Splines

<u>Idée</u> : on cherche 1 méthode pour obtenir 1 courbe à partir de points expérimentaux mais aussi proche que possible du tracé qu'on obtiendrait " à la main ".

<u>Donnée du pb</u>

$n+1$ pts $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Hyp : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ (abscisses = noeuds = knots)

splines interpolantes (en TP, on généralisera)
le graphe passe par des point

$$s(x) = \begin{cases} \text{si } x < x_1 & s_0(x) = \overbrace{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + a_{03}x^3}^{\text{polynôme de degré 3}} \\ \text{si } x_1 \leq x < x_2 & s_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ \text{si } x_{n-1} \leq x & s_{n-1}(x) = a_{n-1,0} + a_{n-1,1}x + a_{n-1,2}x^2 + a_{n-1,3}x^3 \end{cases}$$

fonction définie par morceaux
chaque morceau est défini par 1 pol. de degré 3 (graphe = cubique)

<u>Rq</u> Pour obtenir 1 spline à partir de $n+1$ pts expérimentaux, il faut calculer $4n$ coefficients

<u>Rq impt</u> " lisse " ⟨ sens mathématique / idée intuitive

Le graphe d'1 polynôme est 1 courbe C^∞

Mathématiquement, on ne peut pas faire plus lisse.

Donc à l'intérieur d'1 morceau, le graphe de la spline est C^∞

Par contre, au niveau des noeuds intérieurs, le graphe sera C^2

$$\underbrace{x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1}}_{\text{noeuds intérieurs}} \quad x_n \qquad \text{noeuds}$$

$s_0 \downarrow s_1$ ... $\downarrow s_{n-1}$

raccord C^2 ... raccord C^2

Du coup le graphe de la spline cubique est globalement C^2

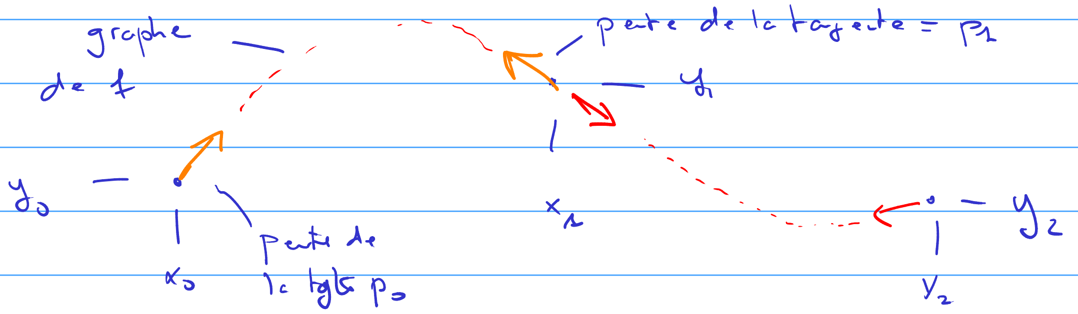
Pourquoi C^2 c'est bien ?

Visuellement, un raccord C^2 est "quasiment optimal"
C^1 tout seul peut donner 1 raccord "moche".
Souvent, pas utile d'avoir 1 raccord C^k pour $k > 2$

Note : ça peut avoir 1 importance dans certains algos numériques pour des pbs de vitesse de convergence

Comment ça peut se calculer ?

Idée 1 : obtenir 1 raccord C^1 entre deux cubiques c'est facile (mot clé : interpolation de Hermite)



Notons $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ($f(x)$ correspond à $g_0(x)$)

Donc $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

On écrit : $f(x_0) = y_0$ le graphe passe par $\binom{x_0}{y_0}$

$f(x_1) = y_1$ ——— $\binom{x_1}{y_1}$

$f'(x_0) = p_0$ le graphe a la bonne tangente en $\binom{x_0}{y_0}$

$f'(x_1) = p_1$ ——— en $\binom{x_1}{y_1}$

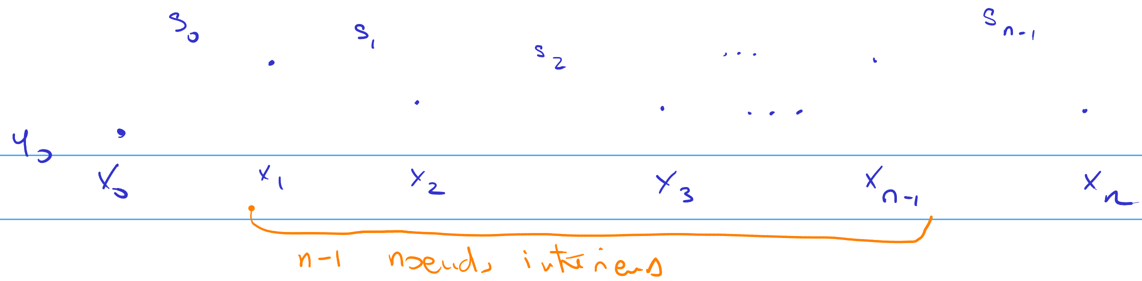
Ou encore

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ \quad\quad a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2 = p_0 \\ \quad\quad a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2 = p_1 \end{cases}$$

4 éq linéaires à 4 inconnues : la solution est unique

Rq On n'a traité qu'1 seule cubique.
On voit bien qu'on pourrait facilement
fabriquer 1 courbe globalement C^1
avec des cubiques pour chq morceau

Rq En fait on va s'y prendre de façon plus
intelligente : au lieu d'imposer les pentes $p_0, p_1, \dots$
on va seult demander que les pentes soient égales
mais sans imposer leur valeur



| des s_i a 4 coeffs inconnus. $4n$ inconnues
On cherche $4n$ équations

$s_i(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n-1 \quad n$ éq.
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1 \quad n$ éq

} le graphe doit être C^0

$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad n-1$ éq — C^1 sur les noeuds intérieurs

$s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad n-1$ éq — et C^2

On a $4n-2$ éq.

Pour avoir 1 sol-° unique, il manque 2 éq

- $s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0$ — spline naturelle
- on peut aussi demander que les dérivées 1° et 2° coïncident aux extrémités — spline périodique

$n+1$ pts $\hookrightarrow$ infinité de splines cubiques
une unique spline cubique naturelle
périodique

Pause gratuite de 5 minutes pour éviter le spleen

Rq On unique gros syst d'éq linéaires à résoudre
Il y a des façons d'écrire ce système
de telle sorte qu'il ait une structure agréable

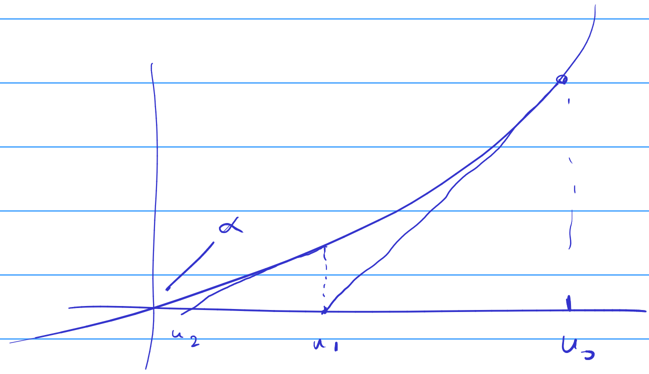
→ sujet de TP.

Astuce : $S_i(x) = \cancel{a_0 + a_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}$

on écrit plutôt $a_0 + a_1(x-x_i) + c_2(x-x_i)^2 + c_3(x-x_i)^3$
qq chose comme ça

1 variable

Newton



$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$ ← on a besoin de la dérivée