# MESURER LE TEMPS EN ALLUMANT DES MÈCHES

**Un problème de récréation mathématique fait surgir des énoncés indécidables plus simples que ceux que l'on connaissait.**


L'AUTEUR

**JEAN-PAUL DELAHAYE**
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).


Tout commence avec le problème de récréation mathématique suivant. Vous disposez de deux mèches qui, chacune, brûle en 1 minute quand on en allume une extrémité. Vous pouvez allumer les deux extrémités d'une mèche en même temps si vous le souhaitez, mais vous ne pouvez pas les couper, car leur homogénéité n'est pas parfaite et il n'est donc pas certain qu'elles brûlent à vitesse constante. On suppose aussi que la vitesse de combustion des mèches ne dépend pas du sens de la propagation du feu. Comment s'y prendre pour mesurer une durée de 45 secondes ?

C'est relativement facile : vous allumez les deux extrémités de la première mèche et une extrémité de la seconde. Vous attendez que la première mèche soit entièrement consumée. Cela prend 30 secondes. À l'instant où la première mèche finit de brûler, vous allumez la seconde extrémité de l'autre mèche dont une partie (la moitié « temporelle ») a déjà brûlé. Il faut 15 secondes supplémentaires pour que la deuxième mèche se consume entièrement. Cela fait un total de 45 secondes (*voir l'encadré 1*).

Bien sûr, le problème se généralise et on peut simplement s'interroger sur les durées mesurables quand on dispose d'autant de mèches que nécessaire, chacune brûlant en une unité de temps.

Comme précédemment, on ne s'autorise pas à couper les mèches, car cela serait inutile : elles ne brûlent pas à vitesse constante, seule la durée totale de combustion est certaine. On imagine aussi qu'on est assez adroit pour allumer simultanément autant d'extrémités de mèches qu'on le désire, à condition de le faire soit à l'instant 0, soit à des instants où d'autres mèches cessent de brûler.

L'ensemble F des instants qu'on peut mesurer avec de telles mèches est l'ensemble des nombres dits « fusibles ». Amusez-vous à montrer que 23/16 et 53/32 sont des nombres fusibles (*voir l'encadré 1 pour les solutions*).

L'ensemble F est d'une incroyable richesse qui a été découverte et étudiée par Jeff Erickson, de l'université de l'Illinois, aux États-Unis, Gabriel Nivasch, de l'université d'Ariel, en Israël, et Junyan Xu, de l'université de l'Indiana à Bloomington, aux États-Unis. Bien que le sujet soit exploré depuis plusieurs années, ce n'est que tout récemment que ces trois chercheurs ont publié un article détaillé (*voir la bibliographie*) décrivant la structure de F ainsi que des conséquences étonnantes impliquant la notion d'indécidabilité.

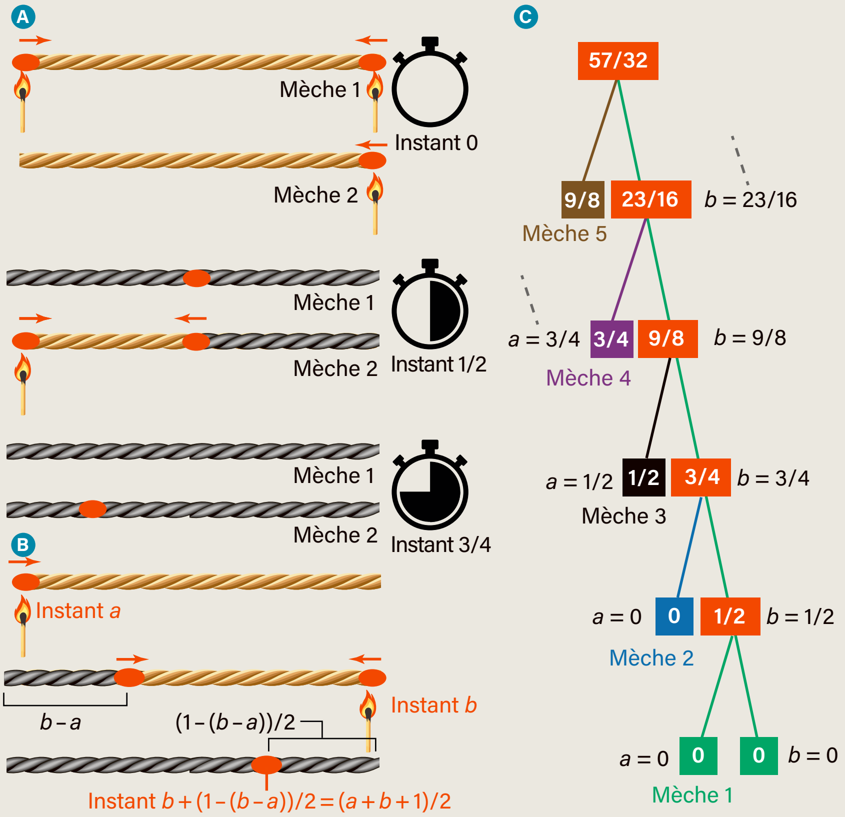
Comprendre les nombres fusibles exige l'utilisation d'outils avancés qui échappent à l'arithmétique de base, l'« arithmétique de

