

# Chapitre 5

## Effets mis en œuvre dans les matériaux électroactifs.

Les matériaux électroactifs sont des matériaux intelligents, c'est à dire qu'ils possèdent une gamme de sensibilité à des sollicitations diverses. Par exemple, les alliages à mémoire de forme sont des matériaux capables de recouvrer "à chaud" leur forme initiale préalablement modifiée "à froid". Ils répondent donc à l'*action* thermique (le réchauffement) par un *effet* mécanique (le changement de forme).

Par matériaux électroactifs, nous entendons, dans ce cours, les matériaux intelligents dont l'action est d'origine électrique ou magnétique, et l'effet mécanique. En d'autres termes, ils possèdent, de par leur structure, un couplage *electro-mécanique*. Cela concerne les matériaux possédant les propriétés :

- de piézo-électricité
- de magnéto et d'électrostriction

A ces matériaux, nous incluons certains fluides dont l'usage est de moins en moins marginal. Ce sont les fluides magnéto et électro rhéologique qui voient leur viscosité varier par action sur le champ magnétique ou électrique extérieurs. Nous incluons aussi les alliages à mémoire de forme ; dans ce dernier cas, il ne s'agit pas d'un couplage électromécanique au sens strict puisque l'action est thermique. Cependant, dans un bon nombre d'applications, l'action thermique dérive d'un courant électrique qui passe au sein même du matériau augmentant par perte joule sa température.

Ainsi, ces matériaux électroactifs offrent l'avantage d'une conversion électromécanique directe. C'est à dire que la constitution géométrique de la matière, l'organisation du réseau cristallin par exemple, peut changer sous l'action des champs électriques ou magnétiques extérieurs, générant des allongements. Par opposition aux effets électrodynamiques qui génèrent des efforts à distance, nous avons ici une conversion d'énergie s'opérant au sein même de la matière.

Dans la première partie de ce cours, nous décrivons les effets tels que définis précédemment. Puis nous aborderons dans un second chapitre et de manière plus approfondie la description de l'effet piézo-électrique.

### 5.1 L'effet piézo-électrique

L'effet piézo-électrique **direct** traduit l'aptitude de quelques matériaux à se polariser sous l'application d'un effort mécanique, la charge électrique apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la contrainte exercée.

Ce phénomène est réversible, c'est à dire qu'il est possible d'obtenir pour ces même matériaux des déformations lorsqu'on les soumet à un champ électrique : c'est l'effet **inverse**.

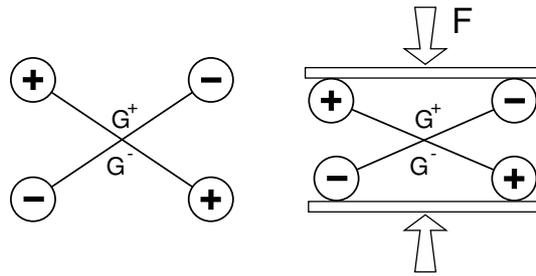


FIG. 5.1 – Cristal possédant un centre de symétrie.

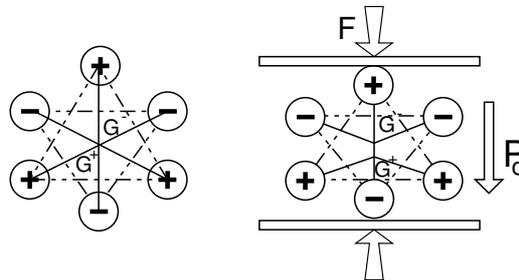


FIG. 5.2 – Cristal ne possédant pas de centre de symétrie. Le barycentre des charges se déplace, créant une polarisation  $P_0$ .

Tous les matériaux ne sont pas piézo-électriques, et seuls les cristaux ne présentant pas de centre de symétrie en possèdent les caractéristiques. Il en résulte d'ailleurs un axe privilégié d'apparition des charges électriques qui est appelé direction de polarisation. Ceci est illustré figure 5.1 et 5.2. Dans le premier cas ( figure 5.1 ) le cristal est centro-symétrique et l'application d'une contrainte, si elle engendre une déformation du matériau, n'induit pas de déplacement des barycentres positif et négatif, si bien qu'aucune polarisation n'apparaît.

Dans le second cas, ( figure 5.2 ), la déformation entraîne un déplacement des barycentres, et une polarisation électrique  $P_0$  apparaît alors.

De tels solides sont peu nombreux à l'état naturel, le plus connu étant le Quartz. Mais on rencontre depuis les années quarante des matériaux piézo électriques de synthèse, sous forme de céramique.

Les allongements obtenus sont cependant très faibles :  $300ppm$  pour des champs électriques de l'ordre de  $1MV/m$ . Par exemple, un barreau de céramique PZT d'une longueur de  $3cm$  alimenté sous une tension de  $1000V$  s'allonge de  $30\mu m$ . Ces déplacements sont extrêmement modestes. Mais les contraintes admissibles sont, elles, conséquentes, de l'ordre de  $40MPa$  à  $100MPa$ . Ce qui fait que les matériaux piézo-électriques sont capables de déplacer des charges énormes, mais sur de petites distances. Un parallélépipède de section de  $40mm^2$  de matériau piézo-électrique sera donc capable de déplacer une charge de  $100kg$  (toujours sous  $1000V$ ).

Dans une première approximation, les allongements sont linéaires en fonction de la tension appliquée. C'est ce que montre la figure 5.3, pour le cas A (cas d'un allongement sous tension d'alimentation  $U$  variable, et contrainte nulle). Lorsque qu'une charge mécanique est reliée au barreau, l'allongement de la céramique devient moins grand, mais reste linéaire et la pente en fonction de la tension est conservée. C'est le cas B, pour lequel la charge est constante.

Une première méthode de fabrication de matériaux piézo-électriques de synthèse consiste à maintenir à haute température la composition chimique du cristal. Puis, on approche à la

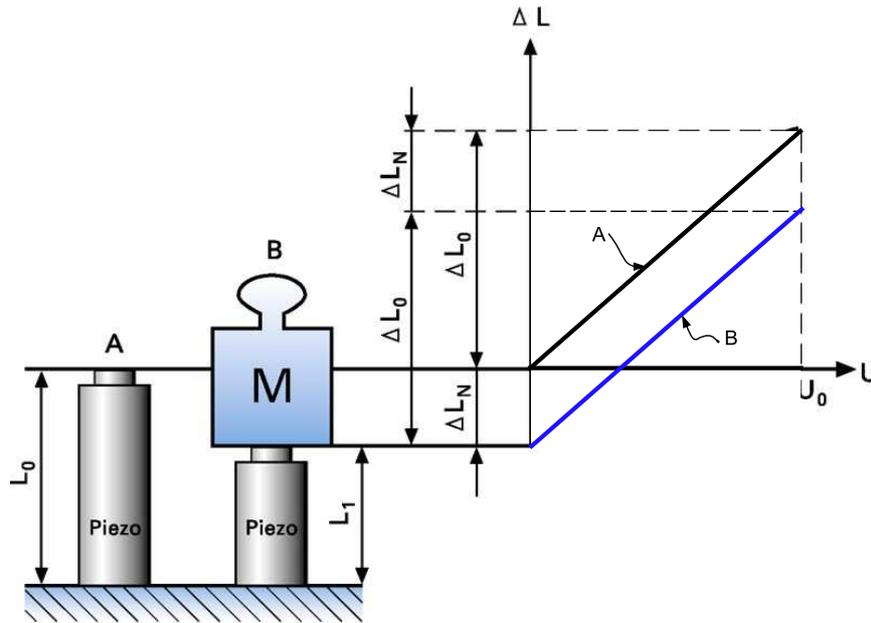


FIG. 5.3 – Allongement d’un barreau de céramique. Cas A, sous charge nulle, cas B, déplaçant une charge constante (<http://www.physikinstrumente.com/>).

