démontré par une autre méthode que Komori dans [KMT10a] l'existence de valeurs directionnelles pour la classe de fonction zêta qui nous intéresse. On obtient également une information sur les pôles de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$:

Corollaire 2.2.6. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in (\mathbb{R}_+)^P \times (\mathbb{R}_+^*)^Q$. Alors la fonction $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$ a des pôles, qui sont tous simples, de la forme

$$\begin{aligned} s &= \frac{n}{\mu_p} & (1 \leq p \leq P, n \in \llbracket 1, P \rrbracket) \\ s &= \frac{n}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} & (\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket, n \in \llbracket -\infty, |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}| \rrbracket \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

Pour montrer cette proposition, on multipliera la série de Dirichlet $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ par $\Gamma(s'_1) \dots \Gamma(s'_Q)$. Cela revient à considérer une transformation de Mellin multivariable en un certain sens. Cette stratégie est classique pour prolonger et étudier les valeurs de la fonction zêta de Riemann [Hid93, Chap. 2], pour obtenir une représentation intégrale d'une fonction zêta de Shintani dans [Hid93, Chap. 2], pour calculer les valeurs de la fonction zêta de Hurwitz multiple de type Mordell-Tornheim [Ono21].

Ensuite, on procédera à un découpage du domaine d'intégration en introduisant une variable libre θ . Ce faisant, on pourra isoler un voisinage de l'origine du reste du domaine d'intégration. Enfin, on remarquera que l'intégrale au voisinage de l'origine peut être réexprimée à l'aide d'une formule d'Erdélyi (c.f. 2.6), puis on démontrera également que le reste des intégrales définissent en fait une fonction holomorphe en $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. Pour découper les intégrales apparaissant dans nos calculs, on utilisera les fonctions gammas incomplètes $\Gamma(s, \theta, \nu)$ et $\gamma(s, \theta, \nu)$ définies dans la Définition 1.3.1.

2.3 Expansion de Crandall directionnelle pour $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$

2.3.1 Lemmes

On commence par énoncer une identité classique qui découle d'un développement de Taylor :

Lemme 2.3.1. Soit $X_1, \dots, X_d$ des complexes tels que $|X_1 + \dots + X_d| < 1$. On a alors

$$(1 + X_1 + \dots + X_d)^{-s} = \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \llbracket 1, d \rrbracket}} \binom{-s}{|\mathbf{k}|} \binom{|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}} X_1^{k_1} \dots X_d^{k_d}.$$

Les expressions présentes dans ce chapitre feront intervenir une série dont le terme général contiendra $\zeta(s - k, d)$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $d \in H_0$. Dans [Ono21], Onodera dispose également de ces termes dans une de ses expressions, et il contrôle ces termes à l'aide du lemme suivant, dans le cas où $d \in \mathbb{R}_+^*$:

Lemme 2.3.2. [Ono21, Lemme 2.1] Soit $\alpha > 0$. On pose pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$,

$$D(\delta, r) := \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \min_{n \in \mathbb{N}^*} |s - n| \geq \delta, |s| \leq r \right\}.$$

Alors, pour tout $s \in D(\delta, r)$, $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|\partial_s^m \zeta(s - k, d)| \underset{m, r, \delta, \alpha}{\ll} k!(k+1)^{r+\alpha}.$$

Ce lemme n'est cependant pas suffisant ici, puisque l'on souhaite majorer $\zeta(s - k, d)$ avec $d \in H_0$. La démonstration du lemme précédent utilise une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta d'Hurwitz $\zeta(s, d)$ pour $d \in]0, 1]$. A priori, on ne peut pas obtenir de la même manière une majoration similaire pour $d \in H_0$. On utilisera donc la formule d'Euler Mac-Laurin sur la fonction zêta d'Hurwitz afin d'obtenir une inégalité similaire au lemme précédent.

Lemme 2.3.3. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, et $r' \in]1, +\infty[$. Alors on a

$$\forall s \in D(\delta, r), \forall d \in \overline{H}_{1/r'} \cap D_0(r'), \forall k \in \mathbb{N}, \quad |\zeta(s - k, d)| \underset{r, r', \delta}{\ll} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k k!(k+1)^{r+1} (1 + r'^{2k}).$$

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $n = r + 1$. On souhaite majorer $|\zeta(s - k, d)|$ uniformément en $s \in D(\delta, r)$ et en $d \in \overline{H}_{1/r'} \cap D_0(r')$. Soit $s \in D(\delta, r)$ et $d \in H_{1/r'} \cap D_0(r')$. On remarque que l'on a $n > -\sigma$. Soit $k \in \mathbb{N}$, comme on a que $n + k > -\sigma + k$, on peut reprendre l'expression de la fonction zêta de Hurwitz par la formule de Mac-Laurin 1.2.6 à l'ordre $n + k$, et l'évaluer en $s - k$

$$\begin{aligned} \zeta(s - k, d) = & \frac{d^{1-s+k}}{1 - s + k} + \sum_{i=0}^{n+k} \binom{-s+k}{i} \frac{(-1)^i B_{i+1}}{i+1} d^{-s-i+k} \\ & + (-1)^{n+k} \binom{-s+k}{n+1+k} \int_0^{+\infty} B_{n+k+1}(x) (x+d)^{-s-n-1} dx, \end{aligned}$$

avec $B_i(x)$ le i -ième polynôme de Bernoulli periodisé, et B_i le i -ième nombre de Bernoulli. En majorant chaque terme de l'égalité, on trouve

$$\begin{aligned} |\zeta(s - k, d)| \leq & \frac{|d|^{1-\sigma+k}}{|1 - s + k|} e^{|\tau|\pi/2} + \sum_{i=0}^{n+k} \left| \binom{-s+k}{i} \right| \frac{|B_{i+1}|}{i+1} |d|^{-\sigma-i+k} e^{|\tau|\pi/2} \\ & + \left| \binom{-s+k}{n+k+1} \right| \int_0^{+\infty} |B_{n+k+1}(x)| |x+d|^{-\sigma-n-1} e^{|\tau|\pi/2} dx. \end{aligned}$$

On cherche désormais à majorer chacun de ces termes. On a clairement que $e^{|\tau|\pi/2} \leq e^{r\pi/2}$. Par continuité de l'application $(x, y) \in [1/r', r'] \times [-r, r] \mapsto x^y$, on obtient que

$$|d|^{-\sigma+k} \ll_{r, r'} r'^k.$$

Par construction de $D(\delta, r)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|d|^{1-\sigma+k}}{|1 - s + k|} & \ll_{r, r'} \frac{r'^k}{\delta} \\ & \ll_{r, r', \delta} r'^k. \end{aligned}$$

Pour la majoration des coefficients binomiaux, on observe tout d'abord que

$$\forall i \in \llbracket 0, n+k \rrbracket, \quad \left| \binom{-s+k}{i} \right| \leq \binom{r+k+i-1}{i} \leq \binom{2n+2k}{i}.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Par [Leh40], on sait que si $i \not\equiv 2 \pmod{4}$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_i(x)| < \frac{2i!}{(2\pi)^i},$$

et lorsque $i \equiv 2 \pmod{4}$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_i(x)| < \frac{2i! \zeta(i)}{(2\pi)^i} \leq \frac{2i! \zeta(2)}{(2\pi)^i}.$$

Notons ψ la fonction digamma d'Euler. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$. Ainsi, il existe un rang x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, la fraction $\frac{\Gamma(x)}{(2\pi)^x} (\psi(x) - \ln(2\pi))$ est positive. On trouve alors que la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\Gamma(x)}{(2\pi)^x},$$

est croissante à partir de ce même x_0 . On en déduit donc que, pour n grand,

$$\forall i \in \llbracket 0, n+k \rrbracket, \quad \frac{i!}{(2\pi)^i} \ll_n \frac{(n+k)!}{(2\pi)^{n+k}} \ll_n \frac{1}{(2\pi)^k} k!(k+1)\dots(k+n).$$

En majorant chaque terme du produit à droite de la dernière inégalité, on trouve aisément $(k+1)\dots(k+n) \ll_n (k+1)^n$, et donc comme $n = r+1$:

$$\forall i \in \llbracket 0, n+k \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_i(x)| \ll_r \frac{k!}{(2\pi)^k} (k+1)^{r+1}.$$

En évaluant l'inégalité précédente en $x = 0$, on obtient que

$$\forall i \in \llbracket 0, n+k \rrbracket, \quad |B_i| \ll_r \frac{k!}{(2\pi)^k} (k+1)^{r+1}.$$

On obtient alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+k} \left| \binom{-s+k}{i} \right| \frac{|B_{i+1}|}{i+1} |d|^{-\sigma-i+k} &\ll_r |d|^{-\sigma+k} \frac{k!}{(2\pi)^k} (k+1)^n \sum_{i=0}^{2n+2k} \binom{2n+2k}{i} |d|^{-i} \\ &\ll_{r,r'} \frac{k!}{(2\pi)^k} r'^k (k+1)^{r+1} (1+|d|^{-1})^{2n+2k} \\ &\ll_{r,r'} \frac{k!}{(2\pi)^k} (k+1)^{r+1} (1+r')^{2k}. \end{aligned}$$

Comme $-\sigma - n \leq -1$ il est clair que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x+d|^{-\sigma-n-1} \leq (x+Re(d))^{-\sigma-n-1}.$$

et cette dernière quantité est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On obtient donc

$$\left| \binom{-s+k}{n+k+1} \right| \int_0^{+\infty} |B_{n+k+1}(x)| |x+d|^{-\sigma-n-1} e^{|\tau|\pi/2} dx \leq \binom{n+2k+1}{n+k+1} \frac{2(n+k+1)!}{(2\pi)^{n+k+1}} \frac{Re(d)^{-\sigma-n}}{\sigma+n}.$$

Par l'inégalité classique

$$\binom{m}{i} \leq e^i \left(\frac{m}{i} \right)^i \quad (0 \leq i \leq m),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \binom{-s+k}{n+k+1} \right| \int_0^{+\infty} |B_{n+k+1}(x)| |x+d|^{-\sigma-n-1} e^{|\tau|\pi/2} dx \\ \leq 2e^k \left(\frac{n+2k+1}{k} \right)^k \frac{(n+k+1)!}{(2\pi)^{n+k+1}} \frac{Re(d)^{-\sigma-n}}{\sigma+n} \\ \leq 2(2e)^k \left(1 + \frac{n+1}{2k} \right)^k \frac{(n+k+1)!}{(2\pi)^{n+k+1}} \frac{Re(d)^{-\sigma-n}}{\sigma+n}. \end{aligned}$$

Comme on a la majoration suivante

$$\forall 0 \leq x < k, \quad \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k \leq e^x,$$

on en déduit que

$$\forall k > (n+1)/2, \quad \left(1 + \frac{n+1}{2k} \right)^k \leq e^{(n+1)/2}.$$

Comme $n = r+1$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(1 + \frac{n+1}{2k} \right)^k \ll_r 1.$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned} |\zeta(s-k, d)| &\ll_{r, r', \delta} r'^k + \frac{k!}{(2\pi)^k} (k+1)^n (1+r'^{2k}) + \frac{(2e)^k k!}{(2\pi)^k} (k+1)^{n+1} \\ &\ll_{r, r', \delta} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k k! (k+1)^{r+1} (1+r'^{2k}). \end{aligned}$$

□

Pour tout entier naturel $a \in \mathbb{N}$, on observe que la fonction $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)(s+a)}$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$. On observe alors le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \forall s \in D_0(r), \quad \left| \frac{1}{\Gamma(s)} \right| &\ll_r 1 \\ \forall s \in D_0(r), \forall a \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{1}{\Gamma(s)(s+a)} \right| &\ll_r 1 \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{\Gamma}$ et $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)s}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, on a uniformément sur $D_0(r)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(s)} \right| &\ll_r 1 \\ \left| \frac{1}{\Gamma(s)s} \right| &\ll_r 1 \end{aligned}$$

Enfin, il est clair que

$$\forall |s| > \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{1}{s} \right| < 2.$$

On peut alors montrer l'inégalité souhaitée. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \in [-r, r]$.

Si $|s+a| > \frac{1}{2}$, alors

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)(s+a)} \right| \ll_r 1.$$

Si $|s+a| \leq \frac{1}{2}$ alors par l'inégalité triangulaire, on obtient que $a \leq |s| + 1/2 \leq r + 1/2$. Par l'équation fonctionnelle de Γ , on a que

$$\frac{1}{\Gamma(s)(s+a)} = \frac{(s+a-1)\dots s}{\Gamma(s+a)(s+a)},$$

on en déduit l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)(s+a)} \right| \ll_r (2r+1)\dots r.$$

Comme $a \leq 1/2 + r$, on obtient la majoration suivante pour le produit au numérateur

$$|(s+a-1)\dots s| \leq (2r+1)!.$$

On obtient alors que

$$\forall s \in \overline{D}_0(r), \quad \left| \frac{1}{\Gamma(s)(s+a)} \right| \ll_r 1.$$

□

La formule d'Erdélyi [EMOT81, §1.11] décrite dans la proposition suivante est cruciale pour réexprimer des intégrandes faisant intervenir la fonction zêta de Lerch que l'on a défini dans la Définition 1.2.7 :

Proposition 2.3.5. [Ono21, Lemme 2.2]

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ tel que $|u| < 2\pi$, $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$, et $d \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$e^{-du} \phi(e^{-u}, s, d) = \Gamma(1-s) u^{s-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-u)^k}{k!} \zeta(s-k, d).$$

On souhaite obtenir une formule d'Erdélyi pour $d \in H_0$. La majoration que l'on a du terme $\zeta(s-k, d)$ n'est pas aussi bonne lorsque d est complexe que lorsque d est réel, ainsi on doit imposer une condition supplémentaire sur le complexe u :

Proposition 2.3.6. Soit $d \in H_0$, $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ avec $|u| \ll_d 1$. Alors

$$e^{-du} \phi(e^{-u}, s, d) = \Gamma(1-s) u^{s-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-u)^k}{k!} \zeta(s-k, d). \quad (2.6)$$

Démonstration. Soit $r' \in [1, +\infty[$ un réel, on cherchera à montrer le résultat pour $d \in H_{1/r'} \cap D_0(r')$. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ tel que $|u| < \frac{\pi}{e(1+r')^2}$. On fixe un $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$, et on pose $r := \lceil |s| \rceil$. On sait déjà que la formule que l'on souhaite démontrer est valable lorsque $d \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche alors à démontrer cette formule pour tout $d \in H_0$ par prolongement analytique. Pour cela, on doit d'abord montrer que les différents termes dans l'expression de la formule voulue sont holomorphes en la variable d sur H_0 .

On sait que l'application $d \in H_0 \mapsto e^{-du} \phi(e^{-u}, s, d)$ est holomorphe [EMOT81, §1.11], il ne reste qu'à montrer que la série présente dans la formule l'est aussi. On a déjà que chaque terme $d \in H_0 \mapsto \zeta(s-k, d)$ est holomorphe sur H_0 pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Pour démontrer cela, il suffit de reprendre la formule obtenue par le développement de Mac-Laurin de la fonction zêta d'Hurwitz obtenue dans la preuve de la Proposition 1.2.6. Il ne nous reste plus qu'à montrer que la série présente dans (2.6) est normalement convergente en d sur $\overline{H_{1/r'}} \cap D_0(r')$. On a la majoration suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\zeta(s-k, d)| \ll_{r, r', \delta} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k k! (k+1)^{r+1} (1+r')^{2k},$$

Ainsi, on obtient que le terme général de la série 2.6 admet la majoration suivante

$$\frac{|\zeta(s-k, d)|}{k!} |u|^k \ll_{r, r', \delta} \left(u \frac{e}{\pi} (1+r')^2\right)^k (k+1)^{r+1},$$

or la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi} (1+r')^2\right)^k k^{r+1} z^k$ est absolument convergente dans le disque ouvert

$\left\{ z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{\pi}{e(1+r')^2} \right\}$. On obtient alors que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\zeta(s-k, d)}{k!} (-u)^k$ est normalement convergente en d sur $H_{1/r'} \cap D_0(r')$. Ainsi la formule (2.6) est vraie pour tout $d \in H_0$ par prolongement analytique, via la Proposition 2.3.5. $\square$

2.3.2 Résultats préliminaires

On souhaite établir dans cette section une expansion de Crandall pour la fonction multizêta

$$Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q}.$$

Rappelons la Définition 1.3.1 : Soit $\nu \in H_0$, $\theta > 0$, $s \in \mathbb{C}$. On a posé

$$\Gamma(s, \theta, \nu) = \int_{\theta}^{+\infty} e^{-\nu y} y^{s-1} dy,$$

$$\gamma(s, \theta, \nu) = \int_0^{\theta} e^{-\nu y} y^{s-1} dy, \quad \text{lorsque } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

On notera que l'intégrale décrivant $\Gamma(s, \theta, \nu)$ est absolument convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$, mais que celle décrivant $\gamma(s, \theta, \nu)$ n'est absolument convergente que pour $s \in H_0$. Plus précisément, on a :

Proposition 2.3.7. *Soit $\nu \in H_0$ et $\theta > 0$. Alors les fonctions $(s, \nu) \in \mathbb{C} \times H_0 \mapsto \Gamma(s, \theta, \nu)$ et $(s, \nu) \in H_0 \times H_0 \mapsto \gamma(s, \theta, \nu)$ sont holomorphes respectivement sur $\mathbb{C} \times H_0$ et sur $H_0 \times H_0$.*

Démonstration. La proposition découle du théorème d'holomorphicité sous le signe intégral. $\square$

Proposition 2.3.8. *Soit $\nu \in H_0$, $\theta > 0$. On a*

$$\forall s \in H_0, \quad \Gamma(s, \theta, \nu) + \gamma(s, \theta, \nu) = \nu^{-s} \Gamma(s).$$

Démonstration. Supposons que $\nu \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors par changement de variable :

$$\Gamma(s, \theta, \nu) = \nu^{-s} \int_{\nu\theta}^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx,$$

$$\gamma(s, \theta, \nu) = \nu^{-s} \int_0^{\nu\theta} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad \text{lorsque } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

En additionnant les deux termes, on obtient

$$\Gamma(s, \theta, \nu) + \gamma(s, \theta, \nu) = \nu^{-s} \Gamma(s).$$

Soit $s \in H_0$. La fonction $\nu \in H_0 \mapsto \Gamma(s, \theta, \nu) + \gamma(s, \theta, \nu) - \nu^{-s} \Gamma(s)$ est holomorphe, et s'annule sur tout $\mathbb{R}_+^*$, donc par principe des zéros isolés, on obtient le résultat voulu. $\square$

Corollaire 2.3.9. *La fonction $s \mapsto \gamma(s, \theta, \nu)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant pour seuls pôles des pôles simples en les entiers strictement négatifs, et le résidu en $s = -n$ est $\frac{(-1)^n \nu^n}{n!}$.*

Lemme 2.3.10. *Soit $\theta > 0$ un réel positif, et $\nu \in H_0$. Soit $s \in \mathbb{C}$. On a la majoration suivante :*

$$|\Gamma(s, \theta, \nu)| \leq 2^\sigma e^{-\operatorname{Re}(\nu)\theta/2} \Gamma\left(\sigma, \frac{\theta}{2}, \operatorname{Re}(\nu)\right).$$

Démonstration. Après le changement de variable $x = \frac{x'}{2}$, on obtient

$$\Gamma(s, \theta, \nu) = 2^s \int_{\theta/2}^{+\infty} e^{-2\nu x} x^{s-1} dx.$$

Comme $|e^{-\nu x}| = e^{-\operatorname{Re}(\nu)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout complexe $\nu \in H_0$, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |\Gamma(s, \theta, \nu)| &\leq |2^s| \int_{\theta/2}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(\nu)x} e^{-\operatorname{Re}(\nu)x} x^{\sigma-1} dx \\ &\leq 2^\sigma \int_{\theta/2}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(\nu)\theta/2} e^{-\operatorname{Re}(\nu)x} x^{\sigma-1} dx, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

On étudie maintenant le produit $\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q) Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. Soit $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\theta > 0$, et $s'_q \in H_0$. Par la Proposition 2.3.8, on obtient

$$\Gamma(s'_q)(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} = \Gamma(s'_q, \theta, (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)) + \gamma(s'_q, \theta, (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)).$$

On se donne un multi-entier $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P$, et des complexes $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times H_1^Q$. On obtient ainsi l'égalité suivante en distribuant la somme ci-dessus sur le produit suivant :

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} &= \prod_{q=1}^Q \left[\Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) + \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right] \\ &= \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \prod_{q \in \mathcal{Q}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \\ &\quad + \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \\ &= \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \prod_{q \in \mathcal{Q}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} \left((l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \Gamma(s'_q) - \Gamma(s'_q, \theta, l'_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right) \\ &\quad + \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q). \end{aligned}$$

En distribuant les termes de la forme $(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \Gamma(s'_q) - \Gamma(s'_q, \theta, l'_q(\mathbf{n}) + d'_q)$, on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} &= \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} \prod_{q \in \mathcal{Q}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \\ &\quad \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q) \prod_{q \in \mathcal{Q}^c \setminus A_{\mathcal{Q}}} (-1) \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \\ &\quad + \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \end{aligned}$$

Soit $(x_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket} \in H_0^P$, alors par l'égalité précédente on a

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{p=1}^P x_p^{-s_p} &= \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{p=1}^P x_p^{-s_p} \prod_{q \in \mathcal{Q} \cup (\mathcal{Q}^c \setminus A_{\mathcal{Q}})} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \left(\prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \Gamma(s'_q) \right) \\ &\quad + \prod_{p=1}^P x_p^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{Q} \cup (\mathcal{Q}^c \setminus A_{\mathcal{Q}}) = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}$, en remplaçant x_p par $n_p + d_p$:

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q) (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} = \\ \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \left(\prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \Gamma(s'_q) \right) \\ + \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

En sommant ces égalités sur $n_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, on cherchera par la suite à prouver que, pour $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathcal{D}$ (avec $\mathcal{D}$ l'ensemble défini dans la Proposition 2.1.1), on a

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(s'_q)} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \right. \\ \cdot \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \Big) \\ + \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \end{aligned}$$

Par la formule 2.7, il suffira de prouver que les séries présentes dans la série précédente converge absolument. On étudiera ces séries dans les deux propositions suivantes :

Proposition 2.3.11. *Soit $\theta > 0$, et $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$. On pose :*

$$\begin{aligned} K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(s'_q)} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \right. \\ \cdot \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \Big). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Alors la série précédente est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$. De plus, la fonction $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$, et $K(\theta, -\mathbf{N}, -\mathbf{N}') = 0$ pour tout multi-entiers $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$.

Démonstration. Soit $\theta > 0$ un réel. Pour démontrer l'holomorphie de K en les variables $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$, il suffit de montrer que la série décrivant $K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est normalement convergente sur tout compact.

La fonction $K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est une somme finie de termes de la forme

$$(-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(s'_q)} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right). \quad (2.9)$$

avec $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c$. On observe que les fonctions $\frac{1}{\Gamma(s'_q)}$, et $\Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q)$ sont bien définis, et holomorphe, sur $\mathbb{C}$. On note

$$T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}') = \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q), \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P) \quad (2.10)$$

le terme général de la série présente dans (2.9).

En utilisant le Lemme 2.3.10, on obtient, que pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P$,

$$|\Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q)| \leq 2^{\sigma'_q} e^{-(\operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)) \frac{\theta}{2}} \Gamma(\sigma'_q, \theta/2, \operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)).$$

A l'aide de l'inégalité précédente, et par décroissance de $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \Gamma(\sigma, \theta, x)$ pour $\theta > 0$, on obtient finalement

$$|\Gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q)| \leq 2^{\sigma'_q} e^{-(\operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)) \frac{\theta}{2}} \Gamma(\sigma'_q, \theta/2, \operatorname{Re}(d'_q)).$$

Enfin, comme pour tout complexe $z \in H_0$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, on a $|z^s| = |z|^\sigma e^{-\arg(z)\tau}$. Comme $z \in H_0$, on en déduit que $\arg(z) \in]-\pi/2, \pi/2[$, et donc

$$|z^s| \leq |z|^\sigma e^{|\tau|\pi/2}.$$

On en déduit alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')| &\leq \left| \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s_q} \right| \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} 2^{\sigma'_q} e^{-(\operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)) \frac{\theta}{2}} \Gamma(\sigma'_q, \theta/2, \operatorname{Re}(d'_q)) \\ &\leq \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} e^{-(\operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)) \theta/2} 2^{\sigma'_q} \Gamma(\sigma'_q, \theta/2, d'_q) \\ &\quad \cdot \prod_{p=1}^P e^{|\tau_p|\pi/2} |n_p + d_p|^{-\sigma_p} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} e^{|\tau'_q|\pi/2} |l_q(\mathbf{n}) + d'_q|^{-\sigma'_q}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notons au passage que, si les coefficients $c_{p,q}$, d_p et d'_q sont tous réels pour tout $1 \leq p \leq P$ et tout $1 \leq q \leq Q$, on peut remplacer les termes de la forme $e^{|\tau_p|\pi/2}$ et $e^{|\tau'_q|\pi/2}$ par 1.

Comme l'ensemble $\mathcal{Q}$ est non vide, et que $A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c$, alors il contient au moins un entier $j \in A_{\mathcal{Q}}$, et par hypothèse, $l_j(\mathbf{n}) = \sum_{p=1}^P c_{j,p} n_p$, avec $c_{j,p} \in H_0$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. On a aussi $d'_q \in H_0$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. on obtient alors

$$\prod_{q \in \mathcal{Q}} e^{-\operatorname{Re}(l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \theta/2} \leq e^{-\operatorname{Re}(l_j(\mathbf{n})) \theta/2}.$$

Soit $R > 0$ un réel, et $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in D_0(R)^{P+Q}$, alors on a en particulier $(\sigma, \sigma') \in [-R, R]^{P+Q}$ et $(\tau, \tau') \in [-R, R]^{P+Q}$. Comme l'application $x \in [-R, R] \mapsto \Gamma(x, \theta, \nu)$ est continue pour tout $\theta > 0$, et $\nu \in H_0$, on en déduit la majoration suivante, uniforme en $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in D_0(R)^P \times D_0(R)^Q$

$$\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(\sigma'_q, \theta/2, \operatorname{Re}(d'_q)) \leq_R 1.$$

De l'inégalité 2.11, on en déduit alors que, pour tout $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in D_0(R)^P \times D_0(R)^Q$

$$|T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')| \leq_R 2^{(Q - |A_{\mathcal{Q}}|)R} \prod_{p=1}^P e^{\pi/2R} e^{-\operatorname{Re}(c_{j,p}) n_p \theta/2} |n_p + d_p|^{-\sigma_p} \cdot \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} e^{\pi/2R} |l_q(\mathbf{n}) + d'_q|^{-\sigma'_q}. \quad (2.12)$$

Comme $\theta > 0$, et que $\operatorname{Re}(c_{j,p}) > 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, on sait que la série

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P e^{-\operatorname{Re}(c_{j,p}) n_p \theta/2} |n_p + d_p|^{-\sigma_p} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} |l_q(\mathbf{n}) + d'_q|^{-\sigma'_q},$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$. En particulier, on en déduit que la série $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est normalement convergente sur $D_0(R)^{P+Q}$. On conclut alors que K est holomorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$.

