RENDEZ-VOUS

LES DÉLICATS PARADOXES DE BERRY ET DE SKOLEM

Pour contourner les paradoxes de la définissabilité, il est nécessaire de distinguer théorie et métathéorie.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Lorsque nous formulons une définition, nous risquons d'être victimes d'un paradoxe. L'exemple le plus simple reste le paradoxe de Berry, présenté par Bertrand Russell en 1906. Considérons : « Le plus petit entier positif non définissable par une expression en français ayant moins de dix-neuf mots. »

Tout semble clair. En utilisant les mots de la langue française, qui sont en nombre fini, disons 60 000, et en s'imposant d'en utiliser au plus 18, on ne peut définir qu'un nombre fini d'entiers positifs (moins de $60000 + 60000^2 + ... + 60000^{18} \approx 10^{86}$). Comme il y a un nombre infini d'entiers, il existe donc des entiers positifs non définissables par une expression de moins de 19 mots. Il y en a un plus petit défini par l'expression donnée plus haut entre guillemets. Hélas, là réside la difficulté : cette expression comporte 18 mots et définit donc en moins de 19 mots un entier positif non définissable par une expression de moins de 19 mots ! Absurdité.

SE PROTÉGER DES PARADOXES

Heureusement, les logiciens ont su se prémunir contre les contradictions qui résulteraient en mathématiques de définitions de ce type. De telles définitions « autocontradictoires » contamineraient tout, puisqu'une seule contradiction en entraîne une infinité et rend inutile tout raisonnement. Pour cela, la méthode axiomatique fixe précisément les termes que nous pouvons utiliser quand nous traitons de nombres ou d'ensembles. Le terme « définissable » ne fait pas partie du langage de base de la majorité des théories car, le plus souvent, nous n'en avons pas besoin pour faire des mathématiques. Il n'est donc pas possible, au sein des systèmes axiomatiques habituels comme l'arithmétique de Peano ou de la théorie des ensembles ZFC (pour Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, *voir l'encadré 2*), de considérer le plus petit entier positif non définissable en moins de 19 mots. Ouf !

Notons quand même que « vu de l'extérieur », on dit de la *métathéorie*, nous pouvons envisager le plus petit entier positif non définissable dans la théorie T en moins de k symboles. Dans le cas de l'arithmétique de Peano, nous pouvons envisager, de ce point de vue extérieur, pour chaque entier k un « plus petit entier positif non définissable en moins de k symboles ». Pour k assez petit, par exemple $k = 1$ ou $k = 2$, ce plus petit entier est 0, car aucun entier n'est définissable dans la théorie en moins de 1 ou 2 symboles !

Approfondissons cela en précisant ce que nous entendons par « définition ». Prenons un exemple, en définissant le nombre $\sqrt{2}$. Nous dirons que c'est *le* nombre x positif dont le carré est égal à 2, c'est-à-dire tel que $x^2 = 2$. Si nous omettions la précision que x est positif, la définition n'en serait pas une, car $-\sqrt{2}$ serait

Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

aussi défini par la formule $x^2=2$. Avec cet exemple, nous comprenons qu'une définition $P(x)$ de la théorie T est une formule utilisant la variable x et écrite dans le langage limité de la théorie. La formule $P(x)$ est considérée, par la métathéorie, comme la définition d'un objet précis si la théorie T peut démontrer avec ses axiomes que $P(x)$ n'est vérifié que par un seul élément. Formellement, cela signifie que la théorie démontre que $\forall x\, \forall y\ ((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x=y)$ (pour tout x et pour tout y, si $P(x)$ et $P(y)$, alors $x=y$).

Dans le cas de l'arithmétique de Peano, si pour $P(x)$ on prend «$x=0$», c'est bien une définition de 0 et elle contient 3 symboles.

Avec cette définition de «définissable» il y a bien, en ce qui concerne la métathéorie, pour chaque entier k un plus petit entier non définissable dans T en moins de k caractères, mais cet entier ne gêne pas la théorie T elle-même car, en quelque sorte, elle ne le sait pas!