surface de ce mélange en phase liquide un noyau que l’on vient ensuite tirer. A mesure que l’on tire, les forces superficielles de contact tendent à soulever le liquide qui du même coup se refroidit et passe en phase solide. Cette méthode est appelée synthèse de Czochralsky (figure 5.4). Les matériaux obtenus sont très purs, et possèdent des propriétés excellentes en terme de tenue en température ou de linéarité. Malheureusement, les propriétés piézo-électriques sont faibles.

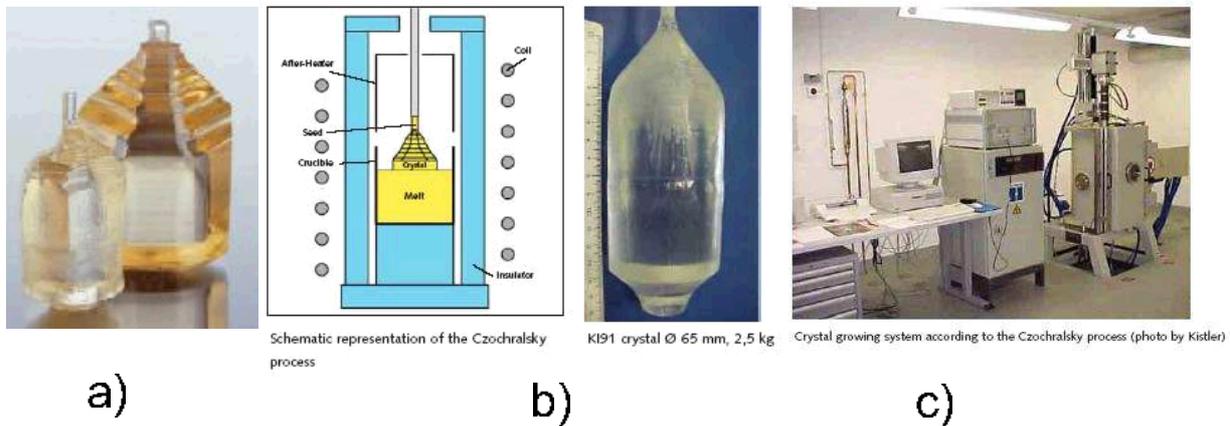


FIG. 5.4 – Synthèse de matériaux par procédé de Czochralsky. a) le matériau final obtenu en 1 semaine b) principe et c) dispositif.

Pour obtenir des matériaux se déformant davantage, on procède différemment. A partir de poudre que l’on fritte (on soude les grains les uns aux autres) sous charge axiale ce qui permet d’augmenter encore leur tenue mécanique et de diminuer la porosité on réalise un conditionnement sous forme de film, de disque, de bâtonnet de section carrée ou circulaire.

On obtient alors un matériau qui ne présentent que peu ou pas de polarisation naturelle à l’échelle macroscopique. En effet, celui-ci n’est pas homogène, mais est constitué de grains ; et si on étudie une vue en coupe d’une céramique par exemple, on voit apparaître des domaines

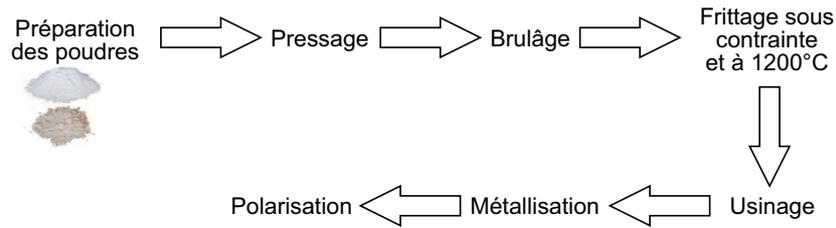


FIG. 5.5 – Fabrication des céramiques

dont la polarisation occupe une direction propre, mais différente des domaines voisins. A l'état naturel, les polarisations sont orientées de manière aléatoire, et leur somme est nulle. C'est pourquoi, le processus de fabrication de ces matériaux doit faire apparaître une phase de polarisation. Pour cela, on soumet l'échantillon à un champ électrique intense ( de l'ordre du  $kV.mm^{-1}$  ), forçant les domaines à s'orienter selon une direction privilégiée. Les grains aux polarisations aléatoires donnent un caractère fortement anisotropique à la matière, si bien que les caractéristiques dépendent de la direction d'application des champs ou des efforts extérieurs.

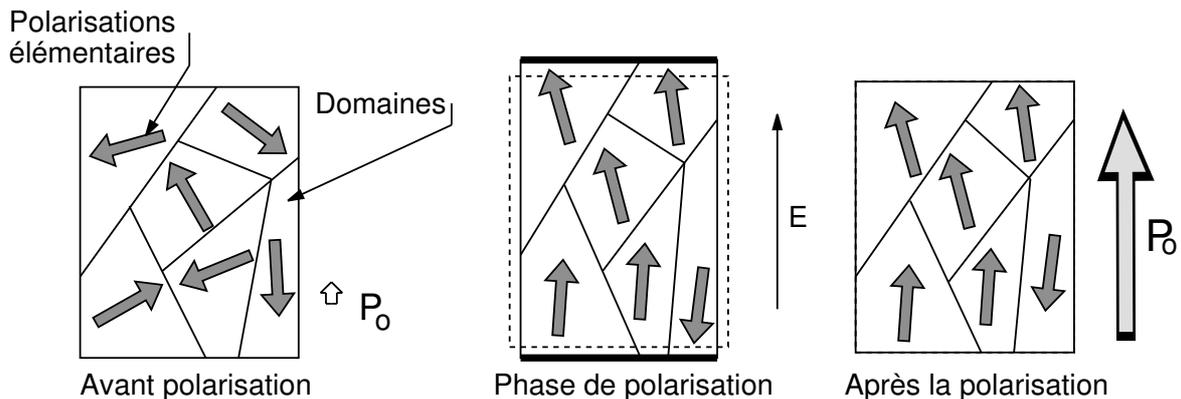


FIG. 5.6 – Polarisation d'un morceau de céramique. Le champ  $E$  intense force les domaines à s'orienter selon une direction privilégiée.

La figure 5.7 montrent quelques échantillons d'actionneurs piézo-électriques.