On observe enfin que pour tout $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket$ et pour tout $A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c$, on a que $\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$. Ainsi, le produit $\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(s'_q)}$ est non vide. En particulier, lorsque l'on évalue $K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ en $\mathbf{s}' = -\mathbf{N}'$, on obtient 0. $\square$

Remarque 2.3.12. En évaluant la formule 2.8 en remplaçant $\mathbf{s}$ par $(-N_p + \mu_p s)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$, et $\mathbf{s}'$ par $(-N'_q + \mu'_q s)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$, on retrouve l'expression 2.4 dans la Proposition 2.2.4.

Proposition 2.3.13. Soit $\theta > 0$, et $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$, avec $\mathcal{D}$ l'ensemble défini dans la Proposition 2.1.1. On pose

$$J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q). \quad (2.13)$$

La série précédente est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$. En particulier, la fonction $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est holomorphe sur $\mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$.

Démonstration. Soit $\theta > 0$, et $R > 0$ des réels positifs. On reprend les notations de la proposition précédente, en particulier la formule 2.10 pour décrire le terme général des séries présentes dans $K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$. Par l'égalité 2.7, on sait que, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P$ et $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^P \times H_1^Q$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) = \\ - \left(\sum_{\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket} \sum_{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c} \frac{(-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|}}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(s'_q)} T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}') \right) + \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration de la Proposition 2.3.11, on a montré à l'aide de l'inégalité 2.12 que la série de terme général $T_{\mathcal{Q}, A_{\mathcal{Q}}}(\theta, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ était normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$. On a montré dans la Proposition 2.1.1 que la série de fonction en $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{-s'_q},$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{D}$. Ainsi, on obtient que la série

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \prod_{q=1}^Q \gamma(s'_q, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q),$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$. $\square$

Proposition 2.3.14. Soit $\theta > 0$, et $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$. On a :

$$Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}') + J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}'), \quad (2.14)$$

De plus, la fonction $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$.

Démonstration. La première égalité découle des deux dernières propositions. Comme $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est méromorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$, et que $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est holomorphe sur ce même espace, on en déduit que $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est méromorphe sur $\mathbb{C}^P \times \mathbb{C}^Q$. $\square$

Corollaire 2.3.15. La fonction méromorphe $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ et la fonction méromorphe $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ partagent exactement les mêmes singularités, et la multiplicité de leur diviseur polaire est identique en une même singularité. De plus, $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est holomorphe sur le domaine $\mathcal{D}$, avec $\mathcal{D}$ l'ensemble défini dans la Proposition 2.1.1.

Afin de calculer les valeurs de Z en les multi-entiers négatifs, il ne reste plus qu'à étudier $J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$. Pour ce faire, on réexprimera ce terme en tant qu'intégrale d'une fonction zêta de Lerch, puis on simplifiera l'intégrande à l'aide d'une formule de Erdélyi sur chaque terme du produit.

Rappelons les notations suivantes pour les fonctions l_p^* : Soit $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. On considère $l_p^* : \mathbb{R}^Q \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction linéaire suivante

$$l_p^*(x) := \sum_{q=1}^Q c_{q,p} x_q.$$

En reprenant l'expression précédente de $J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ pour $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$ on obtient que

$$\begin{aligned} J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}') &= \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q e^{-(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)x_q} x_q^{s'_q - 1} dx_q \\ &= \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(s'_q)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{-s_p} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-l_p^*(x)n_p} \prod_{q=1}^Q e^{-d'_q x_q} x_q^{s'_q - 1} dx_q. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Définition 2.3.16. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. On pose pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) &:= J(\theta, -\mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}s, -\mathbf{N}' + \boldsymbol{\mu}'s) \\ K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) &:= K(\theta, -\mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}s, -\mathbf{N}' + \boldsymbol{\mu}'s) \end{aligned}$$

Pour θ suffisamment petit, on a par (2.14) que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $(-\mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}s, -\mathbf{N}' + \boldsymbol{\mu}'s) \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^P \times H_0^Q)$,

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s).$$

Or par construction du domaine d'holomorphic $\mathcal{D}$ dans la Proposition 1.3.9, on en déduit que la condition sur s précédente est vérifiée si

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket, \quad & -|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathbf{N}'| + (|\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}} + |\boldsymbol{\mu}'|)\sigma > 1 + |\mathcal{P}| \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \quad & -N'_q + \mu'_q \sigma > 0 \end{aligned}$$

On pose $\sigma_0(\mathbf{N}, \mathbf{N}') := \max_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} \left(\frac{N'_1}{\mu'_1}, \dots, \frac{N'_Q}{\mu'_Q}, \max_{\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket} \left(\frac{1 + |\mathcal{P}| + |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}}}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}}}} \right) \right)$.

On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.17. Pour tout $s \in H_{\sigma_0(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$, on a

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s).$$

Remarque 2.3.18. 1) Plutôt que d'utiliser la notation $s = \sigma + i\tau \in H_{\sigma_0(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}$, on préférera noter $\sigma \gg_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'} 1$, voir même parfois $\sigma \gg 1$.

2) On utilise ici le fait que $\mu'_q > 0$ pour tout $1 \leq q \leq Q$. On pourrait également généraliser cette approche en considérant des directions $\mu'_q \in H_0$, en revanche cela alourdirait les raisonnements pour ce chapitre.

On sait déjà par la Proposition 2.3.11 que $s \mapsto K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est holomorphe et s'annule en $s = 0$. Il reste à étudier le terme $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$. Le point clé de l'étude de cette fonction est la formule d'Erdélyi (2.6).

Proposition 2.3.19. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_p s \notin \mathbb{N}^*$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\sigma \gg 1$. Alors,

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-d_p l_p^*(x)} \phi(e^{-l_p^*(x)}, -N_p + \mu_p s, d_p) \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_q. \quad (2.16)$$

Démonstration. Soit $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'} 1$. Par la formule 2.15, on en déduit que

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-(\sum_{q=1}^Q c_{q,p} x_q) n_p} \prod_{q=1}^Q e^{-d'_q x_q} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_q$$

On souhaite désormais effectuer une permutation série intégrale. On cherchera donc à majorer le terme général de la série précédente. On pose pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$,

$$v_q(\mathbf{n}) := \sum_{p=1}^P Re(c_{q,p}) n_p.$$

On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^P, \quad & \left| \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-(\sum_{q=1}^Q c_{q,p} x_q) n_p} \prod_{q=1}^Q e^{-d'_q x_q} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_1 \dots dx_Q \right| \\ & \leq \prod_{p=1}^P |n_p + d_p|^{N_p - \mu_p \sigma} e^{\mu_p |\tau| \pi/2} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q e^{-(v_q(\mathbf{n}) + Re(d'_q)) x_q} x_q^{-N'_q + \mu'_q \sigma - 1} dx_1 \dots dx_Q \end{aligned}$$

Par un changement de variable de la forme $y_q := (v_q(\mathbf{n}) + Re(d'_q)) x_q$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-(\sum_{q=1}^Q c_{q,p} x_q) n_p} \prod_{q=1}^Q e^{-d'_q x_q} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_1 \dots dx_Q \right| \\ & \leq \prod_{p=1}^P |n_p + d_p|^{N_p - \mu_p \sigma} e^{\mu_p |\tau| \pi/2} \prod_{q=1}^Q (v_q(\mathbf{n}) + Re(d'_q))^{N'_q - \mu'_q \sigma} \\ & \quad \cdot \int_0^{(v_1(\mathbf{n}) + Re(d'_1)) \theta} \dots \int_0^{(v_Q(\mathbf{n}) + Re(d'_Q)) \theta} \prod_{p=1}^P e^{-y_p} \prod_{q=1}^Q y_q^{-N'_q + \mu'_q \sigma - 1} dy_1 \dots dy_Q \\ & \leq \prod_{p=1}^P |n_p + d_p|^{N_p - \mu_p \sigma} e^{\mu_p |\tau| \pi/2} \prod_{q=1}^Q (v_q(\mathbf{n}) + Re(d'_q))^{N'_q - \mu'_q \sigma} \Gamma(-N'_q + \mu'_q \sigma) \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P |n_p + d_p|^{N_p - \mu_p \sigma} e^{\mu_p |\tau| \pi/2} \prod_{q=1}^Q (v_q(\mathbf{n}) + Re(d'_q))^{N'_q - \mu'_q \sigma}$ est convergente pour

$\sigma \gg_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'} 1$ par la Proposition 2.1.1. Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'} 1$,

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{p=1}^P e^{-l_p^*(x) d_p} \left(\sum_{n_p=1}^{+\infty} (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} e^{-l_p^*(x) n_p} \right) \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_1 \dots dx_Q,$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Une fois cette formule intégrale obtenue pour $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$, on peut utiliser la Formule d'Ederlyi sur chaque fonction zêta de Lerch dans le produit de l'intégrande, puis distribuer l'expression pour obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.3.20. *Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^Q$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_p s \notin \mathbb{N}^*$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\sigma \gg 1$. Alors, pour tout $\theta > 0$ suffisamment petit, on a*

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = & \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \\ & \cdot \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x)^{k_p} dx_1 \dots dx_Q \\ & + \frac{\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s)}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} dx_1 \dots dx_Q. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Démonstration. Soit $M = \max_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q} (|c_{q,p}|)$, et $\theta \in \left[0, \frac{1}{QM}\right]$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_p s \notin \mathbb{N}^*$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\sigma \gg 1$. Par la relation 2.16, on a que

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P e^{-d_p l_p^*(x)} \phi(e^{-l_p^*(x)}, -N_p + \mu_p s, d_p) \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_q.$$

Par la Proposition 2.6, on a que, pour tout $(x_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in]0, \theta]^Q$,

$$\begin{aligned} & \prod_{p=1}^P e^{-d_p l_p^*(x)} \phi(e^{-l_p^*(x)}, -N_p + \mu_p s, d_p) \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \\ & = \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P \left(\Gamma(1 + N_p - \mu_p s) l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} + \sum_{k_p \geq 0} (-1)^{k_p} \frac{l_p^*(x)^{k_p}}{k_p!} \zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p) \right) \end{aligned}$$

En distribuant le produit précédent, on obtient pour tout $\mathbf{x} = (x_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in [0, \theta]^Q$,

$$\begin{aligned} & \prod_{p=1}^P e^{-d_p l_p^*(x)} \phi(e^{-l_p^*(x)}, -N_p + \mu_p s, d_p) \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \\ & = \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \\ & \quad \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x)^{k_p} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \\ & \quad + \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \prod_{p=1}^P l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

On obtient alors que

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \quad (2.19)$$

$$\prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x)^{k_p} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} dx_1 \dots dx_Q$$

$$+ \frac{\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s)}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} dx_1 \dots dx_Q.$$

On cherche maintenant à majorer le terme général de la série présente dans l'intégrande. Par compacité, on obtient uniformément sur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_Q) \in \left[0, \frac{1}{QM}\right]^Q$ que

$$\left| \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \right| \ll_s 1$$

$$|l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1}| \ll_s 1.$$

Comme l_p^* est une forme linéaire pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, on a que

$$\forall x \in [0, \theta]^Q, \quad |l_p^*(x)| \leq QM\theta.$$

Enfin, par le Lemme 2.3.2, on a la majoration suivante :

$$\forall p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \quad \left| \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \right| \ll_s \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{1 + \lceil \mu_p |s| \rceil}.$$

On obtient alors la majoration suivante : pour tout $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, et pour tout $\mathbf{x} = (x_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in [0, \theta]^Q$, on a

$$\left| \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x)^{k_p} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \right|$$

$$\ll_s \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{1 + \lceil \mu_p |s| \rceil} (QM\theta)^{k_p},$$

Or la série suivante converge absolument sur tout $\theta \in \left[0, \frac{1}{QM}\right]$:

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{1 + \lceil \mu_p |s| \rceil} (QM\theta)^{k_p},$$

on peut alors permuter la série et l'intégrale pour obtenir le résultat demandé. $\square$

Proposition 2.3.21. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^Q$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_p s \notin \mathbb{N}^*$

pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\sigma \gg 1$. Alors

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket \\ \mu, \mu'}} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!}, \\ + \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right),$$

où l'on rappelle les notations de la Proposition 2.2.4 : Pour $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$,

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{k_p} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q$$

et

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) = \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q,$$

avec les notations suivantes :

- 1) $\widehat{\mathbf{x}}^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_Q)$,
- 2) $dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q = dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_Q$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_p s \notin \mathbb{N}^*$ pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\sigma \gg 1$. Pour prouver cette formule, il suffit de reprendre la formule obtenue dans la Proposition précédente, et de réexprimer l'intégrale présente dans cette formule. On simplifiera cette intégrale à l'aide d'un éclatement.

On remarque d'abord que $[0, \theta]^Q = \bigcup_{j=1}^Q V_j$, avec $V_j := \{\mathbf{x} \in [0, \theta]^Q \mid \forall q \neq j, x_j \geq x_q\}$, et on observe également que l'intersection deux à deux de ces ensembles est de mesure nulle. Par Chasles, on obtient

$$\int_0^\theta \dots \int_0^\theta \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\mathbf{x})^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\mathbf{x})^{k_p} dx_1 \dots dx_Q \\ = \sum_{j=1}^Q \int_{V_j} \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\mathbf{x})^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\mathbf{x})^{k_p} dx_1 \dots dx_Q$$

On considère le changement de variable suivant :

$$f_j : [0, 1]^{j-1} \times [0, \theta] \times [0, 1]^{Q-j} \rightarrow V_j \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_Q) \mapsto (x_1 x_j, \dots, x_j, \dots, x_Q x_j),$$

dont le jacobien est $Jac(f_j) = x_j^{Q-1}$.

Quitte à effectuer une permutation des coordonnées, il suffit d'étudier l'intégrale dont le domaine est V_Q . Tout d'abord, on remarque que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_Q) \in [0, 1]^{Q-1} \times [0, \theta]$, on a $l_p^*(f_Q(\mathbf{x})) = x_Q l_p^*(\widehat{x}^Q)$. Ainsi, on trouve que

$$\begin{aligned} & \int_{V_Q} \prod_{q=1}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\mathbf{x})^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\mathbf{x})^{k_p} dx_1 \dots dx_Q \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_0^\theta x_Q^{-|\mathbf{N}'| + |\boldsymbol{\mu}'|s - Q - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}^c|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \prod_{q=1}^{Q-1} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \\ & \quad \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^Q)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^Q)^{k_p} x_Q^{Q-1} dx_1 \dots dx_Q \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{q=1}^{Q-1} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^Q)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} u_p(\widehat{\mathbf{x}}^Q)^{k_p} dx_1 \dots dx_{Q-1} \\ & \quad \cdot \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}^c|}s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|})}{(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}^c|}s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

La proposition précédente est cruciale pour démontrer la Proposition 2.2.4. On montrera en effet la régularité de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ en $s = 0$ via la formule de la proposition précédente. On utilisera en particulier la Proposition 2.2.2, qui fournit une majoration de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ uniforme en s sur tout compact. On démontrera la Proposition 2.2.2 dans la prochaine sous-section.

2.3.3 Démonstration de la Proposition 2.2.2

On démontrera dans cette sous-section la Proposition 2.2.2. Rappelons la notation $l_p^*(x) = \sum_{q=1}^Q c_{q,p} x_q$ pour tout $p \in [1, P]$ et tout $x \in \mathbb{R}^Q$. On établira un lemme avant de démontrer cette proposition. Pour tout $\epsilon \in \left]0, \frac{1}{2MQ}\right]$, pour chaque sous-ensemble $\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}$, et pour tout $q \in [1, Q] \setminus \{j\}$, on pose

$$\Delta_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon, q) = \begin{cases} [0, \epsilon] & \text{si } q \in \mathcal{Q} \\ [\epsilon, 1] & \text{si } q \in \mathcal{Q}^c \end{cases}$$

et on note ensuite $F_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon) := \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Delta_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon, q)$. On peut alors découper le domaine d'intégration suivant :

$$\{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_Q) | \forall q \neq j, x_q \in [0, 1]\} = \bigcup_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} F_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon).$$

Via la relation de Chasles, on peut ainsi réécrire les termes $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ et $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', [1, P], j}$ sous forme d'une somme d'intégrales :

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} \sum_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \quad (2.20)$$

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', [1, P], j}(s) = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} \sum_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', [1, P], j, \mathbf{k}}(\epsilon, s), \quad (2.21)$$

en ayant noté pour tout sous-ensemble $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$,

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_{F_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{k_p} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q,$$

et

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j, \mathcal{Q}}(\epsilon, s) = \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_{F_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \prod_{p=1}^P l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q,$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$.

Lemme 2.3.22. Soit $(\mu, \mu') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$, $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. Alors on a

i) Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, la fonction $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ est holomorphe en s sur $\mathbb{C}$.

ii) Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration suivante, uniforme pour $s \in D_0(r)$:

$$\left| I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right|_{r, \epsilon} \ll (QM)^{|\mathbf{k}|},$$

avec $M = \max_{1 \leq q \leq Q, 1 \leq p \leq P} (|c_{q,p}|)$.

iii) Pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $0 < \epsilon \ll 1$, on a

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = & \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\ & \cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ & \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f,p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q, \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec les notations $\mathcal{Q}^c = (\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}) \setminus \mathcal{Q}$, $\mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p,q}$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$, et $\mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q}$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. En notant $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{w}, \mathbf{v}}(\epsilon, s)$ le terme général de la série précédente, on a également

$$\partial_s I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \partial_s T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{w}, \mathbf{v}}(\epsilon, s). \quad (2.23)$$

iv) Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, et pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \sum_{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \sum_{\mu, \mu'} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s). \quad (2.24)$$

Démonstration. On cherchera ici à développer l'intégrande via des développements en séries entières au voisinage de 0 pour les éléments de $F_{\mathcal{Q},j}(\epsilon)$. Notons que ces séries entières convergeront uniformément sur le disque $D_0(\eta)$, pour η suffisamment petit. On pourra donc intervertir la série et l'intégrale.

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$. Soit $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$. Soit $\epsilon \in \left] 0, \frac{1}{2MQ} \right]$, avec $M = \max_{1 \leq q \leq Q, 1 \leq p \leq P} (|c_{q,p}|)$, on peut développer en série entière en $(x_q)_{q \in \mathcal{Q}}$ les fonctions de la forme $l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1}$, avec $x \in F_{\mathcal{Q},j}$ et $p \in \mathcal{P}$. Par le Lemme 2.3.1, on obtient uniformément en $\widehat{x}^j$:

$$\begin{aligned} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s - 1} &= \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1} \\ &= \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1} \left(1 + \sum_{f \in \mathcal{Q}} \frac{c_{f,p}}{c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1} \\ &= \sum_{\mathbf{v}_p = (v_{p,q})_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in \mathbb{N}^Q} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} x_q^{v_{p,q}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour $p \in \mathcal{P}^c$, et $k_p \in \mathbb{N}$, on a par le multinôme de Newton :

$$l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{k_p} = \sum_{\substack{\mathbf{w}_p = (w_{p,q})_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_p| = k_p}} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} c_{j,p}^{w_{p,j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} x_q^{w_{p,q}}.$$

La série présente dans (2.25) converge uniformément pour $(x_e)_{e \in \mathcal{Q}} \in [0, \epsilon]^Q$. Par permutation série intégrale, on peut réexprimer $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) &= \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} c_{j,p}^{w_{p,j}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \right) \\ &\cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_{F_{\mathcal{Q},j}(\epsilon)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} x_q^{w_{p,q}} \right) \\ &\cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} x_q^{v_{p,q}} \right) \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q. \end{aligned}$$

En remarquant que $\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^c$, on peut séparer le produit $\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$ en deux parties :

$$\begin{aligned}
& I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \\
&= \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_{F_{\mathcal{Q}, j}(\epsilon)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{w_{p,q}} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\prod_{q \in \mathcal{Q}} x_q^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q \\
&= \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \int_{F_{\mathcal{Q}, j}} \prod_{q \in \mathcal{Q}} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p,q} + \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q}} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q}} \\
& \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q.
\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ avec $\mathbf{v}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, et $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c}$ avec $\mathbf{w}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$. On rappelle la notation $\mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p,q}$ tout $q \in \mathcal{Q}$, et $\mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q}$ pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$. Via le théorème de Fubini, on obtient l'expression suivante pour $\sigma \gg 1$:

$$\begin{aligned}
& I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = \\
& \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \left(\prod_{q \in \mathcal{Q}} \frac{\epsilon^{-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}}{-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)} \right) \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \\
& \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q.
\end{aligned}$$

On obtient donc que la formule 2.22 est vraie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$.

On cherche maintenant à prolonger $s \mapsto I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ sur tout $\mathbb{C}$ via l'expression précédente. On

a clairement que, pour tout $\sigma \gg 1$,

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = & \frac{1}{\prod_{q \in \mathcal{Q}^c} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\
& \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{q \in \mathcal{Q}} \frac{\epsilon^{-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\
& \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \left(\prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Notons $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ le terme général de la série précédente. On a alors

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) = \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s).$$

Tous les termes présents dans l'expression de $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ sont holomorphes en s sur tout $\mathbb{C}$.

Pour montrer que $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ est holomorphe en s , il suffit de montrer que la série précédente converge normalement en la variable s sur tout compact. On cherche alors à majorer le terme général sur un disque $\overline{D}_0(r)$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ un entier. Les majorations que l'on effectuera dépendront toutes de $\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mu, \mu', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}$, mais on omettra cette dépendance afin de simplifier la rédaction.

On sait que la fonction

$$s \mapsto \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))},$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$, pour tout $q \in \mathcal{Q}$. On majore maintenant le terme général de la série 2.26 à l'aide du Lemme 2.3.4. On a

$$\begin{aligned}
\forall q \in \mathcal{Q}, \forall s \in D_0(r), \forall a \in \mathbb{N}, & \left| \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + a)} \right| \ll_r 1 \\
\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, & \left| \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \right| \ll_r 1.
\end{aligned}$$

On sait que la fonction

$$s \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q,$$

est holomorphe car l'intégrande est régulière.

Soit $s \in D_0(r)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ avec $\mathbf{v}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$, et $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c}$ avec $\mathbf{w}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$ tel que $|\mathbf{w}_p| = k_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$. On observe alors que $\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mathbf{w}(q) = |\mathbf{k}| - \mathbf{w}(j)$. De plus, par compacité, on obtient la majoration suivante uniformément en $q \in \mathcal{Q}^c$ et en $x_q \in [\epsilon, 1]$,

$$\left| x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \right| \ll_r 1.$$

Comme $\mathbf{w}(q) \geq 0$, on obtient que $|x_q^{\mathbf{w}(q)}| \leq 1$. De plus, comme $\arg \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, on a pour tout $s \in D_0(r)$, et tout $(x_q)_{q \in \mathcal{Q}^c} \in [\epsilon, 1]^{\mathcal{Q}^c}$,

$$\forall s \in D_0(r), \quad \left| \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \right| \leq \left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right|^{-N_p + \mu_p \sigma - 1 - |\mathbf{v}_p|} e^{\mu_p r \pi / 2}.$$

On remarque que l'on a la majoration suivante pour tout $(x_q)_{q \in \mathcal{Q}^c} \in [\epsilon, 1]^{\mathcal{Q}^c}$

$$K + K\epsilon \leq \left(\operatorname{Re}(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} \operatorname{Re}(c_{q,p}\epsilon)) \right) \leq \left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right| \leq \sum_{q=1}^Q |c_{q,p}| \leq QM,$$

avec $M = \max_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q} (|c_{q,p}|)$ et $K := \min_{1 \leq q \leq Q, 1 \leq p \leq P} \operatorname{Re}(c_{q,p})$. Pour $p \in \mathcal{P}$, on trouve alors

$$\left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right|^{-N_p + \mu_p \sigma - 1 - |\mathbf{v}_p|} \leq \begin{cases} (QM)^{\mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1} & \text{si } \left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right| \geq 1 \text{ et } \mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1 \geq 0 \\ 1 & \text{si } \left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right| \geq 1 \text{ et } \mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1 < 0 \\ 1 & \text{si } \left| c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right| < 1 \text{ et } \mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1 \geq 0 \\ (K(\epsilon + 1))^{\mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a uniformément pour $s \in D_0(r)$:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad (QM)^{\mu_p \sigma - N_p - |\mathbf{v}_p| - 1} \underset{r}{\ll} (QM)^{-|\mathbf{v}_p|}.$$

Soit $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. Par compacité, on a uniformément pour $s \in D_0(r)$:

$$(K\epsilon)^{\mu_p \sigma} \underset{\epsilon, r}{\ll} 1.$$

On a également

$$(K(\epsilon + 1))^{-N_p - |\mathbf{v}_p| - 1} \underset{\epsilon, r}{\ll} (K(\epsilon + 1))^{-|\mathbf{v}_p|} \underset{r, \epsilon}{\ll} K^{-|\mathbf{v}_p|}.$$

On obtient finalement la majoration suivante uniformément en $s \in D_0(r)$ et en $(x_q)_{q \in \mathcal{Q}^c} \in [\epsilon, 1]^{\mathcal{Q}^c}$,

$$\left| \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p \sigma - 1 - |\mathbf{v}_p|} \right| \underset{r, \epsilon}{\ll} \max(K^{-|\mathbf{v}_p|}, (QM)^{-|\mathbf{v}_p|}, 1) \prod_{p=1}^P e^{\mu_p r \pi / 2} \underset{r, \epsilon}{\ll} \min(K, QM, 1)^{-|\mathbf{v}_p|}.$$

Maintenant que l'on a majoré l'intégrande, on obtient finalement que l'intégrale est bornée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q \right| \\ & \underset{r, \epsilon}{\ll} \prod_{p \in \mathcal{P}} \min(K, QM, 1)^{-|\mathbf{v}_p|} \underset{r, \epsilon}{\ll} \min(K, QM, 1)^{-\sum_{p \in \mathcal{P}} |\mathbf{v}_p|} \end{aligned}$$

On a la majoration suivante uniforme en $s \in D_0(r)$:

$$\left| \epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \right| \ll_{r, \epsilon} \epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)}$$

De plus, on a que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall s \in D_0(r), \quad \left| \binom{-n + bs - 1}{a} \right| \leq \binom{n + \lceil br \rceil + a}{a}.$$

On trouve alors que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\prod_{q \in \mathcal{Q}^c} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \right. \\ & \quad \cdot \frac{\epsilon^{-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ & \quad \cdot \left. \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{q \in \mathcal{Q}^c} c_{q,p} x_q \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 + |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q \right| \\ & \ll_{r, \epsilon} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} M^{\sum_{q \in [1, Q]} w_{p,q}} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{N_p + \lceil \mu_p r \rceil + |\mathbf{v}_p|}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} (M\epsilon)^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)} \min(K, QM, 1)^{-\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)} \\ & \ll_{r, \epsilon} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} M^{k_p} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{N_p + \lceil \mu_p r \rceil + |\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \left(\frac{M\epsilon}{\min(K, QM, 1)} \right)^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En sommant le terme de droite dans l'expression 2.27 sur $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ avec $\mathbf{v}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$, et sur $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c}$ avec $\mathbf{w}_p \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}}$ tel que $|\mathbf{w}_p| = k_p$, pour tout $p \in \mathcal{P}^c$. On obtient alors la série

$$\begin{aligned} & M^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \right) \left(\sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{N_p + \lceil \mu_p r \rceil + |\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \left(\frac{M\epsilon}{\min(K, QM, 1)} \right)^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)} \right) \\ & = (QM)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{N_p + \lceil \mu_p r \rceil + |\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \left(\frac{M\epsilon}{\min(K, QM, 1)} \right)^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \mathbf{v}(q)} \right) \end{aligned}$$

La série entière ci-dessus précédemment converge absolument pour tout $0 < \epsilon < \frac{\min(K, QM, 1)}{M}$. En fixant un ϵ suffisamment petit, la série en $(v_{p,q})_{p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}}$ est une constante ne dépendant que de r, ϵ et de $\mathbf{N}$. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\left| I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right|_{\mu, \mu'} \leq (QM)^{|\mathbf{k}|}.$$

On a donc obtenu le point i) et iii) par théorème d'holomorphic sous le signe somme, et par prolongement analytique. Le point ii) est vrai par la majoration précédente. Comme $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)_{\mu, \mu'}$ est holomorphe, et que pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$, on a

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)_{\mu, \mu'} = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)_{\mu, \mu'},$$

et par 2.20, on peut prolonger l'égalité précédente sur tout $\mathbb{C}$ par prolongement analytique, d'où le point iv). $\square$

En modifiant légèrement la démonstration du lemme précédent, on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.3.23. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$, et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $0 < \epsilon \ll 1$, on a :

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j, \mathcal{Q}}(\epsilon, s) = \sum_{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^P} \left(\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p=1}^P \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \cdot \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q))} \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1} \cdot \prod_{p=1}^P \left(c_{j,p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f,p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q,$$

avec les notations $\mathcal{Q}^c = (\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}) \setminus \mathcal{Q}$, $\mathbf{v}(q) = \sum_{p=1}^P v_{p,q}$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$.