PAS DE NOTION ABSOLUE DE LA DÉFINISSABILITÉ

La notion métathéorique de définissabilité dépend du langage de la théorie qu'on considère, car elle dépend des formules $P(x)$ que la théorie peut écrire et de ce que la théorie peut en démontrer: il n'y a pas de notion absolue de définissabilité. La logique mathématique a fait apparaître au XX^e siècle des vérités d'une exceptionnelle profondeur dont on n'avait pas conscience auparavant. Parmi elles, il y en a plusieurs précisant qu'un concept est absolu ou au contraire relatif. Citons trois cas.

A. La notion de «calculable par algorithme» est absolue. C'est ce qui résulte des travaux d'Alonzo Church, Kurt Gödel et Alan Turing dans les années 1930. Toutes les méthodes raisonnables pour définir la notion de fonction calculable par algorithme, à la grande surprise des logiciens, aboutissent à la même notion mathématique, parfois dénommée «fonction récursive», ou «fonction calculable par machine de Turing».

B. La notion de «vérité mathématique démontrable», à l'inverse, est toujours relative à une théorie formelle qu'il faut préciser. C'est l'une des conséquences des théorèmes d'incomplétude de Gödel; ceux-ci montrent que toute théorie intéressante peut formuler des énoncés dont elle ne peut prouver ni qu'ils sont vrais ni qu'ils sont faux. Par exemple, l'énoncé «L'arithmétique de Peano ne produit aucune contradiction» n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano (sauf si l'on découvre une telle contradiction), mais la théorie ZFC des ensembles, elle, peut le démontrer. Il résulte de cette vérité profonde sur les mathématiques que, pour progresser, il faut non seulement trouver de nouvelles démonstrations – c'est le travail de base du mathématicien –, mais aussi formuler

https://www.whyarewehere.tv/people/gregory-chaitin/

1 LES PARADOXES SUGGÈRENT DES DÉMONSTRATIONS

Nous allons examiner comment, paradoxalement, les paradoxes amènent des démonstrations.

Pour cela examinons une version analogue du paradoxe de Berry : « Le plus petit entier positif non définissable en français en moins de 100 caractères ».

Avec un alphabet de 200 symboles (minuscules, majuscules, chiffres, signes de ponctuation, lettres accentuées, symboles supplémentaires *, $, €, &, # @, etc.), il y a au plus $200 + 200^2 + ... + 200^{99} \approx 6 \times 10^{227}$ entiers définissables en moins de 100 caractères.

Il existe donc des entiers positifs non définissables en moins de 100 caractères et donc un plus petit. Le problème est que la phrase de définition n'a que 84 caractères et définit un entier positif non définissable en moins de 100 caractères !

Nous tirerons de ce paradoxe une démonstration produisant un résultat intéressant, dont voici le détail.

Nous nous fixons un langage de programmation, par exemple Python ou C++ et c'est aux programmes dans ce langage que nous nous référerons. Si, pour un entier n, il existe un programme de k caractères qui produit n comme résultat, nous dirons que « n est programmable en k caractères ».

Nous allons démontrer que « la fonction $n \to K(n)$ qui à tout entier n associe la taille $K(n)$ du plus court programme produisant cet entier comme résultat n'est pas une fonction programmable ».

Supposons le contraire. Soit P le programme calculant K.

Pour tout entier k donné, on sait grâce à P trouver le plus petit entier n_k non programmable en moins de k caractères. Pour ce faire, nous calculons $K(0)$, puis $K(1)$, etc. jusqu'à trouver le premier entier n tel que $K(n) > k$.

Puisque K est programmable, cette méthode donne un programme P' qui, quand nous lui donnons k, calcule n_k. Le programme P', qui dépend du paramètre k, donne pour chaque k un programme P'_k calculant n_k, qui est le même que P', sauf que k est spécifié, par exemple dès le début du programme.