L'application qui a révélé l'intérêt de la piézo-électricité, et qui a suscité de gros effort de  $R$  et  $D$  est le sonar. Cet instrument génère des ondes acoustiques dans l'eau permettant de mesurer la profondeur des fonds marins. C'est ensuite le nettoyage par ultrasons, basé sur le même principe. Ce sont là des applications à forte énergie où les volumes de matériaux piézo-électriques sont grands.

Dans la catégorie du micro et du nano positionnement ( tête de microscope à effet tunnel...) ces matériaux offrent une grande souplesse d'utilisation car la commande est simple puisqu'il y a proportionnalité entre la tension appliquée et l'allongement mesuré. Dans le domaine grand public, de petits barreaux piézo-électriques sont utilisés pour réaliser des microvannes dans les têtes d'impression des imprimantes à jet d'encre.

Enfin, les actionneurs piézo-électriques sont fortement pressentis dans l'effort de miniaturisation de certaines fonctions électromécaniques. Par exemple, des moteurs de quelques millimètres de long ont été mis en œuvre pour actionner le mécanisme d'autofocus d'une caméra embarquée sur un téléphone portable.



FIG. 5.7 – Quelques exemples d'actionneurs piézo-électriques. Celui de droite est capable de s'allonger de  $350\mu m$ .

## 5.2 La Magnétostriction

Pour les alliages magnétostrictifs, l'augmentation du champ magnétique dans la direction longitudinale provoque un allongement de l'échantillon considéré. Ce phénomène, découvert par Joule en 1842 est réversible, c'est à dire que ces matériaux, lorsqu'on les allonge, s'aimantent (effet Villari). Un bon matériau magnétostrictif doit posséder un allongement conséquent sous son champ de saturation, mais il doit aussi bien canaliser les lignes de champ magnétique (avoir une permittivité relative grande) pour rendre plus simple son aimantation. Comme matériau répondant bien à ces exigences, citons :

- les alliages fer-cobalt ( $Co_{60}Fe_{40}$ ) ou Fer-Cobalt-Nickel possèdent un allongement plutôt faible (60 à 70 ppm) mais canalisent très bien les lignes de champ et sont simples à mettre en œuvre,
- les alliages Terfenol-D (en réalité de composition  $Tb_{1-x}Dy_xFe_2$  avec  $x = 0.7$ ) représente un bon compromis entre la magnétostriction (jusqu'à 1000ppm) et canalisent raisonnablement bien les lignes de champ.

De manière générale, les déformations observées sont de l'ordre de 2 à 5 fois celles obtenues en piézo-électricité. Ainsi, un barreau de Terfenol-D d'une section de  $30cm^2$  est capable de générer une force dynamique de l'ordre de 22 tonnes. Le principe de la magnétostriction peut s'expliquer en modélisant par de petites ellipses magnétisées les domaines magnétiques du matériau. Augmenter l'excitation magnétique  $H$  dans le matériau orientent ces domaines, provoquant un changement de la forme de l'échantillon (figure 5.8. Cette approche est très simplifiée. ). La figure 5.9 représente l'évolution de la déformée relative en fonction de l'excitation magnétique et de la contrainte en compression imposée sur un échantillon de Terfenol-D. Si nous reconnaissons bien une évolution quadratique de cette déformation selon l'aimantation

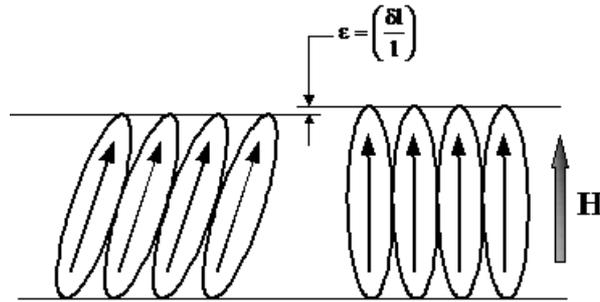


FIG. 5.8 – Une illustration de l’effet magnétostrictif. La matière est découpée en zones magnétisée (les domaines) qui s’orientent sous l’effet d’un champ magnétique.

imposée (caractéristique de la magnétostriction), nous devons aussi nous rendre compte que cette elongation est plus importante sous contrainte non nulle (c’est à dire que l’on observe des déformations plus importantes si on appuie sur l’échantillon).

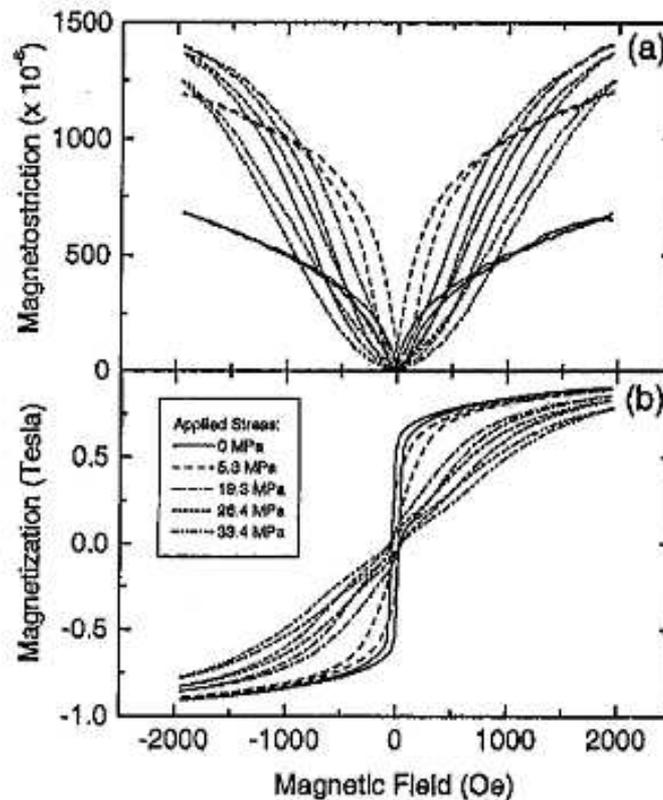


FIG. 5.9 – Magnétostriction et magnétisation d’un barreau de Terfenol-D, à température ambiante et contrainte de compression fixe (Wun-Fogle et al. 1999). Noter l’évolution quadratique de la déformation. .

En effet, si l’on tourne, par une contrainte  $\sigma$  les domaine perpendiculairement à la direction d’application du champ magnétique, la déformation totale observée est plus grande (figure 5.10). C’est pourquoi, pour bénéficier d’une déformation réversible et quasi linéaire, on est amené à polariser de manière statique l’échantillon :

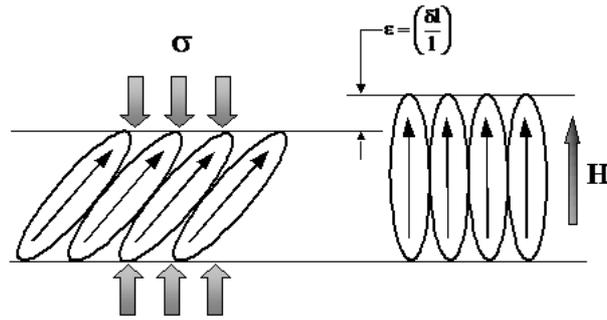


FIG. 5.10 – Sous contrainte, les domaines tournent perpendiculairement à la direction du champ magnétique. La déformation relative est plus grande.