## 1 MÈCHES SIMPLES

**Avec deux mèches brûlant une unité de temps quand on en allume une extrémité, il faut mesurer 3/4 d'unité de temps. La solution est donnée en A.**

**En B, on a dessiné le schéma montrant que si l'on connaît des solutions pour les durées *a* et *b* avec $|a - b| \le 1$, on en connaît aussi une pour $(a + b + 1)/2$.**

**Cette formule est utilisée sur le graphe C pour l'allumage des mèches afin d'obtenir les durées 1/2, 3/4, 9/8, 23/16, 57/32. On obtient le temps 1/2 avec *a* = 0, *b* = 0 (une seule mèche), le temps 3/4 avec *a* = 0 et *b* = 1/2 (deux mèches), 9/8 avec *a* = 1/2 et *b* = 3/4 (trois mèches), etc.**




Peano». C'est la première fois que cette impuissance apparaît à propos d'un problème aussi élémentaire tiré d'une récréation mathématique. Nous verrons aussi que le problème conduit à la définition d'une fonction aux propriétés inouïes et qui fera plier tout ordinateur, aussi puissant soit-il.

On sait donc maintenant que l'indécidabilité démontrée par le logicien autrichien Kurt Gödel concerne des énoncés élémentaires. Cela montre, pour ceux qui en doutaient encore, qu'elle n'est pas un jeu gratuit de logiciens, mais bien une difficulté sur laquelle tout mathématicien peut tomber par surprise.

## DÉFINITION EN UNE LIGNE

L'ensemble F des nombres fusibles se définit par une formule qui tient sur une ligne:

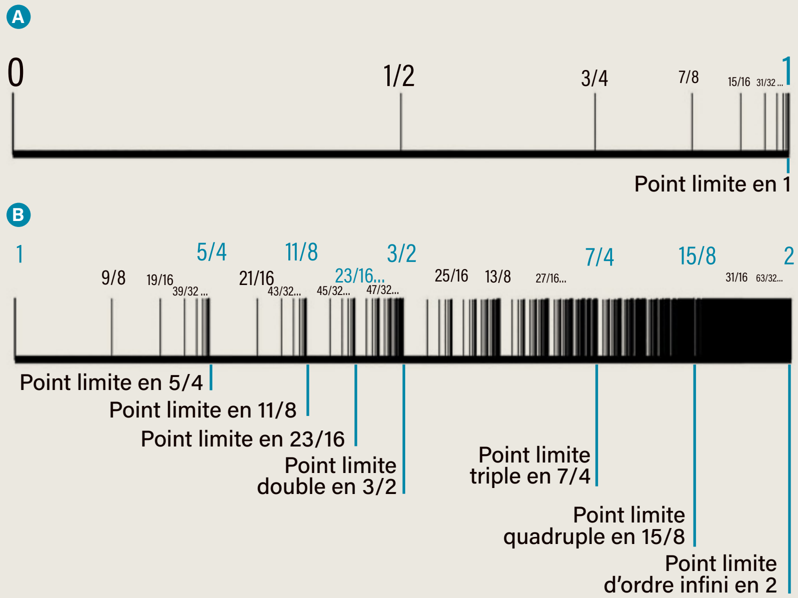
$0 \in F$ et $[a, b \in F$ et $|a-b| \le 1 \Rightarrow (a+b+1)/2 \in F]$.

Justifions cette formule. Soit $a$ et $b$ deux nombres fusibles tels que $a<b$ et tels que leur différence soit inférieure à 1, la longueur d'une mèche en unité de temps. Par hypothèse, on sait mesurer les durées $a$ et $b$. On prend une mèche de plus que celles nécessaires pour mesurer $a$ et $b$; on en allume une extrémité à l'instant $a$, et l'autre extrémité à l'instant $b$. La mèche brûle donc durant $b-a$ unité de temps avant que sa seconde extrémité soit allumée. La longueur de mèche restante correspond alors à $1-(b-a)$ unité de temps. Et comme ce restant est allumé à ses deux extrémités, il brûle en $(1-(b-a))/2$ unité de temps (*voir l'encadré 1*). Au total, la mèche finira de brûler précisément à l'instant:

## 2 L'ENSEMBLE DES NOMBRES FUSIBLES

**L'ensemble F des nombres fusibles est l'ensemble des durées qu'on peut mesurer avec des mèches, comme dessiné dans l'encadré 1. Grâce à la formule qui indique que si *a* et *b* sont dans F avec $|a - b| < 1$, alors $(a + b + 1)/2$ est aussi dans F, on trouve plusieurs séries infinies de nombres fusibles.**

**En A, on a figuré la série $1 - 1/2^n$, qui donne le point limite 1 *(voir les calculs dans le texte de l'article)*. En B, on commence par la série $5/4 - 1/2^{n+1}$, qui donne le point limite 5/4. Tous les nombres de la forme $3/2 - 1/2^{m+1}$ sont aussi des points limites, et donc le nombre 3/2 est un point limite de points limites (« point limite double »). On trouve, plus à droite, que 7/4 est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera « point limite triple ». Et ainsi de suite. Cela conduit à un point limite d'ordre infini en 2.**



$a+(b-a)+(1-(b-a))/2 = (a+b+1)/2$. Par commodité, on notera $a \sim b$ pour $(a+b+1)/2$.