Dans le programme P'_k, l'entier k n'est présent qu'une fois (on écrit par exemple k = 32 431 au début). On peut supposer qu'on écrit la valeur de k en notation décimale. La longueur du programme P'_k est de la forme $[\log_{10}(k)] + C$, car, pour écrire un entier en décimal, il suffit d'utiliser $[\log_{10}(k)] + 1$ caractères où $[m]$ désigne la partie entière de m. La constante C est la longueur de ce qui, dans le programme P'_k, n'est pas l'écriture de k.

Nous savons que $([\log_{10}(k)] + C)/k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Donc pour un k_0 assez grand, $([\log_{10}(k_0)] + C)/k_0$ est inférieur à 1, d'où $[\log_{10}(k_0)] + C < k_0$.

C'est absurde car, pour un tel k_0, le programme P_{k_0} a pour longueur $[\log_{10}(k_0)] + C$, qui est strictement inférieur à k_0, et calcule n_{k_0}, qui, par définition, est un entier non calculable par un programme de longueur inférieure à k_0.

Conclusion : la fonction $n \to K(n)$ n'est pas une fonction calculable par programme.

Cette utilisation du paradoxe de Berry a été découverte par Gregory Chaitin, qui a aussi proposé une démonstration alternative à celle de Gödel utilisant le paradoxe de Berry pour démontrer le théorème d'incomplétude (voir G. J. Chaitin, The Berry paradox, *Complexity*, vol. 1, pp. 26-30, 1995).

Gregory Chaitin

de nouveaux axiomes, qui augmentent le pouvoir déductif des théories utilisées et qui conduisent à construire une hiérarchie complexe de théories de plus en plus puissantes.

C. La notion de «définissable» est toujours relative à une théorie. C'est la leçon du paradoxe de Berry, mais c'est aussi un résultat du logicien polonais Alfred Tarski. Confirmant les résultats sur le «démontrable», l'étude de la notion de «définissable» oblige à considérer une hiérarchie de théories de plus en plus puissantes, chacune servant de métathéorie à celles placées sous elles, pour lesquelles elle peut exprimer la notion de définissable.

UTILITÉ DES PARADOXES

Notons que les paradoxes des philosophes ou créés pour le plaisir du jeu, même si on ne peut pas les utiliser pour introduire des contradictions dans les théories mathématiques (du moins jusqu'à présent!), sont malgré tout très importants. Il est souvent arrivé que, en s'en inspirant, les logiciens découvrent de nouveaux procédés de démonstration. Le paradoxe du menteur «Je mens» a donné la formule autoréférentielle «Je ne suis pas démontrable dans la théorie T», qui est l'idée de base de la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Il se trouve que le paradoxe de Berry, outre qu'il permet de retrouver le théorème d'incomplétude, est aussi l'idée de la démonstration d'un résultat important en théorie de la complexité. Ainsi, d'une variante du paradoxe de Berry (*voir l'encadré 1*), on déduit une démonstration.

Cette récupération des paradoxes de la langue commune pour en faire des démonstrations est utile et amusante, mais certaines subtilités mises en évidence par les paradoxes introduisent des difficultés plus délicates à circonscrire que celles créées par le paradoxe du menteur ou le paradoxe de Berry. On se trouve en effet parfois confronté à des situations où on a du mal à croire que l'on va s'en sortir et où la solution proposée par les logiciens ne laisse pas totalement intacte la confiance qu'on avait dans certains concepts mathématiques.

Récemment, Joel David Hamkins, professeur à l'université d'Oxford et élève du logicien universellement admiré Hugh Woodin, a insisté sur des exemples troublants de la relativité des concepts et de la nécessité absolue de ne pas confondre les concepts externes (métathéoriques) à une théorie et les concepts analogues qu'elle tente de retrouver en interne. L'impossible coïncidence de la métathéorie et de la théorie est réellement déconcertante. Les remarques et exemples de Joel Hamkins sont liés au théorème de Löwenheim-Skolem et au paradoxe qui en résulte, et en aggravent la portée.