- magnétiquement (figure 5.11)
- mécaniquement par l'imposition d'une contrainte de compression

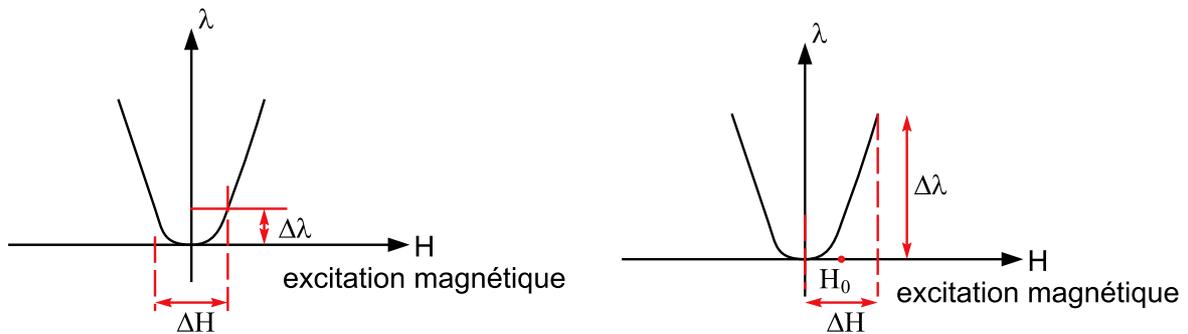


FIG. 5.11 – Sans polarisation, une variation  $\Delta H$  de l'excitation magnétique conduit à une modeste variation d'allongement  $\Delta\lambda$ . Par contre, si le matériau est polarisé magnétiquement autour de  $H_0$ , à l'aide d'un aimant par exemple, l'allongement obtenu sera plus grand.

La figure 5.12 montre comment ces polarisations sont mises en œuvre : par un aimant pour la polarisation magnétique, par un ressort pour la précontrainte. Cette figure montre aussi le bobinage électrique permettant l'application d'une excitation magnétique. Cette contrainte de

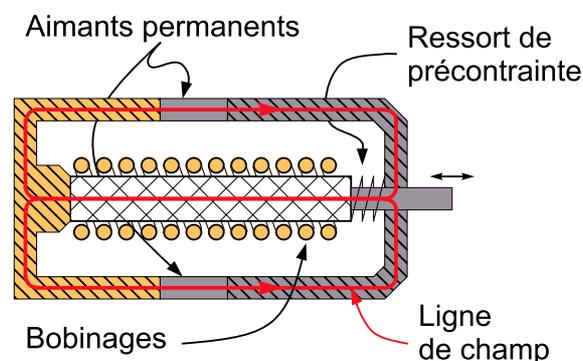


FIG. 5.12 – Montage d'un actionneur magnétostrictif montrant le ressort de précontrainte ainsi que les aimants permettant une polarisation magnétique.

fabrication conduit souvent à des structures complexes à mettre en œuvre, réduisant du même coup l'intérêt que l'on peut porter à ces matériaux.

Pour pallier ce problème, certains ont révélé la magnétostriction géante. Sans polarisation ni champ exagérés il est possible de constater à l'œil nu la déformation d'un bilame de cette conception.

### 5.3 Les alliages à mémoire de forme

Les alliages à mémoire de forme possèdent en général une structure cubique partiellement ordonnée à *haute température* que l'on appelle l'austénite et un état stable de plus basse symétrie, la martensite à *basse température* (figure 5.13). Par réchauffage, la structure retourne à la structure à haute température en reprenant sa forme initiale : c'est l'**effet mémoire** simple (voir figure 5.14). Cette transformation est réversible, mais possède une hystérésis plus ou moins faible.

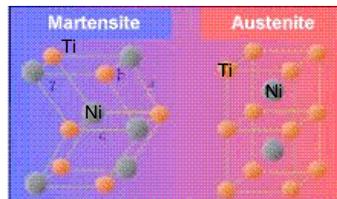


FIG. 5.13 – Les différents arrangements du cristal d'un alliage à mémoire de forme.

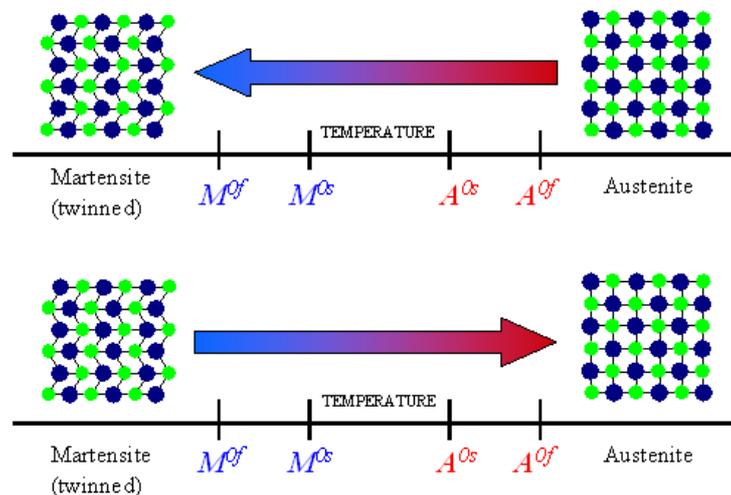


FIG. 5.14 – Transformation de phase d'un alliage à mémoire de forme sous contrainte nulle.

Grâce à ce changement de phase, il est possible de déplacer une charge mécanique, un poids dans un premier temps, simplement en chauffant un fil en alliage à mémoire de forme. Comment ? Eh bien en suspendant à un fil en Alliage à Mémoire de Forme ce poids. Le fil, pour l'instant à température ambiante, est dans sa phase martensitique, qui est très élastique. On constate alors un allongement conséquent. En chauffant le fil, celui-ci va se transformer peu à peu dans sa phase austénitique, bien plus rigide que la martensite. Par conséquent, à contrainte constante (le poids n'a pas changé), la déformation est moindre : l'allongement est

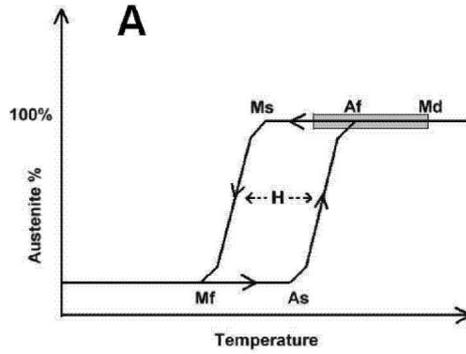


FIG. 5.15 – La même représentation, mais en faisant apparaître l’hystérésis.