De plus, $s \in \mathbb{C} \mapsto I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j, \mathcal{Q}}(\epsilon, s)$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Remarque 2.3.24. Contrairement au Lemme 2.3.22, on n'a pas besoin d'obtenir une majoration dans le lemme 2.3.23, puisque le terme $\mathbf{k}$ y est absent.

On dispose de tous les ingrédients nécessaires à la démonstration de la Proposition 2.2.2 :

Démonstration. Rappelons que $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ et $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s)$ s'expriment de la façon suivante, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$:

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \sum_{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s),$$

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) = \sum_{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j, \mathcal{Q}}(\epsilon, s).$$

Comme on sait que les fonctions de la forme $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ et $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j, \mathcal{Q}}(\epsilon, s)$ sont holomorphes en s sur $\mathbb{C}$, on peut prolonger holomorphiquement $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ et $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s)$ sur tout $s \in \mathbb{C}$. On obtient alors le point i) de la Proposition 2.2.2. Le point ii) et iii) de la Proposition 2.2.2 découle du point ii) et iii) du Lemme 2.3.22. $\square$

2.3.4 Démonstration de la Proposition 2.2.4

Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. On exploite l'expression $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}') + J(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ pour obtenir la preuve du théorème de prolongement méromorphe selon la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}')$. On sait déjà que $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto K(\theta, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^P \times \mathbf{C}^Q$. Il reste donc à prouver que l'application $s \mapsto J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est méromorphe et régulière en $s = 0$. Afin de montrer la Proposition 2.2.4, il ne nous reste plus qu'à établir que $s \mapsto J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles inclus dans

$$\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = \left[\bigcup_{\substack{1 \leq p \leq P \\ \mu_p \neq 0}} \frac{1}{\mu_p} \mathbb{Z}_{\geq N_p + 1} \right] \cup \left[\bigcup_{\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket} \frac{1}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} \mathbb{Z}_{\leq |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}|} \right].$$

On sait que la formule 2.5 est valable sur le complémentaire de cet ensemble, pour $\sigma \gg 1$. Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ tel que $\sigma \gg 1$, on a alors

$$J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \sum_{\substack{\mu, \mu'}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|))} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \\ + \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', [1, P], j}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P))} \right)$$

. A l'aide de ces rappels, on peut démontrer la Proposition 2.2.4 :

Démonstration. Soit $0 < \theta \ll 1$. On sait par la Proposition 2.3.21 que la formule 2.5 est valable pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, tel que $\sigma \gg 1$.

Il est clair que le terme

$$\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', [1, P], j}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu| s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P))},$$

correspond à une fonction méromorphe en s sur $\mathbb{C}$, régulière en $s = 0$, et avec des pôles de la forme $s = \frac{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}| + P}{|\mu'| + |\mu|}$. Il reste alors à démontrer que la série de fonctions en s

$$\sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \frac{\theta(|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}|} s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|))} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \quad (2.28)$$

est méromorphe sur $\mathbf{C}$, régulier en $s = 0$, et avec des pôles inclus dans $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$.

On pose

$$\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r) := \left\{ s \in \overline{D}_0(r) \mid \left(\forall p \in [1, P], \min_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > N_p}} |\mu_p s - n| \geq \delta \right) \wedge \left(\forall \mathcal{P} \subset [1, P], \min_{\substack{n \in \mathbb{Z}^+ \\ n \geq -|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathbf{N}'| - |\mathcal{P}|}} |(|\mu|_{|\mathcal{P}|} + |\mu'|)s + n| \geq \delta \right) \right\}.$$

Notons que :

1) On a clairement que $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$ contient un voisinage ouvert de 0.

2) La condition

$$\min_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > N_p}} |\mu_p s - n| \geq \delta$$

apparaît pour éviter les singularités de $\zeta(-N_p + \mu_p s - k, d_p)$. On observe qu'au voisinage de $s = 0$, ce terme est parfaitement défini.

3) La condition

$$\min_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \geq -|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathbf{N}'| - |\mathcal{P}|}} |(|\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}} + |\boldsymbol{\mu}'|)s + n| \geq \delta$$

apparaît pour éviter les singularités de $\frac{1}{(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}$ qui ne sont pas nécessairement compensées par les zéros de $\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)}$. On remarque tout de même qu'en $s = 0$, lorsque $-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}| = 0$, la singularité de $\frac{1}{(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s}$ est compensée par le zéro de $\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)}$.

4) L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ est inclus dans le complémentaire de $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$.

Fixons un sous-ensemble $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$. On sait par la Proposition 2.3.21 que la formule 2.5 est valable pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, tel que $\sigma \gg 1$. On souhaite prouver que la série en $\mathbf{k}$ présente dans la formule (2.28) est normalement convergente sur $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$.

Soit $r' > 1$ un réel tel que, pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, $\operatorname{Re}(d_p) \geq 1/r'$, et $|d_p| < r'$. Soit $r > 0$, $1 > \delta > 0$. Par le Lemme 2.3.3, on a

$$\forall p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \forall s \in \tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r), \forall k_p \in \mathbb{N}, \quad \zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p) \underset{r, r', \delta}{\ll} (k_p + N_p)! (k_p + N_p + 1)^{r+1} (1 + r'^{2k_p}).$$

Par le Lemme 2.2.2, on a

$$\forall s \in D_0(r), \forall \mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}, \quad |h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)| \underset{r}{\ll} (QM)^{|\mathbf{k}|}.$$

Comme l'application $s \mapsto \Gamma(1 + N_p - \mu_p s)$ est holomorphe sur $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$ pour tout $1 \leq p \leq P$, on en déduit la majoration suivante

$$\forall p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \forall s \in \tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r), \quad |\Gamma(1 + N_p - \mu_p s)| \underset{r, \delta}{\ll} 1.$$

Enfin, par le Lemme 2.3.4 on a la majoration suivante

$$\forall s \in \tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r), \quad \left| \frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right| \underset{r, \delta}{\ll} 1.$$

Par compacité, de $\overline{D}_0(r)$ on obtient

$$\forall s \in \overline{D}_0(r), |\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}|}| \underset{r}{\ll} 1.$$

Ainsi, pour tout $s \in \tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$, et pour $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$, on a

$$\begin{aligned} & \left| (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right. \\ & \quad \left. \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \right| \\ & \underset{r, r', \delta}{\ll} (QM\theta)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{r+1} (1 + r'^{2k_p}) \\ & \underset{r, r', \delta}{\ll} (2r'^2 QM\theta)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{r+1}. \end{aligned}$$

Or la série

$$\sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (2r'^2 Q M \theta)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{(k_p + N_p)!}{k_p!} (k_p + N_p + 1)^{r+1}$$

converge absolument pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $|\theta| < \frac{1}{(2r'^2 Q M)}$. On en déduit en particulier que la formule 2.5 est valable pour tout $s \in \tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$. Par théorème d'holomorphicité sous le signe somme, on obtient que la fonction $s \mapsto J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est holomorphe sur $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$. Comme $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$ contient un voisinage ouvert de 0, on obtient par le théorème d'holomorphicité sous le signe somme que l'on peut dériver en s sur ce même voisinage la fonction $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$,

$$\begin{aligned} \partial_s J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} \partial_s \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right. \\ & \left. \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \right), \\ & + \partial_s \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Comme $1 > \delta > 0$ est arbitraire dans la définition de $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$, et que $\tilde{D}(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \delta, r)$ contient un voisinage ouvert de 0, on obtient en particulier que $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est régulière en $s = 0$, et que ses pôles sont inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ décrit dans la Proposition 2.2.4. $\square$

Remarque 2.3.25. Via la formule 2.5, on peut en déduire une expression des résidus de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ en ses pôles. En effet, on sait que cette fonction se réexprime sous la forme d'une somme entre une fonction holomorphe et une fonction méromorphe en s

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s).$$

Comme $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ est holomorphe en s , cette fonction ne contient aucune singularité. En revanche, dans la formule 2.5, on peut lire les résidus en étudiant finement les deux termes suivants, pour tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \quad (\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}) \\ & \bullet \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|) s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \end{aligned}$$

Notons que les pôles en s de ces termes là peuvent être parfois compensés par des zéros des fonctions de la forme $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ pour le premier terme, et par des zéros de fonctions de la forme $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s)$ pour le second terme.

Chapitre 3

Calculs des coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$

Par la Proposition 2.2.2, on sait que la fonction $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}_{\mu, \mu'}$ est holomorphe, en particulier, on peut considérer ses coefficients d'ordre 0 et 1 au voisinage de 0 dans son développement de Taylor :

Notation. Soit $(\mu, \mu') \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}_*^Q$, et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. Soit $\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{P^c}$. Comme $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}_{\mu, \mu'}$ est holomorphe, on note au voisinage de 0

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}_{\mu, \mu'}(s) = Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'} + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'} s + O(s^2).$$

Les coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$, pour tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, s'avéreront cruciaux dans l'expression des formules de $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\mu, \mu'}$. De plus, les coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$, pour tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, seront présents dans la formule de la dérivée directionnelle en les multi-entiers négatifs $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\mu, \mu'}$. Observons également que l'on a pas besoin de calculer $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\llbracket 1, P \rrbracket, j)_{\mu, \mu'}$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\llbracket 1, P \rrbracket, j)_{\mu, \mu'}$, puisqu'ils n'apparaissent pas dans les expressions contenues dans le Théorème A et dans le Théorème D. On montrera dans nos calculs que $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})_{\mu, \mu'}$ ne dépend pas des directions (μ, μ') . On notera donc simplement ce coefficient $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$.

3.1 Lemmes

Lemme 3.1.1. Soit $a, c \in H_0$, $b \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{Z}$. On pose $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction méromorphe décrite par l'expression

$$g(s) := \frac{1}{\Gamma(as - b)(cs + d)}.$$

Alors g est régulière en 0. De plus

$$g(0) = \begin{cases} \frac{a}{c}(-1)^b b! & \text{si } d = 0 \\ 0 & \text{si } d \neq 0. \end{cases},$$

et

$$\partial_s (g(s))_{s=0} = \begin{cases} \frac{a^2}{c} (-1)^b b! (\gamma - h_b) & \text{si } d = 0 \\ \frac{a}{d} (-1)^b b! & \text{si } d \neq 0. \end{cases}$$

où h_b désigne le nombre harmonique $h_b := \sum_{i=1}^b \frac{1}{i}$. Enfin, on a

$$\partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \right)_{|s=-N} = (-1)^N N!.$$

Démonstration. Au voisinage de $s = 0$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(s - N)} = (-1)^N N! s + O(s^2),$$

ce qui prouve la formule pour $\partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \right)_{|s=-N}$.

Pour démontrer les autres formules, on étudiera le développement limité de g au voisinage de $s = 0$. Par l'équation fonctionnelle de la fonction gamma, on obtient

$$g(s) = \frac{(as - 1) \dots (as - b)}{\Gamma(as)(cs + d)}.$$

On a au voisinage de 0 que

$$\begin{aligned} (as - 1) \dots (as - b) &= (-1)^b b! + a(-1)^{b-1} b! h_b s + O(s^2), \\ \frac{1}{\Gamma(s)} &= s + \gamma s^2 + O(s^3). \end{aligned}$$

Supposons que $d = 0$. Alors on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{a}{c} \frac{(as - 1) \dots (as - b)}{\Gamma(as)as} \\ &= \frac{a}{c} ((-1)^b b! + as(-1)^{b-1} b! h_b)(1 + \gamma as) + O(s^2) \\ &= \frac{a}{c} (-1)^b b! + \frac{a^2}{c} (-1)^{b-1} b! h_b s + \frac{a^2}{c} \gamma (-1)^b b! s + O(s^2) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $d \neq 0$, alors on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{(as - 1) \dots (as - b)}{\Gamma(as)(cs + d)} \\ &= \frac{(as - 1) \dots (as - b)}{cs + d} (as) + O(s^2) \\ &= \frac{a}{d} (-1)^b b! s + O(s^2). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.2. Soit $\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket$, $(\mu_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$, $(N_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$, $(n_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$, on a

$$\partial_s \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1 + \mu_p s}{n_p} \right)_{|s=0} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{n_p} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + n_p}) \right),$$

où h_n désigne le n -ième nombre harmonique.

Démonstration. Rappelons que l'on a

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1 + \mu_p s}{n_p} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{(-N_p - 1 + \mu_p s) \dots (-N_p + \mu_p s - n_p)}{n_p!}.$$

En développant le produit $\frac{(-N_p - 1 + \mu_p s) \dots (-N_p + \mu_p s - n_p)}{n_p!}$ avec s au voisinage de 0, on trouve que

$$\frac{(-N_p - 1 + \mu_p s) \dots (-N_p + \mu_p s - n_p)}{n_p!} = \binom{-N_p - 1}{n_p} + \mu_p \left(\sum_{i=0}^{n_p-1} \frac{(-N_p - 1) \dots \widehat{(-N_p - 1 - i)} \dots (-N_p - n_p)}{n_p!} \right) s + O(s^2),$$

où $\widehat{(-N_p - 1 - i)}$ désigne l'élément que l'on oublie dans le produit. On peut simplifier l'égalité précédente sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{(-N_p - 1 + \mu_p s) \dots (-N_p + \mu_p s - n_p)}{n_p!} &= \binom{-N_p - 1}{n_p} + \mu_p \binom{-N_p - 1}{n_p} \left(\sum_{i=0}^{n_p-1} \frac{1}{-N_p - 1 - i} \right) s \\ &= \binom{-N_p - 1}{n_p} + \mu_p \binom{-N_p - 1}{n_p} (h_{N_p} - h_{N_p+n_p}) s + O(s^2). \end{aligned}$$

Au voisinage de $s = 0$, on obtient alors :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1 + \mu_p s}{n_p} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{n_p} + \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{n_p} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p+n_p}) \right) s + O(s^2).$$

□

Lemme 3.1.3. Soit $M \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ un entier, et $(a_k)_{k \in [M, +\infty[}$ et $(b_k)_{k \in [M, +\infty[}$ deux suites de nombres complexes tels que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ aient deux rayons de convergence R_1 et R_2 non nuls. Supposons de plus qu'il existe un réel $0 < R < \min(R_1, R_2)$ tel que

$$\forall x \in]0, R[, \quad \sum_{k=M}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=M}^{+\infty} b_k x^k \ln(x) = 0,$$

alors, pour tout $k \in [0, +\infty[$, $a_k = 0$ et $b_k = 0$.

Démonstration. Si tous les b_k sont nuls (respectivement tous les a_k sont nuls) pour tout $k \geq M$, le résultat est trivial. Sinon, on suppose par l'absurde qu'il existe $i, j \geq M$ tels que $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$. Supposons que $i = \min\{k | a_k \neq 0\}$ et $j = \min\{k | b_k \neq 0\}$, on a alors au voisinage de 0 que

$$a_i x^i + b_j x^j \ln(x) + o(x^j \ln(x)) + o(x^i) = 0,$$

et donc $b_j x^{j-i} \ln(x) \sim a_i$ au voisinage de 0, contradiction. □

Le lemme précédent bien qu'évident, jouera un rôle crucial dans la détermination des formules des valeurs spéciales dans la démonstration du Théorème A et du Théorème D. En effet, dans le découpage de $Z_{(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}(\mu, \mu')(s)$ obtenue dans la Proposition 2.2.4, on a introduit artificiellement une variable libre θ . Il est évident que $K_{(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}(\mu, \mu')(\theta, s)$ s'annule en $s = 0$, la seule difficulté réside alors à évaluer $J_{(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}(\mu, \mu')(\theta, 0)$ via la formule 2.5 en $s = 0$, on obtiendra alors une expression faisant intervenir une série de Laurent en les θ , or la quantité $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) = Z_{(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}(\mu, \mu')(0)$ ne dépendant pas de θ , on ne gardera de la formule obtenue que les termes constants de la série de Laurent en les θ . Pour le calcul de $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) = Z'_{(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}(\mu, \mu')(0)$, on utilisera également ce lemme pour effectuer la même simplification, sauf que cette fois ci, en dérivant la formule 2.5 par rapport à s , on fera apparaître un terme en $\ln(\theta)$. De la même manière, on utilisera ce lemme afin de calculer les coefficients Q^0 et Q^1 , afin d'éliminer les séries en ϵ et les termes en $\ln(\epsilon)$.

Lemme 3.1.4. *Il existe une fonction définie pour tout $0 < \epsilon \ll 1$ tel que*

$$\alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) = a \ln(\epsilon) + \sum_{n \geq m} b_n \epsilon^n,$$

avec $m \in \mathbb{Z}$, avec un terme constant nul, (i.e. $b_0 = 0$), et tel que

$$\int_{\epsilon}^1 x_f^{-N_f' - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_f = \alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) + F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'),$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, la constante définie dans la Proposition 1.3.2 :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') &= -E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') - \sum_{\lambda=2}^{N_f' + 1 - \mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} \\ &\quad - \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=2}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} ((c_{j,p} + c_{f,p})^{1-\lambda} - c_{j,p}^{1-\lambda}) \\ &\quad + \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (1, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Afin de calculer l'intégrale, on utilise la Proposition 1.3.2. Avec les notations de cette proposition, on a

$$\begin{aligned} x_f^{-N_f' - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{(-N_p - 1 - |\mathbf{v}_p|)} &= \tilde{P}_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f) + \sum_{\lambda=1}^{N_f' + 1 - \mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{x_f^{\lambda}} \\ &\quad + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=1}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{(c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{\lambda}}. \end{aligned}$$

On a noté $P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f)$ la primitive du polynôme $\tilde{P}_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f)$ s'annulant en 1, et on note $E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ le terme constant de $P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f)$. On note $P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(x_f) := P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f) - E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^1 x_f^{-N_f' - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_f &= \\ &= -E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') - P_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) - C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, 1}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \ln(\epsilon) - \sum_{\lambda=2}^{N_f' + 1 - \mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} (1 - \epsilon^{1-\lambda}) \\ &\quad + \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (1, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \left(\ln(c_{j,p} + c_{f,p}) - \ln(c_{j,p}) - \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \epsilon \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=2}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + |\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda, p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda - 1} ((c_{j,p} + c_{f,p})^{1-\lambda} - (c_{j,p} + c_{f,p} \epsilon)^{1-\lambda}) \end{aligned}$$

En développant au voisinage de $\epsilon = 0$ les termes $(c_{j,p} + c_{f,p} \epsilon)^{1-\lambda}$ et $\ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \epsilon \right)$, on peut découper la formule obtenue précédemment en un terme constant, et en une somme entre un terme en $\ln(\epsilon)$ et une série de Laurent sans terme constant en ϵ , pour $0 < \epsilon \ll 1$. Notons le terme non constant $\alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon)$.

On a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^1 x_f^{-N'_f-1+\mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p+\mu_p s-1-|\mathbf{v}_p|} dx_f = \alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) \\ & - E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') - \sum_{\lambda=2}^{N'_f+1-\mathbf{w}(f)} \frac{C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda-1} + \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (1,p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \ln \left(1 + \frac{c_{f,p}}{c_{j,p}} \right) \\ & - \frac{1}{c_{f,p}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\lambda=2}^{(|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|+|\mathbf{v}|)} \frac{D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda,p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')}{\lambda-1} ((c_{j,p} + c_{f,p})^{1-\lambda} - c_{j,p}^{1-\lambda}) \end{aligned}$$

□

Remarquons que l'on peut obtenir une expression plus simple de l'intégrale précédente, moins explicite, mais plus pratique à calculer avec un logiciel de calcul formel :

Considérons la primitive $G_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}(x_f)$ de $x_f^{-N'_f-1+\mathbf{w}(f)} \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p+\mu_p s-1-|\mathbf{v}_p|}$ s'annulant en $x_f = 1$. Cette primitive s'exprime sous la forme d'une somme entre un multiple de $\ln(x_f)$ et d'une série de Laurent en x_f , pour $0 < x_f \ll 1$. On remarque alors que le terme constant de cette série de Laurent est $-F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$.

Remarque 3.1.5. *Il paraît plus pratique avec un logiciel de calcul formel de calculer directement le coefficient $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ en déterminant une primitive de $x_f^{-N'_f-1+\mathbf{w}(f)} \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p+\mu_p s-1-|\mathbf{v}_p|}$ plutôt que de calculer les coefficients $C_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, $D_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (\lambda,p)}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$, et $E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ en utilisant la décomposition en éléments simples de la Proposition 1.3.2.*

3.2 Valeurs et dérivées de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$

Soit $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. On cherchera dans cette section à calculer explicitement les coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}^0$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}^1$, dont on rappelle les définitions :

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) &= Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}^0, \\ \partial_s h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) &= Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}^1. \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a montré dans la Proposition 2.2.2 que la fonction

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) &= \\ & \frac{1}{\prod_{q=1}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q x_q^{-N'_q + \mu'_q s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{-N_p + \mu_p s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(\widehat{\mathbf{x}}^j)^{k_p} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_Q, \end{aligned}$$

était holomorphe.

On avait également obtenu dans cette proposition une expression de la dérivée de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$ en $s = 0$.

3.2.1 Préliminaires

Soit $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $0 < \epsilon \ll 1$. Comme on a pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) = \sum_{\substack{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\} \\ \mu, \mu'}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s),$$

on en déduit qu'il suffit d'étudier le développement de Taylor de $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s)$ au voisinage de 0 pour $0 < \epsilon \ll 1$ afin d'obtenir celui de $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)$. On rappelle le point iii) obtenu dans la

Proposition 2.2.2:

Soit $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, et pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a :

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q \in [1, Q]} c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \\ & \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) \frac{1}{\prod_{q \in [1, Q] \setminus \{j\}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ & \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j, p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f, p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q. \end{aligned}$$

Notons $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ le terme général de la série précédente :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) &= \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) \\ & \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ & \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j, p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f, p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Rappelons également que, avec cette définition de $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ on a par le point iii) du Lemme 2.3.22 :

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, 0) = \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, 0), \quad (3.2)$$

et par ce même point iii), on a également une expression de sa dérivée selon s :

$$\left(\partial_s I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} = \sum_{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^{\mathcal{Q}})^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \left(\partial_s T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0}. \quad (3.3)$$

Grâce à l'égalité 2.24, on a

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, 0), \quad (3.4)$$

$$\left(\partial_s h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right)_{|s=0} = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0}. \quad (3.5)$$

Ainsi, calculer les coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$ revient à étudier le terme général $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ au voisinage de $s = 0$.

Lemme 3.2.1.

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) = \begin{cases} O(1) & \text{si } |\mathcal{Q}| = Q - 1, \text{ et } \forall q \in \mathcal{Q}, & \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q \\ O(s) & \text{si } |\mathcal{Q}| = Q - 1 \text{ et } \exists f \in \mathcal{Q} \setminus \{j\}, \forall q \in \mathcal{Q} \setminus \{f\}, & \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q \\ & & \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f) \neq N'_f \\ O(s) & \text{si } |\mathcal{Q}| = Q - 2 \text{ et } \forall q \in \mathcal{Q}, & \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q \\ O(s^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On sait que la fonction méromorphe $s \mapsto \prod_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}$ admet un pôle d'ordre $|\{q \in \mathcal{Q} | N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)\}|$ en $s = 0$. En particulier, l'ordre est nécessairement plus petit que $|\mathcal{Q}|$. Par propriété de la fonction Γ , on sait que la fonction $s \mapsto \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + s\mu'_q)}$ admet un zéro d'ordre $Q - 1$ en $s = 0$. On obtient alors que $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ est d'ordre $O(s^n)$ avec

$$n = Q - 1 - |\{q \in \mathcal{Q} | N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)\}|.$$

□

3.2.2 Calcul de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$ μ, μ'

Proposition 3.2.2. Soit $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$.