Le théorème de Löwenheim-Skolem a été énoncé en 1915 par le mathématicien allemand Leopold Löwenheim et démontré de manière complète en 1920 par le mathématicien norvégien Thoralf Skolem. Énonçons-le avant d'expliciter les termes qui le composent:

Si une théorie formulée dans le cadre de la logique du calcul des prédicats du premier ordre possède un modèle infini, alors elle possède un modèle dénombrable, c'est-à-dire dont les éléments constitutifs sont aussi nombreux que les entiers, mais pas plus.

DES MODÈLES D'UNE THÉORIE

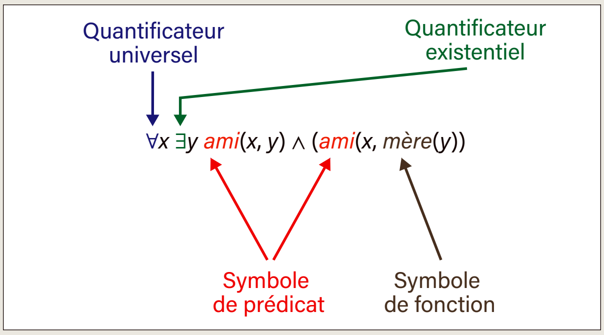
Expliquons cela. Un modèle pour une théorie est une structure qui vérifie les axiomes de la théorie. Si, par exemple, on considère la théorie T ayant pour unique axiome A: $\forall x\ \forall y\ (x \clubsuit y = y \clubsuit x)$, alors la donnée des entiers $\mathbb{N}$ et de l'addition entre entiers en guise d'opération $\clubsuit$ constitue un modèle de T, car on sait que l'addition entre entiers est commutative. La donnée des nombres réels $\mathbb{R}$ et de la multiplication en guise de $\clubsuit$ est un autre modèle de la théorie T, et il y a encore bien d'autres possibilités. Les formules vraies d'une théorie sont celles vérifiées par tous les modèles de la théorie. Il s'agit d'une notion mathématique parfaitement précise dans la métathéorie, puisque la notion de modèle l'est.

Dans notre exemple, la formule f: $\forall x\ (x \clubsuit x) \clubsuit x = x \clubsuit (x \clubsuit x)$ est une formule vraie de la théorie T: vous ne trouverez jamais un ensemble et une opération sur cet ensemble qui vérifie l'axiome A mais pas la formule f. En revanche, la formule g: $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \clubsuit y) \clubsuit z = x \clubsuit (y \clubsuit z)$ n'est pas une formule vraie de la théorie T, car même si elle est vraie dans certains modèles de T, elle ne l'est pas dans tous. Par exemple, la formule g n'est pas vraie en prenant pour modèle la structure définie par les entiers et l'opération $x \clubsuit y = x^2+y^2$, car $(0 \clubsuit 1) \clubsuit 2 = 1+4 = 5$ tandis que $0 \clubsuit (1 \clubsuit 2) = 0 \clubsuit 5 = 25$.

Le «calcul des prédicats du premier ordre» est la logique utilisée pour donner l'exemple ci-dessus de la théorie T avec un seul axiome A. Dans une théorie formulée en calcul des prédicats du premier ordre, on peut utiliser des symboles logiques, des variables, des quantificateurs portant sur les variables, des symboles de prédicats ou d'opérations (comme le $\clubsuit$) ainsi qu'indiqué dans l'encadré 2. Le théorème de complétude de Gödel, démontré par ce dernier en 1929 dans sa thèse de doctorat, indique que la logique du calcul des prédicats du premier ordre est telle que les formules démontrables à partir des axiomes habituels du calcul des prédicats du premier ordre (notion syntaxique) sont les mêmes que les formules vraies de la théorie (c'est-à-dire vraies dans tous les modèles des axiomes).