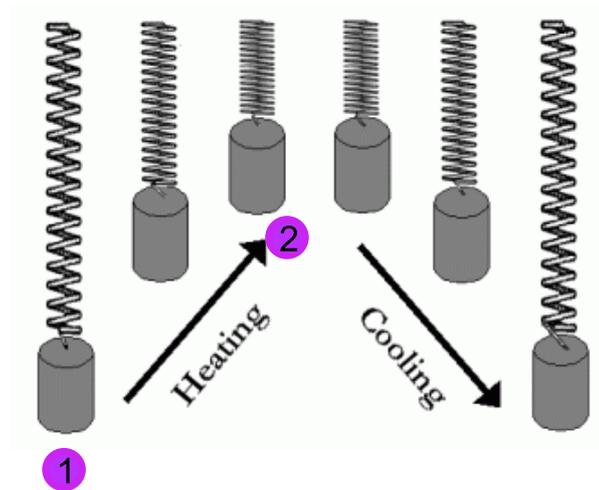
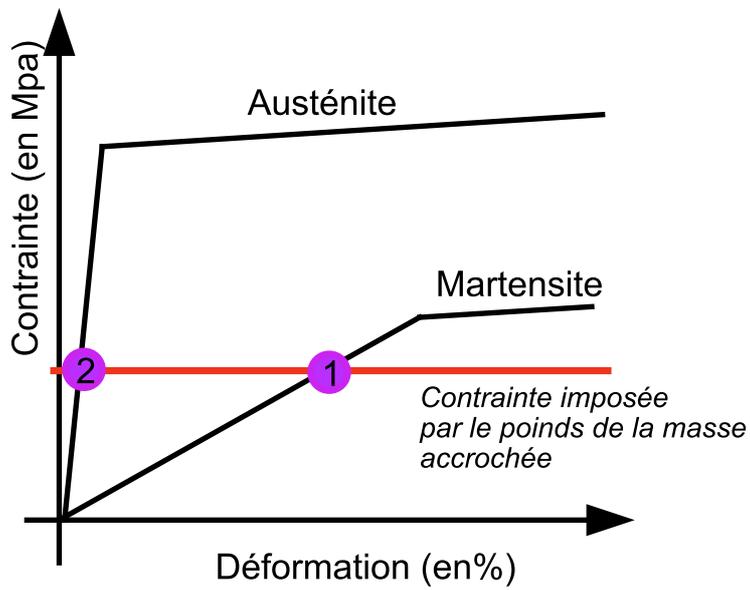


FIG. 5.16 – Principe d’actionnement par AMF. un fil d’AMF est plus ou moins élastique selon la phase du matériau. Il en résulte, pour une même contrainte, des allongements différents.

plus faible. C'est ce qui est décrit figure 5.16 où l'on a représenté le poids actionné, ainsi que les caractéristiques contrainte-déformation pour chaque état.

Si les déplacements relatifs obtenus par cet effet sont importants, avec des contraintes admissibles énormes, le principal inconvénient lié à leur utilisation reste les temps de réponse du système (entre 0,1 s et 1 s), en réalité dû au temps de réponse thermique (il faut chauffer puis refroidir). Pour pallier cet inconvénient, certains chercheurs ou ingénieurs ont proposé un autre mécanisme basé sur la réorientation par le champ magnétique des domaines martensitiques. On obtient alors des alliages à mémoire de forme magnétique.

Les matériaux à mémoire de forme se trouvent conditionnés sous forme de ruban, de tube de fil. Ce fil est parfois enroulé en ressort, car la longueur de fil est plus importante, mais pour un encombrement moindre (figure 5.17)

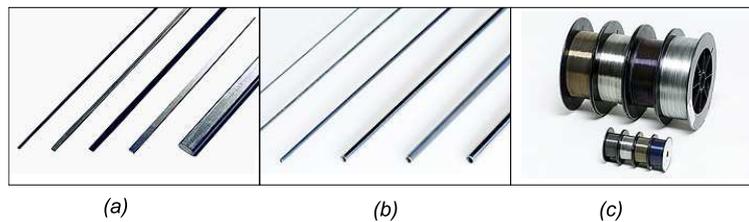


FIG. 5.17 – Conditionnement des alliages à mémoire de forme : (a) en ruban, (b) en tube, (c) en fil.

Ils trouvent beaucoup d'applications diverses et variées. Nous connaissons tous ces ustensiles pratiquement incassables qui reprennent leur forme après un choc par simple réchauffage (lunettes, pare-chocs,...). On trouve aussi des fils d'AMF qui permettent d'**actionner** de petits mécanismes (par exemple en modèle réduit). En nano technologie, cette propriété est utilisée pour réaliser des objets de préhension (pinces,...), point de départ à la fabrication de nano-robots.

## 5.4 Les fluides électro- et magnéto-rhéologiques

Certains fluides chargés par de petites particules dispersées dans une solution ont la propriété de changer de manière *rapide et réversible* leurs propriétés rhéologique (la viscosité par exemple) sous l'application d'un champ électrique (fluide électrorhéologique) ou magnétique (fluide magnéto-rhéologique). Par exemple, un piston contenant un fluide magnéto-rhéologique sera actionné pratiquement sans effort. Mais si l'on colle un aimant permanent à la surface de ce piston, les particules chargeant le fluide se polarisent, et la viscosité, devenant tellement grande, rend impossible la manipulation à la main.

D'un point de vue microscopique, que ce soit pour un fluide magnéto ou électro rhéologique, le champ créé provoque la polarisation des particules. Les dipôles ainsi induits s'attirent mutuellement, et s'alignent selon une direction parallèle au champ imposé. Ces chaînes, parallèles les unes aux autres, sont suffisamment solides pour s'opposer au flux du fluide. La figure 5.18 montre une vue en coupe d'un fluide électro-rhéologique pendant et après polarisation.

Les particules ont un diamètre d'environ  $10\mu m$ . Leur taille est une caractéristique importante : trop petite, leur comportement est mal défini et l'effet magnéto ou électro rhéologique est amoindri, trop grande, elles donnent lieu à des temps de réponse trop importants.

Le fluide lui aussi doit être choisi précautionneusement pour ne pas corroder les parois des récipients. L'eau est parfois choisie, mais elle peut engendrer de la rouille.

Finalement, un bon fluide magnéto ou électro rhéologique se caractérise par :

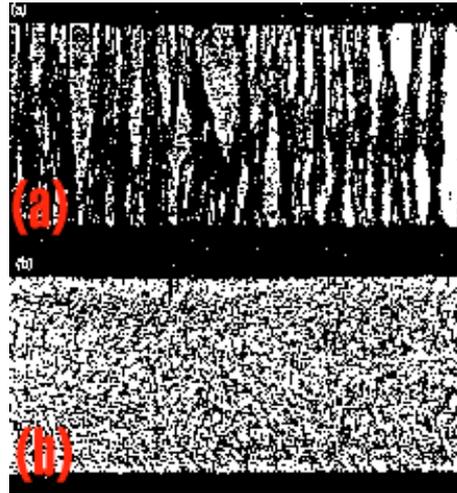


FIG. 5.18 – observation au microscope (a) de la fibrillation d’un fluide électrorhéologique (PAQR dans une huile de silice) lors de l’application d’un champ de 1kV (b) distribution aléatoire en l’absence de champ.

- un temps de réponse bas (2ms)
- la viscosité résiduelle en l’absence de champ de commande
- la pression d’écoulement dynamique sous champ maximum.