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$ et $\forall q \in \mathcal{Q}, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$, alors

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, 0) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!.$$

- Sinon, on a

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, 0) = 0.$$

Démonstration. Dans le premier cas, par le lemme 3.1.1, on a pour tout $q \neq j$:

$$\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{1}{\mu'_q s} \right)_{s=0} = (-1)^{N'_q} N'_q! \frac{\mu'_q}{\mu_q}.$$

En évaluant en $s = 0$ l'expression de $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$, on trouve la première formule de la proposition. La seconde égalité découle du Lemme 3.2.1. □

Par la formule 3.2 et par la proposition précédente, on obtient :

Corollaire 3.2.3. Soit $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, et $0 < \epsilon \ll 1$.

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, alors on a

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, 0) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

- Sinon, on a

$$I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, 0) = 0.$$

Par la formule 2.24, on a que

$$h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) = \sum_{\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, 0),$$

on trouve alors par le corollaire précédent que

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(\mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right). \quad (3.6)$$

3.2.3 Calcul de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$

En évaluant en $s = 0$ la dérivée en s du terme général

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{q \in \mathcal{Q}} c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\ \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \frac{\epsilon^{\sum_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}}{\prod_{q \in \mathcal{Q}} (-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ \cdot \int_{\epsilon}^1 \dots \int_{\epsilon}^1 \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} x_q^{-N'_q + \mu'_q s - 1 + \mathbf{w}(q)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(c_{j,p} + \sum_{f \in \mathcal{Q}^c} c_{f,p} x_f \right)^{-N_p + \mu_p s - 1 - |\mathbf{v}_p|} \prod_{q \in \mathcal{Q}^c} dx_q,$$

on obtient :

Proposition 3.2.4. Soit $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$,

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$ et $\forall q \in \mathcal{Q}, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$, alors

$$\begin{aligned}
 \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} &= \\
 & (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \\
 & \cdot \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\
 & + (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} |\boldsymbol{\mu}'|_{\mathcal{Q}}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \ln(\epsilon).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$ et s'il existe $f \in \mathcal{Q} \setminus \{j\}$ tel que $\mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f) \neq N'_f$ et tel que, pour tout $q \in \mathcal{Q} \setminus \{f\}, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$, alors

$$\begin{aligned}
 \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} &= \\
 & (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
 & \cdot \frac{\mu'_f}{-N'_f + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)} \epsilon^{-N'_f + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}$ tel que $\mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$, on a qu'il existe un terme $\beta_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon)$ correspondant à la somme entre un terme en $\ln(\epsilon)$ et d'une série de Laurent en ϵ définie pour $0 < \epsilon \ll 1$ sans coefficient constant, et tel que

$$\begin{aligned}
 \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} &= \\
 & \mu'_f (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \\
 & + \beta_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon),
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ définie dans la Proposition 1.3.2.

- Sinon, on a

$$\partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} = 0.$$

Démonstration. • Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, on a alors

$$\begin{aligned}
& \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} = \\
& \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \partial_s \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right)_{|s=0} \\
& \cdot \left(\frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \right)_{|s=0} \epsilon^{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\
& + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \partial_s \left(\frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \right)_{|s=0} \epsilon^{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\
& + |\mu'|_{|\mathcal{Q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
& \cdot \left(\frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \right)_{|s=0} \ln(\epsilon) \epsilon^{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))}
\end{aligned}$$

Par le Lemme 3.1.2, on a

$$\partial_s \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p + \mu_p s - 1}{|\mathbf{v}_p|} \right)_{|s=0} = \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) \right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|},$$

ce qui conclut la première formule.

• Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$ et $\forall q \in \mathcal{Q}$, $\mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$, on a par le Lemme 3.1.1,

$$\begin{aligned}
& \partial_s \left(\frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right)_{|s=0} = \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f (-1)^{N'_f} N'_f! (\gamma - h_{N'_f}) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q! \\
& = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\
& \left(\frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right)_{|s=0} = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q!
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}
 \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} = & \\
 & \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
 & \cdot (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[\mathbb{1}, \mathcal{Q}] \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \\
 & + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
 & \cdot (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[\mathbb{1}, \mathcal{Q}] \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\
 & + |\mu'|_{\mathcal{Q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\
 & \cdot (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[\mathbb{1}, \mathcal{Q}] \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \ln(\epsilon)
 \end{aligned}$$

En factorisant la première et la seconde expression de cette somme, on obtient la formule 3.7.

• Si $\mathcal{Q} = [\mathbb{1}, \mathcal{Q}] \setminus \{j\}$ et s'il existe $f \in \mathcal{Q} \setminus \{j\}$ tel que $\mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f) \neq N'_f$ et tel que, pour tout $q \in \mathcal{Q} \setminus \{f\}$, on a $\mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$, on a par le Lemme 3.1.1,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s)(-N'_f + \mu'_f s + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right) \Big|_{s=0} = 0, \\
 \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s)(-N'_f + \mu'_f s + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right) \Big|_{s=0} = & \\
 & (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[\mathbb{1}, \mathcal{Q}] \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \frac{\mu'_f}{-N'_f + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)}.
 \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} &= \\ \epsilon^{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} &\left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\ \cdot \partial_s &\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s)(-N'_f + \mu'_f s + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)(-N'_q + \mu'_q s + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \right) \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

En observant que $\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)) = -N'_f + \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f) \neq 0$, on obtient la formule 3.8.

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}$ tel que $\mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$, on a par le Lemme 3.1.1

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right) \Big|_{s=0} = 0 \\ \partial_s &\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right) \Big|_{s=0} = \mu'_f \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!, \end{aligned}$$

En dérivant le terme général $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s)$ suivant s , puis en l'évaluant en $s = 0$ on trouve pour tout $0 < \epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} &= \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \quad (3.10) \\ \cdot \partial_s &\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_f + \mu'_f s) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q \Gamma(-N'_q + \mu'_q s) \mu'_q s} \right) \epsilon^{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q))} \\ \cdot \int_{\epsilon}^1 &x_f^{-N'_f - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_f. \end{aligned}$$

Avec les conditions que l'on a imposé sur les multi-indices $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, on trouve que $\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q (-N'_q + \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)) = 0$.

Par le Lemme 3.1.4, on a

$$\int_{\epsilon}^1 x_f^{-N'_f - 1 + \mathbf{w}(f)} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} (c_{j,p} + c_{f,p} x_f)^{-N_p - 1 - |\mathbf{v}_p|} dx_f = \alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) + F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ définie dans la Proposition 1.3.2, et $\alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon)$ une fonction en epsilon de la forme $a \ln(\epsilon) + \sum_{n \geq m} b_n \epsilon^n$, $m \in \mathbb{Z}$ et a, b_n des complexes tels que $b_0 = 0$.

En injectant cette expression dans la formule 3.10, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} = \\ \mu'_f \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}} (-1)^{N'_q} N'_q! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \\ \cdot \left(\alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) + F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \right). \end{aligned}$$

En notant

$$\beta_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon) = \mu'_f \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}} (-1)^{N'_q} N'_q! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \alpha_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\epsilon),$$

on obtient la formule 3.9.

• Si l'on n'est pas dans un des trois cas ci-dessus, alors on a par le Lemme 3.2.1 au voisinage de $s = 0$, pour tout $0 < \epsilon \ll 1$,

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) = O(s^2),$$

ce qui conclut. $\square$

Par la formule 3.3 et par la proposition précédente, on trouve le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.5. *Soit $\mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$.*

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, alors il existe un terme $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}^*(\epsilon)$ correspondant à la somme entre un terme en $\ln(\epsilon)$ et d'une série de Laurent définie pour $0 < \epsilon \ll 1$ sans terme constant, et tel que

$$\begin{aligned} \partial_s \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \llbracket Q \rrbracket \setminus \{j\}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right)_{|s=0} = \\ (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = \mathbf{N}'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\ + I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}^*(\epsilon). \end{aligned} \tag{3.11}$$

- Si $\mathcal{Q} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}$, on a qu'il existe un terme $I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}^*(\epsilon)$ correspondant à la somme entre un

terme en $\ln(\epsilon)$ et d'une série de Laurent définie pour $0 < \epsilon \ll 1$ sans terme constant, et tel que

$$\begin{aligned} \partial_s \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} &= \\ I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}^*(\epsilon) + (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}}} \mu'_f \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) &\sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) &\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'), \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ définie dans la Proposition 1.3.2.

• Sinon, on a

$$\partial_s \left(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} = 0.$$

Par la formule 3.5, on a que

$$\partial_s \left(h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right) \Big|_{s=0} = \sum_{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \setminus \{j\}} \partial_s \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathcal{Q}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0},$$

on trouve alors grace au corollaire précédent que

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k}) &= \partial_s \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, [1, Q] \setminus \{j\}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \partial_s \left(I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, [1, Q] \setminus \{j, f\}, \mathbf{k}}(\epsilon, s) \right) \Big|_{s=0} \\ &= (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \\ &\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\ &+ (-1)^{|\mathbf{N}'|_{[1, Q] \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p|=k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, Q] \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \\ &\left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q, p}^{w_{p, q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q, p}^{v_{p, q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \\ &+ I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, [1, Q] \setminus \{j\}, \mathbf{k}}^*(\epsilon) + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q I_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, [1, Q] \setminus \{j, f\}, \mathbf{k}}^*(\epsilon). \end{aligned}$$

On conclut via le Lemme 3.1.3 en remarquant que $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$ ne dépend pas de ϵ . On trouve alors que le terme constant en ϵ dans la formule précédente vaut nécessairement $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(\mathcal{P}, j, \mathbf{k})$.

Chapitre 4

Démonstration du Théorème A et de ses corollaires

Le but de ce chapitre est d'étudier les valeurs directionnelles de $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ aux multi-entiers négatifs. En montrant que la fonction $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ est régulière en $s = 0$, on a montré que les quantités $Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ et $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ ont bien un sens. Afin de calculer la première quantité, on exploitera la Proposition 2.2.4 afin d'évaluer $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s)$ en $s = 0$.

4.1 Enoncé du Théorème A

Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème :

Théorème (A). Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. On a

$$Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) = (-1)^{|\mathbf{N}'|} \sum_{\mathcal{P} \subseteq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}| = |\mathbf{k}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{(-1)^{N'_j} \mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$$

$$\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \\ \forall p \in \mathcal{P}, \mathbf{v}_p \in \mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!.$$

où l'on rappelle les notations

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \quad \mathbf{w}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}^c} w_{p,q},$$

et

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \quad \mathbf{v}(q) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_{p,q}.$$

4.2 Démonstration du Théorème A

Démonstration. De la Proposition 2.2.4, on obtient pour tout $0 < \theta \ll 1$,

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(0) = K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, 0) + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, 0),$$

Or on sait que $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, 0) = 0$ par la Proposition 2.3.11. Il ne reste qu'à étudier la valeur de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ en $s = 0$. Par la formule 2.5, on a

$$\begin{aligned} Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(0) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \sum_{j=1}^P h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) \\ & \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)} \frac{\theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s) - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}} \right) \prod_{s=0} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ & + \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(0) \left(\frac{\theta(|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right) \right)_{|s=0} \end{aligned}$$

Observons tout d'abord que l'expression

$$\left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(0) \left(\frac{\theta(|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right) \right)_{|s=0},$$

est nulle. En effet, comme on a $-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P \neq 0$, alors le zéro de $\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)}$ en $s = 0$ n'est compensé par aucun pôle venant de la fraction $\frac{1}{((|\mu'| + |\mu|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)}$ en $s = 0$.

Etudions plus en détail le premier terme de la formule de $Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(0)$. On sait que $h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) = Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$. Soit $0 < \theta \ll 1$ et $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$.

- Si $|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} \neq -|\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}|$, alors on sait par le Lemme 3.1.1 que le terme

$$\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)} \frac{\theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s) - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}}$$

s'annule en $s = 0$.

- Si $|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} = -|\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}|$, alors par le Lemme 3.1.1 on a :

$$\left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)} \frac{\theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s) - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + (|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}})s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}} \right)_{|s=0} = \frac{\mu'_j}{|\mu'| + |\mu|_{|\mathcal{P}}} (-1)^{N'_j} N'_j!.$$

On en déduit alors le Théorème A. L'expression de $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ dans le Théorème A découle de l'expression obtenue dans l'égalité (3.6). $\square$

4.3 Sur les corollaires du Théorème A

Une fois le Théorème A démontré, les corollaires sont rapides à démontrer.

4.3.1 Démonstration du Corollaire A1

Pour prouver le Corollaire A1, on applique le Théorème A, en posant $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$:

$$Z(-(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}' \\ \mathcal{P} \subseteq \llbracket 1, P \rrbracket}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathcal{P}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = 0}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

On peut simplifier le coefficient $Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ en remarquant que la condition $\mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = 0$ pour tout $q \neq j$ implique que

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P}, \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \quad v_{p,q} &= 0 \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \quad w_{p,q} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors que $k_p = |\mathbf{w}_p| = w_{p,j}$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$. Ainsi, on peut simplifier l'expression de $Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$:

$$Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}.$$

4.3.2 Démonstration du Corollaire A2

Sur le Corollaire A2, en posant $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ et $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (N, \dots, N)$, on trouve via le Théorème A que

$$Z_{\Delta}(-N) = \sum_{\mathcal{P} \subseteq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{N(|\mathcal{P}|+Q+1)+|\mathcal{P}|} N!^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N(Q+|\mathcal{P}|)+|\mathcal{P}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{1}{Q+|\mathcal{P}|} Q_N^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_N^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

En notant

$$Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^Q Q_N^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}),$$

on trouve la formule annoncée dans le corollaire.

4.3.3 Démonstration du Corollaire A3

Le Corollaire A3 correspond à une version qualitative, non explicite du Théorème A. Soit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^Q$. Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$. On note $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$, par les coefficients complexes $(d_p)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ et $(c_{q,p})_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket, q \in \llbracket 1, Q \rrbracket}$, et par les directions μ_p pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, et μ'_q pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$.

Par le Théorème A, on a que

$$Z(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} = (-1)^{|\mathbf{N}'|} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \sum_{j=1}^Q \frac{(-1)^{N'_j} \mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$$

$$\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

Observons tout d'abord que les coefficients $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ est dans le corps $\mathbb{K}$, en tant que somme rationnels de produit de puissance des coefficients $c_{q,p} \in \mathbb{K}$ pour $1 \leq p \leq P$ et $1 \leq q \leq Q$. Ensuite, par propriété de la fonction zêta de Hurwitz, on sait que ses valeurs aux entiers négatifs s'expriment en fonction de polynômes de Bernoulli, et ceux-ci sont à coefficients rationnels. Ainsi, on obtient que $\frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \in \mathbb{Q}[d_1, \dots, d_P] \subset \mathbb{K}$, ce qui prouve le corollaire.

Chapitre 5

Démonstration de la Proposition B et du Théorème D

5.1 Enoncé de la Proposition B et du Théorème D

On cherchera dans ce chapitre à démontrer la Proposition B et le Théorème D, dont on rappelle les énoncés ci-dessous.

Proposition (B). Soit $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$ un entier. On suppose que l_j est une forme linéaire à coefficients rationnels pour $1 \leq j \leq Q$. Pour tout $1 \leq p \leq P$, on pose $c_{j,p} = \frac{a_{j,p}}{b_{j,p}}$ la décomposition irréductible de $c_{j,p}$ avec $a_{j,p} > 0$ et $b_{j,p} > 0$. On pose alors $x_j(\mathbf{c}) = \frac{\text{ppcm}(a_{j,p})}{\text{pgcd}(b_{j,p})} \in \mathbb{Q}_+$, et $\beta_{j,p}(\mathbf{c}) := \frac{x_j(\mathbf{c})}{c_{j,p}} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq p \leq P$. Alors pour tout $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, la fonction $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ admet la relation suivante pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = x_j(\mathbf{c})^{-s} \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c})-1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c})-1}} \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1,P]} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-R_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})}\right)}{k_p!} \\ \cdot \frac{\zeta(s - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!}$$

Théorème (D). Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$, alors

$$\begin{aligned}
Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'} = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}| + N'_j} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& \cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p(\gamma - h_{N_p}) + \mu'_j(\gamma - h_{N'_j}) \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\
& + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}| + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \\
& \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s = -N'_j} \\
& - \sum_{j=1}^Q (\gamma - h_{N'_j}) \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \\
& \cdot \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \Bigg),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'on a posé

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket},$$

pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$, et tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, avec $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ et $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$ déterminés dans le Chapitre 3.

5.2 Fonctions auxiliaires

On appliquera dans cette section la Proposition 2.2.4 aux fonctions auxiliaires $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$, afin de faire intervenir les valeurs spéciales de ces fonctions par la suite dans le calcul des valeurs de la dérivée directionnelle de Z .

On rappelle que, pour $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_P) \in \mathbb{N}^P$, et $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, on a posé

$$\varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} (n_1 + d_1)^{R_1} \dots (n_P + d_P)^{R_P} (l_j(\mathbf{n}) + d'_j)^{-s}.$$

Cette série de Dirichlet se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C}$, et on sait qu'elle est régulière en les entiers négatifs par le Corollaire 2.2.6.

Remarque 5.2.1. Pour $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, on retrouve la fonction zêta de Barnes définie par la série

$$\zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, \dots, c_{j,P}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{1}{(l_j(\mathbf{n}) + d'_j)^s}.$$

On applique la Proposition 2.2.4 à la fonction auxiliaire $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$, en posant $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\mathbf{N} = \mathbf{R}$, $\mathbf{N}' = \mathbf{0}$, et $\boldsymbol{\mu}' = 1$. On sait que cette fonction auxiliaire est régulière en les entiers négatifs, et par cette même proposition, on obtient que l'ensemble des pôles est inclus dans l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) := \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

On obtient que la fonction auxiliaire s'exprime sous la forme suivante, pour $0 < \theta \ll 1$, et pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$\varphi_{\mathbf{R}}^j(s) = J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) + K_{\mathbf{R}}^j(\theta, s), \quad (5.2)$$

avec, pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$K_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(s, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p},$$

et pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} R_p! \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{R}, \mathcal{P}, \mathbf{k}}(s) \frac{\theta^{s - |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}}}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|})} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ & + \left(\prod_{p=1}^P R_p! \right) h_{\mathbf{R}, \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta^{(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}| - P)}. \end{aligned}$$

avec

$$h_{\mathbf{R}, \mathcal{P}, \mathbf{k}}(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-N_p - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p},$$

et

$$h_{\mathbf{R}, \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) = \prod_{p=1}^P c_{j,p}^{-N_p - 1}.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}} R_p! \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p - 1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \frac{\theta^{s - |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}}}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|})} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ & + \left(\prod_{p=1}^P R_p! \right) \left(\prod_{p=1}^P c_{j,p}^{-R_p - 1} \right) \frac{\theta^{s - |\mathbf{R}| - P}}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}| - P)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Proposition 5.2.2. Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, et $N \in \mathbb{N}$. Soit $0 < \theta \ll 1$ et $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, alors $s \mapsto \varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, et est régulière en les entiers négatifs. De plus,

$$\partial_s K_{\mathbf{R}}^j(\theta, -N) = (-1)^N N! \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-N, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} \quad (5.4)$$

$$\partial_s J_{\mathbf{R}}^j(\theta, -N) = \quad (5.5)$$

$$J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N) + N!(\gamma - h_N) \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p - 1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N + |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!},$$

avec $J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N)$ de la forme $J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N) = \sum_{n \geq -N - |\mathbf{R}| - P} \alpha_n \theta^n + \beta \ln(\theta)$ pour tout $0 < \theta \ll 1$, et avec un terme constant nul, i.e. $\alpha_0 = 0$.

Démonstration. Par le Théorème 2.2.6, on sait que $\varphi_{\mathbf{R}}^j$ admet un prolongement méromorphe régulier en les entiers négatifs. Par la Proposition 2.3.11, on sait que l'application $s \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(s, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En dérivant l'expression de $K_{\mathbf{R}}^j$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_s K_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) &= -\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(s, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \partial_s \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(s, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} \right), \end{aligned}$$

où ψ désigne la fonction digamma.

On peut alors évaluer cette somme de deux termes en $s = -N$. Comme $\frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annule en $s = -N$, et que par le Lemme 3.1.1, $\left(\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right)_{s=-N} = (-1)^{N+1} N!$, on obtient bien la formule voulue.

De la formule 5.3, on en déduit

$$\begin{aligned} \partial_s J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s) &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ &\quad \cdot \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right) \theta^{s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \\ &\quad + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \theta^{s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \ln(\theta) \\ &\quad - \left(\prod_{p=1}^P R_p! \right) \left(\prod_{p=1}^P c_{j,p}^{-R_p-1} \right) \theta^{s - |\mathbf{R}| - P} \left(\frac{\ln(\theta)}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}| - P)} + \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}| - P)} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour obtenir la formule pour $(\partial_s J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s))_{s=-N}$, on doit évaluer les termes de la forme $\frac{1}{(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)\Gamma(s)}$, et ceux de la forme $\partial_s \frac{1}{(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)\Gamma(s)}$. On évalue ces expressions en $s = -N$ à l'aide du Lemme 3.1.1 :

$$\left(\frac{1}{(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)\Gamma(s)} \right)_{s=-N} = \begin{cases} (-1)^N N! & \text{si } |\mathbf{k}| = N + |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| \\ 0 & \text{si } |\mathbf{k}| \neq N + |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|. \end{cases}$$

et

$$\partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(s)(s - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right)_{s=-N} = \begin{cases} (-1)^N (\gamma - h_N) N! & \text{si } |\mathbf{k}| = N + |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| \\ \frac{(-1)^N N!}{-N - |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} & \text{si } |\mathbf{k}| \neq N + |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|. \end{cases}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\partial_s J_{\mathbf{R}}^j(\theta, -N) = & (\gamma - h_N) N! \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=N+|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& + (-1)^N N! \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| \neq N+|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \frac{\theta^{-N-|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}-|\mathcal{P}|+|\mathbf{k}|}}{-N-|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}-|\mathcal{P}|+|\mathbf{k}|} \\
& + N! \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=N+|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \ln(\theta) \\
& + (-1)^N N! \left(\prod_{p=1}^P R_p! \right) \left(\prod_{p=1}^P c_{j,p}^{-R_p-1} \right) \frac{\theta^{-N-|\mathbf{R}|-P}}{-N-|\mathbf{R}|-P}
\end{aligned}$$

On peut alors poser $J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N)$ telle que

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N) = & (-1)^N N! \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| \neq N+|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \frac{\theta^{-N-|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}-|\mathcal{P}|+|\mathbf{k}|}}{-N-|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}-|\mathcal{P}|+|\mathbf{k}|} \\
& + N! \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R_p-1} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=N+|\mathbf{R}|_{\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \ln(\theta) \\
& + (-1)^N N! \left(\prod_{p=1}^P R_p! \right) \left(\prod_{p=1}^P c_{j,p}^{-R_p-1} \right) \frac{\theta^{-N-|\mathbf{R}|-P}}{-N-|\mathbf{R}|-P}
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.3. Le terme $J_{\mathbf{R}}^{*j}(\theta, -N)$ correspond à la somme entre un multiple de $\ln(\theta)$ et une série de Laurent à terme constant non nul.

Observons que l'on ne peut pas obtenir une expression explicite des valeurs de $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}}^j$ en les entiers négatifs à l'aide de (5.4) et de (5.5), puisqu'il n'est pas vrai que le terme $\partial_s K_{\mathbf{R}}^j(\theta, -N)$ s'annule. On a ainsi besoin d'une autre stratégie pour calculer les valeurs de $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}}^j$ en les entiers négatifs.

5.2.1 Démonstration de la Proposition B

On souhaite dans cette section fournir des valeurs explicites des dérivées de ces fonctions auxiliaires dans le cas où les coefficients $(c_{q,p})_{q \in [1, Q] \times [1, P]}$ sont rationnels.

Soit $P \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$. Pour simplifier les écritures dans cette sous-section, on écrira pour tout complexe s tel que $\sigma \gg_{\mathbf{R}} 1$

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | w_1, \dots, w_P) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{(n_1 + d_1)^{R_1} \dots (n_P + d_P)^{R_P}}{\left(\sum_{p=1}^P w_p (n_p + d_p) \right)^s},$$

avec $\mathbf{d} = (d_p)_{p \in [1, P]}$ et $w_p, d_p \in H_0$ pour tout entier p . Cette fonction admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ en la variable s . On souhaite dans cette sous-section établir une relation explicite

entre $\varphi_{\mathbf{R}}^j(s)$ et la fonction zêta d'Hurwitz $\zeta(s, x)$, avec $x \in H_0$. On suit pour cela une stratégie développée par Aoki et Sakane dans [SA22], qui a été utilisée initialement pour expliciter les valeurs spéciales des dérivées supérieures des fonctions zêta de Barnes à coefficients rationnels. Ici, les fonctions auxiliaires $\varphi_{\mathbf{R}}(s, x|w_1, \dots, w_P)$ ne sont pas exactement des fonctions zêta de Barnes à cause des termes au numérateur dans la série, cependant les techniques utilisées par Aoki et Sakane fonctionnent de la même manière pour étudier cette fonction.

Lemme 5.2.4. *Soit $w_1, \dots, w_P \in \mathbb{Q}_*^+$ tels que $w_p = \frac{a_p}{b_p}$ avec a_p et b_p des entiers strictement positifs. Pour tout multiple commun α à $b_1, \dots, b_P$, et tout multiple commun β à $\alpha w_1, \dots, \alpha w_P$, on a*

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d}|w_1, \dots, w_P) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s \prod_{p=1}^P \beta_p^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq \beta_1 - 1 \\ 0 \leq k_P \leq \beta_P - 1}} \varphi_{\mathbf{R}}\left(s, \left(\frac{d_p + k_p}{\beta_p}\right)_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket} \middle| \mathbf{1}\right), \quad (5.6)$$

$$\text{avec } \beta_1 = \frac{\beta}{\alpha w_1}, \dots, \beta_P = \frac{\beta}{\alpha w_P}.$$

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$. Pour obtenir le résultat souhaité, on découpera chaque somme

$$\sum_{n_p=0}^{+\infty} \text{ par } \sum_{\substack{n_p=0 \\ n_p \equiv k_p \pmod{\beta_p}}}^{+\infty}, \text{ avec } k_p \text{ un entier variant dans l'ensemble } \llbracket 0, \beta_p - 1 \rrbracket. \text{ On obtient alors que}$$

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d}|w_1, \dots, w_P) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s \sum_{k_1=0}^{\beta_1-1} \dots \sum_{k_P=0}^{\beta_P-1} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P \\ \forall p, n_p \equiv k_p \pmod{\beta_p}}} \frac{\prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p}}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\sum_{p=1}^P (w_p d_p + w_p k_p + w_p (n_p - k_p))\right)\right)^s}.$$

En effectuant un changement de variable de la forme $n'_p = \beta_p n_p + k_p$ pour tout entier p , on obtient

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d}|w_1, \dots, w_P) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s \sum_{k_1=0}^{\beta_1-1} \dots \sum_{k_P=0}^{\beta_P-1} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{\prod_{p=1}^P (\beta_p n_p + k_p + d_p)^{R_p}}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \sum_{p=1}^P w_p d_p + w_p k_p + w_p \beta_p n_p\right)^s}.$$

En factorisant par $\beta_p^{R_p}$ au numérateur, et en remarquant que $\frac{\alpha w_p \beta_p}{\beta} = 1$, on a

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d}|w_1, \dots, w_P) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s \prod_{p=1}^P \beta_p^{R_p} \sum_{k_1=0}^{\beta_1-1} \dots \sum_{k_P=0}^{\beta_P-1} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \frac{\prod_{p=1}^P \left(n_p + \frac{k_p + d_p}{\beta_p}\right)^{R_p}}{\left(\sum_{p=1}^P n_p + \frac{\alpha}{\beta} (w_p d_p + w_p k_p)\right)^s}.$$

Il ne reste qu'à observer que

$$\frac{k_p + d_p}{\beta_p} = \frac{\alpha}{\beta} (w_p d_p + w_p k_p),$$

pour tout $1 \leq p \leq P$. On obtient donc la formule 5.6 pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$. On peut alors étendre l'égalité sur tout $\mathbb{C}$ par prolongement analytique. $\square$

On peut préciser la formule 5.6 en choisissant un coefficient rationnel $\frac{\alpha}{\beta}$ plus agréable. On peut en effet considérer directement un tel coefficient rationnel qui dépendra directement des coefficients $w_1, \dots, w_P$ ce qui facilitera grandement nos calculs explicites par la suite.