C'est un résultat central en logique et c'est lui qui justifie qu'on formalise les théories mathématiques en utilisant le calcul des prédicats du premier ordre. Il a en particulier la

2 LANGAGES LOGIQUES



Pour formaliser une théorie mathématique, ce qui est indispensable afin d'éviter les paradoxes comme le paradoxe de Berry, il faut préciser le langage qui permet d'écrire les énoncés de la théorie (hypothèses, théorèmes, démonstrations, etc.). On s'appuie le plus souvent sur le calcul des prédicats du premier ordre que nous allons examiner.

L'arithmétique de Peano utilise un langage dont les symboles sont :
$(\ ) \ 0 = s \ \forall \ \exists \wedge \vee \neg \Leftrightarrow \Rightarrow + x \ y \ z$ ...

Pour la liste des variables, on peut se ramener à deux symboles si on veut vraiment économiser les symboles : on utilise x et ′, et les noms de variables sont x, x', x'', x'''... Pour plus de lisibilité, nous garderons x, y, z...

Voici un exemple de formule de l'arithmétique de Peano, qui est aussi un axiome de cette théorie :
$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ x = s(y))$
Elle signifie : pour tout nombre x, $x = 0$ ou il existe un nombre y tel que x est le successeur de y.
La fonction $s(x)$, « successeur de x », désignera 32 si l'on prend $x = 31$.

Si l'on en reste au langage strict de la théorie, les entiers sont représentés par 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, etc., mais bien sûr, en pratique, on introduit des raccourcis de notation et on écrit 0, 1, 2, ...

En plus de la définition stricte de ce que sont les formules de la théorie, on fixe aussi les axiomes de la théorie et les règles permettant de déduire de nouvelles formules à partir des axiomes ou de formules déjà démontrées. Ces règles de démonstration sont les mêmes pour toutes les théories exprimées dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Venons-en à la notion de prédicat. En logique, un prédicat est une propriété dont la vérité dépend d'une ou plusieurs variables ; selon les objets qu'on substitue aux variables, elle devient vraie ou fausse.

Dans la figure ci-dessus, le prédicat *ami*(x, y) sera vrai pour x = Jean et y = Jeanne si « Jean est ami de Jeanne ». Le prédicat *nombre entier*(x) sera vrai pour $x = 4$, et sera faux pour $x = \pi$.

Le calcul des prédicats du premier ordre est la logique qui permet de combiner des prédicats et de les manipuler en utilisant des opérations logiques (comme le « et », le « ou » etc.) et des quantificateurs comme $\forall$ (« quel que soit ») et $\exists$ (« il existe »). Le calcul des prédicats du premier ordre permet aussi, à l'aide de symboles de fonction, de transformer des objets. La fonction *mère*(x) pour x = Jeanne désignera Lucie si « Lucie est la mère de Jeanne ». L'exemple de formule du calcul des prédicats du premier ordre donné sur la figure est :
$\forall x\ \exists y\ ami(x, y) \wedge ami(x, mère(y))$
La formule signifie :
« Pour tout x, il existe un y tel que x est ami de y, et x est ami de la mère de y ». Il n'est pas certain que la phrase soit vraie !

Le calcul des prédicats du second ordre est plus général et permet de quantifier sur les prédicats comme dans l'exemple de formule vraie suivante :
$\forall P\ \forall x\ \forall y\ (x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$
qui signifie que pour tout prédicat P, pour tout x et pour tout y, ($x = y$ et P(x)) entraîne P(y).

Dans le cas de la théorie des ensembles ZFC (pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix »), les symboles de base sont les mêmes sauf que 0, s et + sont remplacés par $\varnothing$ et $\in$.

Une formule de la théorie des ensembles est par exemple :
$\forall x\ (x = \varnothing \vee \exists y\ y \in x)$,
ce qui signifie : pour tout ensemble x, soit x est l'ensemble vide $\varnothing$, soit il existe un élément y appartenant à l'ensemble x.

Le langage de la théorie des ensembles ZFC permet de traduire toutes les formules de l'arithmétique de Peano et les axiomes de ZFC permettent de retrouver tous les axiomes de l'arithmétique de Peano.