Une autre propriété de F est évidente: si $a$ et $b$ sont des nombres fusibles, alors $a+b$ est aussi un nombre fusible: on prend des mèches pour arriver à l'instant $a$, puis d'autres mèches pour $b$, qu'on utilise en commençant à l'instant $a$ ; on atteint alors l'instant $a+b$.

Nous avons vu que 0, 1/2, 3/4 et 1 sont des nombres fusibles. Il en est donc de même de toutes les sommes qu'on peut faire avec ces quatre nombres.

Examinons de plus près l'ensemble F. Il contient aussi:

$0 \sim 3/4 = 7/8 = 1-1/8$;

$0 \sim 7/8 = 15/16 = 1-1/16$;

$0 \sim 15/16 = 31/32 = 1-1/32$; etc.

Pour tout entier positif $n$, le nombre $1-1/2^n$ est donc dans F. On peut représenter cela comme dans l'encadré 2. Le nombre 1, qui est dans F, est la limite d'une suite croissante de points de F. On dit que 1 est un point limite de points de F. On vérifie que pour tout entier $n$, $1/2 \sim (1-1/2^n) = 5/4-1/2^{n+1}$, et donc 5/4 est lui aussi un point limite de points de F. Il en est de même de 11/8, car $3/4 \sim (1-1/2^n) = 11/8-1/2^{n+1}$. Plus généralement, $(1-1/2^m) \sim (1-1/2^n) = 3/2-1/2^{m+1} - 1/2^{n+1}$ et donc tous les nombres de la forme $3/2-1/2^{m+1}$ sont des points limites.

C'est amusant: le nombre 3/2 est un point limite de points limites. Nous dirons que c'est un «point limite double» (*voir la figure de l'encadré 2*).

En poursuivant l'étude, on trouve que 7/4 est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera «point limite triple». Mais ce n'est pas fini: il existe un point limite quadruple (15/8), quintuple (31/16), etc. Ces points limites sont de plus en plus serrés les uns contre les autres et s'approchent de 2, ce qui fait de 2 un «point limite d'ordre infini». Regardez attentivement l'encadré 2 et repérez bien cette cascade fascinante de points limites multiples.

Bien sûr, au-delà de 2, les choses empirent et les points de F se tassent encore bien plus

3

## LES ORDINAUX DE CANTOR

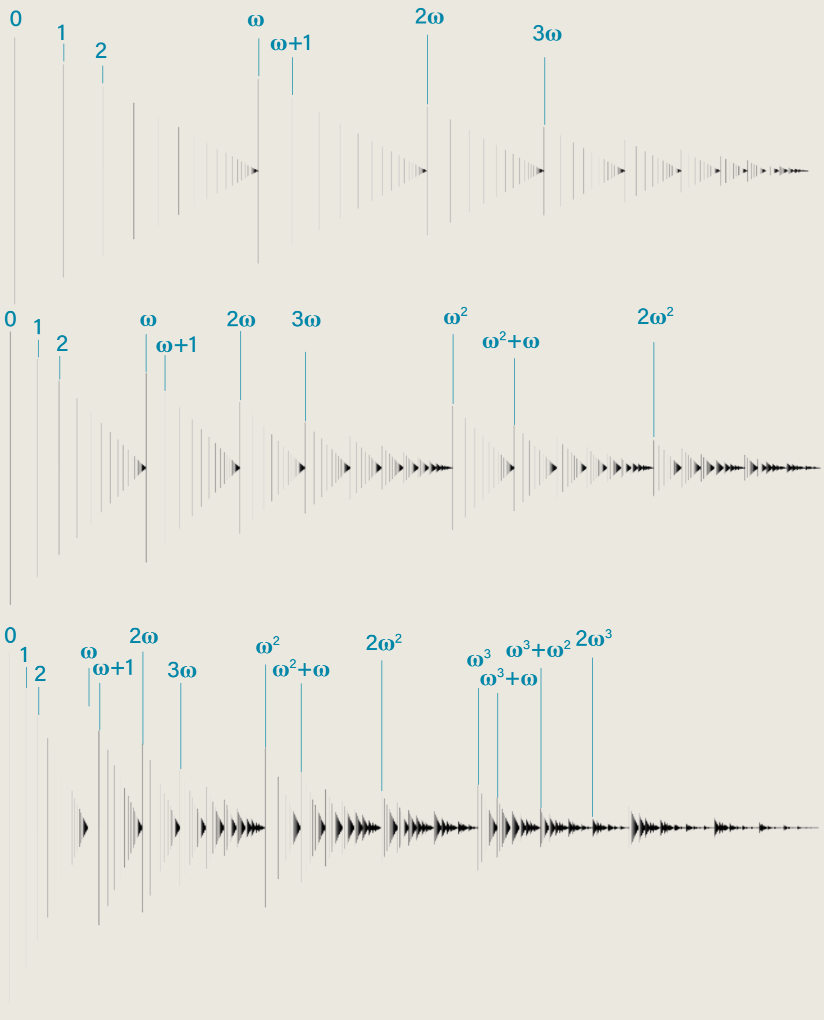
**L'idée des ordinaux de Cantor est que l'on peut sans problème ajouter aux entiers un nombre symbolique ω et décréter qu'il est plus grand que tous les entiers 0, 1, 2, ..., *n*, ... On obtient un nouvel ensemble ordonné qui a un point à l'infini. On peut de même ajouter un nouveau nombre symbolique ω + 1 et décréter qu'il est plus grand que ω. On ajoute ensuite ω + 2, ω + 3, etc.**