Proposition 5.2.5. *Soit $\mathbf{d} \in H_0$ $w_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, w_P = \frac{a_P}{b_P}$ des rationnels avec $a_p, b_p > 0$ des entiers premiers entre eux pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. On pose $w := \frac{\text{ppcm}(a_1, \dots, a_P)}{\text{pgcd}(b_1, \dots, b_P)}$, et pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, on*

pose $\beta_1 := \frac{w}{w_1}, \dots, \beta_P := \frac{w}{w_P}$. Alors

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | w_1, \dots, w_P) = w^{-s} \prod_{p=1}^P \beta_p^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq \beta_1 - 1 \\ \vdots \\ 0 \leq k_P \leq \beta_P - 1}} \varphi_{\mathbf{R}} \left(s, \left(\frac{d_p + k_p}{\beta_p} \right)_{p \in [1, P]} | \mathbf{1} \right).$$

Démonstration. On pose $\alpha = \text{ppcm}(b_1, \dots, b_P)$ et $\beta = \text{ppcm}(\alpha w_1, \dots, \alpha w_P)$. Par [SA22, p.3], on sait que $\frac{\alpha}{\beta} = w^{-1}$. On a alors qu'à utiliser la formule 5.6 avec le α et le β fixés ci-dessus. $\square$

Finalement, on obtient une formule similaire à celle démontrée par [Ono21, Proposition 4.1] pour réexprimer $\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | 1, \dots, 1)$, en modifiant très légèrement la preuve d'Onodera.

Proposition 5.2.6. *Soit $\mathbf{d} \in H_0^P$, $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, et $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | \mathbf{1}) = \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \geq 0 \\ |\mathbf{k}|_{\mathcal{P}} + k' = |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \frac{\zeta(s - k', |\mathbf{d}|)}{k'!} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!}.$$

Pour démontrer cette formule, on utilisera un lemme d'Onodera [Ono21, Lemme 4.2] qui est une généralisation de la formule de Faulhaber suivante

$$\sum_{n=1}^y n^r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r \binom{r+1}{k} (-1)^k B_k y^{r-k+1}.$$

Lemme 5.2.7. [Ono21] *Soit $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_P) \in \mathbb{N}^P$ des entiers positifs, et $y \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Alors on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P \\ |\mathbf{n}| = y}} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} + (-1)^{P-1} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\leq -1}^P \\ |\mathbf{n}| = y}} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} = \\ \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} \frac{(|\mathbf{d}| + y)^{k'}}{k'!} \prod_{p \in \mathcal{P}} (-1)^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \end{aligned}$$

On remarque au passage que si $y \in \mathbb{N}$, alors le second terme à gauche de l'égalité du terme précédent est nul. On peut maintenant prouver la Proposition 5.2.6 :

Démonstration. On commence par remarquer que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \gg 1$, on a

$$\varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | \mathbf{1}) = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{1}{(n' + |\mathbf{d}|)^s} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P \\ |\mathbf{n}| = n'}} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p}.$$

Par le Lemme 5.2.7, on obtient alors

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | \mathbf{1}) &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} \prod_{p \in \mathcal{P}} (-1)^{k_p} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{(n' + |\mathbf{d}|)^{k'}}{k'!} \frac{1}{(n' + |\mathbf{d}|)^s} \\ &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}|_{\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta(-R_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \frac{\zeta(s - k', |\mathbf{d}|)}{k'!} \end{aligned}$$

$\square$

En appliquant la Proposition 5.2.6 à la formule obtenue dans la Proposition 5.2.5, on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.2.8. *Soit $\mathbf{d} \in H_0^P$, $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, et $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$, et $w_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, w_P = \frac{a_P}{b_P}$ des rationnels avec $a_p, b_p > 0$ des entiers premiers entre eux pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$. On pose $w := \frac{\text{ppcm}(a_1, \dots, a_P)}{\text{pgcd}(b_1, \dots, b_P)}$, et pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, on pose $\beta_1 := \frac{w}{w_1}, \dots, \beta_P := \frac{w}{w_P}$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{R}}(s, \mathbf{d} | w_1, \dots, w_P) = \\ w^{-s} \prod_{p=1}^P \beta_p^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq u_1 \leq \beta_1 - 1 \\ \vdots \\ 0 \leq u_P \leq \beta_P - 1}} \sum_{\mathcal{P} \subseteq \llbracket 1, P \rrbracket} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}| + k' = |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}^c|} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-R_p - k_p, \frac{d_p + u_p}{\beta_p}\right)}{k_p!} \\ \cdot \frac{\zeta(s - k', w^{-1}(w_1(d_1 + u_1) + \dots + w_P(d_P + u_P)))}{k'!} \end{aligned}$$

5.3 Démonstration du Théorème D

Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. Par la Proposition 2.2.4, on a pour tout complexe s au voisinage de 0, et pour tout $0 < \theta \ll 1$,

$$Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s),$$

avec

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \sum_{\substack{\mathbf{Q} \subseteq \llbracket 1, Q \rrbracket \\ \mathbf{Q} \neq \emptyset}} \sum_{A_{\mathbf{Q}} \subseteq \mathcal{Q}^c} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathbf{Q}}|} \frac{1}{\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathbf{Q}}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \right. \\ \left. \cdot \prod_{q \in A_{\mathbf{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathbf{Q}}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = \\ \sum_{\mathcal{P} \subseteq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \\ \cdot \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c}}}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|_{|\mathcal{P}^c})} \\ \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \\ + \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \left(\sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right). \end{aligned}$$

Proposition 5.3.1. *Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}_+^P \times \mathbb{R}_+^{*Q}$. Il existe une fonction $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ définie pour $0 < \theta \ll 1$, tel que*

$$\forall 0 < \theta \ll 1, \quad K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) = \beta \ln(\theta) + \sum_{n=m}^{+\infty} \alpha_n \theta^n,$$

avec $m \in \mathbb{Z}$ un entier, un complexe $\beta \in \mathbb{C}$ et une suite de complexes $(\alpha_n)_{n \in [m, +\infty[}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, et vérifiant l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} = & \quad (5.7) \\
 & \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall q \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \prod_{q=1}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{\mathbf{u}(p)} \partial_s \varphi_{(N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in [1, P]}}^j(s)_{|s=-N'_j} \\
 & - \sum_{j=1}^Q (\gamma - h_{N'_j}) \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall q \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{q=1}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{\mathbf{u}(p)} \right) \\
 & \cdot \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|+|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}|+|\mathcal{P}|}}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
 & + K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta).
 \end{aligned}$$

Démonstration. En dérivant le terme $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$ par rapport à s dans la formule 2.4, on obtient

$$\begin{aligned}
 \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = & \quad (5.8) \\
 & \sum_{\substack{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \\ \mathcal{Q} \neq \emptyset}} \sum_{\substack{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c}} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \partial_s \left(\prod_{q \in [1, Q] \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \right) \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \right. \\
 & \cdot \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in [1, Q] \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \Big) \\
 & + \sum_{\substack{\mathcal{Q} \subset [1, Q] \\ \mathcal{Q} \neq \emptyset}} \sum_{\substack{A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c}} (-1)^{|\mathcal{Q}^c| - |A_{\mathcal{Q}}|} \prod_{q \in [1, Q] \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \partial_s \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \right. \\
 & \cdot \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in [1, Q] \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \Big).
 \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité 2.12, on a vu dans la preuve de la Proposition 2.3.11 que la fonction

$$s \in \mathbb{C} \mapsto \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p - \mu_p s} \prod_{q \in A_{\mathcal{Q}}} (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q - \mu'_q s} \prod_{q \in [1, Q] \setminus A_{\mathcal{Q}}} \Gamma(-N'_q + \mu'_q s, \theta, l_q(\mathbf{n}) + d'_q) \right)$$

était holomorphe sur $\mathbb{C}$. Comme $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annule en les entiers négatifs, on en déduit que le second terme de 5.8 s'annule en $s = 0$. De plus, on sait que, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} = O(s),$$

On en déduit que, pour tout $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset \llbracket 1, Q \rrbracket$ et pour tout $A_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^c$, on a

$$\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} = \begin{cases} O(s^2) & \text{si } |\mathcal{Q}| \geq 2, \\ O(s) & \text{si } \mathcal{Q} = \{j\}, A_{\mathcal{Q}} = \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\} \text{ avec } j \in \llbracket 1, Q \rrbracket, \\ O(s^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que si $|\mathcal{Q}| \geq 2$, alors

$$\partial_s \left(\prod_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus A_{\mathcal{Q}}} \frac{1}{\Gamma(-N'_q + \mu'_q s)} \right)_{s=0} = 0.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} &= \sum_{j=1}^Q \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)} \right)_{s=0} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-N'_j, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p} \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q} \right). \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.1.1, on a que

$$\partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)} \right)_{s=0} = (-1)^{N'_j} N'_j! \mu'_j.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} &= \sum_{j=1}^Q \mu'_j (-1)^{N'_j} N'_j! \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-N'_j, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p} \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q} \right) \end{aligned}$$

Pour tout $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P$, on a $l_q(\mathbf{n}) + d'_q = \sum_{p=1}^P c_{q,p}(n_p + d_p)$. Ainsi par le multinôme de Newton, on obtient

$$(l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q} = \sum_{\substack{\mathbf{u}_q \in \mathbb{N}^P \\ |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} (n_p + d_p)^{u_{q,p}}.$$

En effectuant le produit sur $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}$, on trouve

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (l_q(\mathbf{n}) + d'_q)^{N'_q} &= \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \left(\binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} (n_p + d_p)^{u_{q,p}} \right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{\mathbf{u}(p)}, \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\mathbf{u}(p) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q u_{q,p}.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} &= \sum_{j \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \mu'_j (-1)^{N'_j} N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \\ &\quad \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-N'_j, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{N_p + \mathbf{u}(p)} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

On sait par la formule (5.2) que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^m m! \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-m, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p} = \partial_s \varphi_{\mathbf{R}}^j(s)_{s=-m} - \partial_s J_{\mathbf{R}}^j(\theta, s)_{s=-m}.$$

En substituant $(-1)^m m! \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^P} \Gamma(-m, \theta, l_j(\mathbf{n}) + d'_j) \prod_{p=1}^P (n_p + d_p)^{R_p}$ dans 5.9 par la formule obtenue précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} &= \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \\ &\quad \left(\partial_s \varphi_{(N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}}^j(s)_{s=-N'_j} - \partial_s J_{(N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}}^j(\theta, s)_{s=-N'_j} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

On rappelle que l'on a posé $\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) = (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$ dans les notations du Théorème D. Par la formule (5.5), on a

$$\begin{aligned} \partial_s J_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(\theta, s)_{s=-N'_j} &= (\gamma - h_{N'_j}) N'_j! \sum_{\mathcal{P} \subset \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \\ &\quad \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{c_{j,p}^{k_p} \zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ &\quad + J_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^{*j}(\theta, -N'_j). \end{aligned} \quad (5.11)$$

On pose pour $0 < \theta \ll 1$,

$$K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{*j}(\theta) := - \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} J_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^{*j}(\theta, -N'_j) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}}.$$

Par construction des $J_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^{*j}(\theta, -N'_j)$, observons que $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^{*j}(\theta)$ est de la forme $\sum_{n \geq m} \alpha_n \theta^n + \beta \ln(\theta)$ avec α_n et β des complexes pour tout $n \geq m$, et $\alpha_0 = 0$. En injectant 5.11 dans 5.10, on trouve alors la

formule désirée :

$$\begin{aligned}
\partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)_{s=0} = & \quad (5.12) \\
& \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \partial_s \varphi_{(N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}}^j(s)_{|s=-N'_j} \\
& - \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_q| = N'_q}} \left(\left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_q} \right) \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} (-1)^{N'_j} N'_j! (\gamma - h_{N'_j}) \right. \\
& \cdot \left. \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta).
\end{aligned}$$

□

Il ne reste qu'à calculer les valeurs de $\partial_s(J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s))$ en $s = 0$ afin de prouver le Théorème D.

Proposition 5.3.2. *Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. Il existe une fonction $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ définie pour $0 < \theta \ll 1$, tel que*

$$\forall 0 < \theta \ll 1, \quad J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) = \beta \ln(\theta) + \sum_{n=m}^{+\infty} \alpha_n \theta^n,$$

avec $m \in \mathbb{Z}$ un entier, un complexe $\beta \in \mathbb{R}$ et une suite de complexes $(\alpha_n)_{n \in [m, +\infty[}$ tel que $\alpha_0 = 0$, et vérifiant l'égalité suivante pour tout $0 < \theta \ll 1$:

$$\begin{aligned}
\partial_s J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) = & \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}'}} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}| + N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& \cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (\gamma - h_{N_p}) + \mu'_j (\gamma - h_{N'_j}) \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\
& + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|} + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}| + |\mathcal{P}|}}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \\
& \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta).
\end{aligned}
\tag{5.13}$$

Démonstration. Rappelons les notations suivantes :

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) := h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0)$$

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) := \partial_s (h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s))|_{s=0},$$

pour $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$.

Notons $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s)$ le terme général de la série présente dans 2.5 :

$$T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s) = \frac{\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \right) \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s)}{\frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!}},$$

pour tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. On évalue la formule 2.29 en $s = 0$ pour réexprimer $\partial_s (J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s))_{s=0}$. On obtient

$$\begin{aligned} \partial_s (J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s))_{s=0} &= \sum_{\substack{\mu, \mu' \\ \mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket}} \sum_{j=1}^Q \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} \partial_s T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s)_{s=0} \\ &+ \partial_s \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right)_{s=0}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Etudions tout d'abord le second terme de cette somme. Remarquons que, en $s = 0$, la fonction $\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)}$ s'annule. On obtient alors

$$\begin{aligned} \partial_s \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right)_{s=0} &= \\ \prod_{p=1}^P N_p! \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(0) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P} \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right)_{s=0}. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.1.1, on a

$$\partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right)_{s=0} = (-1)^{N'_j+1} N'_j! \frac{\mu'_j}{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}| + P}.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \partial_s \left(\prod_{p=1}^P \Gamma(1 + N_p - \mu_p s) \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(s) \frac{\theta(|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|)s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P)} \right)_{s=0} &= \\ \left(\prod_{p=1}^P N_p! \sum_{j=1}^Q h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \llbracket 1, P \rrbracket, j}(0) (-1)^{N'_j+1} N'_j! \frac{\mu'_j}{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}| + P} \right) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}. \end{aligned}$$

On inclura le terme précédent à l'expression de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$, puisque $-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P \neq 0$.

Etudions à présent la dérivée du terme général $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s)$ en $s = 0$.

- Si $|\mathbf{k}| \neq |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|$, alors la fonction $\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)}$ s'annule en $s = 0$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \partial_s(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s))_{s=0} = \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \\ \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!}. \end{aligned}$$

Via le Lemme 3.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_s(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s))_{s=0} = \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} h_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(0) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} (-1)^{N'_j} N'_j! \frac{\mu'_j}{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \\ \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!}. \end{aligned}$$

On remarque que la puissance de θ dans le terme précédent est non nul. On inclura donc tous les termes de la forme $\partial_s(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s))_{s=0}$ tel que $|\mathbf{k}| \neq |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|$ dans l'expression de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$.

- Si $|\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} + |\mathcal{P}|$, alors par le Lemme 3.1.1, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right)_{s=0} &= (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \\ \partial_s \left(\frac{1}{\Gamma(-N'_j + \mu'_j s)((|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|})s - |\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}|} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \right)_{s=0} &= (-1)^{N'_j} \frac{\mu_j'^2}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! (\gamma - h_{N'_j}). \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à s le terme général $T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_s(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s))_{s=0} = \\ - \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} \mu_i \Gamma'(1 + N_i) \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{i\}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!}, \\ + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!}, \\ + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}) \ln(\theta) (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!}, \\ + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} \frac{\mu_j'^2}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! (\gamma - h_{N'_j}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ + \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}|}} N'_j! \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right), \end{aligned}$$

On sait que $\Gamma'(1 + N_p) = N_p!(-\gamma + h_{N_p})$. On peut réduire l'expression précédente sous une forme plus pratique à manipuler.

$$\begin{aligned} \partial_s(T_{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(\theta, s))_{s=0} &= \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}| + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\ &\cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\mu'_j(\gamma - h_{N'_j}) - \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\mu_p \Gamma'(1 + N_p)}{N_p!} \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ &+ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{|\mathcal{P}}} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right), \\ &+ \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}| + N'_j} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \mu'_j N'_j! \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \ln(\theta). \end{aligned}$$

On inclura le terme en $\ln(\theta)$ dans l'expression de $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$.

On pose $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ tel que

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) &= \\ &\left(\sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \sum_{j=1}^Q \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathbf{N}'|+|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} (-1)^{|\mathbf{k}| + N'_j} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \ln(\theta) \\ &+ \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| \neq |\mathbf{N}'|+|\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}}+|\mathcal{P}|}} \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) (-1)^{N'_j} N'_j! \frac{\mu'_j}{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \right. \\ &\cdot \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p + \mu_p s - k_p, d_p)}{k_p!} \left. \right) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|} \\ &+ \left(\prod_{p=1}^P N_p! \sum_{j=1}^Q Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, [1, P]) (-1)^{N'_j+1} N'_j! \frac{\mu'_j}{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}| + P} \right) \theta^{-|\mathbf{N}'| - |\mathbf{N}| - P}. \end{aligned}$$

On découpe la série présente dans la formule 5.14 suivant que $|\mathbf{k}|$ soit égal ou non à $|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{|\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|$. Avec le terme $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ que l'on vient de poser, on obtient alors la formule 5.13. $\square$

On observe que les séries $J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ et $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ ont un terme constant nul, et que $\partial_s Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s) = \partial_s J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s) + \partial_s K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s)$. Comme $\partial_s(Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s))_{s=0}$ ne dépend pas de θ , on a par le lemme 3.1.3 que

$$\partial_s(Z_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(s))_{s=0} = \partial_s(J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s))_{s=0} + \partial_s(K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}(\theta, s))_{s=0} - K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) - J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta),$$

pour tout $0 < \theta \ll 1$. On en déduit alors le Théorème D.

On obtient également dans le même temps le Théorème C, qui correspond à une reformulation qualitative du Théorème D.

Remarque 5.3.3. De l'égalité $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) = 0$ pour tout $0 < \theta \ll 1$, et du lemme 3.1.3, on en déduit que chaque coefficient dans la série de Laurent de $K_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta) + J_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^*(\theta)$ s'annule, et le coefficient

devant $\ln(\theta)$ s'annule aussi. On pourrait donc en déduire des relations entre les valeurs de $\zeta(-k, d_p)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq P$.

5.4 Sur les corollaires du Théorème D

Pour démontrer les corollaires du Théorème D, il suffit d'utiliser la formule donnée par le théorème et de remplacer la direction ou les valeurs $-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ que l'on souhaite étudier.

5.4.1 Démonstration du Théorème C

Soit $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \mathbb{N}^P \times \mathbb{N}^Q$, et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') \in \mathbb{R}^{+P} \times \mathbb{R}_*^{+Q}$. Il s'agit ici de reprendre la formule obtenue pour $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$, et d'y étudier les termes qualitativement. On note $\mathbb{K}$ le corps engendré par $\mathbb{Q}$, par les coefficients complexes $(d_p)_{p \in [1, P]}$ et $(c_{q,p})_{p \in [1, P], q \in [1, Q]}$, et par les directions $(\mu_p)_{p \in [1, P]}$, $(\mu'_q)_{q \in [1, Q]}$. Par le Théorème D, on a

$$\begin{aligned}
Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}')) = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathbf{N}| + |\mathbf{N}'| + |\mathcal{P}| + N'_j} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \\
& \cdot \left(Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p(\gamma - h_{N_p}) + \mu'_j(\gamma - h_{N'_j}) \right) + Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\
& + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} \sum_{j=1}^Q \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} N_p! \right) (-1)^{|\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}| + N'_j} \frac{\mu'_j N'_j!}{|\boldsymbol{\mu}'| + |\boldsymbol{\mu}|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathbf{N}'| + |\mathbf{N}|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \\
& \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-N_i - k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-N_p - k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\
& + \sum_{j=1}^Q \mu'_j \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\mathbf{q}})_{\mathbf{q} \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall \mathbf{q} \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_{\mathbf{q}}| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_{\mathbf{q}}} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s = -N'_j} \\
& - \sum_{j=1}^Q (\gamma - h_{N'_j}) \mu'_j N'_j! \sum_{\substack{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\mathbf{q}})_{\mathbf{q} \in [1, Q] \setminus \{j\}} \in (\mathbb{N}^P)^{[1, Q] \setminus \{j\}} \\ \forall \mathbf{q} \in [1, Q] \setminus \{j\}, |\mathbf{u}_{\mathbf{q}}| = N'_q}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \binom{N'_q}{\mathbf{u}_{\mathbf{q}}} \prod_{p=1}^P c_{q,p}^{u_{q,p}} \right) \\
& \cdot \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1, P]} (-1)^{|\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - 1} R(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = N'_j + |\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})|_{\mathcal{P}} + |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, d_p)}{k_p!} \Bigg),
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in [1, P]},$$

pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$, et tout $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$,

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, N'_q = \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q)}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (-1)^{N'_q} N'_q!,$$

et

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_p (h_{N_p} - h_{N_p + |\mathbf{v}_p|}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q \mu'_q (\gamma - h_{N'_q}) \right) \\ + (-1)^{|\mathbf{N}'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}} \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q N'_q! \right) \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, f, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N'_q}} \\ \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N_p - 1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j, f}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right) F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'),$$

avec $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ la constante posée dans la Proposition 1.3.2.

Observons tout d'abord que $Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \in \mathbb{K}$. De plus, les coefficients de la forme $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}')$ appartiennent à l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ engendré par les coefficients de la forme $\ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right)$ pour $1 \leq q, j \leq Q$ et $1 \leq p \leq P$, donc $F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{v}, \mathbf{w}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}') \in \text{Vect}_{\mathbb{K}} \left[\left(\ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right) \right)_{\substack{a \leq j, q \leq Q \\ 1 \leq p \leq P}} \right]$. On trouve alors que

$$Q_{\mathbf{N}, \mathbf{N}'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \in \text{Vect}_{\mathbb{K}} \left[\gamma, \left(\ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right) \right)_{\substack{a \leq j, q \leq Q \\ 1 \leq p \leq P}} \right].$$

Comme les valeurs spéciales de la forme $\zeta(-N, d_p)$ sont dans le corps engendré $\mathbb{Q}$ et par les coefficients $d_1, \dots, d_P$, on a que ces valeurs de la fonction zêta de Hurwitz sont dans $\mathbb{K}$, on obtient que $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ appartient bien à l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ engendré par γ , par les coefficients de la forme $\ln \left(1 + \frac{c_{q,p}}{c_{j,p}} \right)$, par les valeurs spéciales aux entiers négatifs des dérivées des fonctions auxiliaires $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s=-N'_j}$, et par des valeurs spéciales aux entiers négatifs de la dérivée selon s de la fonction zêta d'Hurwitz.

5.4.2 Démonstration du Corollaire C1

On utilise le fait que, lorsque les formes linéaires sont rationnels, on a par le Corollaire B1 une expression de $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s=-N'_j}$ en fonction de la dérivée de la fonction zêta de Hurwitz. On remplace alors les termes de la forme $\partial_s \varphi_{\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})}^j(s)_{|s=-N'_j}$ dans le Théorème C, par des termes de la forme $\zeta'(-n, y)$.

5.4.3 Démonstration du Corollaire D1

On obtient le Corollaire D1 en appliquant la formule obtenue pour $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ dans le Théorème A, en remplaçant les termes de la forme $\varphi_{\mathbf{R}}^{j'}(-N)$ par la formule donnée par le Corollaire B1.

Comme les formes linéaires l_j sont à coefficients rationnels, on peut poser $c_{j,p} = \frac{a_{j,p}}{b_{j,p}}$ pour tout $1 \leq p \leq P$, en supposant que cette fraction est irréductible. On pose alors $x_j(\mathbf{c}) = \frac{\text{ppcm}(a_{j,p})}{\text{pgcd}(b_{j,p})} \in \mathbb{Q}_+^*$, et $\beta_{j,p}(\mathbf{c}) := \frac{x_j(\mathbf{c})}{c_{j,p}} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq p \leq P$.

Par le Corollaire B1, pour tout $\mathbf{R} \in \mathbb{N}^P$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{R}}^{j'}(-N_j') &= \\ x_j(\mathbf{c})^N \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}(\mathbf{c})^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c})-1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c})-1}} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1,P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} R_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}|+k' = |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \\ \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-R_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})}\right)}{k_p!} \left(\frac{\zeta'(-N - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} - \ln(x_j(\mathbf{c})) \frac{\zeta(-N - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} \right) \\ &= x_j(\mathbf{c})^N \prod_{p=1}^P \beta_{j,p}(\mathbf{c})^{R_p} \sum_{\substack{0 \leq v_1 \leq \beta_{j,1}(\mathbf{c})-1 \\ 0 \leq v_P \leq \beta_{j,P}(\mathbf{c})-1}} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1,P]} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p! \right) \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^P, k' \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{k}|+k' = |\mathbf{R}|_{|\mathcal{P}^c} + |\mathcal{P}^c| - 1}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \\ \cdot \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta\left(-\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u})_p - k_p, \frac{d_p + v_p}{\beta_{j,p}(\mathbf{c})}\right)}{k_p!} \right) \\ \cdot \left(\frac{\zeta'(-N_j' - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} - \ln(x_j(\mathbf{c})) \frac{\zeta(-N_j' - k', l_j(x_j(\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{d} + \mathbf{v})))}{k'!} \right). \end{aligned}$$

En injectant cette formule dans celle obtenue pour $Z'(-(\mathbf{N}, \mathbf{N}'))$ dans le Théorème D, on trouve le résultat.

