Polytech'Lille — GIS4 — Calcul Numérique
Feuille de TD

---

1 Interpolation

On considère les $n + 1$ ($n = 3$) points

x_i	2	4	5	-1
y_i	1	-4	0	2

Question 1. Donner une expression (formule de Lagrange) du polynôme d'interpolation passant par les points (on ne demande pas de développer cette formule).

Question 2. Calculer la matrice de polynômes $(p_{i,j})$ de l'algorithme de Neville (laisser x sous la forme d'une lettre).

Question 3. On suppose que l'indice `N` et les tableaux `TX`, `TY` sont initialisés avec les données à interpoler. On suppose que `X` contient une abscisse. On souhaite évaluer le polynôme d'interpolation, en l'abscisse `X`, résultat dans `Y`, en utilisant l'algorithme de Neville et la matrice `P`. Compléter le code suivant.

```
INTEGER NMAX
PARAMETER (NMAX=10)
DOUBLE PRECISION TX(0:NMAX), TY(0:NMAX), P(0:NMAX,0:NMAX)
DOUBLE PRECISION X, Y
INTEGER N
```

Question 4. Calculer la matrice $(c_{i,j})$ des différences divisées.

Question 5. Écrire un pseudo-code permettant d'évaluer le polynôme d'interpolation par un schéma de Horner utilisant la matrice $(c_{i,j})$.

Question 6. On suppose que l'indice `N` et les tableaux `TX`, `TY` sont initialisés avec les données à interpoler. On souhaite remplir la matrice `C` avec les différences divisées. Compléter le code suivant.

```
INTEGER NMAX
PARAMETER (NMAX=10)
DOUBLE PRECISION TX(0:NMAX), TY(0:NMAX), C(0:NMAX,0:NMAX)
INTEGER N
```

Question 7. On suppose la matrice `C` remplie. On suppose que `X` contient une abscisse. On souhaite évaluer le polynôme d'interpolation, en l'abscisse `X`, résultat dans `Y`, en appliquant le schéma de Horner.

Question 8. On considère la fonction

$$f : x \to \frac{1}{1+x^2}.$$

On note $p(x)$ le polynôme qui interpole cette fonction aux points d'abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_4 = 2, 3, 4, 5, 6$ $(n = 4)$. En utilisant le graphique (Figure 1) de la fonction

$$f^{(5)}(x) = -\frac{240\,x\,(3\,x^4 - 10\,x^2 + 3)}{(1+x^2)^6}$$

majorer l'erreur $f(x) - p(x)$ sur l'intervalle d'interpolation.

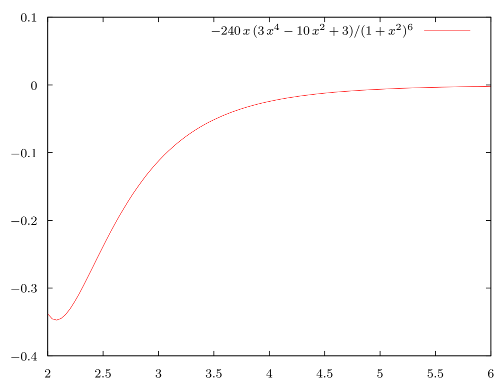


FIGURE 1 – Le graphe de $f^{(5)}(x)$ sur l'intervalle d'interpolation.

2 Splines

On considère quatre points indicés de 0 à $n = 3$. On cherche une spline cubique passant par ces points.

Question 9. Combien de polynômes $s_i(z)$ de degré 3 s'agit-il de trouver ? Notons $s_i(z) = a_{i0} + a_{i1}\,z + a_{i2}\,z^2 + a_{i3}\,z^3$. Combien cela fait-il de coefficients indéterminés ?

2.1 Fonction de survie

Selon [3, Page 3], il est courant que des compagnies d'assurance disposent d'une « fonction de survie », qui donne la fraction d'enfants nés au temps 0, qui survivent à l'âge x. Une telle fonction n'est bien sûr pas donnée par une formule mathématique mais sous la forme d'une suite de points. Un exemple est donné dans le tableau suivant, formé de 16 points ($n = 15$), et repris Figure **??**. Les âges x_i sont fantaisistes.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
y_i	1	.85	.7875	.75	.725	.7	.6875	.675	.65	.5875	.475	.2	.0875	.025	.00025	0

Question 10. Quel est le degré du polynôme d'interpolation par ces points ? Son graphe (Figure 2) est-il acceptable ?