**Une fois cet ensemble infini de nouveaux nombres obtenu, on peut à nouveau ajouter un élément symbolique 2ω, puis ajouter encore 2ω + 1, puis 2ω + 2, ... Au-delà, on arrive à 3ω, 3ω + 1, ... Une fois tous les *n*ω considérés, on arrive à $\omega^2$. L'idée se prolonge : on arrive à $\omega^3$, $\omega^4$, ..., puis $\omega^\omega$, puis encore et encore, bien au-delà de tout ce qu'on peut imaginer. C'est ce qu'on nomme les « ordinaux de Cantor ». John von Neumann en a proposé une définition ensembliste *(voir le texte)* qui rend précise la notion générale. Heureusement, pour comprendre la structure de l'ensemble F des nombres fusibles, il suffit de considérer le processus de génération des ordinaux jusqu'aux tours de ω :**

$$\omega^\omega \quad \omega^{\omega^\omega} \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \ldots$$

**L'ordinal qui suit est $\varepsilon_0$, dont on démontre qu'en un certain sens, c'est un ordinal que les axiomes de l'arithmétique de Peano ne peuvent pas maîtriser. Comme justement l'ensemble des nombres fusibles a la même structure que cet ordinal, certaines des propriétés de F échappent aux axiomes de Peano et sont des indécidables pour l'arithmétique de Peano.**

**Les figures sont des représentations un peu moins brutales que celles de l'ensemble des nombres fusibles illustré à l'encadré 2. Ces dessins (merci à David Madore de nous avoir autorisés à les utiliser), permettent de visualiser progressivement les ordinaux... du moins les plus petits !**



les uns contre les autres. Cela se produit d'une manière très ordonnée, même si notre esprit a un peu de mal à la saisir.

Le raisonnement mathématique s'impose. Il confirme que l'ensemble des nombres fusibles n'est pas un désordre inextricable, mais un objet soigneusement et rigoureusement agencé. Un premier résultat sur le nombre de mèches nécessaires pour arriver à un nombre fusible $p$ se démontre par un raisonnement par récurrence. Il prouve que les nombres fusibles appartiennent tous à une catégorie bien particulière de nombres réels.

## À LA RECHERCHE DE L'ORDRE DES NOMBRES FUSIBLES

Ce premier résultat est que F ne contient que des nombres dyadiques, c'est-à-dire de la forme $k/2^n$, où $k$ et $n$ sont des entiers positifs. Ils sont l'équivalent pour la numération binaire des nombres décimaux: dans le système binaire, leur écriture est finie.

Pour le démontrer, on suppose que tous les nombres fusibles auxquels on peut accéder en utilisant $k$ mèches au plus sont dyadiques. On voit, d'après la formule donnant $a \sim b$, que c'est encore vrai pour ceux qu'on atteint avec $k+1$ mèches, et donc c'est vrai pour tous les nombres fusibles.

Une conséquence de ce résultat est que F contient une infinité dénombrable d'éléments; autrement dit, ses éléments pourraient être numérotés $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$

Les deux résultats suivants sont plus difficiles à démontrer. Vous trouverez le détail des raisonnements dans l'article des trois chercheurs cités plus haut (*voir la bibliographie*).

D'abord, F est fermé au sens topologique, ce qui veut dire que toute suite convergente de nombres fusibles a pour limite un point qui est lui-même un nombre fusible.

Ensuite, F ne comporte pas de suite décroissante infinie ou, ce qui revient au même: pour tout nombre fusible $p$, il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que l'intervalle $]p, p+\varepsilon[$ (c'est-à-dire les nombres $x$ vérifiant $p<x<p+\varepsilon$) ne contient aucun autre élément de F.