On obtient encore une fois le Corollaire C1, qui correspond à une reformulation qualitative du Corollaire D1.

5.4.4 Démonstration du Corollaire D2

En posant $(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dans le théorème D, on peut simplifier plusieurs sommes en remarquant les faits suivants :

- 1) Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}}$ et $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c}$ tels que

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_p| &= k_p & (p \in \mathcal{P}^c) \\ \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) &= 0 & (q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}). \end{aligned}$$

Alors on a nécessairement que ces indices ont plusieurs composantes nulles :

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad v_{p,q} = 0,$$

et

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}, \forall p \in \mathcal{P}^c, \quad w_{p,q} = 0.$$

Ainsi, comme $w_{p,j} = |w_p| = k_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$, on obtient que $\mathbf{w} = (k_p \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}$ avec $\mathbf{e}_j \in \mathbb{N}^Q$ le vecteur valant 1 en la j -ième coordonnée, et 0 ailleurs.

2) Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}})^{\mathcal{P}}$ et $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c}$ tels que

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_p| &= k_p & (p \in \mathcal{P}^c) \\ \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) &= 0 & (q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}). \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad v_{p,q} = 0,$$

et

$$\forall q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j, f\}, \forall p \in \mathcal{P}^c, \quad w_{p,q} = 0.$$

Ainsi, on trouve que l'indice $\mathbf{w}$ est de la forme $(w_{p,j}\mathbf{e}_j + w_{p,f}\mathbf{e}_f)_{p \in \mathcal{P}^c}$, avec $w_{p,j} + w_{p,f} = k_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}^c$. On trouve ainsi que le coefficient multinomial présent dans l'expression de Q^1 vaut :

$$\binom{k_p}{\mathbf{w}_p} = \frac{k_p!}{w_{p,j}! w_{p,f}!}.$$

Pour simplifier cette expression, on parcourera $w'_p \in \llbracket 0, k_p \rrbracket$, et on posera $w_{p,f} = w'_p$ et $w_{p,j} = k_p - w'_p$

3) Soit $j \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, et $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}}$ tel que

$$|\mathbf{u}_q| = N'_q = 0 \quad (q \in \llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}).$$

On obtient trivialement que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, et donc $\mathbf{R}(\mathbf{N}, j, \mathbf{u}) := (N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket} = \mathbf{0}$. En particulier, les fonctions auxiliaires $\varphi_{(N_p + \mathbf{u}(p))_{p \in \llbracket 1, P \rrbracket}}^j(s)$ sont en fait des fonctions zêta de Barnes de la forme

$$\varphi_{\mathbf{0}}^j(s) = \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, \dots, c_{j,P}).$$

On rappelle au passage que la dérivée de cette fonction zêta de Barnes en $s = 0$ correspond à $\ln(\Gamma_P(d'_j | c_{j,1}, \dots, c_{j,P}))$, avec Γ_P correspondant aux fonctions multigamma de Barnes introduites dans la Définition 1.2.14.

On a déjà vu dans la preuve du Corollaire A1 que

$$Q_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^0(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}.$$

A l'aide de ces trois points précédents, et du fait que le nombre harmonique h_0 vaut 0, on obtient :

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{\mu, \mu'} &= \\ &\sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{\mu'_j}{|\mu'| + |\mu|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \gamma(\mu'_j + |\mu|_{\mathcal{P}}) + Q_{\mu, \mu'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ &+ \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{\mu'_j}{|\mu'| + |\mu|_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \mu_i \frac{\zeta'(-k_i, d_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^Q \mu'_j \partial_s \zeta^B(s, d'_j | \mathbf{c}_j)_{|s=0} - \sum_{j=1}^Q \gamma \mu'_j \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = |\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!}. \end{aligned}$$

Par les points 1) et 2) précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{\mu, \mu'}^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) &= \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \mu'_f \sum_{\substack{\mathbf{w}' = (w'_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \llbracket 0, k_p \rrbracket}} E_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{w'_p} c_{f,p}^{w'_p} c_{j,p}^{k_p - w'_p} \right) \\ &+ \gamma |\mu'|_{\llbracket 1, Q \rrbracket \setminus \{j\}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}. \end{aligned}$$

5.4.5 Démonstration du Corollaire D3

En appliquant le Corollaire D2, en remplaçant μ par $(0, \dots, 0)$, et en remplaçant μ' par $(1, \dots, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{\mathbf{0}, \mathbf{1}} = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} \sum_{j=1}^Q \frac{(-1)^{|\mathcal{P}|}}{Q} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!} \left(\gamma \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) + Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ & + \sum_{j=1}^Q \ln(\Gamma_P(d'_j | \mathbf{c}_j)) - \gamma \sum_{j=1}^Q \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, P \rrbracket} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p, d_p)}{k_p!}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = & \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}'=(w'_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \llbracket 0, k_p \rrbracket}} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{w'_p} c_{f,p}^{w'_p} c_{j,p}^{k_p - w'_p} \right) \\ & + \gamma(Q-1) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}. \end{aligned}$$

Or par la Définition 1.2.16 $Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{\mathbf{0}, \mathbf{1}} = \ln(\partial_s(\zeta^{Sh}(s, (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_Q), \mathbf{d}')_{|s=0}))$, et par la Définition 1.2.14, on a $(\partial_s \zeta^B(s, d|c_1, \dots, c_P))_{|s=0} = \ln(\Gamma_P(d|c_1, \dots, c_P))$, et $\partial_s(\zeta^{Sh}(s, \mathbf{d}'|\mathbf{c}))_{|s=0} = \ln(\Gamma_P(\mathbf{d}'|\mathbf{c}))$. On trouve alors le Corollaire D3.

Chapitre 6

Fonctions zêta de Witten

On rappelle ici la théorie des fonctions zêta de Witten sous l'angle de Komori, Matsumoto et de Tsumura. Les détails des preuves sont disponibles dans le livre [KMT23] qui paraîtra en novembre 2023. Alternativement, on peut aussi voir le détail dans les articles [KMT10b], [KMT10c], [KMT11b], [KMT12]. Pour les détails de la théorie de Lie, on se réfère à [Hum72], [Bou06], [Bou81]. On appliquera ensuite certains de nos résultats à l'étude des fonctions zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$, et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$, pour en déduire l'expression explicite de la constante C dans le Théorème 1.2.35, et une formule asymptotique pour le nombre de représentations $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$ à l'aide du Théorème 1.2.33.

6.1 Généralités sur les algèbres de Lie

On appelle $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ vérifiant les conditions suivantes

1. $\forall x \in \mathfrak{g}, \quad [x, x] = 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$

On appellera $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ des algèbres de Lie munies respectivement des crochets de Lie $[\cdot, \cdot]_1$ et $[\cdot, \cdot]_2$. Soit $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ un morphisme d'espace vectoriel. On dira que f est un morphisme d'algèbre de Lie si f respecte le crochet de Lie, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}_1, \quad [f(x), f(y)]_2 = f([x, y]_1).$$

Si de plus f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dira que f est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Pour $x \in \mathfrak{g}$, on notera ad_x la dérivation suivante :

$$ad_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y].$$

Définition 6.1.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{a}$ est stable par le crochet de Lie, c'est-à-dire lorsque $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ des sous-algèbres d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on définit $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ comme étant la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par les éléments de la forme $[x, y]$, avec $x \in \mathfrak{a}_1$, et $y \in \mathfrak{a}_2$.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $N(\mathfrak{a})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ constituée d'éléments x vérifiant $ad_x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Si $N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$, alors on dira que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Définition 6.1.2. On construit la suite $(\mathfrak{g}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}].$$

On dira que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$. On notera $rad(\mathfrak{g})$ (l'unique) idéal maximal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Définition 6.1.3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, on construit la suite $(\mathfrak{g}^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n].$$

On dira que $\mathfrak{g}$ est nilpotente si il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Définition 6.1.4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On dit de $\mathfrak{g}$ est semi-simple si le seul idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ est $\{0\}$. De plus, si $\mathfrak{g}$ ne contient qu'un seul idéal, on dit que $\mathfrak{g}$ est simple.

On donne maintenant quelques exemples fondamentaux d'algèbre de Lie semi-simple :

Exemple 6.1.5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$,

Le type A_r : $A_r := \mathfrak{sl}_{r+1} = \{X \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$.

Le type B_r : $B_r := \mathfrak{so}_{2r+1} = \{X \in \mathcal{M}_{2r+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$.

Le type C_r : $C_r := \mathfrak{sp}_r = \{X \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t X J_r + J_r X = 0\}$, avec

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & Id_r \\ -Id_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Le type D_r : $D_r := \mathfrak{so}_{2r} = \{X \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$, pour $r \geq 2$.

Dans tous ces exemples, le crochet de Lie correspond à $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$, avec $x, y \in \mathcal{M}_r$ et où $\cdot$ correspond à la multiplication matricielle.

Dans l'exemple précédent, toutes ces algèbres de Lie sont simples, à part pour D_2 . On a de plus la décomposition $D_2 = A_1 \oplus A_1$.

Proposition 6.1.6. Une algèbre de Lie semi-simple est une somme directe d'algèbres de Lie simples.

Ainsi, pour classifier les algèbres de Lie semi-simples, il suffit de classifier les algèbres de Lie simples. On verra via le Théorème de Cartan-Killing que les 4 types d'algèbres que l'on a décrites dans l'exemple précédent classifient presque totalement l'ensemble des algèbres de Lie semi-simples.

Définition 6.1.7. Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E correspond à un morphisme d'espace-vectoriel $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow GL(E)$. On appellera $\dim(\varphi)$ la dimension de cette représentation. On dira que la représentation φ est irréductible si elle n'admet pas de sous-espace vectoriel non trivial stable par l'application linéaire φ .

Exemple 6.1.8. L'application adjointe induit une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$:

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) : \mathfrak{g} \rightarrow GL(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \text{ad}_x.$$

On peut alors définir la forme bilinéaire de Killing sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$:

$$\langle x, y \rangle := \text{Tr}(\text{Ad}_x \circ \text{Ad}_y).$$

Théorème 6.1.9. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathfrak{g}$ est semi-simple.
- b) $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$
- c) La forme de Killing $\langle, \rangle$ est non dégénérée.

Le théorème précédent permet en particulier d'identifier une algèbre de Lie semi-simple avec son dual. Ainsi, à un élément $x \in \mathfrak{g}$ on lui associera canoniquement un élément $x^* \in \mathfrak{g}^*$.

6.2 Système de racine d'une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle sous-algèbre de Cartan une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$ telle que $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Les sous-algèbres de Cartan ne sont pas uniques, mais elles partagent la même dimension sur $\mathbb{C}$. On appelle alors cette dimension le rang de $\mathfrak{g}$, noté $\text{rg}(\mathfrak{g})$.

On se fixe pour tout cette section une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, et une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. La forme de Killing s'étend à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, et cette dernière est non dégénérée sur $\mathfrak{h}$. Via l'identification de $\mathfrak{h}$ avec son dual, on peut définir la forme de Killing sur $\mathfrak{h}^*$.

Définition 6.2.1. Soit $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ un élément du dual de $\mathfrak{h}$. On dit que α est une racine de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ lorsqu'il existe un élément non nul $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall h \in \mathfrak{h}, \quad \text{ad}_h(x) = \alpha(h)x. \quad (6.1)$$

On notera g_α l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ vérifiant 6.1 On notera $\Delta(\mathfrak{g})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. On appellera $\Delta(\mathfrak{g})$ le système de racines de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$.

Le système de racines de $\mathfrak{g}$ est un ensemble fini. De plus, les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ sont de dimension 1, et elles donnent une décomposition de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} g_\alpha.$$

Par l'identification entre $\mathfrak{h}$ et son dual, on considère pour toute racine $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ l'élément $\alpha' \in \mathfrak{h}$ lui correspondant. On pose $\mathfrak{h}_0 := \text{Vect}_{\mathbb{R}}((\alpha')_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par les éléments α' . On note alors

$$\alpha^\vee := \frac{2}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha'.$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$, on observe que

$$\beta(\alpha^\vee) = \frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

On note $a(\beta, \alpha)$ la quantité précédente.

Notation. On note $\mathfrak{h}_0$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par les racines $\Delta(\mathfrak{g})$, et on note $\mathfrak{h}_0^*$ son dual.

Fait 6.2.2. Soit $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a que:

- 1) $\beta(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\beta - a(\beta, \alpha)\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$.
- 3) Si il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = c\alpha$, alors $c = \pm 1$.

Ces trois propriétés caractérisent un système de racines "abstrait" au sens de [Ser66] et de [Bou81]. Etant donné deux algèbres de Lie semi-simples, on sait qu'il existe une isométrie $(\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta(\mathfrak{g}_1)), ||_1) \rightarrow (\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta(\mathfrak{g}_2)), ||_2)$ envoyant $\Delta(\mathfrak{g}_1)$ sur $\Delta(\mathfrak{g}_2)$ si et seulement si $\mathfrak{g}_1$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_2$ en tant qu'algèbre de Lie, en notant $||_1$ et $||_2$ les normes euclidiennes des deux espaces vectoriels $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta(\mathfrak{g}_1))$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta(\mathfrak{g}_2))$. Cette propriété permet en particulier de ramener l'étude des algèbres de Lie simple à l'étude de système de racines. Il découle de cette correspondance le théorème suivant, permettant de classer les algèbres de Lie simples.

Théorème 6.2.3. [Bou81] [Théorème de Cartan-Killing]

Une algèbre de Lie simple quelconque est isomorphe soit à A_r , B_r , C_r , ou D_r , ou à une algèbre de Lie exceptionnelle G_2 , F_4 , E_6 , E_7 ou E_8 .

Pour voir la construction des algèbres de Lie exceptionnelles G_2 , F_4 , E_6 , E_7 ou E_8 , voir [Bou81].

Notons $H_{\alpha^\vee} := \{\beta \in \mathfrak{h}_0^* \mid \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0\}$

On remarque que, l'ensemble des racines étant fini, on a que l'ensemble

$$\mathfrak{h}_0^* \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})} H_{\alpha^\vee}$$

est non vide. Soit γ un élément de cet ensemble. On a alors la décomposition suivante :

$$\Delta(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle > 0\} \cup \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle < 0\}.$$

On notera $\Delta_+(\mathfrak{g}, \gamma) = \Delta_+(\mathfrak{g}) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle > 0\}$ l'ensemble des racines positives.

Définition 6.2.4. Soit α une racine positive. On dira que α est une racine fondamentale (ou simple) s'il n'existe aucun couple $(\beta_1, \beta_2) \in \Delta_+(\mathfrak{g})$ tel que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. On notera $\psi(\mathfrak{g})$ l'ensemble des racines fondamentales.

Fait 6.2.5. L'ensemble des racines fondamentales forme une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathfrak{h}_0^* = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((\alpha')_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})})$. On obtient au passage qu'il y a $r = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_0)$ racines fondamentales.

On se propose maintenant d'introduire la notion de poids :

Définition 6.2.6. Soit $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow GL(E)$ une représentation de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, avec E de dimension finie. Soit $u \in E$ un vecteur. On dira que u est un vecteur propre s'il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sur $\mathfrak{h}$ tel que

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \quad \varphi(H)u = \lambda(H)u.$$

On appellera λ le poids de u .

Si de plus, on a $\lambda(\alpha^\vee) \geq 0$ pour toute racine simple α de $\mathfrak{g}$, alors on dira que λ est un poids dominant.

Notons $\psi(\mathfrak{g}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples de $\mathfrak{g}$. On pose alors $\lambda_j(\alpha_i^\vee) := \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq r$. Les λ_j sont en particulier des poids dominants. On les appelle des poids fondamentaux (ou simples).

Fait 6.2.7. Chaque poids dominant λ admet une décomposition unique à l'aide des poids fondamentaux

$$\lambda = n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r \quad (n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}).$$

Fait 6.2.8. Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie (à isomorphisme près), et l'ensemble des poids dominants.

Théorème 6.2.9. [de Weyl]

Soit φ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. Alors

$$\dim(\varphi) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} \frac{\langle \alpha^\vee, (n_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (n_r + 1)\lambda_r \rangle}{\langle \alpha^\vee, \lambda_1 + \dots + \lambda_r \rangle}.$$

Remarque 6.2.10. A priori, les résultats énoncés dépendent du choix de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, et du choix de γ . Cependant, d'après [KMT23, §2.3], ceux-ci sont indépendants de ces choix. La raison étant que, d'après [Hum72, §16.2], deux sous-algèbres de Cartan sont nécessairement conjuguées.

Notons au passage que le Fait 6.2.8 et le Théorème 6.2.9 permettent en particulier de déterminer une expression de $r_{\mathfrak{g}}$, le nombre de représentations irréductibles (à isomorphisme près) de dimension n d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$.

Définition 6.2.11. [Zag94] On associe à une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ une fonction zêta

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) := \sum_{\varphi} \frac{1}{\dim(\varphi)^s},$$

où l'on somme sur les représentations irréductibles de dimension finie φ de $\mathfrak{g}$ (à isomorphisme près).

Cette fonction zêta généralise les séries qui interviennent dans les formules de volume de Witten dans [Wit91].

Du Fait 6.2.8 et du Théorème de Weyl 6.2.9, on en déduit que les fonctions zêta de Witten s'écrivent sous la forme d'une série de produits de formes linéaires en r variables, r étant le nombre de racines fondamentales. Plus précisément, on a l'écriture

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) := \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} \langle \alpha^\vee, \lambda_1 + \dots + \lambda_r \rangle^s \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} \langle \alpha^\vee, (n_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (n_r + 1)\lambda_r \rangle^s}.$$

Matsumoto, Tsumura et Komori ont introduit dans [KMT10b] des analogues multizêta des fonctions zêta de Witten, en considérant des séries de Dirichlet de la forme

$$\sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} < \alpha^\vee, (n_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (n_r + 1)\lambda_r >^{s_\alpha}}.$$

Cela permet d'obtenir des formules récursives pour ces fonctions multizêta (voir [KMT10b, Théorème 3.1]), et d'obtenir plusieurs formules à certains multi-entiers positifs.

6.3 Quelques résultats sur $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$

On souhaite ici détailler les formules obtenues dans le Théorème A et dans le Théorème D pour les deux fonctions zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$, en étudiant principalement les valeurs en $s = 0$. Les valeurs spéciales $\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)$ et $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(0)$ sont très simples à calculer à l'aide du Corollaire A1. En revanche, les calculs des valeurs $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)$ et $\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0)$ s'avéreront plus ardues. On se propose d'établir une formule en utilisant le Corollaire D2 lorsque $P = 2$, c'est-à-dire lorsque la série de Dirichlet décrivant $Z(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ n'est qu'à deux variables n_1, n_2 . On fixe de plus la direction $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$, et on pose $d_1 = d_2 = 1$. Commençons par étudier les valeurs de $Z_\Delta(s)$ en les entiers négatifs par le Corollaire A2 :

Lemme 6.3.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{aligned} Z_\Delta(-N) &= \frac{(-1)^{(1+Q)N}}{Q} N! \sum_{k=0}^{QN} Q_N^0(\emptyset, (k, QN - k)) \frac{\zeta(-N - k)}{k!} \frac{\zeta(-(Q+1)N + k)}{(QN - k)!} \\ &\quad + \frac{(-1)^{QN+1}}{Q+1} N!^2 (Q_N^0(\{1\}, (Q+1)N + 1) + Q_N^0(\{2\}, (Q+1)N + 1)) \frac{\zeta(-(Q+2)N - 1)}{((Q+1)N + 1)!}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_N^0(\emptyset, (k_1, k_2)) &= (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p=1,2} \in (\mathbb{N}^Q)^2 \\ |\mathbf{w}_1|=k_1, |\mathbf{w}_2|=k_2 \\ \forall q, w_{1,q}+w_{2,q}=N}} \binom{k_1}{\mathbf{w}_1} \binom{k_2}{\mathbf{w}_2} \prod_{q=1}^Q c_{q,1}^{w_{1,q}} c_{q,2}^{w_{2,q}}, \quad (k_1 + k_2 = QN) \\ Q_N^0(\{1\}, (Q+1)N + 1) &= (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}_2 \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_2|=(Q+1)N+1 \\ w_{2,j} \geq 2N+1}} \frac{(-N-1) \dots (N+1-w_{2,j})}{\prod_{q \neq j} w_{2,q}!} c_{j,2}^{w_{2,j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,1}^{N-w_{2,q}} c_{q,2}^{w_{2,q}}, \\ Q_N^0(\{2\}, (Q+1)N + 1) &= (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}_1 \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_1|=(Q+1)N+1 \\ w_{1,j} \geq 2N+1}} \frac{(-N-1) \dots (N+1-w_{1,j})}{\prod_{q \neq j} w_{1,q}!} c_{j,1}^{w_{1,j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,2}^{N-w_{1,q}} c_{q,1}^{w_{1,q}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Par le Corollaire A2, on a

$$\begin{aligned} Z_\Delta(-N) &= \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1,2]} \frac{(-1)^{(|\mathcal{P}|+1+Q)N+|\mathcal{P}|}}{Q+|\mathcal{P}|} N!^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=(Q+|\mathcal{P}|)N+|\mathcal{P}|}} Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p)}{k!}, \\ &= \frac{(-1)^{(1+Q)N}}{Q} N! \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = QN}} Q_N^0(\emptyset, (k_1, k_2)) \prod_{p=1}^2 \frac{\zeta(-N - k_p)}{k_p!} \\ &\quad + \frac{(-1)^{QN+1}}{Q+1} N!^2 (Q_N^0(\{1\}, (Q+1)N + 1) + Q_N^0(\{2\}, (Q+1)N + 1)) \frac{\zeta(-(Q+2)N - 1)}{((Q+1)N + 1)!}, \end{aligned}$$

avec

$$Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^Q)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{I}^1, Q \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^Q c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

- Si $\mathcal{P} = \emptyset$ et $k_1 + k_2 = QN$, alors on a

$$Q_N^0(\emptyset, \mathbf{k}) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p=1,2} \in (\mathbb{N}^Q)^2 \\ |\mathbf{w}_1| = k_1, |\mathbf{w}_2| = k_2 \\ \forall q \neq j, w_{1,q} + w_{2,q} = N}} \binom{k_1}{\mathbf{w}_1} \binom{k_2}{\mathbf{w}_2} \prod_{q=1}^Q c_{q,1}^{w_{1,q}} c_{q,2}^{w_{2,q}}.$$

Observons que

$$\begin{aligned} w_{1,j} + w_{2,j} &= \sum_{q=1}^Q w_{1,q} + w_{2,q} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q w_{1,q} + w_{2,q}, \\ &= k_1 + k_2 - (Q-1)N, \\ &= N. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p=1,2} \in (\mathbb{N}^Q)^2$. La condition $|\mathbf{w}_1| = k_1, |\mathbf{w}_2| = k_2$, et $w_{1,q} + w_{2,q} = N$ pour tout $q \neq j$, est équivalente à la condition $w_{1,q} + w_{2,q} = N$ pour tout q et $|\mathbf{w}_1| = k_1, |\mathbf{w}_2| = k_2$. On trouve alors

$$Q_N^0(\emptyset, \mathbf{k}) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p=1,2} \in (\mathbb{N}^Q)^2 \\ |\mathbf{w}_1| = k_1, |\mathbf{w}_2| = k_2 \\ \forall q, w_{1,q} + w_{2,q} = N}} \binom{k_1}{\mathbf{w}_1} \binom{k_2}{\mathbf{w}_2} \prod_{q=1}^Q c_{q,1}^{w_{1,q}} c_{q,2}^{w_{2,q}}.$$

- Si $\mathcal{P} = \{1\}$ et $k_2 = (Q+1)N + 1$, alors on a

$$\begin{aligned} Q_N^0(\{1\}, (Q+1)N + 1) &= (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}_2 \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_2| = (Q+1)N + 1 \\ \forall q \neq j, w_{2,q} \leq N}} \left(\binom{k_1}{(w_{2,1}, \dots, w_{2,Q})} \prod_{q=1}^Q c_{q,2}^{w_{2,q}} \right) \\ &\quad \left(\binom{-N-1}{\sum_{q \neq j} (N - w_{2,q})} \binom{\sum_{q \neq j} N - w_{2,q}}{(N - w_{2,q})_{q \neq j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,1}^{N - w_{2,q}} \right). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q (N - w_{2,q}) &= (Q-1)N - |\mathbf{w}_2| + w_{2,j} \\ &= -2N - 1 + w_{2,j}. \end{aligned}$$

Si ce terme est strictement négatif, alors le coefficient binomial $\binom{-N-1}{\sum_{q \neq j} (N - w_{2,q})}$ est nul. Ainsi, on peut imposer la condition $w_{2,j} \geq 2N + 1$:

$$Q_N^0(\{1\}, k_2) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}_2 \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_2| = (Q+1)N+1 \\ w_{2,j} \geq 2N+1}} \frac{(-N-1) \dots (N+1 - w_{2,j})}{\prod_{q \neq j} w_{2,q}!} c_{j,2}^{w_{2,j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,1}^{N-w_{2,q}} c_{q,2}^{w_{2,q}}.$$

- Si $\mathcal{P} = \{2\}$ et $k_1 = (Q+1)N + 1$, alors on a

$$Q_N^0(\{2\},) = (-1)^{N(Q-1)} N!^{Q-1} \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}_1 \in \mathbb{N}^Q \\ |\mathbf{w}_1| = (Q+1)N+1 \\ w_{1,j} \geq 2N+1}} \frac{(-N-1) \dots (N+1 - w_{1,j})}{\prod_{q \neq j} w_{1,q}!} c_{j,1}^{w_{1,j}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,2}^{N-w_{1,q}} c_{q,1}^{w_{1,q}}.$$

□

Via le lemme précédent et en utilisant le fait que $\zeta(-n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{n+1}$, on peut simplifier les expressions pour qu'elles soient plus pratiques à calculer explicitement :

$$Z_{\Delta}(-N) = \frac{(-1)^{QN}}{Q} N!^Q \sum_{k=0}^{QN} \alpha_k(N) \frac{B_{N+k+1}}{(N+k+1)k!} \frac{B_{(Q+1)N-k+1}}{((Q+1)N-k+1)(QN-k)!} \quad (6.2)$$

avec

$$\alpha_k(N) = \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{(w_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in \llbracket 0, N \rrbracket^Q \\ w_1 + \dots + w_Q = k}} \binom{k}{(w_1, \dots, w_Q)} \binom{QN-k}{(N-w_1, \dots, N-w_Q)} \prod_{q=1}^Q c_{q,1}^{w_q} c_{q,2}^{N-w_q},$$

$$\beta(N) = \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{(w_q)_{q \in \llbracket 1, Q \rrbracket} \in \llbracket 0, (Q+1)N+1 \rrbracket^Q \\ w_1 + \dots + w_Q = (Q+1)N+1 \\ w_j \geq 2N+1}} \frac{(-N-1) \dots (N+1 - w_j)}{\prod_{q \neq j} w_q!} \left(c_{j,2}^{w_j} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,1}^{N-w_q} c_{q,2}^{w_q} + c_{j,1}^{w_j} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^Q c_{q,2}^{N-w_q} c_{q,1}^{w_q} \right).$$

Lemme 6.3.2.

$$\begin{aligned} Z'_{\Delta}(0) = & Q\zeta(0)^2\gamma - \zeta(-1) \left(\sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \right) \gamma \\ & - \frac{1}{Q+1} \zeta(-1) \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \left(\frac{1}{c_{j,2}} (c_{f,1} - c_{j,1}) \ln \left(1 + \frac{c_{f,2}}{c_{j,2}} \right) + \frac{1}{c_{j,1}} (c_{f,2} - c_{j,2}) \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right) \right) \\ & + \frac{\zeta'(0)\zeta(0)}{Q} - \frac{\zeta'(-1)}{Q+1} \sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) - \gamma\zeta(0)^2 \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}c_{j,2})^{-1} + \gamma\zeta(-1) \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}^{-1}c_{j,2} + c_{j,2}^{-1}c_{j,1}) \\ & + \sum_{j=1}^Q \partial_s \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, c_{j,2})|_{s=0}. \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons que $Z'_{\Delta}(0) = Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{1,1}$. Comme on a posé $P = 2$ et que l'on a fixé les directions $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$, on a par le Corollaire D2 :

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{1,1} = & \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1,2 \rrbracket} (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{1}{Q + |\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p)}{k_p!} \sum_{j=1}^Q \left(\left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \gamma(1 + |\mathcal{P}|) + Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) \right) \\ & + \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1,2 \rrbracket} \sum_{j=1}^Q (-1)^{|\mathcal{P}|} \frac{1}{Q + |\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta'(-k_i)}{k_i!} \prod_{p \in \mathcal{P}^c \setminus \{i\}} \frac{\zeta(-k_p)}{k_p!} \right) \\ & + \sum_{j=1}^Q \partial_s \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, c_{j,2})|_{s=0} - \sum_{j=1}^Q \gamma \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1,2 \rrbracket} (-1)^{|\mathcal{P}|} \prod_{p \in \mathcal{P}} c_{j,p}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \frac{\zeta(-k_p)}{k_p!}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k}) = & \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \sum_{\substack{\mathbf{w}'=(w'_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \llbracket 0, k_p \rrbracket}} F_{\mathcal{P}, j, f, \mathbf{0}, (w'_p \mathbf{e}_f + (k_p - w'_p) \mathbf{e}_j)_{p \in \mathcal{P}^c}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{w'_p} c_{f,p}^{w'_p} c_{j,p}^{k_p - w'_p} \right) \\ & + (Q-1)\gamma \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p}. \end{aligned}$$

en rappelant la notation $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^Q$ avec un 1 sur la n -ième composante et des 0 ailleurs.