Cette théorie des ensembles permet cependant de traiter de l'infini et de le manipuler, ce que l'arithmétique de Peano ne permet pas directement. Comme pour l'arithmétique, on utilise toutes sortes de raccourcis et de symboles ajoutés pour disposer d'un langage praticable. Dans l'absolu, cependant, toutes les mathématiques peuvent s'exprimer uniquement avec le langage réduit énuméré ici pour ZFC.


Giuseppe Peano
(1858 - 1932)


Abraham Fraenkel
(1891 - 1965)


Ernst Zermelo
(1871 - 1953)

Photos en domaine public ; schéma d'après https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_prédicats

3 SÉMANTIQUE ET SYNTAXE

En logique, chaque théorie comporte deux faces, l'une dite « sémantique », l'autre dite « syntaxique ».

Une théorie est définie par des formules dénommées « axiomes » que l'on décrète vraies. Ces formules sont des suites de symboles envisageables sous deux aspects.

1) On peut interpréter les axiomes comme les propriétés des objets et des structures traitées par la théorie.

Exemple. Considérons deux prédicats P(x) et I(x) et une fonction s(x). P(x) signifierait « x est pair » et I(x) « x est impair ». La fonction s(x) pourrait désigner l'entier qui vient après x, c'est-à-dire $x + 1$. Pour que la théorie soit utile, il faut indiquer des propriétés reliant les prédicats et les fonctions. Dans notre exemple, prenons les axiomes : $\forall x\ \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{I}(s(x))$ et $\forall x\ \mathrm{I}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(s(x))$.

Si les objets de la théorie sont les entiers et les interprétations de P(x) et I(x) sont les propriétés « être pair » et « être impair », et celle de la fonction s(x) est la fonction « successeur », alors les axiomes sont vrais. Un modèle possible de la théorie est une telle interprétation des symboles de la théorie compatible avec les axiomes.

Malheureusement, d'autres interprétations sont compatibles avec les deux axiomes envisagés. Si l'on prend les nombres réels non nuls pour objets, que l'on considère que P(x) signifie « x est positif », et I(x) « x est négatif », et que pour s(x) on prend $s(x) = -x$, alors les axiomes sont encore vrais pour cette structure.

Nos axiomes ne sont pas assez nombreux pour forcer l'interprétation qu'on avait envisagée. Réfléchir aux interprétations possibles d'une théorie est l'objectif de la théorie des modèles, qui est le côté sémantique de la logique mathématique.

2) On peut aussi regarder les axiomes comme de simples suites de symboles et, en utilisant des règles de manipulation entre suites de symboles, on peut essayer de déduire d'autres formules des axiomes. De A ⇒ B et B ⇒ C, on déduira par exemple A ⇒ C sans avoir à chercher à comprendre ce que cela signifie.

Dans l'exemple donné plus haut, en utilisant les règles de déduction du calcul des prédicats, on déduira par exemple que : $\forall x\ \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(s(s(x)))$.

Lier le côté sémantique et le côté syntaxique de la logique est un objectif central : si l'on parvient à le faire, cela ramène des affirmations sur des structures à des affirmations sur des symboles et des manipulations de symboles, ce qui est moins abstrait et même presque matériel.

Dans le cas du calcul des prédicats du premier ordre, Kurt Gödel a établi que les formules qui sont vraies dans tous les modèles des axiomes d'une théorie sont exactement les mêmes que les formules qu'on peut déduire des axiomes. Il y a équivalence entre sémantique et syntaxe.

Cette propriété de complétude du calcul des prédicats du premier ordre a pour conséquence que, le plus souvent, on souhaite formaliser les théories dans ce cadre logique. Aussi bien l'arithmétique de Peano que la théorie ZFC des ensembles sont effectivement modélisées dans ce cadre.

conséquence qu'une théorie est contradictoire si et seulement si elle ne possède aucun modèle. «Être non contradictoire» et «posséder des modèles» sont équivalents. Ce théorème met en relation une notion qualifiée de «sémantique», la notion de formule vraie, et une notion liée seulement à la manipulation de symboles, la notion de «démontrable à partir des axiomes et des règles usuelles de manipulations des formules», qui est une notion «syntaxique».