Dit encore autrement, le dernier résultat signifie qu'il y a des points limites quand on va vers la droite, mais qu'il n'y en a pas quand on va vers la gauche. C'est un peu étonnant, mais en regardant bien le dessin (même seulement jusqu'à 3/2), on comprend que ça n'est en rien absurde.

Notons aussi qu'entre 0 et 1, il n'y a aucun autre nombre fusible que ceux mentionnés, c'est-à-dire de la forme $1-1/2^n$ avec $n$ entier.

Ceux qui ont déjà entendu parler des nombres ordinaux de Georg Cantor (1845-1918) ont reconnu que les nombres fusibles sont probablement liés à de tels nombres. C'est effectivement le cas et l'ensemble des nombres

## 4 UNE FONCTION INDÉCIDABLE ET IMPRATICABLE

**Quand on cherche à savoir quel est l'espace ne contenant pas de nombres fusibles derrière les nombres entiers, on tombe sur une fonction qui décroît très rapidement vers 0. Cet espace libre derrière 1 est plus petit que $M(1) = 1/8$. Il est plus petit que $M(2) = 1/2^{10}$ pour l'entier 2, et plus petit que $M(3) = 1/2^{1\,541\,023\,937}$ pour 3. Pour 4, on ne sait pas le calculer : le calcul devient trop long, même si on sait qu'il est fini.**

**La fonction qui donne ce majorant a une définition très simple :**
**Si $x < 0$, alors $M(x) = -x$ ;**
**si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x - M(x - 1))/2$.**

**Pour utiliser cette définition pour une valeur $x$, on lance le programme exprimant la définition et on le laisse faire. Il lancera le programme pour d'autres valeurs $y$, qui lanceront le programme pour d'autres valeurs, etc. Au bout du compte, quel que soit le $x$ choisi, le programme conclura – si la puissance de calcul de l'ordinateur est suffisante.**

**Considérons par exemple le calcul de $M(1) = M(1 - M(1 - 1))/2$. Le programme a besoin de $M(1 - 1) = M(0)$. Il lance donc le calcul $M(0) = M(0-M(-1))/2$, ce qui lui fait demander $M(-1)$. Le calcul de $M(-1)$ est immédiat et donne 1. Il peut donc simplifier $M(0 - M(-1))/2$ qui devient $M(-1)/2$, qui se simplifie en 1/2 : $M(0) = 1/2$. Il doit donc maintenant calculer $M(1/2) = M(1/2 - M(1/2 - 1))/2$, etc. La suite du calcul est représentée ci-dessous avec des notations évidentes. Le tout aboutit à $M(1) = 1/8$. Deux autres dessins représentent les calculs pour $M(3/2) = 1/32$ et $M(2) = 1/1\,024$. Ça marche, mais ça se complique !**

**Pour tout nombre réel $x$, la fonction $M$ termine toujours son calcul. Jamais elle ne se met à tourner en rond, ce qui se produirait si $M(y)$ appelait $M(y)$. L'affirmation « la fonction $M$ termine toujours » se démontre, mais en utilisant des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano. Même en la simplifiant en « la fonction $M$ termine pour tout entier », c'est une affirmation indécidable de l'arithmétique de Peano.**