Ainsi, si l’on vient pousser sur cet assemblage (on parle de dispersion en solution) par l’intermédiaire d’un piston on ressent une forte résistance lorsqu’un champ existe, et à l’inverse, sous champ nul, la répartition désordonnée des particules ne provoque pas, ou presque, de résistance. On obtient ainsi un frein contrôlable par l’intensité du champ imposé. Sur la figure 5.19 nous avons relevé l’évolution de la force d’opposition en fonction de la vitesse de déplacement du piston. Sur cette figure, à une puissance positive (c’est à dire force et vitesse de même signe) correspond à un fonctionnement dissipateur du système. A l’inverse, à une puissance négative (force et vitesse de signe opposés) correspond un fonctionnement moteur du système : c’est lui qui fournit de l’énergie à son environnement. Or nous constatons d’une part sur cette figure qu’effectivement la force d’opposition est une fonction du champ magnétique de commande (la force augmente avec celui-ci) et d’autre part, que la majorité des points de fonctionnement sont situés dans la zone dissipateur. En effet, de tels fluides ne convertissent pas l’énergie électrique en énergie mécanique, comme c’est le cas des autres formes de matériaux électro-actifs. Ils ne sont capables que de la dissiper. C’est pour cela qu’ils ne seront utilisés que dans des systèmes amortisseurs, ou freins, variables et paramétrables à l’infini par leur champ de commande.

Les fluides magnéto rhéologiques sont plus simples à mettre en œuvre. C’est pourquoi, il existe aujourd’hui un grand nombre de systèmes utilisant de tels fluides. Des freins variables sont commercialisés, ils possèdent l’avantage de ne pas présenter de couple résiduels hors alimentation. Sur un principe semblable, les embrayages à fluides électro rhéologique sont en voie de développement.

Fortement développés, les amortisseurs variables sont bien souvent les applications phares de ces fluides. On les retrouve dans les automobiles de courses, les pilotes appréciant de pouvoir régler le profil de réponse de leurs amortisseurs en fonction de la portion de circuit. Ils sont aussi envisagés pour réaliser des filtres plus ou moins actifs de secousses sismiques. Enfin, installés sur des prothèses de jambes, ils permettent de régler la dureté de la réponse de l’amortisseur (figure 5.20) : molle pour de la marche, très dure pour la descente d’un escalier.

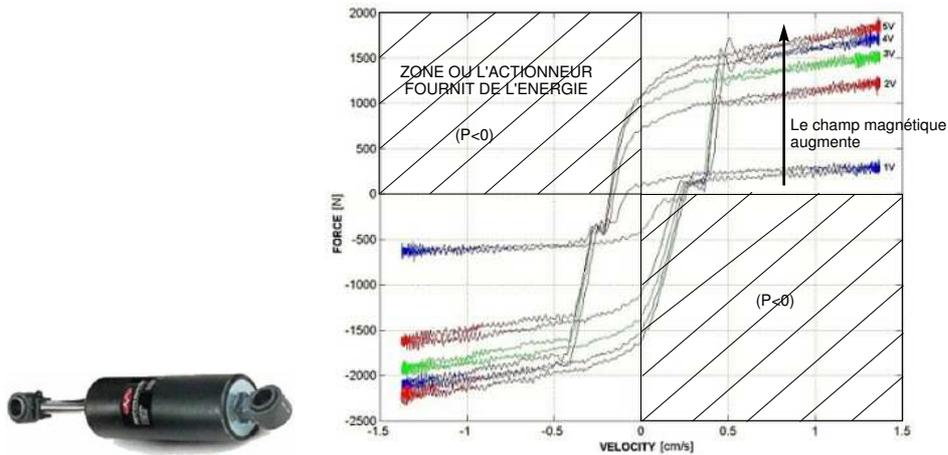


FIG. 5.19 – Un système à fluide magnétorhéologique : un amortisseur. A droite, les points de fonctionnement dans le plan force vitesse (orientation récepteur). Ces points se situent principalement dans les zones où la puissance reçu par ce dispositif est positive, montrant bien que ce système ne génère pas de puissance mécanique, il la dissipe sous forme de chaleur.



FIG. 5.20 – Une prothèse de jambe utilisant un amortisseur commandable.

Dans tous ces domaines, les efforts de recherches se portent sur l'amélioration des performances de ces fluides (rôle des chimistes), mais aussi pour la conception des dispositifs (et notamment pour réaliser le circuit magnétique) ainsi que les lois de commandes agissant sur le champ.

page web :<http://www.soton.ac.uk/dyh/david3/erf1.html>

## 5.5 Conclusion

Au cours de ce premier chapitre, nous venons de décrire le fonctionnement des principaux matériaux électroactifs. Nous avons vu comment l'énergie électrique peut modifier l'organisation de la matière, créant des déformations des échantillons.

Nous avons ensuite vu certaines applications qui ont su tirer un certain bénéfice de ces propriétés. Le gain obtenu se calcule en terme de précision, d'encombrement ou même de fonctionnalité autrement impossible à obtenir par les solutions classique de conversion d'énergie (essentiellement électromagnétique).

Cette partie constitue un survol des phénomènes et des applications. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons exclusivement au cas de la piézo-électricité. Nous formalisons, à l'aide des équations constitutives les phénomènes, pour le caractériser davantage.

## Chapitre 6

# Etude du phénomène piézo-électrique

Les qualités piézo-électriques du quartz furent pressenties au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle à la suite des travaux précurseurs de l'abbé René Just Haüy. Ce fondateur de la cristallographie a en effet par ses observations de la matière (étude systématique de la morphologie générale des cristaux) apporté de grandes connaissances au niveau de la géométrie atomique des cristaux et participé à en déterminer des lois structurales.

" L'effet direct " de la piézo-électricité sera mis en évidence par Pierre Curie et son frère Paul Jacques Curie à Paris en 1880 ; le mot piézo-électrique tiré du grec " piézo " veut dire pression.

Cette découverte attira immédiatement l'attention des scientifiques : le français Gabriel Lippmann (1845-1921, Prix Nobel de physique en 1908 et inventeur de la photographie couleur) démontra de son côté quelques années plus tard que le phénomène était réversible ; ainsi si des signaux électriques sont appliqués sur le cristal, celui-ci se dilate et se contracte dans une certaine direction, sa résonance mécanique favorisant les vibrations à une certaine fréquence. C'est grâce à cette dernière propriété que le quartz a atteint une telle notoriété.

Wilhelm Gottlieb Hankel, William Thomson (lord Kelvin) et surtout Woldemar Voigt participèrent de cette connaissance et la théorie du phénomène était à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle presque complètement établie.

C'est lors de la guerre de 1914-1918 que la piézo-électricité entra dans le champs des applications pratiques avec Paul Langevin et l'apparition du sonar. Le premier oscillateur électronique stabilisé par un cristal de quartz sera réalisé par Walter G. Cady en 1918. Ce dernier établit le schéma électrique équivalent du résonateur piézo-électrique. L'utilisation de l'électronique associée à ces effets piezo-électriques permet la génération de fréquences électriques, donc d'échelles de temps, extrêmement stables ; c'est ainsi que dans les années trente les irrégularités de rotation de la Terre ont pu être démontrées.