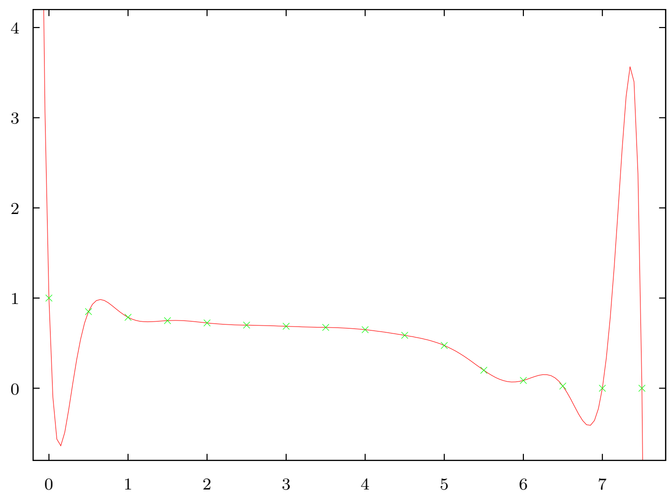


FIGURE 2 – Toujours la même fonction de survie. Les points sont reliés par le graphe de leur polynôme d'interpolation.

Question 11. Combien la spline cubique naturelle a-t-elle de morceaux ? Son graphe (Figure 3) est-il acceptable ?

Question 12. Compléter le programme en réalisant la fonction `EVAL_SPLINE` dont le prototype est donné ci-dessous.