**Avant la découverte de $M$, on ne connaissait aucune fonction aussi simple dont le comportement échappait au pouvoir de démonstration de l'arithmétique de Peano.**

```
|M(1):
|   M(0):
|      M(-1)=1
|      M(-1)=1
|   M(0)=1/2
|   M(1/2):
|      M(-1/2)=1/2
|      M(0):
|         M(-1)=1
|         M(-1)=1
|      M(0)=1/2
|   M(1/2)=1/4
|M(1)=1/8
```

```
|M(3/2):
|   M(1/2):
|      M(-1/2)=1/2
|      M(0):
|         M(-1)=1
|         M(-1)=1
|      M(0)=1/2
|   M(1/2)=1/4
|   M(5/4):
|      M(1/4):
|         M(-3/4)=3/4
|         M(-1/2)=1/2
|      M(1/4)=1/4
|      M(1):
|         M(0):
|            M(-1)=1
|            M(-1)=1
|         M(0)=1/2
|         M(1/2):
|            M(-1/2)=1/2
|            M(0):
|               M(-1)=1
|               M(-1)=1
|            M(0)=1/2
|         M(1/2)=1/4
|      M(1)=1/8
|   M(5/4)=1/16
|M(3/2)=1/32
```

```
|M(2):
|   M(1):
|      M(0):
|         M(-1)=1
|         M(-1)=1
|      M(0)=1/2
|      M(1/2):
|         M(-1/2)=1/2
|         M(0):
|            M(-1)=1
|            M(-1)=1
|         M(0)=1/2
|      M(1/2)=1/4
|   M(1)=1/8
|   M(15/8):
|      M(7/8):
|         M(-1/8)=1/8
|         M(3/4):
|            M(-1/4)=1/4
|            M(1/2):
|               M(-1/2)=1/2
|               M(0):
|                  M(-1)=1
|                  M(-1)=1
|               M(0)=1/2
|            M(1/2)=1/4
|         M(3/4)=1/8
|      M(7/8)=1/16
|      M(29/16):
|         M(13/16):
|            M(-3/16)=3/16
|            M(5/8):
|               M(-3/8)=3/8
|               M(1/4):
|                  M(-3/4)=3/4
|                  M(-1/2)=1/2
|               M(1/4)=1/4
|            M(5/8)=1/8
|         M(13/16)=1/16
|         M(7/4):
|            M(3/4):
|               M(-1/4)=1/4
|               M(1/2):
|                  M(-1/2)=1/2
|                  M(0):
|                     M(-1)=1
|                     M(-1)=1
|                  M(0)=1/2
|               M(1/2)=1/4
|            M(3/4)=1/8
|            M(13/8):
|               M(5/8):
|                  M(-3/8)=3/8
|                  M(1/4):
|                     M(-3/4)=3/4
|                     M(-1/2)=1/2
|                  M(1/4)=1/4
|               M(5/8)=1/8
|               M(3/2):
|                  M(1/2):
|                     M(-1/2)=1/2
|                     M(0):
|                        M(-1)=1
|                        M(-1)=1
|                     M(0)=1/2
|                  M(1/2)=1/4
|                  M(5/4):
|                     M(1/4):
|                        M(-3/4)=3/4
|                        M(-1/2)=1/2
|                     M(1/4)=1/4
|                     M(1):
|                        M(0):
|                           M(-1)=1
|                           M(-1)=1
|                        M(0)=1/2
|                        M(1/2):
|                           M(-1/2)=1/2
|                           M(0):
|                              M(-1)=1
|                              M(-1)=1
|                           M(0)=1/2
|                        M(1/2)=1/4
|                     M(1)=1/8
|                  M(5/4)=1/16
|               M(3/2)=1/32
|            M(13/8)=1/64
|         M(7/4)=1/128
|      M(29/16)=1/256
|   M(15/8)=1/512
|M(2)=1/1024
```

$$M(2) = 2^{-10}$$

fusibles possède une structure équivalente à celle de l'ordinal $\varepsilon_0$ dont nous allons expliquer la nature.

Certains ensembles ordonnés E ont la propriété d'être «bien ordonnés», ce qui veut dire que tout sous-ensemble de E possède un plus petit élément. C'est le cas de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls. Il est en effet bien clair que tout sous-ensemble S de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément: il y a un plus petit nombre impair, qui est 1; il y a un plus petit nombre entier à la fois multiple de 2, 3 et 5, qui est 30; etc. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, lui, n'est pas bien ordonné car, par exemple, le sous-ensemble constitué des nombres réels strictement positifs n'a pas de plus petit élément.

## LES ORDINAUX DE CANTOR À LA RESCOUSSE

Les ordinaux découverts par Cantor désignent les différentes sortes d'ensembles bien ordonnés. En utilisant la notation proposée par le mathématicien d'origine hongroise John von Neumann, il y a d'abord les ordinaux finis 0, $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, etc. L'ensemble $\{0, 1, 2, ..., n\}$ muni de la relation d'ordre $0<1<2<...<n$ est, pour von Neumann, l'ordinal $n+1$.

L'ensemble de tous les entiers, nous l'avons dit, est bien ordonné. On le note $\omega$ dans ce contexte. En prenant l'ensemble des entiers auquel on ajoute $\omega$ (considéré comme un élément), on obtient l'ordinal noté $\omega+1$, qui est $\{0, 1, ..., n, ...\} \cup \{\omega\}$, soit $\{\omega, 0, 1, ..., n, ...\}$. Cet ensemble est effectivement bien ordonné si l'on convient que $\omega$ est un nombre nouveau ajouté aux entiers et qu'il est plus grand que tous les entiers.

L'ordinal $\omega$ est le premier ordinal transfini de Cantor. L'ordinal $\omega+1$ est le second ordinal transfini de Cantor. On continue de la même façon en posant, pour tout entier positif $n$:

$\omega+(n+1) = (\omega+n) \cup \{\omega+n\}$.

Arrivé à ce point, on a une double série infinie d'inégalités :

$0<1<2<...<n<...<\omega$

$<\omega+1<\omega+2<\omega+3<...<\omega+n<...$

Sans surprise, en regroupant tous ces ordinaux, on en obtient un autre: $2\omega$. Pour des raisons techniques, on préfère souvent le noter $\omega 2$, mais nous n'utiliserons pas cette convention.

Si, maintenant, vous regardez l'encadré 2 en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à 1 non inclus, vous reconnaîtrez que c'est un ensemble bien ordonné de type $\omega$, c'est-à-dire du même type que $\mathbb{N}$. En ajoutant le nombre 1, c'est un ensemble bien ordonné de type $\omega+1$.