Cette famille de matériaux comporte en son sein un couplage électro-élastique fort. Ce couplage, qui n'a lieu que dans certains réseaux cristallins non axo-symétriques, est décrit par une série d'équations locales, appelées équations constitutives de la piézo-électricité.

Dans la première partie de ce chapitre, nous mettons en place ces équations, et nous donnerons une interprétation des constantes mises en jeu. Puis, nous verrons de manière qualitative les différences entre les différents matériaux piézo-électriques : leurs limitations et leurs usages. Enfin, nous aborderons le thème du fonctionnement oscillant, très utilisé en pratique.

## 6.1 Les notations utilisées

Au cours de cette partie, nous définissons un repère orthonormé direct  $\mathfrak{R}_1 = (O, x_1, x_2, x_3)$  tel que défini figure 6.1.

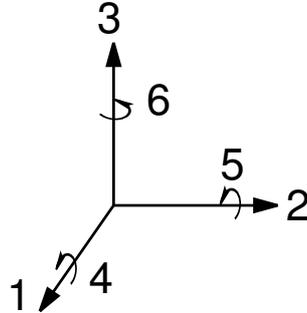


FIG. 6.1 – Repère associé aux vecteurs contrainte et déformation.

En plus de ces trois axes principaux, on rajoute trois axes de rotation  $(x_4, x_5, x_6)$  qui porteront les composantes des rotations autour de ces axes.

Dans ces conditions, le vecteur contrainte  $T$  aura pour coordonnées  $T = (T_1, T_2, \dots, T_6)$ . On peut s'interroger sur la présence des termes  $T_4, T_5$  et  $T_6$  dans un espace à trois dimensions, mais en général, *dans nos applications*, il n'y a pas de rotation si bien qu'ils seront souvent nuls.

Sous l'action de ces contraintes, un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  du barreau avant déformation se déplace en  $M'$  ; on appelle alors  $\vec{U} = \overline{MM'}$  le vecteur déplacement de coordonnées  $(u, v, w)$ .

On appelle déformation le déplacement relatif dans un milieu. Déplacement et déformation sont liés par l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} & S_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} & S_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ S_4 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & S_5 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & S_6 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Les équations constitutives donnent le lien entre contrainte, déplacement et champ électrique.

Le champ électrique, tel qu'il est défini dans le cours d'électricité, n'aura que trois composantes spatiales  $E = (E_1, E_2, E_3)$ .

Enfin, le déplacement électrique, lui aussi, sera défini par ses trois composantes  $D = (D_1, D_2, D_3)$ . Par définition, la quantité de charge  $Q$  contenu à l'intérieur d'un volume délimité par la surface fermée  $S$  s'exprime par  $Q = \int_S D dS$ .

## 6.2 Les équations constitutives

### Mise en évidence du couplage

Dans les matériaux piézo-électriques soumis conjointement à un processus de déformation mécanique (énergie mécanique stockée) et de polarisation électrique (énergie électrique stockée), vient s'ajouter un terme propre à l'énergie de couplage électromécanique. Si bien que pour des conditions de température constante et pour un échantillon isotherme, homogène et

sans champ magnétique appliqué, la fonction d'enthalpie libre volumique du système prend la forme :

$$G = -\frac{1}{2}s^E.TT^* - d.T.E - \frac{1}{2}\varepsilon^T.E.E^* \quad (6.2.1)$$

## Expression des contraintes et des déplacements

De l'expression 6.2.1, nous pouvons déduire aisément, par différenciation, les équations constitutives de la piézo-électricité :

– Pour les composantes du vecteur contrainte

$$S_i = - \left. \frac{\partial G}{\partial T_i} \right|_E = s_{ij}^E T_j + E_k d_{ki} \quad i, j \in \{1..6\} \quad k \in \{1..3\} \quad (6.2.2)$$

– Pour les composantes du déplacement électrique

$$D_k = - \left. \frac{\partial G}{\partial E_k} \right|_T = d_{ki} T_i + \varepsilon_{kl}^T E_l \quad i, j \in \{1..6\} \quad k \in \{1..3\} \quad (6.2.3)$$

Ces équations peuvent se mettre sous une forme matricielle, plus simple à manipuler

$$S = s^E T + d^t E \quad (6.2.4)$$

$$D = dT + \varepsilon^T E \quad (6.2.5)$$

Les matrices  $s^E$ ,  $d$  et  $\varepsilon^T$  sont des paramètres du matériau utilisé. Elles adoptent des formes particulières, justement à cause de l'effet piézo-électrique. Dans le cas particulier d'une polarisation selon l'axe  $x_3$ , ces matrices prennent les formes suivantes :

$$s^E = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{11}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix} \quad (6.2.6)$$

$$\varepsilon^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

Ces équations ne permettent pas d'appréhender de manière simple le comportement physique d'un matériau piézo-électrique. A cette fin, nous allons prendre l'exemple d'un barreau de céramique PZT et décrire qualitativement et quantitativement ses réactions face à une alimentation électrique.

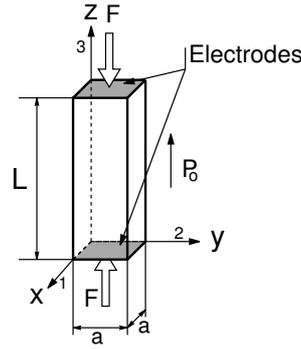


FIG. 6.2 – Description de l'élément étudié.

### Fonctionnement quasi-statique : exemple de calcul sur un barreau de céramique PZT.

Considérons le système décrit figure 6.2 formé d'un barreau de céramique PZT de longueur  $L$  et de section carrée  $a \times a$ , encastré en  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . Les caractéristiques du matériau le constituant sont données par les relations 6.2.6, 6.2.7 et 6.2.8. Un effort  $F$  comprime le barreau dans la direction  $z$ , et deux électrodes métalliques sont collées sur ses deux faces extrêmes. Lorsqu'on applique une tension  $V$  aux bornes des électrodes, le barreau se déforme, et nous allons calculer  $A_L$  son allongement selon l'axe  $z$ .

Dans l'hypothèse où cet allongement est faible, le vecteur champ électrique s'exprime simplement en fonction de  $V$  :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 = \frac{V}{L} \end{pmatrix} \quad (6.2.9)$$

Nous faisons l'hypothèse d'un régime quasi-statique, c'est à dire que les variations des sollicitations extérieures au système en fonction du temps sont pratiquement nulles, si bien que l'on néglige les effets dynamiques. Alors, l'écriture du tenseur de cohésion pour une section de barreau, fait apparaître que le vecteur contrainte est donné par :

$$T = \left( 0, 0, T_3 = -\frac{F}{a^2}, 0, 0, 0 \right)^t \quad (6.2.10)$$

Grâce à l'équation 6.2.4, il est possible d'expliciter le vecteur déformation :

$$S = (s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3, s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3, s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3, 0, 0, 0) \quad (6.2.11)$$

Si bien que l'on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

La solution générale de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= (s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3)x + U_0(y, z) \\ v(x, y, z) &= (s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3)y + V_0(x, z) \\ w(x, y, z) &= (s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3)z + W_0(x, y) \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Sous force et champs nuls, le barreau est à l'état libre, et le vecteur déplacement doit par définition être aussi nul. D'autre part, les conditions d'encastrement permettent d'écrire que les déformations sont nulles en  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ .

