GIS4 — Calcul Numérique — Épreuve de novembre 2017
Durée 2 heures — Aucun document autorisé

---

1 Interpolation et Intégration Numérique (6 points)

Question 1 [2 pts]. À partir du tableau ci-dessous, donner une expression du polynôme d'interpolation en utilisant la formule de Lagrange. Les valeurs numériques du tableau doivent apparaître clairement mais on ne demande pas de simplifier les expressions.

i	0	1	2
x_i	3	14	-5
y_i	101	8	44

Question 2 [1 pt]. Rappeler les principales propriétés du polynôme d'interpolation $P(x)$ défini par $n+1$ points (x_i, y_i). Les points doivent-ils satisfaire certaines contraintes ?

Question 3 [2 pts]. Appliquer la méthode des trapèzes et celle de Simpson sur les points ci-dessous. Les formules doivent être claires et les valeurs numériques du tableau doivent y apparaître clairement mais on ne demande pas de développer/simplifier les expressions.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4
y_i	4	5	6	3	2	-1	-2

Question 4 [1 pt]. Supposons que ces points appartiennent au graphe d'une fonction $f(x)$. Que représentent les valeurs obtenues à la question précédente ? L'une est-elle plus précise ?

2 Problème (8 points)

Soit $n > 0$. On considère le polynôme

$$p(x) \quad = \quad a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\,. \tag{1}$$

Question 5 [1 pt]. Exprimer en fonction de n le nombre d'additions et de multiplications de flottants nécessaires pour évaluer p en x, en appliquant la formule (1) naïvement.

La formule (1) peut se réécrire de la façon suivante :

$$p(x) \quad = \quad (\cdots((a_n\, x + a_{n-1})\, x + a_{n-2})\, x + \cdots + a_1)\, x + a_0\,. \tag{2}$$

Plus rigoureusement, la formule (2), appelée schéma de Horner-Ruffini, peut se présenter sous la forme de la suite définie par récurrence et condition initiale ci-dessous :

$$p(x) = h_0(x)\,, \qquad h_n(x) = a_n\,, \qquad h_i(x) = h_{i+1}(x)\, x + a_i \quad (0 \leq i < n)\,. \tag{3}$$

Question 6 [1 pt]. Appliquer le schéma de Horner-Ruffini sur $p(x) = x^3 + 3\,x^2 - x + 5$ en $x = 2$. Donner n, les coefficients a_i et les nombres $h_i(x)$. Vérifier que le résultat vaut 23.

Question 7 [1 pt]. Exprimer en fonction de n le nombre d'additions et de multiplications de flottants nécessaires pour évaluer p en x, en appliquant le schéma de Horner-Ruffini. Conclusion ?

Question 8 [3 pts]. Écrire en FORTRAN une subroutine ou une fonction (au choix), paramétrée par un entier n, le tableau des coefficients a_i, un flottant x et qui retourne $p(x)$ évalué en utilisant le schéma de Horner-Ruffini. Notes :

— en déclarant `A(0:N)`, vous indiquez que le tableau `A` est indicé à partir de 0 ;

— en écrivant `DO I = A,B,-1`, vous indiquez au compilateur que l'entier `I` varie de `A` à `B`, par pas de -1.

Question 9 [2 pts]. On souhaite adapter la suite (3) pour calculer à la fois $p(x)$ et sa dérivée $p'(x)$. Pour cela, définissons $d_i(x) = h_i'(x)$ $(0 \leq i \leq n)$. Que vaut $d_n(x)$? Exprimer $d_i(x)$ en fonction de $d_{i+1}(x)$ et de $h_{i+1}(x)$. En déduire la suite recherchée.

3 Équations Différentielles (6 points)

On considère le problème de Cauchy

$$\dot{y} = 2\,x + y\,, \quad y(1) = 2\,,$$

sur l'intervalle $[x_0, x_{end}] = [1, 3]$.

Question 10 [1 pt]. Intégrer cette équation avec la méthode d'Euler en $N = 1$ pas.

Question 11 [1 pt]. Intégrer cette équation avec la méthode d'Euler en $N = 2$ pas.

Question 12 [2 pts]. Intégrer cette équation avec la méthode de Runge (formule du point du milieu) en $N = 1$ pas (certaines valeurs calculées dans les deux questions précédentes peuvent être réutilisées).

Question 13 [2 pts]. Lagrange s'est intéressé en 1774 à l'équation suivante. Avec les notations du cours, quelle serait la fonction f ?

$$x + y(x)\,y'(x) \quad = \quad y'(x)\,\sqrt{x^2 + y^2(x) - 1}\,.$$