En développant la somme présente dans l'expression de $Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{1,1}$, on obtient

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0}, \mathbf{0}))_{1,1} = & \zeta(0)^2 \gamma - \frac{2\zeta(-1)}{Q+1} \gamma \left(\sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \right) + \frac{1}{Q} \zeta(0)^2 \sum_{j=1}^Q Q^1(j, \emptyset, (0, 0)) \\ & - \frac{1}{Q+1} \zeta(-1) \sum_{j=1}^Q (Q^1(j, \{1\}, 1) + Q^1(j, \{2\}, 1)) + \frac{\zeta'(0)\zeta(0)}{Q} - \frac{\zeta'(-1)}{Q+1} \sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \\ & + \sum_{j=1}^Q \partial_s \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, c_{j,2})|_{s=0} - \gamma \zeta(0)^2 \sum_{j=1}^Q (c_{j,1} c_{j,2})^{-1} + \gamma \zeta(-1) \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}^{-1} c_{j,2} + c_{j,2}^{-1} c_{j,1}). \end{aligned}$$

On étudie maintenant les valeurs de $Q^1(j, \mathcal{P}, \mathbf{k})$:

- Si $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathbf{k} = (0, 0)$, on a

$$Q^1(j, \emptyset, (0, 0)) = \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q F_{\emptyset, j, f, \mathbf{0}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + (Q-1)\gamma.$$

D'après l'Exemple 1.3.4, on a que $F_{\emptyset, j, f, \mathbf{0}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ donc $Q^1(j, \emptyset, (0, 0)) = (Q-1)\gamma$.

- Si $\mathcal{P} = \{1\}$ et $k_2 = 1$, on a

$$\begin{aligned} Q^1(j, \{1\}, 1) &= (Q-1)\gamma c_{j,2} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \sum_{w'=0}^1 F_{\{1\},j,f,\mathbf{0},w'\mathbf{e}_f+(1-w')\mathbf{e}_j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \left(\binom{1}{w'} c_{f,2}^{w'} c_{j,2}^{1-w'} \right) \\ &= (Q-1)\gamma c_{j,2} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q (F_{\{1\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) c_{f,2} + F_{\{1\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) c_{j,2}). \end{aligned}$$

On trouve à l'aide de l'Exemple 1.3.6 que

$$F_{\{1\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_j}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = -\frac{1}{c_{j,1}} \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right),$$

et à l'aide de l'Exemple 1.3.5, on a que

$$F_{\{1\},j,f,\mathbf{0},\mathbf{e}_f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \frac{1}{c_{f,1}} \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right),$$

On obtient alors

$$Q^1(j, \{1\}, 1) = (Q-1)\gamma c_{j,2} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \left(\frac{c_{f,2}}{c_{f,1}} - \frac{c_{j,2}}{c_{j,1}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right).$$

- Si $\mathcal{P} = \{1\}$ et $k_1 = 1$, mutatis mutandis, on trouve

$$Q^1(j, \{2\}, 1) = (Q-1)\gamma c_{j,1} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \left(\frac{c_{f,1}}{c_{f,2}} - \frac{c_{j,1}}{c_{j,2}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,2}}{c_{j,2}} \right).$$

Des trois points précédents, on obtient

$$\begin{aligned} Z'(-(\mathbf{0},\mathbf{0}))_{\mathbf{1},\mathbf{1}} &= \\ &= Q\zeta(0)^2\gamma - \frac{2}{Q+1}\zeta(-1) \left(\sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \right) \gamma - \frac{Q-1}{Q+1}\zeta(-1) \left(\sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \right) \gamma \\ &\quad - \frac{1}{Q+1}\zeta(-1) \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \left(\left(\frac{c_{f,1}}{c_{f,2}} - \frac{c_{j,1}}{c_{j,2}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,2}}{c_{j,2}} \right) + \left(\frac{c_{f,2}}{c_{f,1}} - \frac{c_{j,2}}{c_{j,1}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\zeta'(0)\zeta(0)}{Q} - \frac{\zeta'(-1)}{Q+1} \sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) - \gamma\zeta(0)^2 \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}c_{j,2})^{-1} + \gamma\zeta(-1) \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}^{-1}c_{j,2} + c_{j,2}^{-1}c_{j,1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^Q \partial_s \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, c_{j,2})|_{s=0}. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3.3. Avec les hypothèses du lemme précédent, et en fournissant l'entier $Q \geq 1$ et les

coefficients $\mathbf{c} = (c_{q,p})_{q \in [1,Q], p \in [1,2]}$, le code SAGE 7.1 permet de simplifier l'expression

$$\begin{aligned} & Q\zeta(0)^2\gamma - \frac{Q-1}{Q+1}\zeta(-1) \left(\sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) \right) \gamma \\ & - \frac{1}{Q+1}\zeta(-1) \sum_{j=1}^Q \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^Q \left(\left(\frac{c_{f,1}}{c_{f,2}} - \frac{c_{j,1}}{c_{j,2}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,2}}{c_{j,2}} \right) + \left(\frac{c_{f,2}}{c_{f,1}} - \frac{c_{j,2}}{c_{j,1}} \right) \ln \left(1 + \frac{c_{f,1}}{c_{j,1}} \right) \right) \\ & + \frac{\zeta'(0)\zeta(0)}{Q} - \frac{\zeta'(-1)}{Q+1} \sum_{j=1}^Q (c_{j,1} + c_{j,2}) - \gamma\zeta(0)^2 \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}c_{j,2})^{-1} + \gamma\zeta(-1) \sum_{j=1}^Q (c_{j,1}^{-1}c_{j,2} + c_{j,2}^{-1}c_{j,1}). \end{aligned}$$

Notons au passage que le résultat du code n'est pas une approximation, mais s'exprime en fonction de la constante d'Euler γ , $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$, $\zeta'(0)$, $\zeta'(-1)$ et de certains logarithmes d'entiers.

Même si on dispose d'une formule pour calculer les valeurs aux entiers négatifs de la dérivée suivant s de la fonction zêta de Barnes $\partial_s \zeta^B(s, d'_j | c_{j,1}, c_{j,2})|_{s=0}$ via le Corollaire B1, en posant $N = 0$ et $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, on utilisera plutôt le Théorème 1.2.11 démontré par Aoki et Sakane. La formule de ce théorème donne des formules plus facilement exploitable. En particulier, on utilisera les formules obtenues dans l'Exemple 1.2.12 pour simplifier les expressions de $\zeta'_{\mathbf{g}_2}(0)$ et de $\zeta'_{\mathbf{so}(5)}(0)$. On simplifiera des termes de cet exemple via les formules (1.4), (1.3) et (1.2).

$$\zeta^{B'}(0, 2|1, 1) = -\zeta'(0) + \zeta'(-1), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12} - \ln(A) \\ \zeta^{B'}(0, 3|1, 2) & = -\frac{5}{8} \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(\pi) - \frac{3}{2} \zeta'(0) + \frac{1}{2} \zeta'(-1), \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{8} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\pi) + \frac{1}{24} - \frac{\ln(A)}{2} \\ \zeta^{B'}(0, 4|1, 3) & = -\frac{19 \ln(3)}{36} - \zeta'(0) - \frac{2}{3} \zeta' \left(0, \frac{5}{3} \right) - \frac{1}{3} \zeta' \left(0, \frac{4}{3} \right) + \zeta'(-1) + \zeta' \left(-1, \frac{5}{3} \right) + \zeta' \left(-1, \frac{4}{3} \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{B'}(0, 5|2, 3) & = -\frac{31 \ln(6)}{72} - \frac{\ln(2)}{6} - \frac{1}{4} \ln(\pi) - \frac{3}{2} \zeta'(0) - \frac{2}{3} \zeta' \left(0, \frac{5}{3} \right) - \frac{1}{6} \zeta' \left(0, \frac{7}{6} \right) + \frac{1}{6} \zeta' \left(0, \frac{5}{6} \right) \\ & + \frac{1}{2} \zeta'(-1) + \zeta' \left(-1, \frac{5}{3} \right) + \zeta' \left(-1, \frac{4}{3} \right) + \zeta' \left(-1, \frac{7}{6} \right) + \zeta' \left(-1, \frac{5}{6} \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

on a notamment utilisé le fait que

$$\begin{aligned} \zeta' \left(0, \frac{3}{2} \right) & = \zeta'(0) - \ln(2) + \ln \Gamma \left(\frac{1}{2} \right), \\ & = \zeta'(0) + \ln(\sqrt{\pi}) - \ln(2), \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \zeta' \left(-1, \frac{3}{2} \right) & = \zeta' \left(-1, \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln(2) \\ & = -\frac{\ln(2)}{6} - \frac{1}{2} \zeta'(-1) - \frac{1}{2} \ln(2) \\ & = -\frac{2}{3} \ln(2) - \frac{1}{2} \zeta'(-1). \end{aligned}$$

6.3.1 Pôles et résidus de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$

Via [KMT11a], on a vu en 1.6 que $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ a des pôles de la forme $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{1-k}{5}$, avec $k \geq 0$ et $k \neq 1 \pmod{5}$. On souhaite ici donner une expression des résidus de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ en $s = \frac{1}{5}$ et en $s = \frac{1}{3}$. On pose

$$l_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad l_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \quad l_3(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, \quad l_4(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d'_1 = 2, \quad d'_2 = 3, \quad d'_3 = 4, \quad d'_4 = 5.$$

Via la Proposition 2.2.4, on trouve que

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s) = K(\theta, s) + J(\theta, s),$$

avec

$$K(\theta, s) = 120^{-s} \sum_{\emptyset \neq Q \subset \llbracket 1, 4 \rrbracket} \sum_{A_Q \subset Q^c} (-1)^{|Q^c| - |A_Q|} \frac{1}{\Gamma(s)^{4 - |A_Q|}} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2} (n_1 + 1)^{-s} (n_2 + 1)^{-s} \right. \\ \left. \cdot \prod_{q \in A_Q} (l_q(\mathbf{n} + \mathbf{1}))^{-s} \prod_{q \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \setminus A_Q} \Gamma(s, \theta, l_q(\mathbf{n} + \mathbf{1})) \right),$$

et

$$J(\theta, s) = 120^s \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, 2 \rrbracket} \Gamma(1-s)^{|\mathcal{P}|} \sum_{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^4 h_{\mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right) \frac{\theta^{(4+|\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}}{\Gamma(s)((4+|\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(s - k_p)}{k_p!} \\ + 120^s \Gamma(1-s)^2 \left(\sum_{j=1}^4 h_{\llbracket 1, 2 \rrbracket, j}(s) \right) \frac{\theta^{6s-2}}{\Gamma(s)(6s-2)}, \quad (6.7)$$

avec

$$h_{\mathcal{P}, 1, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(1, x_2, x_3, x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(1, x_2, x_3, x_4)^{k_p} dx_2 dx_3 dx_4, \\ h_{\mathcal{P}, 2, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{k_p} dx_1 dx_3 dx_4, \\ h_{\mathcal{P}, 3, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{k_p} dx_1 dx_2 dx_4, \\ h_{\mathcal{P}, 4, \mathbf{k}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{k_p} dx_1 dx_2 dx_3, \\ l_1^*(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, \\ l_2^*(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4,$$

et où on a également

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^4 h_{[1,2],j}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{s-1} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{s-1} dx_1 dx_2 dx_3, \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{s-1} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{s-1} dx_1 dx_2 dx_4 \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{s-1} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{s-1} dx_1 dx_3 dx_4 \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s)^3} \int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{s-1} \prod_{p=1}^2 l_p^*(1, x_2, x_3, x_4)^{s-1} dx_2 dx_3 dx_4.
\end{aligned}$$

On observe que $K(\theta, s)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc ne contribue pas aux résidus. Il ne reste qu'à étudier les dénominateurs des termes présents dans la formule 6.7.

- Soit $\mathcal{P} \subsetneq [1, 2]$, et $\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$. Pour $s = \frac{1}{5}$, on a

$$(4 + |\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}| = 0 \text{ si et seulement si } |\mathcal{P}| = 1, \mathbf{k} = 0.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{s=\frac{1}{5}}(\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)) &= 120^{\frac{1}{5}} \frac{\Gamma(\frac{4}{5})}{\Gamma(\frac{1}{5})} \left(\sum_{j=1}^4 h_{\{1\},j,0} \left(\frac{1}{5} \right) + h_{\{2\},j,0} \left(\frac{1}{5} \right) \right) \zeta \left(\frac{1}{5} \right), \\
&= 120^{\frac{1}{5}} \frac{\Gamma(\frac{4}{5})}{\Gamma(\frac{1}{5})^4} \zeta \left(\frac{1}{5} \right) \left(\int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_2 dx_3 dx_4 \right. \\
&\quad + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_3 dx_4 \\
&\quad + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_2 dx_4 \\
&\quad \left. + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{4}{5}} (l_1^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{4}{5}} + l_2^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{4}{5}}) dx_1 dx_2 dx_3 \right).
\end{aligned}$$

- Via un raisonnement similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{s=\frac{1}{3}}(\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)) &= 120^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{1}{3})^4} \left(\sum_{j=1}^4 h_{\{1,2\},j} \left(\frac{1}{3} \right) + h_{\{1,2\},j} \left(\frac{1}{5} \right) \right) \zeta \left(\frac{1}{3} \right), \\
&= 120^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{1}{3})} \left(\int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, x_3, 1)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_2 dx_3, \right. \\
&\quad + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_2 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, x_2, 1, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_2 dx_4 \\
&\quad + \int_{[0,1]^3} (x_1 x_3 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(x_1, 1, x_3, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_1 dx_3 dx_4 \\
&\quad \left. + \int_{[0,1]^3} (x_2 x_3 x_4)^{-\frac{2}{3}} \prod_{p=1}^2 l_p^*(1, x_2, x_3, x_4)^{-\frac{2}{3}} dx_2 dx_3 dx_4 \right).
\end{aligned}$$

6.3.2 Valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et de $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}$

On reprend les notations de la sous-section précédente :

$$l_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad l_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \quad l_3(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, \quad l_4(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d'_1 = 2, \quad d'_2 = 3, \quad d'_3 = 4, \quad d'_4 = 5.$$

La fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ est de la forme

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(s) = 120^s \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s (n_1 + 3n_2)^s (2n_1 + 3n_2)^s} = 120^s Z_{\Delta}(s).$$

On a en particulier que

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(-N) = 120^{-N} Z(-((N, N), (N, N, N, N))), \quad \zeta'_{\mathfrak{g}_2}(-N) = 120^{-N} Z'(-((N, N), (N, N, N, N)) + \ln(120)\zeta_{\mathfrak{g}_2}(-N)).$$

(1,1), (1,1,1,1) (1,1), (1,1,1,1)

Via le Corollaire A1, on obtient alors

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) = \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1,2]} \frac{(-1)^{|\mathcal{P}|}}{4 + |\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=|\mathcal{P}|}} \left(\sum_{j=1}^4 \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \frac{\zeta(-k_p)}{k_p!}.$$

1) Si $\mathcal{P} = \emptyset$ et $|\mathbf{k}| = 0$, alors $\mathbf{k} = (0, 0)$, et

$$\sum_{j=1}^4 \prod_{p=1}^2 c_{j,p}^0 = 4.$$

2) Si $\mathcal{P} = \{1\}$ et $|\mathbf{k}| = 1$, alors $\mathbf{k} = k_2 = 1$, et

$$\sum_{j=1}^4 c_{j,2}^1 = 9.$$

3) Si $\mathcal{P} = \{2\}$ et $|\mathbf{k}| = 1$, alors $\mathbf{k} = k_1 = 1$, et

$$\sum_{j=1}^4 c_{j,1}^1 = 5.$$

En utilisant le fait que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, et que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, on obtient alors la valeur de $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ en $s = 0$:

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) &= \zeta(0)^2 - \frac{14}{5} \zeta(-1) \\ &= \frac{29}{60}. \end{aligned}$$

On peut également fournir une expression des valeurs aux entiers négatifs en général. Par le Corollaire A2, on a

$$\zeta_{\mathfrak{g}_2}(-N) = 120^{-N} \sum_{\mathcal{P} \subsetneq [1,2]} \frac{(-1)^{(|\mathcal{P}|+5)N+|\mathcal{P}|}}{4 + |\mathcal{P}|} N^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}|=(4+|\mathcal{P}|)N+|\mathcal{P}|}} Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N_p - k_p)}{k_p!},$$

avec

$$Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) = (-1)^{3N} N!^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{\substack{\mathbf{w}=(\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^4)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{\llbracket 1,4 \rrbracket \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^4 c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^4 c_{q,p}^{v_{p,q}} \right).$$

Pour calculer $\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)$, on remarque que

$$\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0) = \ln(120)\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) + Z'_{\Delta}(0).$$

En appliquant le Lemme 6.3.2, et en utilisant le code SAGE 7.1 on obtient

$$\begin{aligned} \zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0) &= \ln(120)\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) + 2\gamma\zeta(0)^2 + \frac{1}{4}\zeta(0)\zeta'(0) - 4\gamma\zeta(-1) + \frac{1}{5}\zeta'(-1)(\ln(3) + 2\ln(2)) - \frac{14}{5}\zeta'(-1) \\ &\quad + \zeta^{B'}(0, 2|1, 1) + \zeta^{B'}(0, 3|1, 2) + \zeta^{B'}(0, 4|1, 3) + \zeta^{B'}(0, 5|2, 3). \end{aligned}$$

Par les formules 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6, on trouve que

$$\begin{aligned} \zeta^{B'}(0, 2|1, 1) + \zeta^{B'}(0, 3|1, 2) + \zeta^{B'}(0, 4|1, 3) + \zeta^{B'}(0, 5|2, 3) &= \\ &= -\zeta'(0) + \zeta'(-1) - \frac{5}{8}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(\pi) - \frac{3}{2}\zeta'(0) + \frac{1}{2}\zeta'(-1) \\ &\quad - \frac{19\ln(3)}{36} - \zeta'(0) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) + \zeta'(-1) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) \\ &\quad - \frac{31\ln(6)}{72} - \frac{\ln(2)}{6} - \frac{1}{4}\ln(\pi) - \frac{3}{2}\zeta'(0) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{5}{6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\zeta'(-1) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{7}{6}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{5}{6}\right). \end{aligned}$$

En simplifiant ces termes, on trouve :

$$\begin{aligned} \zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0) &= \ln(120)\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0) + 2\gamma\zeta(0)^2 + \frac{1}{4}\zeta(0)\zeta'(0) - 4\gamma\zeta(-1) + \frac{1}{5}\zeta'(-1)(\ln(3) + 2\ln(2)) - \frac{14}{5}\zeta'(-1) \\ &\quad - \frac{11}{9}\ln(2) - \frac{23}{24}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(\pi) - 5\zeta'(0) + 3\zeta'(-1) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\zeta'\left(0, \frac{4}{3}\right) \\ &\quad + \zeta'\left(-1, \frac{5}{3}\right) + \zeta'\left(-1, \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}\zeta'\left(0, \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{6}\zeta'\left(0, \frac{5}{6}\right). \end{aligned}$$

6.3.3 Pôles et résidus de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$

Via [KMT10d], on a vu en 1.5 que $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$ a des pôles de la forme $s = \frac{1}{2}$ et en $s = \frac{1-k}{3}$, pour $k \geq 0$ un entier quelconque tel que $k \not\equiv 1 \pmod{3}$. On se propose ici d'obtenir des expressions des résidus en $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{1}{2}$ pour $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$. Notons que Bridges, Brindle, Bringmann, et Franke ont déjà obtenu une expression très simple de ces deux résidus dans [BBBF23, Proposition 5.16] via des techniques différentes.

On sait que, pour $\theta > 0$ suffisamment petit, la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$ admet la décomposition $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s) = K(\theta, s) + J(\theta, s)$, avec $K(\theta, s)$ une fonction holomorphe en s sur tout $\mathbb{C}$, et $J(\theta, s)$ une fonction méromorphe

en s sur tout $\mathbb{C}$, ayant les mêmes pôles que $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$. Par la Proposition 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} J(\theta, s) = & 6^s \sum_{\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, 2 \rrbracket} \Gamma(1-s)^{|\mathcal{P}|} \sum_{\mathbf{k}=(k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^2 h_{\mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(s) \right) \frac{\theta^{(2+|\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|}}{\Gamma(s)((2+|\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(s - k_p)}{k_p!} \\ & + 6^s \Gamma(1-s)^2 \left(\sum_{j=1}^2 h_{\llbracket 1, 2 \rrbracket, j, \mathbf{0}}(s) \right) \frac{\theta^{4s-2}}{\Gamma(s)(4s-2)}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{P}, 1, \mathbf{k}}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 x_2^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(1, x_2)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(1, x_2)^{k_p} dx_2, \\ h_{\mathcal{P}, 2, \mathbf{k}}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 x_1^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} l_p^*(x_1, 1)^{s-1} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} l_p^*(x_1, 1)^{k_p} dx_1, \\ l_1^*(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\ l_2^*(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Comme $K(\theta, s)$ est holomorphe en s sur $\mathbb{C}$, on devrait pouvoir lire les résidus de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ sur l'expression de $J(\theta, s)$ ci-dessus. En $s = 1/2$, le seul terme contribuant au résidu de $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)$ est

$$\Gamma(1-s)^2 \left(\sum_{j=1}^2 h_{\llbracket 1, 2 \rrbracket, j, \mathbf{0}}(s) \right) \frac{\theta^{4s-2}}{\Gamma(s)(4s-2)}. \text{ On obtient alors une expression du résidu en } s = 1/2 :$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=1/2}(\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)) &= \sqrt{6} \frac{\Gamma(3/2)^2}{4\Gamma(1/2)} \left(\sum_{j=1}^2 h_{\llbracket 1, 2 \rrbracket, j, \mathbf{0}}(1/2) \right), \\ &= \sqrt{6} \frac{\Gamma(3/2)^2}{4\Gamma(1/2)} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(\int_0^1 x^{-1/2}(x+1)^{-1/2}(x+2)^{-1/2} dx + \int_0^1 x^{-1/2}(1+x)^{-1/2}(1+2x)^{-1/2} dx \right) \\ &= \sqrt{6} \frac{\Gamma(3/2)^2}{4\Gamma(1/2)} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(\int_0^1 x^{-1/2}(x+1)^{-1/2}(x+2)^{-1/2} dx + \int_0^1 x^{-1/2}(1+x)^{-1/2}(1+2x)^{-1/2} dx \right). \end{aligned}$$

Pour les pôles de la forme $\frac{n}{3}$, avec $n \leq 1$ un entier tel que $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, les seuls termes contribuant au résidu en $s = \frac{n}{3}$ correspondent aux termes de la forme

$$-\Gamma(1-n/3)^{|\mathcal{P}|} (-1)^{|\mathbf{k}|} \left(\sum_{j=1}^2 h_{\mathcal{P}, j, \mathbf{k}}(1-n/3) \right) \frac{1}{\Gamma(n/3)((2+|\mathcal{P}|)s - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}|)} \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(n/3 - k_p)}{k_p!},$$

avec $\mathcal{P} \subsetneq \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c}$ vérifiant la condition $(2+|\mathcal{P}|)\frac{n}{3} - |\mathcal{P}| + |\mathbf{k}| = 0$. Cette condition implique nécessairement que $\mathcal{P} = \{i\}$ est un singleton, et en notant $\mathcal{P}^c = \{p\}$, on a $|k| = k_p = 1 - n \in \mathbb{N}$. On trouve alors

$$\text{Res}_{s=n/3}(\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(s)) = (-1)^{1-n} \Gamma\left(\frac{3-n}{3}\right) \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_{\{i\}, j, \mathbf{k}}\left(1 - \frac{n}{3}\right) \right) \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{n}{3}\right)} \frac{\zeta\left(\frac{4n}{3} - 1\right)}{(1-n)!},$$

Notons que, en considérant les termes généraux de la série présente dans 6.8 avec $\mathcal{P} = \emptyset$, on remarque des termes de la forme $\frac{\theta^{2s+|\mathbf{k}|}}{\Gamma(s)(2s+|\mathbf{k}|)}$, avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}$. Les zéros de $2s + |\mathbf{k}|$ ne constituent pas des pôles puisque ces pôles sont annulés par les zéros des termes de la forme $\sum_{j=1}^2 h_{\emptyset, j, \mathbf{k}}$. Par exemple,

en $s = -\frac{1}{2}$, on a que le terme $2s + |\mathbf{k}|$ est nul si et seulement si $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 = 1$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{k} \in \{(1, 0), (0, 1)\}$. Or on remarque que

$$\begin{aligned} h_{1, \emptyset, (1, 0)}(s) + h_{2, \emptyset, (1, 0)}(s) + h_{1, \emptyset, (0, 1)}(s) + h_{1, \emptyset, (0, 1)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 (x^{s-1}(1+2x) + 2x^{s-1}(1+x) + x^{s-1}(2+x)) dx \\ &= \frac{5}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \right), \end{aligned}$$

et en $s = -\frac{1}{2}$, ce terme s'annule. Cela est cohérent avec la liste des pôles possibles donnée par Komori, Matsumoto et Tsumura dans [KMT10d, Théorème 6.2].