On montre alors que les constantes d'intégration sont nulles, et l'allongement  $A_L$  est donné par :

$$\begin{aligned} A_L &= w(z = L) \\ &= (s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3) L \\ &= -\frac{s_{33}^E L}{a^2} F + d_{33} V \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Nous avons tracé figure 6.3 l'évolution de l'allongement  $A_L$  en fonction de la tension appliquée  $V$  pour différentes valeurs de  $F$ . Ces courbes sont des droites si les divers coefficients des matrices  $d$  et  $S^E$  sont constants; en réalité ce n'est pas le cas, et un phénomène d'hystérésis apparaît.

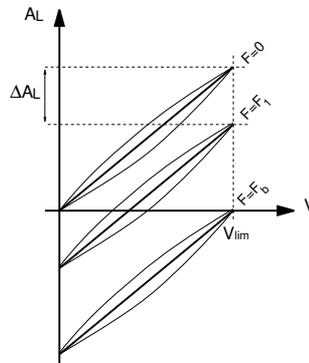


FIG. 6.3 – Allongement du barreau en fonction de la tension appliquée pour différentes valeurs d'effort.

Le comportement du barreau est comparable à celui d'un piston hydraulique ou pneumatique, la pression du fluide étant analogue à la tension appliquée : à force nulle, le piston se déploie. A pression constante, si on vient le charger par un effort  $F$ , l'allongement diminue. Dans le cas d'un barreau piézo électrique cette diminution  $\Delta A_L$  d'allongement à tension constante est donné par l'équation 6.2.14 :

$$\Delta A_L = -\frac{s_{33}^E L}{a^2} \Delta F \quad (6.2.15)$$

Compte tenu des propriétés diélectriques du matériau, on doit veiller à ne pas dépasser une tension maximum notée  $V_{lim}$ . Il existe alors une force de blocage  $F_b$ , telle que le déplacement est nul sous  $V_{lim}$ ,

$$F_b = \frac{d_{33}}{s_{33}^E L} a^2 V_{lim} \quad (6.2.16)$$

Ainsi, un barreau de section  $6 \times 6mm$  et de longueur  $9mm$  présente un allongement de  $4,5\mu m$  sous  $V_{lim} = 1000V$ . Ces déplacements sont faibles, mais la force bloquée  $F_b$  est considérable, car elle vaut  $1200N$ .

On s'attache à présent à caractériser de manière électrique cet actionneur. Pour cela, reprenons l'équation 6.2.5, permettant de calculer le déplacement électrique. Compte tenu des valeurs de  $E$  et  $T$  exprimées par les équations 6.2.9 et 6.2.10, le vecteur  $D$  s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 = -d_{33} \frac{F}{a^2} + \varepsilon^T \frac{V}{L} \end{pmatrix} \quad (6.2.17)$$

Nous remarquons que cette quantité est constante dans le matériau, et en particulier sous les électrodes. On peut alors calculer la charge électrique sous une électrode. Choisissons celle placée à l'origine ; on pourra montrer que le résultat est identique pour l'autre :

$$Q = \int_S DdS = -d_{33}F + \varepsilon_{33}^T \frac{a^2}{L} V \quad (6.2.18)$$

Cette charge est composée de deux termes : le premier, proportionnel à l'effort appliqué, est nul pour un actionneur à vide. En revanche, pour le deuxième, nous reconnaissons une charge électrique proportionnelle à la tension  $V$  appliquée. D'un point de vue électrique, nous avons là affaire à une capacité, que l'on nommera  $C_o$ , qui tient compte des propriétés diélectriques du matériau, en parallèle avec un élément caractéristique de l'effort appliqué ( figure 6.4 ).

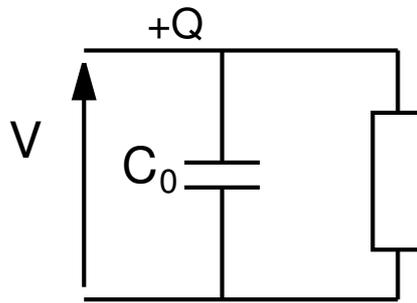


FIG. 6.4 – Caractéristique électrique du barreau de céramique.

Nous avons alors,

$$C_o = \varepsilon^T \frac{a^2}{L} \quad (6.2.19)$$

D'autre part, l'équation 6.2.13 nous montre qu'outre un déplacement principal sur l'axe  $z$  deux déplacements parasites existent sur les axes transversaux. Ce phénomène est appelé couplage ; en agissant sur les dimensions géométriques de la céramique, et sur la direction du champ électrique par rapport à celle de la polarisation, ces déplacements peuvent devenir prépondérants. La figure 6.5 donne la terminologie associée à ces couplages.

Ainsi, nous appréhendons mieux par cet exemple les caractéristiques principales d'un actionneur piézo électrique : des déplacement élémentaires très faibles, mais des forces développées considérables. De plus, nous avons montré que les déformations observées pouvaient se faire selon différentes directions, avec des placements d'électrodes selon plusieurs axes, autant de possibilités pour concevoir la géométrie des éléments piézo-électriques.

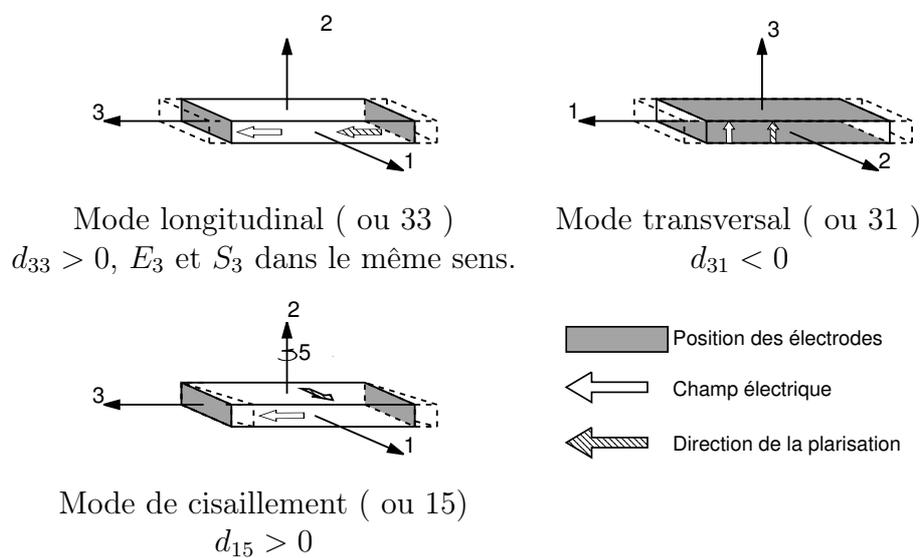


FIG. 6.5 – Les différents modes de couplage d'un élément piézo-électrique.