Toujours en examinant l'encadré 2 et cette fois en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à 5/4 non inclus, vous reconnaîtrez que c'est un ensemble bien ordonné de type: $2\omega=\{0, 1, ..., n, ...\} \cup \{\omega, \omega+1, ..., \omega+n, ...\}$. En allant jusqu'à 11/8, on a $3\omega$. Jusqu'à 23/16, on a $4\omega$. Ne cherchez pas à aller trop vite, regardez bien le dessin.

Au-delà de tous les $n\omega$, $n$ entier, on a $\omega^2$, qui est le type d'ordre des nombres fusibles jusqu'à 3/2. C'est lui qui nous a fait utiliser les mots «point limite double». Plus loin, le point limite triple 7/4 correspond à l'ordinal $\omega^3$. Au point limite quadruple 15/8 correspond l'ordinal $\omega^4$, puis, au-delà de tous ces points limites multiples, on arrive à 2 auquel correspond l'ordinal $\omega^\omega$.

Est-ce tout? Non, car au-delà de 2 la construction se poursuit. Les nombres fusibles sont de plus en plus serrés. C'est assez difficile à imaginer avec précision, mais c'est pourtant la structure de F! On tombe sur des tours de $\omega$:

$\omega^{\omega^\omega}$, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, etc.

Plus grand que tous ces ordinaux colossaux, juste au-dessus, se trouve celui que l'on note $\varepsilon_0$, qui est l'ordinal correspondant à l'ordre sur les nombres fusibles. Il y a bien d'autres ordinaux encore au-delà de $\varepsilon_0$, mais ils ne concernent plus les nombres fusibles. La totalité des nombres fusibles a un type d'ordre correspondant à $\varepsilon_0$, et c'est déjà pas mal!

## UN ÉNONCÉ INDÉCIDABLE DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO

Le dire est facile, le démontrer est plus difficile. C'est pourtant ce qu'ont fait les chercheurs autour de Jeff Erickson. Cependant, ils ont obtenu mieux encore. Ils ont considéré la conséquence évidente de ce résultat concernant F et $\varepsilon_0$, l'énoncé G: «Pour tout entier naturel $n$, il existe un plus petit nombre fusible supérieur à $n$», et ils ont démontré que même si l'énoncé G s'exprime dans le langage de l'arithmétique de Peano, celle-ci ne peut pas démontrer G. Autrement dit, l'affirmation G est un indécidable de l'arithmétique de Peano.

L'arithmétique de Peano est la théorie dont on se sert pour traiter des nombres entiers et des objets finis, et démontrer leurs propriétés et relations. Les axiomes de Peano contiennent les définitions de l'addition et de la multiplication des entiers et affirment l'exactitude du principe de raisonnement par récurrence. On a démontré que l'arithmétique de Peano est une théorie équivalente, en capacité de démonstration, à la théorie des ensembles dont on enlève l'axiome qui affirme qu'il existe des ensembles infinis pour le remplacer par l'axiome qui affirme que tous les ensembles sont finis.

On a espéré que cette théorie ne laisse échapper aucune affirmation vraie concernant les entiers et les objets finis. Les axiomes de

Peano permettent par exemple de prouver qu'il existe des nombres premiers aussi grands qu'on le veut, et bien d'autres propriétés concernant les graphes qui sont des objets mathématiques finis.

Les théorèmes d'incomplétude démontrés par Gödel en 1931 établissent cependant que l'arithmétique de Peano n'est pas suffisante pour tout savoir des nombres entiers ou des structures finies. Il existe des énoncés, provenant de considérations logiques ou mentionnant des autoréférences et portant uniquement sur les nombres entiers, que les axiomes de Peano ne peuvent pas démontrer, et qui pourtant sont vrais. On sait que de tels énoncés sont vrais, car on les démontre en utilisant des systèmes d'axiomes plus puissants en lesquels on a confiance, comme celui de la théorie des ensembles avec axiome de l'infini.

Même si les nombres fusibles sont des nombres réels, on peut exprimer et démontrer certaines de leurs propriétés en utilisant les axiomes de Peano, ou la théorie des ensembles finis. Il est facile par exemple de démontrer, comme on l'a fait plus haut, que tout nombre fusible est dyadique. L'affirmation G mentionnée précédemment s'exprime dans le formalisme de ces théories, et donc on pouvait espérer qu'elle s'y démontre. Pourtant, G n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano !

D'autres résultats d'indécidabilité vis-à-vis de Peano concernant des énoncés naturels et n'impliquant pas de notions de logiques mathématiques ont été obtenus en 1977 par Jeff Paris et Leo Harrington. Quelques autres ont suivi. Cela a établi d'une manière assez satisfaisante que, contrairement à ce qui avait été envisagé, certains indécidables ne proviennent pas de raisonnements utilisant des autoréférences logiques qu'un arithméticien n'envisage jamais de lui-même. Pourtant, aucun indécidable connu de l'arithmétique de Peano n'avait cette simplicité du résultat sur l'existence d'un plus petit nombre fusible derrière chaque entier, et aucun ne provient d'un problème de mathématique récréative qu'on peut expliquer en une minute autour d'une tasse de café à ses amis non mathématiciens. L'indécidabilité est donc bien une situation qui peut surgir partout en mathématiques.