6.3.4 Valeurs aux entiers négatifs de $\zeta_{so(5)}$ et $\zeta'_{so(5)}$

On pose

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \quad l_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \\ d_1 &= 1, \quad d_2 = 1, \quad d'_1 = 2, \quad d'_2 = 3, \end{aligned}$$

alors $\zeta_{so(5)}(s)$ est de la forme

$$\zeta_{so(5)}(s) = 6^s \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{n_1^s n_2^s (n_1 + n_2)^s (n_1 + 2n_2)^s} = 6^s Z_{\Delta}(s).$$

On a en particulier que

$$\zeta_{so(5)}(-N) = 6^{-N} Z(-((N, N), (N, N))), \quad \zeta'_{so(5)}(-N) = 120^{-N} Z'(-((N, N), (N, N)) + \ln(6)\zeta_{g_2}(-N)).$$

$(1,1), (1,1)$ $(1,1), (1,1)$

En $N = 0$, on trouve par le Corollaire A1 :

$$\begin{aligned} \zeta_{so(5)}(0) &= \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, 2]} \frac{(-1)^{|\mathcal{P}|}}{2 + |\mathcal{P}|} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathcal{P}| = |\mathbf{k}|}} \left(\sum_{j=1}^2 \prod_{p \in \mathcal{P}^c} c_{j,p}^{k_p} \right) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-k_p)}{k_p!} \\ &= \zeta(0)^2 - \frac{5}{3} \zeta(-1) \\ &= \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

On peut également fournir une expression des valeurs aux entiers négatifs en général. Par le Corollaire A2, on a

$$\zeta_{so(5)}(-N) = 6^{-N} \sum_{\mathcal{P} \subseteq [1, 2]} \frac{(-1)^{(|\mathcal{P}|+3)N+|\mathcal{P}|}}{3 + |\mathcal{P}|} N^{|\mathcal{P}|+1} \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}^c} \\ |\mathbf{k}| = (3+|\mathcal{P}|)N+|\mathcal{P}|}} Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) \prod_{p \in \mathcal{P}^c} \frac{\zeta(-N - k_p)}{k_p!},$$

avec

$$\begin{aligned} Q_N^0(\mathcal{P}, \mathbf{k}) &= N! \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{\mathbf{w} = (\mathbf{w}_p)_{p \in \mathcal{P}^c} \in (\mathbb{N}^2)^{\mathcal{P}^c} \\ \forall p \in \mathcal{P}^c, |\mathbf{w}_p| = k_p}} \sum_{\substack{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^{[1, 2] \setminus \{j\}})^{\mathcal{P}} \\ \forall q \neq j, \mathbf{v}(q) + \mathbf{w}(q) = N}} \\ &\quad \left(\prod_{p \in \mathcal{P}^c} \binom{k_p}{\mathbf{w}_p} \prod_{q=1}^2 c_{q,p}^{w_{p,q}} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \binom{-N-1}{|\mathbf{v}_p|} \binom{|\mathbf{v}_p|}{\mathbf{v}_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^2 c_{q,p}^{v_{p,q}} \right). \end{aligned}$$

Enfin, par le Lemme 6.3.2, en s'aidant du Code SAGE 7.1 on a l'expression suivante de sa dérivée en 0 :

$$\begin{aligned} \zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0) = & \ln(6)\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(0) + \frac{1}{2}\gamma\zeta(0)^2 + \frac{1}{2}\zeta(0)\zeta'(0) - \frac{1}{2}\gamma\zeta(-1) - \frac{5}{3}\zeta'(-1) + \frac{1}{6}\ln(2) \\ & + \partial_s \zeta^B(s, 2|1, 1)|_{s=0} + \partial_s \zeta^B(s, 3|1, 2)|_{s=0}, \end{aligned}$$

et avec les formules (6.3) et (6.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0) = & \ln(6)\zeta_{\mathfrak{so}(5)}(0) + \frac{1}{2}\gamma\zeta(0)^2 + \frac{1}{2}\zeta(0)\zeta'(0) - \frac{1}{2}\gamma\zeta(-1) - \frac{5}{3}\zeta'(-1) + \frac{1}{6}\ln(2) \\ & - \zeta'(0) + \zeta'(-1) - \frac{5}{8}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(\pi) - \frac{3}{2}\zeta'(0) + \frac{1}{2}\zeta'(-1). \end{aligned}$$

En simplifiant ces termes, on trouve

$$\zeta'_{\mathfrak{so}(5)}(0) = \frac{7}{18}\ln(6) - \frac{11}{24}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(\pi) + \left(\frac{1}{2}\zeta(0)^2 - \frac{1}{2}\zeta(-1)\right)\gamma - \frac{11}{4}\zeta'(0) - \frac{13}{6}\zeta'(-1).$$

L'expression ci-dessus nous permet d'obtenir une expression explicite du coefficient C dans le Théorème 1.2.35.

6.4 Application à l'étude du comportement asymptotique de $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$

Rappelons que

$$r_{\mathfrak{g}_2}(n) = \left| \left\{ (k_{i,j})_{i,j \geq 1} \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^{*2}} \mid \sum_{i,j \geq 1} k_{i,j} \frac{ij(i+j)(i+2j)(i+3j)(2i+3j)}{5!} = n \right\} \right|.$$

Posons $P(i, j) := \frac{ij(i+j)(i+2j)(i+3j)(2i+3j)}{5!}$. On observe que l'on a

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - q^{P(i,j)}} = \prod_{i,j \geq 1} \sum_{k_{i,j} \geq 0} q^{k_{i,j} P(i,j)},$$

en développant ce produit infini, et en utilisant l'expression de l'ensemble $r_{\mathfrak{g}_2}(n)$, on trouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_{\mathfrak{g}_2}(n)q^n = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - q^{P(i,j)}}.$$

En posant $f(n) = |\{(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} \mid P(i, j) = n\}|$, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_{\mathfrak{g}_2}(n)q^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^{f(n)}}.$$

On note désormais $L_f(s) = \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$, et $L_f^*(s) = \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)\Gamma(s)\zeta(s+1)$. Observons que $L_f^*(s)$ ne possède que deux pôles dans H_0 , en $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{1}{5}$. De plus, $L_f^*(s)$ possède un pôle double en $s = 0$. Remarquons également que, grâce à la liste des pôles obtenues en 1.6, on a que L_f^* possède des pôles simples en $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$, avec $k \not\equiv 0 \pmod{5}$.

On souhaite appliquer le Théorème 1.2.33. Vérifions tout d'abord si, avec ces données, les conditions du théorème sont valides. Posons $\Lambda := \mathbb{N} \setminus f^{-1}(\{0\})$. Remarquons que $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{5}$. Ainsi, l'entier $l = 2$ vérifie l'hypothèse du Théorème 1.2.33. Vérifions maintenant si les hypothèses (P1), (P2) et (P3) sont vérifiées :

(P1) Soit $p \geq 2$ un nombre premier. On a que $|\Lambda \setminus (p\mathbb{N} \cap \Lambda)| = +\infty$. En effet, les suites

$$\begin{aligned} u(2) &:= (P(8k+1, 1))_{k \in \mathbb{N}}, \\ u(3) &:= (P(9k+1, 1))_{k \in \mathbb{N}}, \\ u(5) &:= (P(25k+1, 1))_{k \in \mathbb{N}}, \\ u(p) &:= (P(kp+1, 1))_{k \geq 1} \quad \text{si } p \geq 7, \end{aligned}$$

sont strictements croissantes, et appartiennent à Λ par construction. De plus, on observe que la suite $u(p)$ est incluse dans $\Lambda \setminus (p\mathbb{N} \cap \Lambda)$. On obtient alors que n'importe quel réel $L \geq \frac{1}{6}$ vérifie la condition (P1).

(P2) On a déjà vu précédemment que L_f^* possède deux pôles (qui sont simples) en $s = \frac{1}{3}$ et en $s = \frac{1}{5}$, un pôle double en $s = 0$, et des pôles simples en $s = \frac{k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$, avec $k \not\equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, pour tout réel $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $R \neq \frac{k}{5}$ avec $k \not\equiv 0 \pmod{5}$, R vérifie la condition de la seconde hypothèse.

(P3) On remarque que le polynôme P vérifie la condition H0S de l'article [Ess97]. En particulier, on sait par [Ess97, Théorème 3] que la fonction zêta rattachée à ce polynôme, (i.e. $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$) admet une borne polynomiale en la partie imaginaire de $s = \sigma + i\tau$ sur chaque bande verticale $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. On en déduit alors que la condition (P3) est vérifiée.

Remarque 6.4.1. Dans la condition (P2), R est arbitrairement grand, et dans la condition (P1), L est arbitrairement grand.

Notons $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\omega_\alpha := \text{Res}_{s=\frac{1}{3}} \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$ et $\omega_\beta := \text{Res}_{s=\frac{1}{5}} \zeta_{\mathfrak{g}_2}(s)$. En appliquant le Théorème 1.2.33, on trouve alors

$$r_{\mathfrak{g}_2}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{C}{n^b} \exp\left(A_1 n^{\frac{1}{4}} + A_2 n^{\frac{3}{20}} + A_3 n^{\frac{1}{20}}\right) \left(1 + \sum_{j=2}^N \frac{B_j}{n^{\nu_j}} + O_{L,R}\left(n^{-\min\{\frac{2L-\alpha}{2(\alpha+1)}, \frac{R}{\alpha+1}\}}\right)\right),$$

avec

$$C = \frac{e^{\zeta'_{\mathfrak{g}_2}(0)} (\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{1-6\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)}{8}} \sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}}, \quad b = \frac{6-6\zeta_{\mathfrak{g}_2}(0)+1}{8},$$

et $A_1 := 4 \left(\omega_\alpha \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right) \right)^{\frac{3}{4}}$, $A_2 := \frac{\omega_\beta \Gamma(\frac{1}{5}) \zeta(\frac{6}{5})}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{1}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{20}}}$, et

$$\begin{aligned} A_3 := & K_3 + 3 \left(\omega_\alpha \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right) \right)^{\frac{3}{4}} \left(\binom{-1/3}{1} \frac{K_3}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{4}}} + \binom{-1/3}{2} \frac{K_2^2}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \frac{5 (\omega_\beta \Gamma(\frac{6}{5}) \zeta(\frac{6}{5}))}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{20}}} \binom{-1/5}{1} \frac{K_2}{(\omega_\alpha \Gamma(\frac{4}{3}) \zeta(\frac{4}{3}))^{\frac{3}{4}}}, \end{aligned}$$

avec $0 < \nu_2 < \dots$ les éléments strictements positifs de $\mathcal{N} + \mathcal{M}$.

Par [BBBF23, Lemme 4.3], on a

$$K_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\omega_\beta \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \zeta\left(\frac{6}{5}\right)}{\left(\omega_\alpha \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{\frac{3}{20}}}$$

$$K_3 = -\frac{3}{160} \cdot \frac{\left(\omega_\beta \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \zeta\left(\frac{6}{5}\right)\right)^2}{\left(\omega_\alpha \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \zeta\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{\frac{21}{20}}}.$$

Des ensembles décrits dans (1.8), (1.9), et (1.10) dans [BBBF23], on trouve que la suite ν_j du Théorème 1.2.33 donne, avec nos hypothèses, $\nu_2 = \frac{1}{20}, \nu_3 = \frac{2}{20}, \nu_4 = \frac{3}{20}, \dots$

Chapitre 7

Annexe

7.1 Codes SAGE

Listing 7.1: Code SAGE pour calculer $Z'_\Delta(0)$ avec $P = 2$ et $d_1 = d_2 = 1$

```
from sage.all import *

c_g2=[[1,1],[1,2],[1,3],[2,3]]
c_so5=[[1,1],[1,2]]

gamma = euler_gamma
zeta0 = var('zeta0')
zeta_m1 = var('zeta_m1')
zeta0_prime = var('zeta0_prime')
zeta_m1_prime = var('zeta_m1_prime')

def Z_delta_prime_zero(c_matrix):
    Q=len(c_matrix)
    sum1 = sum(c[j][0] + c[j][1] for j in range(Q))
    sum2 = sum(sum((c[f][0]/c[f][1] - c[j][0]/c[j][1])
        * log(1 + c[f][1]/c[j][1])+(c[f][1]/c[f][0] - c[j][1]/c[j][0])
        * log(1 + c[f][0]/c[j][0])
        for f in range(Q) if f != j) for j in range(Q))
    sum3 = sum((c[j][0] * c[j][1])^-1 for j in range(Q))
    sum4 = sum(c[j][0]^-1 * c[j][1] + c[j][1]^-1 * c[j][0] for j in range(Q))
    result = Q*zeta0^2*gamma - zeta_m1*sum1*gamma - 1/(Q+1)*zeta_m1*sum2
        +zeta0_prime*zeta0/Q - zeta_m1_prime/(Q+1)*sum1 - gamma*zeta0^2*sum3
        + gamma*zeta_m1*sum4
    return(result)
print(result)
```

Listing 7.2: Code SAGE pour calculer $Z_\Delta(-N)$ avec $P = 2$

```
from math import comb
from itertools import product

def alpha_k_N(Q, N, k, c_matrix):
    alpha = 0
    for j in range(1, Q + 1):
        for w in product(range(N + 1), repeat=Q):
```

```

    if sum(w) == k:
        coef1 = multinomial(w)
        coef2 = multinomial([N - w_i for w_i in w])
        prod = 1
        for q in range(Q):
            prod *= (c_matrix[q][0] ** w[q]) * (c_matrix[q][1] ** (N - w[q]))
        alpha += coef1 * coef2 * prod
    return alpha

def beta_N(Q, N, c_matrix):
    beta = 0
    for j in range(1, Q + 1):
        for w in product(range((Q + 1) * N + 2), repeat=Q):
            if sum(w) == (Q + 1) * N + 1 and w[j - 1] >= 2 * N + 1:
                numerator = 1
                for i in range(N + 1 - w[j - 1], -N - 1):
                    numerator *= i

                denominator = 1
                for q in range(Q):
                    if q != j - 1:
                        denominator *= factorial(w[q])

                term1 = c_matrix[j - 1][1] ** w[j - 1]
                term2 = c_matrix[j - 1][0] ** w[j - 1]

                for q in range(Q):
                    if q != j - 1:
                        term1 *= (c_matrix[q][0] ** (N - w[q]))
                        term1 *= (c_matrix[q][1] ** w[q])
                        term2 *= (c_matrix[q][1] ** (N - w[q]))
                        term2 *= (c_matrix[q][0] ** w[q])

                beta += (numerator / denominator) * (term1 + term2)
    return beta

def Z_Delta_minus_N(N, c_matrix):
    Q = len(c_matrix)
    sum1 = 0
    N_fact_Q = factorial(N) ** Q
    for k in range(Q * N + 1):
        alpha = alpha_k_N(Q, N, k, c_matrix)
        term1 = zeta(-N - k) / factorial(k)
        term2 = zeta(-(Q + 1) * N + k) / factorial(Q * N - k)
        sum1 += alpha * term1 * term2

    beta = beta_N(Q, N, c_matrix)
    sum2 = ((-1) ** (N + 1)) * (N_fact_Q * factorial(N)) * beta
    * zeta(-(Q + 2) * N - 1) / factorial((Q + 1) * N + 1)

    Z = (1 / Q) * N_fact_Q * sum1 + (1 / (Q + 1)) * sum2

    return Z

```

Bibliographie

- [AET01] Shigeki Akiyama, Shigeki Egami, and Yoshio Tanigawa. Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers. *Acta Arith.*, 98(2):107–116, 2001.
- [And76] George E. Andrews. *The theory of partitions*, volume Vol. 2 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.
- [Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to analytic number theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [AT01] Shigeki Akiyama and Yoshio Tanigawa. Multiple zeta values at non-positive integers. *Ramanujan J.*, 5(4):327–351, 2001.
- [Bar04] Ernest W Barnes. On the theory of the multiple gamma function. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 19:374–425, 1904.
- [BBBF23] Walter Bridges, Benjamin Brindle, Kathrin Bringmann, and Johann Franke. Asymptotic expansions for partitions generated by infinite products. *arXiv preprint arXiv:2303.11864*, 2023.
- [BD18] Jonathan M. Borwein and Karl Dilcher. Derivatives and fast evaluation of the Tornheim zeta function. *Ramanujan J.*, 45(2):413–432, 2018.
- [Ber85] Bruce C. Berndt. The gamma function and the Hurwitz zeta-function. *Amer. Math. Monthly*, 92(2):126–130, 1985.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie Chapitres 4,5 et 6*. Masson, 1981.
- [Bou06] Nicolas Bourbaki. *Groupes de Lie*. Springer, 2006.
- [Cra12] R Crandall. Unified algorithms for polylogarithm, l-series, and zeta variants. *Algorithmic Reflections: Selected Works*. PSIPress, 2012.
- [DT20] Gregory Debruyne and Gérald Tenenbaum. The saddle-point method for general partition functions. *Indag. Math. (N.S.)*, 31(4):728–738, 2020.
- [EM20] Driss Essouabri and Kohji Matsumoto. Values at non-positive integers of generalized Euler–Zagier multiple zeta-functions. *Acta Arith.*, 193(2):109–131, 2020.
- [EM21] Driss Essouabri and Kohji Matsumoto. Values of multiple zeta functions with polynomial denominators at non-positive integers. *International Journal of Mathematics*, 32(06):2150038, 2021.
- [EMOT81] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vol. I*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1981. Based on notes left by Harry Bateman, With a preface by Mina Rees, With a foreword by E. C. Watson, Reprint of the 1953 original.

- [Ess97] Driss Essouabri. Singularité des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(2):429–483, 1997.
- [FR04] Eduardo Friedman and Simon Ruijsenaars. Shintani-Barnes zeta and gamma functions. *Adv. Math.*, 187(2):362–395, 2004.
- [FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Hid93] Haruzo Hida. *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*, volume 26 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume Vol. 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
- [KMT10a] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. Functional relations for zeta-functions of root systems. In *Number theory*, volume 6 of *Ser. Number Theory Appl.*, pages 135–183. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.
- [KMT10b] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. An introduction to the theory of zeta-functions of root systems. *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L -functions*, G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura (eds.), *MSJ Memoirs*, 21:115–140, 2010.
- [KMT10c] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. On multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(2):303–347, 2010.
- [KMT10d] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II. *J. Math. Soc. Japan*, 62(2):355–394, 2010.
- [KMT11a] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. On Witten multiple zeta-functions associated with semi-simple Lie algebras IV. *Glasg. Math. J.*, 53(1):185–206, 2011.
- [KMT11b] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. A survey on the theory of multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems. In *Infinite analysis 2010—Developments in quantum integrable systems*, volume B28 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 99–120. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011.
- [KMT12] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras iii. *Multiple Dirichlet series, L -functions and automorphic forms*, pages 223–286, 2012.
- [KMT20] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems. In *Various aspects of multiple zeta functions—in honor of Professor Kohji Matsumoto’s 60th birthday*, volume 84 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 263–295. Math. Soc. Japan, Tokyo, [2020] ©2020.
- [KMT23] Yasushi Komori, Kohji Matsumoto, and Hirofumi Tsumura. *The Theory of Zeta-Functions of Root Systems*. Springer Singapore, Novembre 2023.
- [KO13] Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai. Zeros of Witten zeta functions and absolute limit. *Kodai Math. J.*, 36(3):440–454, 2013.
- [Kom10] Yasushi Komori. An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers. *Q. J. Math.*, 61(4):437–496, 2010.

- [Leh40] Derrick H Lehmer. On the maxima and minima of Bernoulli polynomials. *The American Mathematical Monthly*, 47(8):533–538, 1940.
- [MA98] Jeff Miller and Victor S. Adamchik. Derivatives of the Hurwitz zeta function for rational arguments. *J. Comput. Appl. Math.*, 100(2):201–206, 1998.
- [OEI23a] OEIS. Decimal expansion of Euler’s constant, entry A001620 in The on-line encyclopedia of integer sequences, 2023.
- [OEI23b] OEIS. Decimal expansion of Glaisher Kinkelin constant A, entry A074962 in The on-line encyclopedia of integer sequences, 2023.
- [Ono21] Kazuhiro Onodera. On multiple Hurwitz zeta function of Mordell–Tornheim type. *International Journal of Number Theory*, 17(10):2327–2360, 2021.
- [Rom17] Dan Romik. On the number of n -dimensional representations of $SU(3)$, the Bernoulli numbers, and the Witten zeta function. *Acta Arith.*, 180(2):111–159, 2017.
- [Rui00] Simon NM Ruijsenaars. On Barnes’ multiple zeta and gamma functions. *Advances in Mathematics*, 156(1):107–132, 2000.
- [SA22] Shinpei Sakane and Miho Aoki. On values of the higher derivatives of the Barnes zeta function at non-positive integers. *Kodai Mathematical Journal*, 45(1):65–95, 2022.
- [Sas09a] Yoshitaka Sasaki. Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers. *Acta Arith.*, 136(4):299–317, 2009.
- [Sas09b] Yoshitaka Sasaki. Some formulas of multiple zeta values for coordinate-wise limits at non-positive integers. In *New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions*, Ber. Math., pages 317–325. Shaker Verlag, Aachen, 2009.
- [Ser66] Jean-Pierre Serre. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, volume 5. WA Benjamin, 1966.
- [Shi76a] Takuro Shintani. On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 23(2):393–417, 1976.
- [Shi76b] Takuro Shintani. On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at nonpositive integers. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 23:393–417, 1976.
- [Shi77a] Takuro Shintani. On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(1):167–199, 1977.
- [Shi77b] Takuro Shintani. On certain ray class invariants of real quadratic fields. *Proc. Japan Acad.*, 53(3):128–131, 1977.
- [Shi77c] Takuro Shintani. On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields. In *Algebraic number theory (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976)*, pages 201–212. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.
- [Shi80] Takuro Shintani. On special values of zeta functions of totally real algebraic number fields. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 591–597. Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.
- [Ten15] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, volume 163 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 2015. Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion.
- [Wit91] Edward Witten. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 141(1):153–209, 1991.
- [Zag94] Don Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992*, pages 497–512. Springer, 1994.

Valeurs aux entiers négatifs de fonctions multizêta de type Hurwitz généralisées et de leurs dérivées. Applications à certaines fonctions zêta de Witten rattachées à des algèbres de Lie semi-simples.

Résumé

Le but de cette thèse est de fournir des formules explicites pour les valeurs directionnelles et les valeurs des dérivées directionnelles de fonctions multizêta de Hurwitz généralisées en des multi-entiers négatifs. On exprimera en particulier les valeurs directionnelles de ces fonctions multizêta en fonction de polynômes de Bernoulli. De plus, on exprimera les valeurs des dérivées directionnelles de ces fonctions multizêta en fonction de polynômes de Bernoulli, de valeurs aux entiers négatifs de la dérivée suivant la variable s de la fonction zêta d'Hurwitz, et de valeurs aux entiers négatifs de la dérivée de certaines fonctions zêta de type Barnes généralisé.

Comme première application, on déterminera des formules pour les valeurs en $s = 0$ de la fonction zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ et de sa dérivée, ainsi que des valeurs en $s = 0$ de la fonction zêta de Witten $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$ et de sa dérivée. On trouvera en particulier une formule asymptotique explicite du nombre de représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ en combinant nos résultats avec un théorème de type Meinardus généralisé obtenu par Bridges, Brindle, Bringmann et Franke.

Comme seconde application, on déterminera des formules explicites des fonctions multigamma de type Shintani en fonction des fonctions multigamma de type Barnes.

Mots-clés : Fonctions multizêta de type Hurwitz généralisées, Fonctions zêta de Witten, Valeurs et valeurs des dérivées aux entiers négatifs des fonctions multizêta, Représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Special values of generalized multiple Hurwitz zeta functions and their derivatives. Applications towards some Witten zeta functions attached to semi-simple Lie algebras.

Abstract

The goal of this thesis is to provide explicit formulas for directional values and directional derivative values of generalized Hurwitz multizeta functions at non positive integers. We will express the directional values of these multizeta functions in terms of Bernoulli polynomials. Furthermore, we will express the directional derivative values of these multizeta functions in terms of Bernoulli polynomials, of values at nonpositive integer values of the derivative with respect to the variable s of the Hurwitz zeta function, and of values at nonpositive integers of the derivative of some generalized Barnes zeta functions.

As a first application, we will determine formulas for the values at $s = 0$ of the Witten zeta function $\zeta_{\mathfrak{g}_2}$ and its derivative, as well as values at $s = 0$ of the Witten zeta function $\zeta_{\mathfrak{so}(5)}$ and its derivative. In particular, we will find an explicit asymptotic formula for the number of representations of the exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ by combining our result with a generalized Meinardus-type theorem proved by Bridges, Brindle, Bringmann, and Franke.

As a second application, we will determine explicit formulas for Shintani's multigamma functions in terms of Barnes' multigamma functions.

Keywords: Generalized multiple zeta functions of Hurwitz type, Witten zeta functions, Values and derivative values at nonpositive integers of multizeta functions, Representations of semi-simple Lie algebra