Le calcul des prédicats du second ordre permet d'envisager des formules où l'on quantifie sur les prédicats comme dans cette formule:

$\forall \mathrm{P}\ \forall x\ \forall y\ (x = y) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \Leftrightarrow \mathrm{P}(y))$

Malheureusement, il n'existe pas de théorème de complétude pour cette logique du second ordre; autrement dit, on ne connaît pas de systèmes d'axiomes logiques qui captent «syntaxiquement» la notion de formule vraie de cette logique élargie et on démontre même qu'il ne peut pas en exister. Pour cette logique, on ne fera jamais correspondre la notion sémantique de formule vraie avec une notion syntaxique de formule démontrable.

Seule la logique du calcul des prédicats du premier ordre est donc vraiment satisfaisante pour servir de fondement aux diverses théories mathématiques et en particulier à la théorie des ensembles ZFC, qui est une théorie formulée dans le cadre du calcul des prédicats du premier ordre, comme l'est aussi l'arithmétique de Peano.

UN PARADOXE VRAIMENT TROUBLANT

Une fois admise la nécessité de formuler les théories mathématiques dans le calcul des prédicats du premier ordre, survient un problème gênant provenant du théorème de Löwenheim-Skolem. Ce problème porte le nom de «paradoxe de Skolem»; le voici. La théorie des ensembles ZFC démontre qu'il existe des ensembles non dénombrables (d'un type d'infini plus gros que celui des entiers) et que l'ensemble des nombres réels est un tel infini non dénombrable. Comment cela est-il possible puisque le théorème de Löwenheim-Skolem nous dit que si ZFC possède des modèles (et l'on espère bien que c'est le cas car, sinon, elle est contradictoire et inutile), alors ZFC possède des modèles dénombrables?

Pour un tel modèle dénombrable de ZFC, les éléments de base du modèle peuvent être numérotés sans répétition $e_0, e_1, ..., e_n, ...$ et sans en oublier aucun. Les objets qui représentent des nombres réels dans le modèle sont ceux d'une sous-liste de cette liste et constituent donc un ensemble dénombrable. Est-ce une contradiction avec l'affirmation qu'on démontre dans ZFC que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable?Non, car la notion d'ensemble dénombrable interne à ZFC n'est pas celle de la métathéorie. Quand le théorème de Löwenheim-Skolem affirme que ZFC possède des modèles dénombrables, la notion de dénombrable dont il s'agit est celle de la métathéorie. Quand on affirme que ZFC démontre que les nombres réels ne sont pas dénombrables, il s'agit de la notion interne à ZFC. Les deux notions ne coïncident pas! La notion de dénombrabilité n'est pas absolue!

Ainsi, cette opposition entre deux notions de dénombrabilité n'en est pas une au sens strict: on n'en tire aucune contradiction si on fait la distinction entre théorie et métathéorie. Il faut cependant admettre que c'est un peu ennuyeux. La relativité du concept d'ensemble dénombrable ne fait-elle pas douter de la solidité générale du concept d'ensemble non dénombrable? Cela a-t-il un lien avec le fait qu'en physique la notion d'ensemble non dénombrable ne joue jamais un rôle direct et important? Bien sûr, les philosophes se sont intéressés à ces problèmes. De nombreux articles ont été publiés et continuent à l'être sur le sujet, dont par exemple une thèse soutenue en 2000 consacrée au paradoxe de Skolem à l'université de Californie à Los Angeles (*voir la bibliographie*).

UN RAISONNEMENT TROP FACILE

Joel Hamkins rappelle que la notion de définissabilité est une notion métathéorique et que l'oublier conduit à des énoncés injustifiés. Le raisonnement suivant n'est pas correct:

« Puisque les nombres réels sont non dénombrables et qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de définitions possibles avec un alphabet fini (ce qui est le cas de la théorie des ensembles), alors c'est qu'il existe des nombres réels non définissables ».