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION EVAL_SPLINE (Z, N, X, COEFF)
* Z      = l'abscisse pour laquelle on veut la valeur de la spline
* N+1    = le nombre de points
* X(0:N) = les abscisses
* COEFF  = les coefficients des cubiques
      INTEGER N
      DOUBLE PRECISION Z, X(0:N), COEFF(*)
```

L'algorithme est le suivant :

1. Déterminer l'indice i de la cubique : si $z \leq x_0$ alors $i = 0$ sinon, si $z \geq x_n$ alors $i = n$ sinon, déterminer i tel que $x_i \leq z < x_{i+1}$.

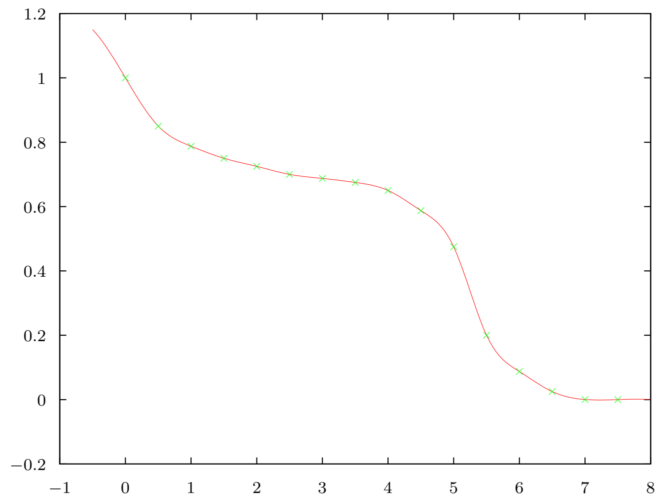


FIGURE 3 – Toujours la même fonction de survie. Les points sont reliés par le graphe de leur spline cubique naturelle.

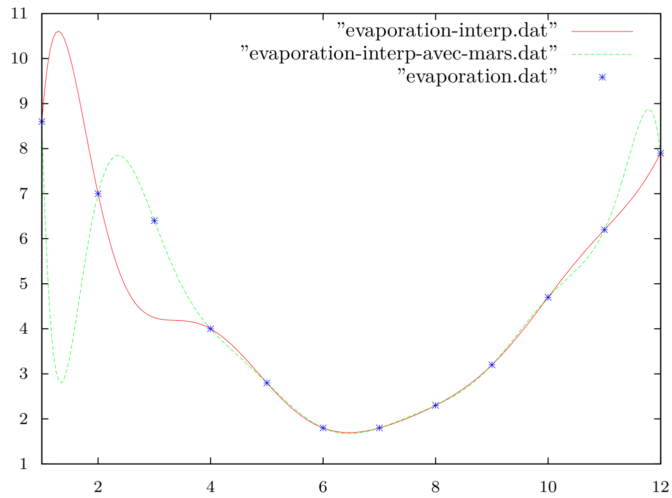
2. Calculer l'indice j dans `COEFF` de a_{i0}.
3. Évaluer la cubique en utilisant un schéma de Horner.

2.2 Évaporation de l'eau en Australie

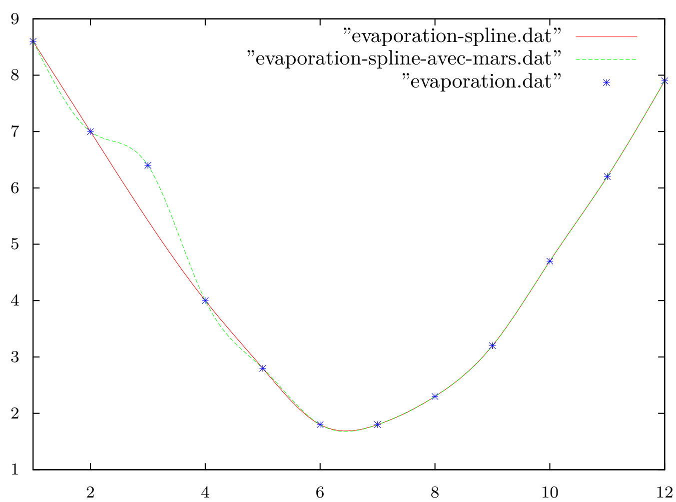
Le tableau ci-dessous [1, chapter 6, Figure 6.04, page 134] mesure l'évaporation de l'eau (en pouces) au Waite Institute, Adelaide, Australie. Chaque mesure est une moyenne, calculée à partir de relevés journaliers, sur une période de 23 ans. Les mesures montrent que l'évaporation décroît graduellement de janvier à juin-juillet, pour remonter d'août à décembre (les saisons sont inversées, dans l'hémisphère sud).

mois	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
évaporation (pouces)	y_i	8.6	7	6.4	4	2.8	1.8	1.8	2.3	3.2	4.7	6.2	7.9

Dans le graphique ci-dessous, on a reporté les points ainsi que le graphe du polynôme d'interpolation.



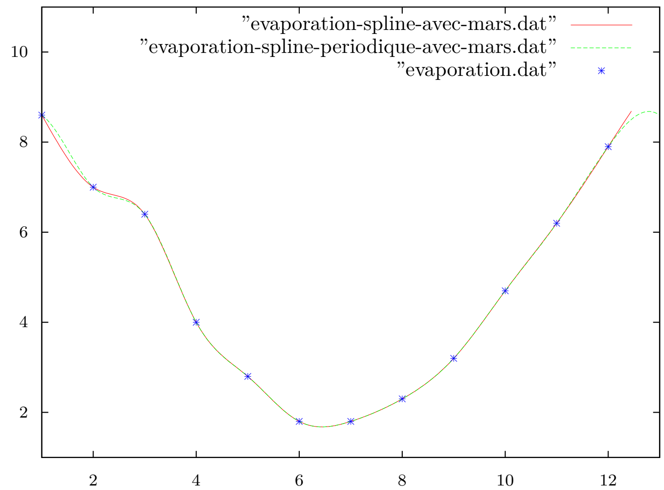
Dans le graphique ci-dessous, on a reporté les points ainsi que le graphe de la spline cubique naturelle.



Question 13. Lequel des deux graphes est le plus lisse (préciser) ? Lequel des deux graphes semble le plus acceptable (justifier) ?

2.3 Splines périodiques

Les années se répètent de façon cyclique. On aimerait donc que la spline cubique soit périodique, comme sur le graphe ci-dessous. On l'a obtenue en ajoutant un treizième mois avec la même évaporation qu'en janvier et on s'est arrangé pour que le raccord entre la fin de l'année et le début de la nouvelle soit lisse, lui aussi. Le graphique montre la différence entre les splines cubiques naturelle et périodique.



On a vu en cours qu'on pouvait justifier l'existence des splines cubiques naturelles en montrant qu'elles sont solution d'un certain système d'équations linéaires (S). On souhaite adapter cet argument pour justifier l'existence des splines cubiques périodiques.

Question 14. On ajoute un treizième mois (avec la même mesure que pour janvier). Rappeler le système (S) dont la solution donne la spline cubique naturelle (noter les équations de façon synthétique et rappeler leur signification). Indiquer les équations de (S) qu'il suffit de changer pour obtenir une spline cubique périodique. Expliquer la signification des nouvelles équations.

3 Intégration

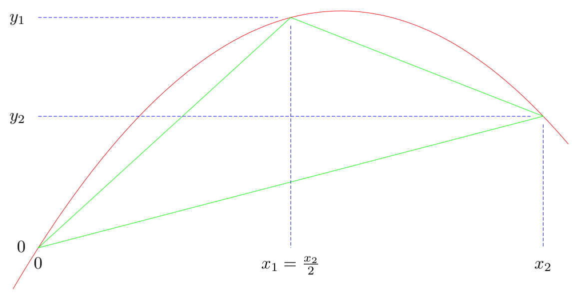
Question 15. Approximez l'aire définie par les points suivants par la formule des trapèzes composites et celle de Simpson composite.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	6	4	2	1

Question 16. On considère une parabole et un triangle comme sur la figure ci-dessous. On note T l'aire du triangle et P l'aire comprise entre la parabole et la droite passant par $(0,0)$ et (x_2, y_2). Montrer (théorème d'Archimède [2, section I.8, Exercices]) que

$$P = \frac{4}{3} T \,.$$

Astuce : calculer T et P en utilisant deux schémas d'intégration numérique vus en cours. Ne pas rédiger la preuve. Donner plutôt les arguments clefs (quelles sont les hypothèses importantes ?) qui permettraient de l'écrire.



Question 17. Dans la simulation numérique suivante, on a affiché le nombre de bits exacts en fonction du nombre de pas effectués. Quel semble être l'ordre de la méthode utilisée ? Quelle méthode étudiée en cours est susceptible de produire ce résultat ?