## UNE FONCTION RÉCURSIVE TRÈS DIFFICILEMENT CALCULABLE

En étudiant la façon dont se serrent de plus en plus les nombres fusibles quand on va vers la droite, nos trois chercheurs ont découvert une fonction d'une simplicité parfaite à laquelle est associé un algorithme très simple, mais dont l'arrêt ne peut pas se démontrer avec l'arithmétique de Peano, même quand on se limite à n'envisager que des nombres entiers pour la variable. Cette fonction associe un nombre réel $M(x)$ à tout nombre réel $x$. Quelques symboles la définissent :

Si $x<0$, alors $M(x) = -x$;

si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x-M(x-1))/2$.

Il s'agit d'une définition récursive, à l'instar de la fonction factorielle définie sur les entiers naturels, que l'on notera ici fact$(n)$ : si $n = 0$, alors fact$(n) = 1$, sinon fact$(n) = n$fact$(n-1)$.

De telles définitions sont courantes en informatique où les langages de programmation les autorisent. Dans le cas de la fonction factorielle, on comprend bien que demander par exemple fact$(3)$ provoque l'appel de fact$(2)$, qui provoque l'appel de fact$(1)$, qui provoque l'appel de fact$(0)$, qui donne une réponse et conduit alors à la réponse pour fact$(1)$, puis pour fact$(2)$, puis pour fact$(3)$. Pour tout entier $n$, l'appel de fact$(n)$ conduit au résultat parce que l'ordinateur comprend la définition récursive et sait l'exploiter.

Dans le cas de la fonction $M$, c'est un peu plus compliqué, mais cela fonctionne aussi très bien (*voir l'encadré 4*). L'équipe autour de Jeff Erickson a démontré que quel que soit le nombre réel $x$, les appels que provoque la demande du calcul de $M(x)$ finissent par aboutir et produisent le résultat. Il n'y a jamais d'appels à l'infini qui empêcheraient le calcul de $M(x)$.

J'ai programmé cette fonction. J'ai pu calculer $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, mais, pour $M(3)$, malgré une optimisation soigneuse de mon programme, le calcul demandé ne semble pas aboutir. Quand je demande $M(3)$ à mon ordinateur, après quelques minutes, il met en marche le ventilateur de refroidissement du microprocesseur et je juge prudent d'arrêter le calcul. Le calcul devrait aboutir, c'est démontré, mais il est trop long et complexe pour ma machine. Bien que $M(4)$ provoque en théorie un calcul fini, aucun ordinateur ne le fera peut-être jamais, et si $M(4)$ devient un jour calculable réellement, ce ne sera pas le cas du calcul de $M(5)$ encore colossalement plus difficile à faire aboutir.

Définie en quelques symboles, la fonction $M$ donne un résultat pour tout nombre $x$, mais la démonstration de ce bon fonctionnement exige des outils mathématiques plus puissants que ceux de l'arithmétique de Peano : l'arrêt du calcul de $M(x)$, même en ne considérant que des $x$ entiers, est un indécidable pour Peano. Alan Turing a démontré que l'arrêt des programmes était un problème algorithmiquement indécidable, dont on déduit que certains programmes ne s'arrêtent pas, ce que l'arithmétique de Peano ne sait pas démontrer. Ici, on a un résultat du même type, d'une simplicité parfaite et qui n'est pas né de considérations logiques plus ou moins tordues, mais de l'étude de l'ensemble des nombres fusibles, une énigme simplissime de mathématiques récréatives. C'est certain maintenant, l'indécidabilité peut surgir partout ! ■

### BIBLIOGRAPHIE

G. Nivasch, **Vidéo d'un exposé détaillé et pédagogique sur les nombres fusibles :** http://www.youtube.com/watch?v=FjMNjMCmjP4

J. Erickson, G. Nivasch et J. Xu, **Fusible numbers and Peano arithmetic**, LICS'2021 (Logic in Computer Science, 2021, Rome), prépublication arXiv:2003.14342, 2020.

J. Erickson, **Fusible numbers**, 2020 : http://www.mathpuzzle.com/fusible.pdf

Wikipédia, **Nombre ordinal**, (https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_ordinal), 2021.

Frank Morgan's Math Chat, **Burning 1-hour fuses in 45 minutes**, 1999 : https://bit.ly/3hxyNDS

J.-P. Delahaye, **Information, complexité et hasard** (chap. 6 : L'importance des indécidables), Hermès, 1994.

J. Paris et L. Harrington, **A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic**, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 90, pp. 1133-1142, 1977.