Rien n'est faux dans les prémisses du raisonnement, mais la conclusion n'est pas justifiée car elle assimile deux notions de dénombrabilité, la notion interne (pour affirmer que les nombres réels sont non dénombrables) et la notion externe (pour affirmer que les définitions possibles sont dénombrables).

On ne peut pas prouver aussi simplement que, dans tout modèle de la théorie des ensembles, il y a des nombres réels non définissables avec les formules de la théorie des ensembles. Et d'ailleurs, c'est faux: il existe des modèles de la théorie des ensembles où tous les nombres réels, et même tous les ensembles, sont définissables dans le sens expliqué plus haut: à chaque nombre réel r du modèle considéré correspond une formule $P(x)$ qui est vérifiée par r et dont ZFC démontre qu'il est le seul à la vérifier.

Joel Hamkins ne prétend pas être le premier à noter l'existence de tels modèles, et rappelle que le logicien britannique John Myhill a démontré dès 1952 un résultat dans ce sens. Myhill terminait son article par la remarque lucide montrant qu'il comprenait très bien la portée des résultats de son travail: « On entend souvent dire que, puisqu'il y a un nombre non dénombrable d'ensembles et seulement une infinité dénombrable de noms, il doit donc y avoir des ensembles sans nom. Cet argument est fallacieux, selon ce qu'on vient de voir. »

La notion de dénombrabilité n'est pas absolue

LES FONCTIONS INVISIBLES

Précisons un peu ce qui se passe dans le cas des modèles dénombrables de ZFC. Quand on affirme que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable dans ZFC, on affirme qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Quand on affirme « $\mathbb{R}$ est dénombrable dans un certain modèle de ZFC », cela signifie que pour la métathéorie il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et les réels du modèle.

Qui a raison? C'est la métathéorie: les réels du modèle sont bien dénombrables, et si la théorie en interne ne le voit pas, c'est parce qu'il lui manque des fonctions, et en particulier celle qui établit une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. La théorie est aveugle à certaines fonctions. Le plus extraordinaire dans une telle situation est que la façon dont le modèle ignore l'existence de cette fonction et de bien d'autres objets que la métathéorie connaît, est qu'elle le fait d'une façon totalement cohérente et compatible avec tous les axiomes de ZFC. Le modèle dénombrable de ZFC est une sorte de faux univers ensembliste, mais il simule tellement bien le véritable univers ensembliste de la métathéorie qu'il vérifie tout ce qu'on attend et qui est formulable dans les termes du vocabulaire de ZFC.

Il se produit bien d'autres choses de cette nature confirmant que, pour éviter les contradictions liées à la notion de définissabilité et dont le paradoxe de Berry nous avertit du danger, il faut soigneusement ne pas mélanger théorie et métathéorie, même si cela amène à soupçonner que certaines notions des mathématiques liées à l'infini, en particulier la notion d'ensemble non dénombrable, n'ont pas la clarté que les mathématiques usuelles prétendent. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Patarin, **Théorie des ensembles et logique mathématique : Des infinis mathématiques aux théorèmes de Gödel**, Ellipse, 2020.

J. D. Hamkins et C. Leahy, **Algebraicity and implicit definability in set theory**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 57(3), pp. 431-439, 2016.

T. Bays, **Skolem's Paradox**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014 : https://plato.stanford.edu/entries/paradox-skolem/

J. D. Hamkins *et al.*, **Pointwise definable models of set theory**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 78(1), pp. 139-156, 2013.

T. Bays, **Reflexion on the Skolem's Paradox**, thèse, UCLA, 2000 : https://www3.nd.edu/~tbays/papers/pthesis.pdf

J. Myhill, **The hypothesis that all classes are nameable**, *PNAS*, vol. 38(11), pp. 979-981, 1952.