```
  NBSTEPS   NB BITS EXACTS (EN GROS)
        2   4.9250104298085873
        4   9.7804792623249970
        8   13.961492654032389
       16   18.005495742660596
       32   22.016427397654574
       64   26.019156174906570
      128   30.019838002143089
      256   34.019986935697041
      512   38.020609052052940
     1024   42.013910111798765
```

3.1 Analyse de code

On considère le sous-programme FORTRAN suivant.

```
      SUBROUTINE TRAPEZES (A, B, N, Y, CALCULEE)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER N
      DOUBLE PRECISION A, B, Y(0:N), CALCULEE
*
      INTEGER I
      DOUBLE PRECISION H
      H = (B - A) / N
      CALCULEE = 5D-1 * (Y(0) + Y(N))
      DO I = 1, N
         CALCULEE = CALCULEE + Y(I)
      END DO
      CALCULEE = CALCULEE * H
      END SUBROUTINE
```

Question 18. Dans la simulation numérique suivante, on a affiché le nombre de bits exacts en fonction du nombre de pas effectués, en utilisant le sous-programme ci-dessus. Plus le nombre de pas est élevé, plus l'aire calculée est proche du résultat exact mais quelque chose semble bizarre ... Expliquer et corriger ce qui doit l'être.

```
NBSTEPS   NB BITS EXACTS (APPROX.)
      2   1.3024259161769238
      4   2.5312515943624794
      8   3.6539849929924624
     16   4.7187181137148704
     32   5.7521104356288140
     64   6.7690888018807804
    128   7.7776519788483087
    256   8.7819525118068675
    512   9.7841075712012593
   1024   10.785186306292918
```

4 Équations différentielles

Question 19. Voici l'une des plus anciennes équations différentielles avec condition initiale jamais considérées (Newton, 1671). Quelle est la fonction f correspondante ?

$$\dot{y} = 1 - 3\,x + y + x^2 + x\,y\,, \quad y(0) = 0\,.$$

Intégrer cette équation avec la méthode d'Euler (1768), pour $N = 1$, puis $N = 2$ pas, sur l'intervalle $[x_0, x_{end}] = [0, 1]$.

Question 20. On considère le problème de Cauchy

$$\dot{y} = x + y\,, \quad y(1) = 1\,,$$

sur l'intervalle $[x_0, x_{end}] = [1, 3]$. Intégrer cette équation avec la formule du point du milieu (Runge, 1895) pour $N = 1$ pas.

Question 21. Dans la simulation numérique suivante, on a affiché le nombre de bits exacts en fonction du nombre de pas effectués. Quel semble être l'ordre de la méthode utilisée ? Exprimer, en fonction du pas h, l'ordre de grandeur de l'erreur globale et celui de l'erreur locale.

```
NBSTEPS   NB BITS EXACTS (APPROX.)
      2   4.4677100849209657
      4   6.1967037117762480
      8   8.0595581340831242
     16   9.9911745698036185
     32   11.957131949629126
     64   13.940162672238497
    128   15.931693020692160
    256   17.927462197436210
    512   19.925347818819429
   1024   21.924290900953341
```

Question 22. Expliciter la formule qui calcule y_1 à partir de y_0 et de h avec le schéma « RK4 » suivant :

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Question 23. Transformer l'équation différentielle d'ordre trois suivante en un système d'équations différentielles du premier ordre. Quelle est la dimension du système obtenu ?

$$\dddot{y} + x\,y + y\,\dot{y} + \ddot{y}^2 = 0\,.$$

4.1 Intégrateurs à pas adaptatif

Pour mettre au point un schéma à s étages, d'ordre p, on calcule (en principe, en tous cas), deux développements en série en la variable h et on pose que leur différence doit être nulle jusqu'au terme en h^p inclus. Voici, pour $s = p = 3$, le premier coefficient de la différence des deux séries (le coefficient de h^1).

```
(b[1] + b[2] + b[3] - 1) f(x0, y0)
```

Question 24. Comment interpréter ce résultat ? Vérifier sur les schémas du support de cours.

Question 25. Même question pour le deuxième coefficient (le coefficient de $1/2\,h^2$ de la différence des deux séries).

```
(2 b[2] a[2, 1] + 2 b[3] (a[3, 1] + a[3, 2]) - 1) D[2](f)(x0, y0) f(x0, y0)

     + (2 b[2] c[2] + 2 b[3] c[3] - 1) D[1](f)(x0, y0)
```

Question 26. Voici le troisième coefficient (le coefficient de $1/6\,h^3$ de la différence des deux séries). Que peut-on dire d'un schéma tel que $b_3 = 0$?

```
                        2                      2                                2
(-1 + 3 b[2] a[2, 1]  + 6 b[3] (1/2 a[3, 2]  + a[3, 1] a[3, 2] + 1/2 a[3, 1] )

                                    2
    ) D[2, 2](f)(x0, y0) f(x0, y0)  + (

                                                2
    (6 b[3] a[3, 2] a[2, 1] - 1) D[2](f)(x0, y0)  +

    (6 b[2] c[2] a[2, 1] + 6 b[3] (c[3] a[3, 1] + c[3] a[3, 2]) - 2)

    D[1, 2](f)(x0, y0)) f(x0, y0)

     + (6 b[3] a[3, 2] c[2] - 1) D[2](f)(x0, y0) D[1](f)(x0, y0)

                        2                  2
     + (3 b[3] c[3]  - 1 + 3 b[2] c[2] ) D[1, 1](f)(x0, y0)
```

Pour mettre au point une formule emboîtée d'ordre 2, adaptée à un schéma d'ordre 3, il suffit de remplacer, dans les deux premiers coefficients de la différence des deux séries les coefficients c_i et a_{ij} par la valeur qu'ils ont dans le schéma. Ensuite, il suffit de chercher des valeurs des b_j qui les annulent, mais sans annuler le troisième coefficient. Ces valeurs des b_j sont les coefficients $\hat{b}_j$ de la formule emboîtée recherchée.

Question 27. Déterminer les coefficients $\hat{b}_j$ d'une formule emboîtée pour le schéma de Heun (ci-dessous) telle que $\hat{b}_3 = 0$.

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

Références

[1] L. C. Birch and H. G. Andrewartha. *The Distribution and Abundance of Animals.* The University of Chicago Press, 1954.

[2] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. Introduction à l'Analyse Numérique. Accessible sur `http://www.unige.ch/~hairer`, juin 2005.

[3] Abdul J. Jerri. *Introduction to Integral Equations with Applications*, volume 93 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker Inc., 1985.